F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

TOMUL 18

1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU — membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție pe adresa: str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

F762

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

TOM. 18, Nr. 1
1966

STUDII ŞI CERCETĂRI
MATEMATICE

S U M A R

Pag.

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Un exemplu de curbă care umple un volum 3

C. FOIAŞ, Măsuri spectrale şi semispectrale 7

ION I. CRISTEA şi VICTORIA CRISTEA, O clasă de mişcări fluide bidimensionale generalizînd mişcarea rotaţională plană 57

M. BOTEZ, Asupra unei metode de estimaţie în statistica sistemelor aleatoare cu legături complete 75

ION MUNTEAN, Contribuţii la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte şi relee (II) 87

TIBERIU ROMAN, Grupurile de simetrii ale ornamentelor 4-dimensionale 133

N. N. TEODORESCU şi GH. N. RIZESCU, Extinderea unei teoreme din teoria suprafeţelor 157

N. MARCOV, Mişcarea unui fluid electroconductor situat în interiorul a doi cilindri coaxiali, sub influenţa unui cîmp magnetic transversal 161

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, P. 1–180, BUCUREŞTI, 1966

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

UN EXEMPLU DE CURBĂ CARE UMPLE UN VOLUM

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

Fie $f(x)$ o funcţie continuă, periodică, de perioadă 2 definită pe intervalul $[-1, +1]$, ca mai jos.

Cu ajutorul funcţiei $f(x)$ se construiesc funcţiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, date de (1). Seriile care definesc aceste funcţii sînt uniform convergente pe $[0,1]$. Curba Γ, care are reprezentarea parametrică (1), trece prin toate punctele cubului $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

În această Notă ne propunem să demonstrăm următoarea :

Teoremă. *Fie $f(x)$ o funcţie continuă, periodică, de perioadă 2, definită pe intervalul $[-1, +1]$ astfel*

$$f(x) = \begin{cases} +1, & -1 \leqslant x \leqslant -\frac{2}{3} \\ -3x-1, & -\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3} \\ 0, & -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant +\frac{1}{3} \\ 3x-1, & +\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant +\frac{2}{3} \\ +1, & +\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant +1 . \end{cases}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, P. 3–5, BUCUREŞTI, 1966

Curba definită pentru $0 \leqslant t \leqslant 1$, prin

$$x(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2^2} f(3^3 t) + \ldots + \frac{1}{2^n} f(3^{3n-3} t) + \ldots$$

$$(1) \qquad y(t) = \frac{1}{2} f(3t) + \frac{1}{2^2} f(3^4 t) + \ldots + \frac{1}{2^n} f(3^{3n-2} t) + \ldots$$

$$z(t) = \frac{1}{2} f(3^2 t) + \frac{1}{2^2} f(3^5 t) + \ldots + \frac{1}{2^n} f(3^{3n-1} t) + \ldots$$

trece prin toate punctele cubului

$$(K): \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

Demonstrație. Convergența uniformă a seriilor care reprezintă pe $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ este evidentă deoarece $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$, $t \in R$, prin urmare $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sînt continue pentru $t \in [0, 1]$.

Avem de asemenea

$$0 \leqslant x(t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y(t) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z(t) \leqslant 1$$

pentru $t \in [0, 1]$.

Fie (x_0, y_0, z_0) un punct oarecare al cubului K; într-o reprezentare în baza 2, numerele x_0, y_0, z_0 se scriu

$$x_0 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \ldots + \frac{a_{3n-3}}{2^n} + \ldots$$

$$y_0 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \ldots + \frac{a_{3n-2}}{2^n} + \ldots$$

$$z_0 = \frac{a_2}{2} + \frac{a_5}{2^2} + \ldots + \frac{a_{3n-1}}{2^n} + \ldots$$

cu $a_n = 0$ sau $a_n = 1$. Pentru

$$t_0 = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_1}{3^2} + \ldots + \frac{2a_{n-1}}{3^n} + \ldots$$

avem

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0.$$

Într-adevăr, avem pentru $n = 0, 1, \ldots$

$$3^n t_0 = 2p + \frac{2a_n}{3} + \frac{2a_{n+1}}{3^2} + \ldots$$

cu p întreg. Dacă $a_n = 0$, atunci

$$0 \leqslant \frac{2a_n}{3} + \frac{2a_{n+1}}{3^2} + \ldots \leqslant \frac{2}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{3}$$

deci

$$f(3^n t_0) = 0\,.$$

Dacă $a_n = 1$

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{2a_n}{3} + \frac{2\,a_{n+1}}{3^2} + \ldots \leqslant \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = 1$$

deci

$$f(3^n t_0) = 1$$

prin urmare în ambele cazuri $f(3^n t_0) = a_n$. Înlocuind acum pe t_0 în (1), se obține imediat

$$x(t_0) = \frac{a_0}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \ldots + \frac{a_{3n-3}}{2^n} + \ldots = x_0\,,$$

$$y(t_0) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_4}{2^2} + \ldots + \frac{a_{3n-2}}{2^n} + \ldots = y_0\,,$$

$$z(t_0) = \frac{a_2}{2} + \frac{a_5}{2^2} + \ldots + \frac{a_{3n-1}}{2^n} + \ldots = z_0\,.$$

Teorema este demonstrată.

Funcția $f(x)$ care intervine în reprezentarea parametrică a curbei este identică cu aceea folosită de I. J. Schoenberg [1] pentru a obține o curbă care trece prin toate punctele unui pătrat.

Primită la redacție la 14 octombrie 1964

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. M. NICOLESCU, N. DINCULEANU, S. MARCUS, *Manual de Analiză matematică*, vol. II, Editura didactică și pedagogică, 1964.

MĂSURI SPECTRALE ŞI SEMISPECTRALE

DE

C. FOIAŞ

În § 1 se dă teoria lui Gelfand a reprezentării algebrelor Banach. Demonstrarea teoremei de structură a C^*-algebrelor comutative (teoremele 5, 6) este probabil cea mai simplă din literatură.

În § 2 se dă reprezentarea spectrală a reprezentărilor de tip pozitiv a algebrelor Banach comutative auto-adjuncte şi cu involuţie continuă. Se studiază legătura acestor reprezentări cu măsurile spectrale şi semispectrale. Se dă teorema lui Naïmark [18] de dilatare spectrală a unei măsuri semispectrale.

În § 3 se dă ca aplicaţie a §§ 1 şi 2 descompunerea spectrală a operatorilor normali, hermitici şi unitari cît şi descompunerea semispectrală a oricărui operator prin intermediul uneia din măsurile sale armonice-spectrale [4], [5], utilizînd teoria spectrală a lui v. Neumann [20]. Teorema lui Fuglede [8] ca şi existenţa unei dilatări normale tari pentru orice mulţime spectrală a unui operator [5], [14], [24] şi teorema lui Sz.-Nagy [22], se găsesc de asemenea aici. Să remarcăm că teorema lui Fuglede este demonstrată prin arătarea că $E(\omega)H$ este, pentru orice ω închisă, un spaţiu maximal spectral pentru $N = \int \lambda E(d\lambda)$ [7].

INTRODUCERE

Foile de faţă constituie expunerile ţinute de autor în toamna anului 1960 la seminarul condus de acad. M. Nicolescu în cadrul Institutului de matematică al Academiei Republicii Socialiste România. Ele conţin o prezentare concisă a fundamentelor teoriei spectrale în spaţii Hilbert axată pe teoria reprezentării gelfandiene a algebrelor Banach cît şi a reprezentărilor hilbertiene de tip pozitiv ale acestor algebre.

În § 1 se dau noţiunile şi rezultatele de bază ale teoriei lui Gelfand [9] a reprezentării algebrelor Banach. Toate teoremele din acest paragraf pot fi găsite în diferite tratate sau monografii (vezi Rickart [21], Naimark [19], Loomis [15] etc.). Cu toate acestea, teorema 7, şi în special teorema 8 care constituie teorema de structură a C^*-algebrelor, au probabil cele mai simple demonstraţii din cele existente pînă în prezent în literatură. Dintre cunoştinţele cerute cititorilor acestui paragraf sînt : Noţiuni elementare

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, P. 7–56, BUCUREŞTI, 1966

de spaţii Banach şi algebre Banach, teorema lui Mazur pentru corpurile Banach (care pot fi citite şi în [6], p. 1—14) cît şi noţiuni elementare de topologie generală (pentru care se poate consulta [15], ch. I).

În § 2 se studiază reprezentările $x \to T_x$ ale algebrelor autoadjuncte comutative cu involuţie continuă în algebra operatorilor unui spaţiu Hilbert care sînt de tip pozitiv (adică $T_{x^*x} \geqslant 0$). Teoremele 3 şi 5 cît şi corolarul 1 al acestei teoreme 5 dau reprezentarea spectrală a acestor reprezentări prin familii semispectrale sau spectrale (după cum $x \to T_x$ nu este sau este multiplicativă) iar teorema 6 stabileşte echivalenţa între această reprezentare şi cea cu caracter mai clasic

$$(*) \qquad T_x = \int_Z \hat{x}(\zeta)\, \mathrm{d}E\,(\zeta)$$

cu ajutorul unei măsuri semispectrale sau spectrale. Echivalenţa aceasta pentru cazul spectral este cunoscut demult [11]. Familiile semispectrale au fost definite în [13], iar măsurile semispectrale în [17]. Echivalenţa lor deşi simplă este explicit expusă aici pentru prima oară. Teoremele 3 şi 6 care caracterizează reprezentările $x \to T_x$ reprezentabile prin (*) cu măsuri semispectrale este nouă în această formă generală (pentru cazuri particulare (vezi [17], [6], [7]). La punctul 4 se extinde aplicaţia $x \to T_x$ şi se studiază această extindere pe baza noţiunii de familie cumsecade de măsuri. Această noţiune introdusă şi studiată elementar la punctul 3 s-a dovedit deosebit de utilă în lecţiile ulterioare ale seminarului, care vor face obiectul unei alte culegeri de expuneri. Pentru citirea acestui paragraf este necesară cunoaşterea teoriei elementare a integralei după Bourbaki [1]. Punctul 6 al acestui paragraf conţine teorema lui Naimark [18] de dilatare a unei măsuri semispectrale la una spectrală (teorema 9) cît şi unicitatea dilatării minimale (teorema 8) care de fapt constituie o particularizare la cazul măsurilor a unei teoreme generale a lui Sz-Nagy [23].

Ultimul paragraf conţine aplicaţiile paragrafelor 1—2 la teoria spectrală a unui operator în spaţiu Hilbert. Astfel descompunerea spectrală a operatorilor normali, hermitici şi unitari se obţine ca o aplicaţie a reprezentării (*), demonstraţie destul de frecventă în monografiile publicate din 1950 încoace (vezi de exemplu [15], [13], [19] etc.). Teorema de comutativitate a lui Fuglede [8] se obţine ca un corolar (la teorema 5). Demonstraţia dată aici este bazată pe noţiunea de spaţiu maximal spectral [7]. Această noţiune a fost distilată din cercetările lui Dunford [2], [3] dar şi dintr-o demonstraţie ingenioasă a teoremei lui Fuglede datorită lui Halmos [12].

La punctul 4 al acestui ultim paragraf se arată că reprezentarea (*) aplicată unui operator T oarecare şi unei mulţimi spectrale S a lui T, neseparînd planul, dă o descompunere semispectrală

$$T = \int_{\partial S} \lambda \mathrm{d}\omega(T\,;\, \lambda, S),$$

unde $\{\omega\,(T\,;\, \sigma, S)\}$ este corespondentul operatorial al măsurii armonice din teoria funcţiilor de variabilă complexă. Măsura aceasta (armonică-spectrală) a fost obţinută pentru prima oară în [4] într-un caz mai particular, iar în cazul general tratat aici în [5]. Teorema 5 cît şi corolarul 1 al acesteia se află de asemenea în [5]. În cazul particular considerat în [4], corolarul 1 a fost obţinut deja pe altă cale în [24]. Corolarul 1 a mai fost regăsit în 1963 de Lebow [14]. Noţiunea de mulţime spectrală a fost introdusă în [20] de v. Neumann. Teorema 6 este teorema de bază în [20]. Demonstraţia dată în text este chiar demonstraţia iniţială a lui v. Neumann. Rezultatul dat în observaţia 2°, punctul 6, aparţine lui B. Sz. Nagy [22]. Demonstraţia iniţială a acestuia dată în 1953 conţine implicit construcţia unei măsuri armonice- spectrale în cazul cînd $S = \{\lambda : /\lambda/ = 1\}$.

Problema nerezolvată cea mai interesantă în acest cerc de idei este cea a construcţiei unei măsuri armonice spectrale pentru mulţimi spectrale multiplu conexe. Nu se ştie nimic netrivial privind mulţimile spectrale multiplu conexe.

§ 1. REPREZENTAREA GELFANDIANĂ A ALGEBRELOR BANACH

1. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă cu element unitate e. Vom nota cu $\mathcal{A}^*$ dualul algebrei $\mathcal{A}$ considerată doar spaţiu Banach. Fie $\chi \neq 0$ un homomorfism algebric al lui A în corpul numerelor complexe C. Atunci pentru orice $a \in \mathcal{A}$ avem

$$\chi(a) \in \sigma(a) = \textit{spectrul lui } a. \tag{1.1}$$

Într-adevăr, avem $\chi(e) = 1$ (căci în caz contrar din $\chi(e) = \chi(e^2) = \chi(e)^2$ ar rezulta $\chi(e) = 0$, deci $\chi(x) = \chi(ex) = \chi(e)\chi(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathcal{A}$, adică $\chi = 0$) şi pe de altă parte dacă $\chi(a) \notin \sigma(a)$ ar exista un $b \in \mathcal{A}$ astfel ca

$$(\chi(a)e - a)b = e;$$

deducem

$$\chi(e) = \chi(\chi(a)e - a)\ \chi(b) = (\chi(a) - \chi(a))\chi(b) = 0$$

în contradicţie cu $\chi(e) = 1$, cta.

Din (1.1) rezultă nemijlocit că $\chi \in \mathcal{A}^*$ şi că

$$\|\chi\| = 1. \tag{1.2}$$

Într-adevăr, din (1.1) deducem

$$|\chi(a)| \leqslant \sup\ \{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(a)\} = \lim\ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|a\|,$$

deci $\|\chi\| \leqslant 1$ şi cum $\chi(e) = 1 = \|e\|$ avem şi $\|\chi\| \geqslant 1$.

TEOREMA 1. *Fiecărui ideal maximal al lui* $\mathcal{A}$ *îi corespunde un homomorfism algebric* $\neq 0$ *al lui* $\mathcal{A}$ *în* C *şi invers, oricărui astfel de homomorfism al lui* $\mathcal{A}$ *îi corespunde un ideal maximal al lui* $\mathcal{A}$.

Demonstraţie. Fie $M = \chi^{-1}(0) = \{a;\ \chi(a) = 0\}$, unde $0 \neq \chi$ este un homomorfism al lui $\mathcal{A}$ în C. Evident, M este un ideal (propriu) al lui $\mathcal{A}$.

Dacă $M \subseteq N \subseteq \mathcal{A}$ și N este un ideal, atunci $\chi(N) \subseteq C$ ar fi un ideal, deci, C fiind corp, $\chi(N) = \{0\}$ sau C. În primul caz avem $M = N$. În al doilea caz există $n \in N$ astfel ca $\chi(n) = 1$. Deci $\chi(n - e) = 0$ așa că $n - e = m \in M \subseteq N$, de unde $e = n - m \in N$ și prin urmare $N = \mathcal{A}$. Așadar, M este maximal. Invers, fie M un ideal maximal al lui $\mathcal{A}$. Atunci $M = \overline{M}$ (adică M este închis); într-adevăr, $\overline{M}$ este un ideal și în același timp cum $x_0 \notin M$ dacă $\|x_0 - e\| < 1$ (căci pentru un astfel de x_0, $x_0^{-1} = (e - (e - x_0))^{-1}$ există și deci din $x_0 \in M$ ar rezulta $e = x_0^{-1} x_0 \in M$, de unde $M = \mathcal{A}$), avem și $x_0 \notin \overline{M}$, ceea ce arată că $\overline{M} \neq \mathcal{A}$; deci $M = \overline{M}$. În acest caz însă algebra cît $\mathcal{A}/M$ normată cu

$$\|\dot{a}\| = \inf_{a \in \dot{a}} \|a\|$$

este o algebră Banach. $\mathcal{A}/M$ este o algebră comutativă simplă (adică fără ideale diferite de $\{0\}$ și $\mathcal{A}/M$, căci altminteri am avea un ideal N verificînd $M \subsetneqq N \subsetneqq \mathcal{A}$), deci un corp. Pe baza teoremei de structură a corpurilor Banach, $\mathcal{A}/M = C\dot{e}$. Fie $\dot{a} = \lambda_{\dot{a}} \dot{e}$. Să punem $\chi_M(a) = \lambda_{\dot{a}}$. Atunci χ_M este un homomorfism algebric al lui $\mathcal{A}$ în C diferit de 0 astfel ca $M = \chi_M^{-1}(0)$, cta.

Să considerăm *mulțimea Z a tuturor homomorfismelor algebrice $\neq 0$ ale lui $\mathcal{A}$ în C* ca o submulțime a sferei unitate $\mathcal{A}_1^*$ din $\mathcal{A}^*$ topologizată prin topologia slabă de dual a lui $\mathcal{A}^*$. Să amintim că această topologie este definită cu ajutorul sistemelor de vecinătăți de forma

$$V_{\varepsilon, x_1 \ldots x_n}(a_0^*) = \{a^* ; |a^*(x_i) - a_0^*(x_i)| < \varepsilon, \text{ unde } x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}_n, \varepsilon > 0\}$$

și că pe baza teoremei lui Tihonov se deduce că $\mathcal{A}_1^*$ este compactă față de această topologie. Să arătăm că Z este închisă.

Fie $a^* \in \mathcal{A}_0^*$ un punct aderent lui Z și fie $\chi \in V_{\varepsilon, a, b, ab}(a^*)$, $\chi \in Z$. Atunci

$$\begin{aligned} |a^*(ab) - a^*(a)a^*(b)| &\leqslant |a^*(ab) - \chi(ab)| + |\chi(ab) - \chi(a)\chi(b)| + \\ &+ |\chi(a)\chi(b) - a^*(a)a^*(b)| \leqslant \varepsilon + |\chi(a)\chi(b) - a^*(a)a^*(b)| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon\|a\| + \varepsilon\|b\|, \end{aligned}$$

adică

$$|a^*(ab) - a^*(a)a^*(b)| \leqslant \varepsilon(1 + \|a\| + \|b\|)$$

și cum $\varepsilon > 0$ este la dispoziția noastră $a^*(ab) = a^*(a)a^*(b)$. Fie $\chi \in V_{\frac{1}{2}, \varepsilon}(a^*)$. Atunci

$$|a^*(e)| \geqslant |\chi(e)| - |\chi(e) - a^*(e)| \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

așa că a^* este un homomorfism algebric $\neq 0$ al lui $\mathcal{A}$ în C, cta.

Ținînd seama de faptul că $\mathcal{A}_1^*$ este slab compactă, rezultă că *Z față de topologia slabă a lui A^* este compactă. Prin definiție Z este spectrul algebrei $\mathcal{A}$.* Pe baza teoremei 1 este indiferent dacă elementele lui Z sînt considerate homomorfismele algebrice $\neq 0$ ale lui $\mathcal{A}$ în C sau idealele maximale ale lui $\mathcal{A}$.

Fiecărui $a \in \mathcal{A}$ îi corespunde o funcţie $\hat{a} = \hat{a}(\chi)$ definită pe Z prin formula

$$\hat{a}(\chi) = \chi(a). \tag{1.3}$$

Funcţiile $\hat{a}(\chi)$ *sînt continue pe* Z. Într-adevăr, dacă $\chi_0 \in Z$ este fixat şi $\varepsilon > 0$ dat, atunci pentru orice $\chi \in V_{\varepsilon, a}\ (\chi)$ avem

$$|\hat{a}(\chi) - \hat{a}(\chi_0)| = |\chi(a) - \chi_0(a)| < \varepsilon.$$

În acest mod am obţinut o aplicaţie $a \to \hat{a}$ algebrică a lui A în spaţiul $C(Z)$ al funcţiilor continue pe Z. Această aplicaţie este continuă dacă $C(Z)$ este normat cu

$$\|\cdot\| = \sup_{\chi \in Z} |\cdot(\chi)|,$$

căci

$$\|\hat{a}\| = \sup_{\chi} |\hat{a}(\chi)| = \sup_{\chi} |\chi(a)| \leqslant \|a\|.$$

În acest mod am obţinut următoarea:

TEOREMA 2. *Spaţiul homomorfismelor algebrice* $\neq 0$ *ale lui* $\mathcal{A}$ *în* C, *care se află în* $\mathcal{A}^*$, *înzestrat cu topologia slabă de dual a lui* $\mathcal{A}^*$ *este compact iar aplicaţia* $a \to \hat{a}$ *dată de* (*1.3*) *este o aplicaţie algebrică continuă a lui* $\mathcal{A}$ *în* $C(Z)$, *algebra funcţiilor complexe continue pe* Z.

Observaţii. 1°. Topologia lui Z este dată de sistemele de vecinătăţi

$$V_{\varepsilon, a_1, \ldots, a_n}(\chi_0) = \{\chi\,;\, |\hat{a}_i\,(\chi) - \hat{a}_i\,(\chi_0)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Este evident că această topologie este cea mai slabă topologie definită pe Z pentru care toate funcţiile $\hat{a}$, $a \in \mathcal{A}$, sînt continue.

2°. Să notăm

$$\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{a}\,;\ a \in \mathcal{A}\}. \tag{1.4}$$

Atunci $\hat{\mathcal{A}}$ separă pe Z, adică din $\hat{a}(\chi_1) = \hat{a}(\chi_2)$ pentru orice $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$ rezultă (evident) $\chi_1 = \chi_2$.

3°. Idealele maximale ale algebrei $\hat{\mathcal{A}}$ (care nu este în mod necesar o algebră Banach) sînt de forma

$$\{\hat{a}\ ;\ \hat{a}(\chi) = 0\}. \tag{1.5}$$

Faptul că mulţimile de forma (1.5) sînt ideale maximale ale lui $\hat{\mathcal{A}}$ este imediat întrucît

$$\hat{\mathcal{A}}/\{\hat{a}\ ; \hat{a}(\chi_0) = 0\} \cong C.$$

Invers, fie $\hat{M} \subset \hat{\mathcal{A}}$ un ideal maximal al lui $\hat{\mathcal{A}}$. Fie $M = \{a;\ \hat{a} \in \hat{M}\}$. M este evident un ideal al lui $\mathcal{A}$, diferit de $\mathcal{A}$. Fie N, verificînd $M \subseteq N \subseteq \mathcal{A}$, un ideal al lui $\mathcal{A}$ şi fie $\hat{N} = \{\hat{a},\ a \in N\}$. $\hat{N}$ este un ideal al lui $\hat{\mathcal{A}}$, deci $\hat{N} = \hat{M}$ sau $\hat{N} = \hat{\mathcal{A}}$. Primul caz dă $N \subseteq M$ deci $N = M$; în al doilea caz, avem un $n \in N$ astfel ca $\hat{n} \equiv 1\ (\equiv \hat{e})$ de unde punînd $p = n - e$, avem $\hat{p} \equiv \hat{0} \in \hat{M}$ deci $p \in M$. Prin urmare $e = n - p \in N$ de unde $N = \mathcal{A}$. În acest mod pe baza teoremei 1 avem

$$M = \{a;\ \chi_M(a) = 0\},$$

cu $\chi_M \in Z$. Prin urmare

$$\{a : \hat{a} \in \hat{M}\} = \{a;\ \hat{a}(\chi_M) = 0\}$$

deci

$$\hat{M} = \{\hat{a},\ \hat{a}(\chi_M) = 0\},\ \text{cta.}$$

TEOREMA 3. *Pentru orice* $a \in \mathcal{A}$ *avem*

$$\sigma(a) = \{\hat{a}(\chi);\ \chi \in Z\}.$$

Incluziunea $\supseteq$ rezultă din (1.1). Incluziunea inversă din următoarea:

LEMĂ. *Fie* $\lambda \in \sigma(a)$. *Atunci există un ideal maximal* M *al lui* $\mathcal{A}$ *astfel ca* $\lambda e - a \in M$.

Fie $I = \{x(\lambda e - a);\ x \in \mathcal{A}\}$; I este un ideal al lui $\mathcal{A}$. El este propriu căci $(\lambda e - a)^{-1}$ nu există. Utilizînd lema lui Zorn se obţine un ideal maximal $M \supseteq I$, cta.

Să reluăm demonstraţia teoremei 3. Avem $\chi_M(a) = \lambda$, căci

$\chi_M(\lambda e - a) = 0$. Prin urmare $\lambda \in \{\hat{a}(\chi) : \chi \in Z\}$, cta.

COROLAR. *Pentru orice* $a \in \mathcal{A}$ *avem*

$$\|\hat{a}\| = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Observaţii. 4°. Condiţia ca $a \to \hat{a}$ să fie biunivocă revine pe baza corolarului anterior la aceea că

$$\lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \ \textit{să implice}\ a = 0. \tag{1.6}$$

5°. Elementele $a \in \mathcal{A}$ pentru care $\hat{a} = 0$ se caracterizează prin aceea că $\chi(a) = 0$ pentru orice $\chi \in Z$. Pe baza teoremei 1 aceasta revine la faptul că

$$a \in \bigcap_{M \subseteq \mathcal{A},\ M \text{ ideal maximal}} M$$

Intersecţia aceasta a tuturor idealelor maximale ale algebrei $\mathcal{A}$ se numeşte radicalul algebrei $\mathcal{A}$. Îl vom nota cu $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathcal{A})$; $\mathcal{A}$ se numeşte semisimplă dacă $\mathfrak{R}(\mathcal{A}) = (0)$. Prin urmare *aplicaţia* $a \to \hat{a}$ *este biunivocă (sau altfel spus* $\mathcal{A}$ *şi* $\hat{\mathcal{A}}$ *sînt algebric izomorfe) dacă şi numai dacă* $\mathcal{A}$ *este semisimplă*. O condiţie necesară şi suficientă pentru aceasta este dată de (1.6).

6°. Avem de asemenea că $a \in R$ dacă şi numai dacă $\lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.

7°. Aplicaţia $a \to \hat{a}$ *este bicontinuă (adică* $\mathcal{A}$ *şi* $\hat{\mathcal{A}}$ *sînt izomorfe atît algebric cît şi topologic) dacă şi numai dacă* $\|a\|^2 \leqslant K\|a^2\|$ *pentru orice* $a \in \mathcal{A}$, *unde* $K < \infty$ *este o constantă ce depinde doar de* $\mathcal{A}$ *şi nu de* $a \in \mathcal{A}$.

Într-adevăr, dacă $\|a\| \leqslant L\|\hat{a}\|$ (cu $L < \infty$ fixat) pentru orice $a \in \mathcal{A}$, atunci

$$\|a\|^2 \leqslant L^2\|\hat{a}^2\| \leqslant L^2\|a^2\|.$$

Invers

$$\|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} K^{\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}} \geqslant \|a\|$$

de unde

$$K\|\hat{a}\| = K \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \geqslant \|a\|, \text{ cta.}$$

2. Fie $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ două algebre Banach comutative şi cu element unitate $e_{\mathcal{A}}$, $e_{\mathcal{B}}$. *Fie* T *o aplicaţie algebrică a lui* $\mathcal{A}$ *în* $\mathcal{B}$ *verificînd* $\overline{T\mathcal{A}} = \mathcal{B}$. Adjunctul T^* al operatorului T se defineşte în modul următor : $T^*b^*(x) = b^*(Tx)$ pentru orice $x \in \mathcal{A}$. T^* este definit doar pentru acei $b^* \in \mathcal{B}^*$ pentru care definiţia anterioară are sens. Domeniul lui T îl notăm cu $\mathfrak{D}_{T^*}$

Teorema 4. $Z_{\mathcal{B}} \subseteq \mathfrak{D}_{T^*}$ *şi restricţia* $T^*|Z_{\mathcal{B}}$ *a lui* T^* *la* $Z_{\mathcal{B}}$ *este o aplicaţie continuă a lui* $Z_{\mathcal{B}}$ *în* $Z_{\mathcal{A}}$.

Demonstraţie. Fie $\psi \in Z_{\mathcal{B}}$; atunci $a \to \psi(Ta)$ este un homomorfism algebric φ al lui $\mathcal{A}$ în C. Acest homomorfism φ este $\neq 0$, căci în caz contrar $\psi = 0$ (în virtutea condiţiei $\overline{T\mathcal{A}} = \mathcal{B}$). Prin urmare $\varphi \in Z_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^*$ şi $\varphi(a) = \psi(Ta)$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$. Aceasta ne arată că $\psi \in \mathfrak{D}_{T^*}$ şi că $T^*\psi = \varphi$. Fie acum $V_{\varepsilon, a_1, \dots, a_n}(\varphi_0)$, unde $\varphi_0 = T^*\psi_0$ o vecinătate fixată (unde $\varepsilon > 0$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$). Fie $b_1 = Ta_1$, $b_2 = Ta_2$, $\dots$, $b_n = Ta_n$ şi fie $\psi \in V_{\varepsilon, b_1, \dots, b_n}(\psi_0)$; atunci

$$|T^*\psi(a_i) - T^*\psi_0(a_i)| = |\psi(b_i) - \psi_0(b_i)| < \varepsilon, \; i = 1, 2, \dots, n,$$

aşa că $T^*\psi \in V_{\varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_n}(\psi_0)$, ceea ce ne arată că $\varphi \to T^*\psi$ este continuă de la $Z_{\mathcal{B}}$ în $Z_{\mathcal{A}}$, cta.

Corolar. *Dacă* $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ *sînt algebric izomorfe, atunci* $Z_{\mathcal{A}}$ *şi* $Z_{\mathcal{B}}$ *sînt homeomorfe.*

Observaţii. 1°. *Dacă $\mathcal{B}$ este semisimplă, atunci T este continuă* (în ipotezele teoremei 4).

Pe baza teoremei lui Banach a ,,grafului închis'' cum T este definită pe întreg $\mathcal{A}$ este suficient să verificăm că T este o aplicaţie închisă, adică $a_n \to a$, $Ta_n \to b$ implică $Ta = b$. Or

$$(\widehat{Ta})(\psi) = \psi(Ta) = (T^*\psi)(a) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(T^*\psi)(a_n) = \lim_{n\to\infty}\psi(Ta_n) = \psi(b) =$$
$$= b(\psi)$$

pentru orice $\psi \in Z_{\mathcal{B}}$, adică $\widehat{Ta} = \hat{b}$ şi cum $\mathcal{B}$ este semisimplă avem şi $Ta = b$, cta.

2°. *Orice izomorfism algebric a două algebre Banach $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ (comutative, cu element unitate) semisimple este şi topologic.* Consecinţă directă a observaţiei anterioare.

3. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă cu element unitate e. $\mathcal{A}$ este *involutivă* dacă în $\mathcal{A}$ există o operaţie $x \to x^*$ numită *involuţie*, care satisface următoarele relaţii :

$$x^{**} = x,\ (x + y)^* = x^* + y^*,\ (\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*,\ (xy)^* = y^* x^* .$$

Algebra $\mathcal{A}$ se numeşte *autoadjunctă* dacă este involutivă şi $\hat{x}^* = \overline{\hat{x}}$, unde bara indică funcţia conjugată. Cum

$$x = \frac{x + x^*}{2} + i\,\frac{x - x^*}{2i} = x_1 + i x_2 ,$$

unde x_1, x_2 sînt hermitice ($x \in \mathcal{A}$ este hermitic dacă $x = x^*$) pentru ca $\mathcal{A}$ *să fie autoadjunctă este necesar şi suficient ca pentru orice element hermitic $h \in \mathcal{A}$, funcţia $\hat{h}$ să fie reală.* O altă condiţie necesară şi suficientă este dată de

TEOREMA 5. *$\mathcal{A}$ este autoadjunctă dacă şi numai dacă $(e + x^* x)^{-1}$ există pentru orice $x \in \mathcal{A}$.*

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{A}$ este autoadjunctă, atunci

$$\widehat{(e + x^* x)} = 1 + \hat{x}^* \hat{x} = 1 + |\hat{x}|^2 \geqslant 1$$

deci pe baza teoremei 3, $0 \notin \sigma(e + x^* x)$, aşa că $(e + x^* x)^{-1}$ există.

Invers, dacă $\mathcal{A}$ n-ar fi autoadjunctă, ar exista un $h \in \mathcal{A}$ hermitic astfel ca $\hat{h}(\chi_0) = \alpha + i\beta$ pentru un anume $\chi_0 \in Z$ şi $\alpha, \beta \neq 0$ reali. Fie $x = (1/\beta)(h - \alpha e)$. Atunci

$$\widehat{(e + x^* x)}(\chi_0) = \widehat{(e + x^2)}(\chi_0) = 1 + (\hat{x}(\chi_0))^2 = 0$$

deci $0 \in \sigma(e + x^* x)$ aşa că $(e + x^* x)^{-1}$ nu poate exista, cta.

Observaţii. 1°. Aplicaţia

$$a \to \overline{\chi(a^*)}$$

este un homomorfism algebric $\neq 0$ al lui $\mathcal{A}$ în C pentru orice $\chi \in Z_{\mathcal{A}}$. În acest mod ea defineşte o aplicaţie $\chi \to \chi^*$ a lui $Z_{\mathcal{A}}$ în $Z_{\mathcal{A}}$ pe baza formulei

$$\chi^*(a) = \overline{\chi(a^*)}$$

sau echivalent

$$\hat{a}(\chi^*) = \overline{\hat{a}(\chi)}\,.$$

Faptul că $\mathcal{A}$ este autoadjunctă, este echivalent cu faptul că aplicaţia $\chi \to \chi^*$ este identică ($\chi = \chi^*$).

2°. Repetînd argumentele din demonstraţia teoremei 4 (întrucît $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ pe baza proprietăţii $a = a^{**} = (a^*)^*$), deducem *că* $\chi \to \chi^*$ *este un homeomorfism al lui* $Z_{\mathcal{A}}$ *(verificînd* $\chi^{**} = \chi$*)*.

3°. Repetînd argumentul din observaţia 1° punctul 2, obţinem că dacă $\mathcal{A}$ *este semisimplă, involuţia* $x \to x^*$ *este continuă.*

TEOREMA 6. *Dacă* $\mathcal{A}$ *este autoadjunctă, atunci* $\hat{\mathcal{A}}$ *este densă în* $C(Z)$.

Demonstraţie. Vom folosi teorema Weierstrass-Stone care afirmă că dacă în spaţiul $C_R(Z)$ al funcţiilor continue reale avem o subalgebră $\mathfrak{A} \subseteq C_R(Z)$ care separă punctele lui Z şi conţine pe 1, atunci $\bar{\mathfrak{A}} = C_R(Z)$. Fie $\hat{\mathcal{A}}_R = \hat{\mathcal{A}}$ mulţimea funcţiilor reale din $\hat{\mathcal{A}}$. Evident, $1 = \hat{e} \in \hat{\mathcal{A}}_R$. Dacă $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ pentru orice $f \in \hat{\mathcal{A}}_R$, rezultă că $\hat{h}(\chi_1) = \hat{h}(\chi_2)$ pentru orice $h \in \mathcal{A}$ hermitic deci

$$\chi_1(x) = \chi_1\left(\frac{x + x^*}{2} + i\,\frac{x - x^*}{2i}\right) = \chi_1(x_1 + ix_2) = \hat{x}_1(\chi_1) + i\hat{x}_2(\chi_1) =$$

$$= \hat{x}(\chi_2) + i\hat{x}_2(\chi_2) = \chi_2(x_1 + ix_2) = \chi_2(x)\,,$$

pentru orice $x \in \mathcal{A}$, adică $\chi_1 = \chi_2$. În acest mod $\hat{\mathcal{A}}_R$ separă pe Z, deci $\bar{\mathcal{A}}_R = C_R(Z)$. Trecerea la funcţii complexe este acum imediată, cta.

TEOREMA 7. *Următoarele două condiţii*

(1.7) $$\|a\|^2 \leqslant K\|a^* a\|$$

(1.8) $$\|a^*\|\,\|a\| \leqslant L\|a^* a\|\,,$$

(unde $a \in \mathcal{A}$ *este arbitrar, iar* K *şi* L *fixaţi* $< \infty$*) sînt echivalente. Ele atrag bicontinuitatea aplicaţiilor* $a \to \hat{a}$ *şi* $a \to a^*$.

Demonstraţie. Condiţiile coincid pentru x hermitic şi în acest caz coincid de asemenea cu condiţia din observaţia 7°, punctul 1.

Avem deci

$$\|x\| \leqslant M\|\hat{x}\|$$

oricare ar fi $x = x^* \in \mathcal{A}$, unde $M = K$ sau L după cum este cazul. Prin urmare considerînd că (1.7) are loc, obţinem pentru orice $x \in \mathcal{A}$

$$\|x\|^2 \leqslant K\|x^* x\| \leqslant K^2\|\widehat{x^* x}\| \leqslant K^2\|\widehat{x^*}\|\,\|x\|\,.$$

Dar

$$\|\hat{x}^*\| = \sup_{\chi\in Z} |\hat{x}^*(\chi)| = \sup_{\chi\in Z} |\overline{\hat{x}(\chi^*)}| = \sup_{\chi^*\in Z} |\hat{x}(\chi^*)| = \|\hat{x}\|,$$

așa că

$$\|x\|^2 \leqslant \begin{cases} K\|\hat{x}^*\|^2 \leqslant K\|x^*\|^2 \\ K\|\hat{x}\|^2. \end{cases}$$

În acest mod (1.7) *implică*

(1.9) $$\|x\| \leqslant K\|\hat{x}\|, \quad \|x\| \leqslant K\|x^*\|$$

(și deci și $\|x^*\| \leqslant K\|x\|$) *pentru orice* $x\in\mathcal{A}$. Rezultă

$$\|x^*\|\,\|x\| \leqslant K\|x\|^2 \leqslant K^2\|x^*x\|.$$

Invers, să presupunem că (1.8) are loc. Atunci pentru un $x\in\mathcal{A}$ arbitrar avem

$$\|x^*\|\,\|x\| \leqslant L\|x^*x\| \leqslant L^2\|\widehat{x^*x}\| \leqslant L^2\|\hat{x}^*\|\,\|\hat{x}\| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} L^2\|x^*\|\,\|\hat{x}\| \\ L^2\|\hat{x}\|^2 \leqslant L^2\|x\|^2; \end{cases}$$

și vedem deci că (1.8) *implică*

(1.10) $$\|x\| \leqslant L^2\|\hat{x}\|, \quad \|x^*\| \leqslant L^2\|x\|$$

pentru orice $x\in\mathcal{A}$. Rezultă

$$\|x\|^2 \leqslant L^2\|x^*\|\,\|x\| \leqslant L^3\|x^*x\|, \text{ cta.}$$

TEOREMA 8. *Dacă* $\mathcal{A}$ *satisface una din condițiile* (1.7), (1.8), *atunci* $\mathcal{A}$ *este izomorfă algebric și topologic cu* $C(Z)$.

Demonstrație. Pe baza demonstrației teoremei anterioare (vezi (1.9) sau (1.10)) aplicația $a \to \hat{a}$ este bicontinuă. Prin urmare $\hat{\mathcal{A}}$ este închisă în $C(Z)$. Pentru a deduce $\hat{\mathcal{A}} = C(Z)$, va fi suficient să arătăm că $\mathcal{A}$ este autoadjunctă, căci atunci, pe baza teoremei 6,

$$\overline{\mathcal{A}} = C(Z).$$

În acest scop fie $x\in\mathcal{A}$ hermitic. Fie $t > \|x\|$ și fie

$$u = (ite + x)(ite - x)^{-1};$$

cum $it \notin \sigma(x) \subset \{\lambda;\ |\lambda| \leqslant \|x\|\}$, u este corect definit. Se verifică ușor că $uu^* = u^*u = e$. Prin urmare (putem presupune, în virtutea teoremei 7, că (1.7) are loc)

$$\|u^n\|^2 \leqslant K\|u^{n*}u^n\| = K\|e\| = K, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

de unde

$$\sigma(u) = \{\lambda ;\ |\lambda| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}}\} \subset \{\lambda ;\ |\lambda| \leqslant \lim_{n\to\infty} K^{\frac{1}{2n}}\} = \{\lambda ;\ |\lambda| \leqslant 1\},$$

şi analog

$$\sigma(u^*) \subset \{\lambda ;\ |\lambda| \leqslant 1\}.$$

Dar $u^* = u^{-1}$ aşa că din relaţia anterioară deducem

$$\sigma(u) = \left\{\lambda ;\ \frac{1}{\lambda} \in \sigma(u^*)\right\} \subset \{\lambda ;\ |\lambda| \geqslant 1\}.$$

Aceasta ne arată că $\sigma(u) = \{\lambda ;\ |\lambda| = 1\}$, deci că $|\hat{u}(\chi)| \equiv 1$. Dar

$$\hat{u}(\chi) = (it + \hat{x}(\chi))(it - \hat{x}(\chi))^{-1},$$

de unde rezultă (căci $\lambda \to (it + \lambda)(it - \lambda)^{-1}$ transformă axa reală în cercul unitate), că $\hat{x}(\chi)$ este real, cta.

Observaţii. 4°. Relaţiile (1.9) şi (1.10) arată că dacă una din inegalităţile (1.7), (1.8) are loc cu $K = 1$, respectiv $L = 1$, atunci $\|a\| = \|\hat{a}\|$ pentru orice $a \in \mathcal{A}$. În acest mod obţinem că *dacă $\mathcal{A}$ verifică una din relaţiile* (1.7) *sau* (1.8) *cu K, respectiv $L = 1$, atunci $\mathcal{A}$ este izomorfă* (*algebric*) *şi izometrică cu $C(Z)$*.

5°. Fie S un spaţiu compact şi fie $\mathcal{A} = C(S)$. Este evident că avem $\|x\|^2 = \|x^* x\|$, deci că $\mathcal{A}$ este izomorfă şi izometrică cu $C(Z)$. Pe baza corolarului teoremei 4, Z este homeomorf cu S, deci poate fi identificat cu S. Identificarea se face observînd că idealele maximale ale lui $C(S)$ sînt de forma $\{x ;\ x(s) = 0,\ x \in C(S)\}$ cu $s \in S$ fixat.

6°. În cele ce urmează vom numi *C^*-algebră, orice algebră Banach comutativă cu element unitate şi care verifică una din condiţiile* (*1.7*) *sau* (*1.8*), sau ceea ce pe baza celor arătate este tot una, *orice algebră Banach izomorfă algebric şi topologic cu algebra funcţiilor continue definite pe un anume compact.*

§ 2. APLICAŢII DE TIP POZITIV ŞI MĂSURI SEMISPECTRALE

1. Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach (comutativă cu element unitate) involutivă. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi $x \to T_x$ o aplicaţie liniară a lui $\mathcal{A}$ în algebra Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ a operatorilor liniari mărginiţi din $\mathcal{H}$. Aplicaţia $x \to T_x$ este de tip pozitiv (simetrică, multiplicativă, continuă) dacă $T_{x^*x} \geqslant 0$ (respectiv $T_{x^*} = T_x^*$, $T_{xy} = T_x T_y$, $\|T_x\| \leqslant K\|x\|$) pentru orice $x \in \mathcal{A}$. Aici pentru un $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A \geqslant 0$, înseamnează că $(Ah, h) \geqslant 0$ pentru orice $h \in \mathcal{H}$.

Iată cîteva proprietăţi simple legate de aceste definiţii :

TEOREMA 1. *Dacă $x \to T_x$ este de tip pozitiv, atunci este şi simetrică. Dacă $x \to T_x$ este simetrică şi multiplicativă, atunci este şi de tip pozitiv. Dacă $\mathcal{A}$ este cu involuţie continuă iar $x \to T_x$ este de tip pozitiv, atunci este şi continuă.*

Demonstrație. Fie $x \to T_x$ de tip pozitiv şi fie $x^* = x \in \mathcal{A}$. Atunci

$$T_{e^*e} + 2T_x + T_{x^*x} = T_{(e+x)^*(e+x)} \geqslant 0$$

şi cum $T_{e^*e} \geqslant 0$, $T_{x^*x} \geqslant 0$, rezultă că $(T_x f, f)$ este real pentru orice $f \in \mathcal{H}$, ceea ce atrage faptul că $T_x \,(= T_x^*)$ este autoadjunct, deci $x \to T_x$ este simetrică, întrucît

$$T_{x^*} = T_{\frac{x^*+x}{2}} - i\, T_{\frac{x-x^*}{2i}} = \left(T_{\frac{x+x^*}{2}}\right)^* - i\left(T_{\frac{x-x^*}{2i}}\right)^* = \left(T_{\frac{x+x^*}{2}+i\frac{x-x^*}{2i}}\right)^* = T_x^*,$$

pentru orice $x \in \mathcal{A}$. Să presupunem acum că involuția în $\mathcal{A}$ este continuă. Fie $y = y^* \in \mathcal{A}$ şi $\varepsilon > 0$. Fie $z = y\,(\varepsilon + \|y\|)^{-1}$. Să considerăm dezvoltarea în serie (absolut convergentă pentru $|\lambda| < 1$) a funcției $(1 - \lambda)^{\frac{1}{2}}$. Înlocuind pe λ cu z obținem o serie absolut convergentă în $\mathcal{A}$. Fie u suma acestei serii. Din absolut convergența seriei, rezultă $u^2 = e - z$ (întrucît formal această relație se obține ca în cazul numeric). Din continuitatea involuției şi a faptului că coeficienții seriei noastre sînt reali rezultă $u = u^*$. În acest mod

$$T_e - T_z = T_{e-z} = T_{u^2} = T_{u^*u} \geqslant 0$$

şi deci

$$T_y \leqslant (\|y\| + \varepsilon)\, T_e;$$

$\varepsilon > 0$ fiind arbitrar,

$$T_y \leqslant \|y\|\, T_e.$$

Înlocuind pe y cu $-y$ obținem

$$-\|y\|\, T_e \leqslant T_y \leqslant \|y\|\, T_e,$$

adică

$$\|T_y\| \leqslant \|y\|\, \|T_e\|.$$

Fie K norma involuției în $\mathcal{A}$. Atunci

$$\|T_x\| \leqslant \frac{1}{2}\|T_{x+x^*}\| + \frac{1}{2}\|T_{\frac{x-x^*}{i}}\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\|x + x^*\| + \left\|\frac{x - x^*}{i}\right\|\right)\|T_e\| \leqslant (1 + K)\,\|T_e\|\,\|x\|$$

pentru orice $x \in \mathcal{A}$.

În sfîrşit, fie $x \to T_x$ simetrică şi multiplicativă. Atunci

$$T_{x^*x} = T_{x^*}\, T_x = T_x^*\, T_x \geqslant 0$$

pentru orice $x \in \mathcal{A}$, cta.

2. În cele ce urmează *algebra* $\mathcal{A}$ *va fi considerată autoadjunctă şi cu involuție continuă, iar aplicația* $x \to T_x$ *va fi presupusă de tip pozitiv,* fără a mai menționa explicit aceasta.

TEOREMA 2. *Există un* $K < \infty$, *astfel ca*

$$\| T_x \| \leqslant K \| \hat{x} \|$$

oricare ar fi $x \in \mathcal{A}$.

Demonstraţie. Fie $x = x^* \in \mathcal{A}$. Din

$$(T_e f, f) + 2t (T_x f, f) + t^2 (T_{x^2} f, f) (T_{(e+tx)^* (e+tx)} f, f) \geqslant 0$$

pentru orice t real şi $f \in \mathcal{H}$, rezultă

$$| (T_x f, f) | \leqslant (T_e f, f)^{\frac{1}{2}} (T_{x^2} f, f)^{\frac{1}{2}}$$

şi în continuare

$$| (T_x f, f) | \leqslant (T_e f, f)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}} (T_{x^{2^n}} f, f)^{\frac{1}{2^n}}, \; n = 1, 2, \dots$$

Fie L norma aplicaţiei $x \to T_x$. Pe baza teoremei 1, $L < \infty$. Atunci

$$(T_x f, f) | \leqslant \liminf_{n \to \infty} (T_e f, f)^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}} L^{\frac{1}{2^n}} \| f \|^{\frac{1}{2^{n-1}}} \| x^{2^n} \|^{\frac{1}{2^n}} = (T_e f, f) \| \hat{x} \|.$$

Ţinînd seama de faptul că T este autoadjunct, avem

$$\| T_x \| \leqslant \| T_e \| \| \hat{x} \| .$$

Fie H norma involuţiei în $\mathcal{A}$. Atunci, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, avem

$$\| T_x \| \leqslant \| T_{\frac{x+x^*}{2}} \| + \| T_{\frac{x-x^*}{2i}} \| \leqslant \| T_e \| \left(\left\| \frac{x + x^*}{2} \right\| + \left\| \frac{x - x^*}{2i} \right\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \| T_e \| (1 + H) \| x \|,$$

de unde punînd $K = \| T_e \| (1 + H)$ obţinem teorema, cta.

Fie $f, g \in \mathcal{H}$ fixaţi. Atunci $\hat{x} \to (T_x f, g)$ este, pe baza teoremei anterioare, o formă liniară *continuă* pe $\hat{\mathcal{A}} \subset C(Z)$ şi, cum pe baza teoremei 6, § 1 avem $\overline{\hat{\mathcal{A}}} = C(Z)$, prelungibilă în mod unic într-o formă liniară continuă pe $C(Z)$, adică într-o măsură Radon $\mu_{f, g}$ pe Z. Prin urmare $\mu_{f, g}$ este unic determinată de relaţia

$$(T_x f, g) = \int_Z \hat{x} (\zeta) \, d\mu_{f, g} (\zeta) . \tag{2.1}$$

Să studiem familia de măsuri $\mathfrak{F} = \{ \mu_{f, g} ; f, g \in \mathcal{H} \}$. Din $T_{x^*} = T_x^*$ rezultă

$$\int_Z \hat{x} (\zeta) \, d\mu_{g, f} (\zeta) = (T_x g, f) = \overline{(T_{x^*} f, g)} = \int_Z \overline{\hat{x}^* (\zeta)} \, d\bar{\mu}_{f, g} (\zeta) ,$$

unde am folosit următoarea definiţie a conjugatei $\bar{\mu}$ a unei măsuri Radon

$$\int_Z \varphi (\zeta) \, d\bar{\mu} (\zeta) = \overline{\int_Z \overline{\varphi (\zeta)} \, d\mu (\zeta)}, \quad \varphi \in C(Z) . \tag{2.2}$$

În continuare

$$\int_Z \hat{x}(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{g,f}(\zeta) = \int_Z \hat{x}(\zeta)\, \mathrm{d}\bar{\mu}_{f,g}(\zeta)$$

şi cum $\bar{\mathfrak{A}} = C(Z)$, deducem

$$\mu_{g,f} = \bar{\mu}_{f,g}\,. \tag{2.3}$$

De asemenea

$$\mu_{f,f} \geqslant 0\,, \tag{2.4}$$

adică

$$\int_Z \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) \geqslant 0 \tag{2.5}$$

pentru orice $\varphi(\zeta) \in C(Z)$, $\varphi(\zeta) \geqslant 0$. În acest scop să remarcăm că pentru orice $\varphi \in C(Z)$, $\varphi(\zeta) \geqslant 0$, există un şir $\{\hat{x}_n\} \subset \hat{\mathfrak{A}}$ astfel ca $\hat{x}_n \to \varphi$ în $C(Z)$. Cum $\varphi \geqslant 0$, evident

$$-\varepsilon_n = \inf_{\zeta \in Z} \hat{x}_n(\zeta) \to 0$$

aşa că

$$\hat{y}_n = \hat{x}_n + \varepsilon_n + \frac{1}{n} = \left(x + \frac{1}{n} + \varepsilon_n\right)^{\wedge}$$

tinde de asemenea către φ şi $\hat{y}_n(\zeta) \geqslant \frac{1}{n}\,.$

Fie $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ definită pe $\sigma(y_n) \subseteq \left\{\lambda;\ \lambda \geqslant \frac{1}{n}\right\}$, unde am ales determinarea > 0 a funcţiei $\sqrt{\lambda}$. Atunci $f(\lambda)$ este analitică într-o vecinătate a lui $\sigma(y_n)$ şi deci pe baza calculului funcţional cu funcţii analitice în algebre Banach avem pentru $z_n = f(y_n)$ următoarele proprietăţi :

$$z_n^2 = f^2(y_n) = y_n\,,$$

$$\hat{z}_n = f(\hat{y}_n) = \sqrt{\hat{y}_n}$$

şi deci

$$\widehat{z_n^* z_n} = \bar{\hat{z}}_n\, \hat{z}_n = (\sqrt{\hat{y}_n})^2 = \hat{y}_n\,.$$

În acest mod

$$\int_Z \hat{y}_n^*(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) = \int_Z \widehat{z_n^* z_n}(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta) = (T_{z_n^* z_n} f, f) \geqslant 0\,,$$

de unde făcînd $n \to \infty$, obţinem (2.5), cta.

În plus din teorema 2 obţinem pentru $x \in \mathfrak{A}$

$$\left| \int_Z \hat{x}(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta) \right| = |(T_x f, g)| \leqslant K \|\hat{x}\| \|f\| \|g\|\,,$$

de unde, prin continuitate (în $\hat{x}$), deducem

$$\left|\int_Z \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta)\right| \leqslant K \|f\| \, \|g\| \, \|\varphi\|,$$

pentru orice $\varphi \in C(Z)$, adică

$$\|\mu_{f,g}\| \leqslant K \|f\| \, \|g\| ; \tag{2.6}$$

în fine este evident că

$$\mu_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g} = \lambda_1 \mu_{f_1, g} + \lambda_2 \mu_{f_2, g}, \tag{2.7}$$

căci

$$\int \hat{x}\, \mathrm{d}\mu_{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g} = (T_x(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2), g) = \lambda_1 (T_x f_1, g) + \lambda_2 (T_x f_2, g) =$$

$$= \lambda_1 \int \hat{x}\, \mathrm{d}\mu_{f_1, g} + \lambda_2 \int \hat{x}\, \mathrm{d}\mu_{f_2, g} = \int \hat{x}\, \mathrm{d}(\lambda_1 \mu_{f,g} + \lambda_2 \mu_{f_2, g}).$$

Prin definiţie, *o familie* $\mathcal{F}$ *de măsuri care verifică condiţiile* (2.3), (2.4), (2.6) şi (2.7) *se numeşte familie semispectrală de măsuri.*

TEOREMA 3. *Există o corespondenţă naturală dată de (2.1) între aplicaţiile* $x \to T_x$ *(de tip pozitiv) şi familiile semispectrale de măsuri pe* $Z : \mathcal{F} = (\mu_{f,g})_{f,g \in \mathcal{H}}$, *unde* $\mathcal{H}$ *este spaţiul operatorilor* T_x.

Am văzut că prin (2.1), aplicaţia $x \to T_x$ defineşte în mod unic o familie $\mathcal{F} = (\mu_{f,g})_{f,g \in \mathcal{H}}$ semispectrală. Fie acum $\mathcal{F} = (\mu_{f,g})$ o familie semispectrală. Să punem

$$[f, g] = \int_Z \hat{x}(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta).$$

Din (2.7) şi (2.3) rezultă că $[f, g]$ este o formă biliniară hermitică pe $\mathcal{H}$, care, în virtutea relaţiei (2.6), este continuă. Pe baza teoremei Riesz-Fréchet, avem un operator T_x verificînd $(T_x f, g) = [f, g]$. Aplicaţia $x \to T_x$ este evident liniară (în x) de la $\mathcal{A}$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ea este de tip pozitiv, în virtutea relaţiei (2.4), căci

$$(T_{x^* x} f, f) = \int_Z \widehat{x^* x}(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) = \int_Z |\hat{x}(\zeta)|^2\, \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) \geqslant 0.$$

Observaţie. Să remarcăm că

$$\mu_{f,g} = \frac{1}{4} \sum_{\varepsilon = 1, -1, i, -i} \varepsilon \mu_{f+\varepsilon g, f+\varepsilon g}, \tag{2.8}$$

ceea ce se verifică prin calcul imediat ţinînd seama că pentru $\varphi \in C(Z)$ fixată

$$f, g \to \int_Z \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta)$$

este o formă biliniară hermitică pe $\mathcal{H}$.

3. În cele ce urmează familiile de măsuri, de exemplu familiile de măsuri semispectrale, vor juca un rol esențial. Pentru a nu fi mereu obligați să lărgim sfera definițiilor noastre vom consacra acest aliniat faptelor care ne vor fi necesare și pe care le vom folosi în mod constant ulterior.

Fie $\mathfrak{F} = (\mu)$ o familie de măsuri Radon pe spațiul compact Z. Vom spune că $\mathfrak{F}$ este *cumsecade* dacă pentru orice măsură $\mu \in \mathfrak{F}$ există un număr finit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ de măsuri $\geqslant 0$ în $\mathfrak{F}$ astfel ca

$$|\mu| \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n . \tag{2.9}$$

(Să reamintim că $|\mu|$ (modulul măsurii μ) se definește în felul următor: Pentru $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in C(Z)$ se pune

$$|\mu|(\varphi) = \sup |\mu(\psi)|,$$

supremumul fiind luat în raport cu toate funcțiile $\psi \in C(Z)$, $|\psi| \leqslant \varphi$. Se arată că $|\mu|(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 |\mu|(\varphi_1) + \alpha_2 |\mu|(\varphi_2)$ pentru orice numere $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ și $\varphi_1, \varphi_2 \in C(Z)$, $\varphi_1, \varphi_2 \geqslant 0$, și apoi se pune pentru $\varphi \in C_R(Z)$ oarecare

$$|\mu|(\varphi) = |\mu|(\varphi^+) - |\mu|(\varphi^-),$$

unde

$$\varphi^+ = \frac{\varphi + |\varphi|}{2}, \quad \varphi^- = \frac{|\varphi| - \varphi}{2}.$$

Se verifică că $|\mu|$ este o măsură (Radon) pe Z și că $\| |\mu| \| = \|\mu\|$. De asemenea să amintim că pentru orice $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se pune prin definiție

$$L^p_\mu(Z) = L^p_{|\mu|}(Z).$$

O mulțime $A \subset Z$ este μ-neglijabilă dacă este de măsură nulă în raport cu $|\mu|$).

O familie $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ de măsuri se numește *suficientă* dacă în (2.9) măsurile $\mu_1 . \mu_2, \ldots, \mu_n$ pot fi luate totdeauna în $\mathfrak{G}$. În particular, mulțimea $\mathfrak{F}^+$ a tuturor măsurilor pozitive din $\mathfrak{F}$ este suficientă.

Fie φ o funcție complexă definită pe Z; prin definiție ea este *$\mathfrak{F}$-măsurabilă* (*F-esențial mărginită*) dacă este măsurabilă față de orice măsură $\mu \in \mathfrak{F}$ (respectiv, dacă există un $a < \infty$ astfel că

$$\{\zeta ; |\varphi(\zeta)| > a\} \tag{2.10}$$

să fie $\mathfrak{F}$-neglijabilă, adică μ-neglijabilă pentru fiecare măsură $\mu \in \mathfrak{F}^+$). *Mulțimea tuturor funcțiilor (complexe), $\mathfrak{F}$-măsurabile și $\mathfrak{F}$-esențial mărginite, o vom nota cu $L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$.* Evident, $L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$ este un spațiu vectorial (complex) seminormat prin

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{F}} = \inf \{a\},$$

unde a este numărul care apare în (2.10). Pentru a putea considera că $\varphi \rightarrow \|\varphi\|_{\mathfrak{F}}$ este o normă pe $L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$ va trebui să considerăm că nu facem (în $L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$) distincție între două funcții care diferă pe o mulțime $\mathfrak{F}$-neglijabilă. Cu această convenţie, *$L^{\infty}_{\mathcal{F}}(Z)$ este un spaţiu Banach (înzestrat cu norma $\| \varphi \|_{\mathcal{F}}$).*

Teorema 4. *Fie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ suficientă. Atunci $\mathcal{G}$-măsurabilitatea ($\mathcal{G}$-neglijabilitatea) atrage μ-măsurabilitatea (μ-neglijabilitatea) pentru orice $\mu \in \mathcal{F}$.*

Demonstraţie. Fie $\mu_1 \geqslant 0, \ldots, \mu_n \geqslant 0$ din G astfel ca

$$|\mu| \leqslant \mu_1 + \ldots . + \mu_n .$$

Fie $A \subset Z$ $\mathcal{G}$-neglijabilă. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcţie ψ_k inferior semicontinuă, $\psi_k \geqslant \chi_A$ (unde χ_A este funcţia caracteristică a mulţimii A) astfel ca

$$\varepsilon \geqslant \int_Z \psi_k(\zeta)\, d\mu_k(\zeta) = \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant \psi_k} \int_Z \varphi(\zeta)\, d\mu_k(\zeta) \cdot$$

Punînd $\psi = \min(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$, obţinem o funcţie inferior semicontinuă verificînd

$$\psi \geqslant \chi_A, \int_Z \psi\, d(\mu) \leqslant \sum \int_Z \psi\, d\mu_k \leqslant \sum \int \psi_k\, d\mu_k \leqslant n\varepsilon ,$$

de unde ($\varepsilon > 0$ fiind la dispoziţia noastră) rezultă că A este $|\mu|$-neglijabilă, deci μ-neglijabilă.

Fie acum Φ o funcţie $\mathcal{G}$-măsurabilă. În particular, $\Phi(\zeta)$ este μ_k-măsurabilă pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Aceasta înseamnează că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un compact $K = K(k, \varepsilon)$ astfel ca restricţia Φ/K a lui Φ la K să fie continuă şi $Z - K = Z \cap CK$ să fie de măsură μ_k mai mică decît ε. Fie $K_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{n} K(k, \varepsilon)$. Atunci K este compactă şi folosind faptul că pentru o măsură $\nu \geqslant 0$ avem pentru orice funcţie $\Psi(\zeta) \geqslant 0$ ν-măsurabilă

$$\int \Psi(\zeta)\, d\nu(\zeta) = \inf_{\substack{\Psi \leqslant \psi \\ \psi \text{ inf. semi-} \\ \text{continuă}}} \left(\sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant \psi \\ \varphi \in C(Z)}} \int \varphi(\zeta)\, d\nu(\zeta) \right)$$

(în particular pentru $\Psi = \chi_{Z-K_\varepsilon}$) obţinem

$$|\mu|(Z - K_\varepsilon) = \int_Z \chi_{Z-K_\varepsilon}(\zeta)\, d\nu(\zeta) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_Z \chi_{Z-K_\varepsilon}(\zeta)\, d\mu_k(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(Z - K_\varepsilon) \cdot$$

Dar

$$Z - K_\varepsilon \subseteq Z - K(k, \varepsilon), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

aşa că

$$|\mu|(Z - K_\varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k(Z - K(k, \varepsilon)) \leqslant n\varepsilon \cdot$$

Cum n este fixat, iar $\varepsilon > 0$ la dispoziţia noastră, rezultă că Φ (care evident este continuă pe K_ε) este $|\mu|$-măsurabilă, adică μ-măsurabilă, cta.

COROLARUL 1. *Fie* $\mu \in \mathcal{F}$. *Dacă notăm cu* $\|.\|_\mu$ *norma în* $L^\infty_\mu (Z)$, *atunci pentru orice* $\varphi \in L^\infty_{\mathcal{G}} (Z)$

$$\|\varphi\|_\mu \leqslant \|\varphi\|_{\mathcal{G}} \, .$$

(prin urmare $L^\infty_{\mathcal{G}} (Z) \subseteq L^\infty_{\mathcal{F}} (Z)$).

Într-adevăr, pe baza teoremei 4, φ este μ-măsurabilă, iar dacă $t > \|\varphi\|_{\mathcal{G}}$, atunci $\{\zeta ; |\varphi(\zeta)| > t\}$ este $\mathcal{G}$-neglijabilă deci şi μ-neglijabilă aşa că $\|\varphi\|_\mu \leqslant t$, etc.

COROLARUL 2. *$\mathcal{G}$-măsurabilitatea, $\mathcal{G}$-neglijabilitatea şi $L^\infty_{\mathcal{G}} (Z)$ coincid respectiv cu $\mathcal{F}$-măsurabilitatea, $\mathcal{F}$-neglijabilitatea şi $L^\infty_{\mathcal{F}} (Z)$ (cu păstrarea normei :*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} = \|\varphi\|_{\mathcal{G}}) .$$

Într-adevăr, cum $\mathcal{G}^+ \subset \mathcal{F}^+$, orice funcţie $\mathcal{F}$ măsurabilă (sau $\mathcal{F}$-neglijabilă) este şi $\mathcal{G}$-măsurabilă (respectiv $\mathcal{G}$-neglijabilă). De asemenea este evident că $L^\infty_{\mathcal{F}} (Z) \subseteq L^\infty_{\mathcal{G}} (Z)$ şi că $\|\varphi\|_{\mathcal{F}} \geqslant \|\varphi\|_{\mathcal{G}}$. Implicaţiile inverse nu-s triviale, dar rezultă direct din teorema 4 şi corolarul 1.

Pentru familia $\mathcal{F}$ cumsecade de măsuri se pune, prin definiţie, $S(\mathcal{F})$ (suportul familiei $\mathcal{F}$) egal cu $\overline{\bigcup_{\mu \in \mathcal{F}} S(\mu)}$, unde $S(\mu) = S(|\mu|)$ este suportul măsurii $|\mu|$, adică cea mai mică mulţime închisă din Z cu complementară $|\mu|$-neglijabilă. Teorema 4 dă imediat

COROLARUL 3. *Dacă $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ este suficientă, atunci $S(\mathcal{F}) = S(\mathcal{G})$.*

Observaţii. 1°. Fie $\mathcal{F} = (\mu_{f,g})_{f,g \in \mathcal{K}}$ o familie semispectrală de măsuri. Pe baza observaţiei 1° de la punctul 2, familia $\mathcal{G} = (\mu_{f,f})_{f \in \mathcal{K}}$ este suficientă pentru $\mathcal{F}$, aşa că noţiunile de $\mathcal{F}$-măsurabilitate, $\mathcal{F}$-neglijabilitate şi $\mathcal{F}$-esenţial mărginire coincid respectiv cu $\mathcal{G}$-măsurabilitatea, $\mathcal{G}$-neglijabilitatea şi $\mathcal{G}$-esenţial mărginirea.

2°. Să remarcăm că dacă $\varphi \in C (Z)$, atunci $\varphi \in L^\infty_{\mathcal{F}} (Z)$ şi $\|\varphi\|_{\mathcal{F}} \leqslant \|\varphi\|$, pentru orice familie cumsecade $\mathcal{F}$.

3°. Putem preciza ultima observaţie. Într-adevăr, *dacă* $\varphi \in C (Z)$, *atunci*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} = \max_{\zeta \in S(\mathcal{F})} | \varphi(\zeta) | .$$

Demonstraţie. Fie

$$\alpha > \operatorname*{axm}_{\zeta \in S(\mathcal{F})} | \varphi(\zeta |) = \alpha_0$$

fixat. Atunci

$$\sigma_\alpha = \{\zeta ; | \varphi(\zeta) | > \alpha\}$$

este deschisă şi disjunctă de $S(\mathcal{F})$ şi deci în particular de $S(\mu)$ pentru orice $\mu \in \mathcal{F}$. Prin urmare σ_α este μ-neglijabilă pentru orice $\mu \in \mathcal{F}$, adică $\mathcal{F}$-neglijabilă. Rezultă

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} \leqslant \alpha_0 .$$

Dacă

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} < \alpha_0 ,$$

atunci punînd

$$\alpha = \frac{\alpha_0 + \|\varphi\|_{\mathcal{F}}}{2}$$

mulţimea σ_α este deschisă şi $\mathcal{F}$-neglijabilă ceea ce contrazice faptul că $\sigma_\alpha \cap S(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, cta.

4. Fie $\mathcal{F} = (\mu_{f,g})_{f,g \in \mathcal{H}}$ o familie semispectrală de măsuri pe Z (compact) şi fie $\varphi \in L^\infty_{\mathcal{F}}(Z)$ fixat. Aplicaţia

$$f, g \rightarrow \int_Z \varphi(\zeta) \, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta) \tag{2.11}$$

este o formă biliniară hermitică pe $\mathcal{H}$ (datorită relaţiilor (2.3), (2.7)). Folosind relaţia (2.6) obţinem

$$\left| \int_Z \varphi(\zeta) \, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta) \right| \leqslant K \, \|f\| \, \|g\| \, \|\varphi\|_{\mu_{f,g}} \leqslant K \|f\| \, \|g\| \, \|\varphi\|_{\mathcal{F}}$$

ceea ce ne arată că forma (2.11) este continuă deci reprezentabilă sub forma

$$(U_\varphi f, g) = \int_Z \varphi(\zeta) \, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta), \; f, \; g \in \mathcal{H} , \tag{2.12}$$

unde $U_\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ şi

$$\| U_\varphi \| \leqslant K \, \|\varphi\|_{\mathcal{F}} . \tag{2.13}$$

Aplicaţia $\varphi \rightarrow U_\varphi$ *definită pe* $L^\infty_{\mathcal{F}}(Z)$ *cu valori în* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *este* (evident) *liniară simetrică* ($U_{\bar\varphi} = U^*_\varphi$, $\varphi \in L^\infty_{\mathcal{F}}(Z)$) *pozitivă* ($U_\varphi \geqslant 0$ *dacă* $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in L^\infty_{\mathcal{F}}(Z)$) *şi continuă.*

Familia semispectrală $\mathcal{F}$ *este, prin definiţie, spectrală dacă aplicaţia* $\varphi \rightarrow U_\varphi$ *este şi multiplicativă.*

Se pune în mod natural problema de a caracteriza, poate mai simplu sau mai natural, familiile spectrale de măsuri.

TEOREMA 5. *Familia semispectrală* $\mathcal{F} = (\mu_{f,g})_{f,g \in \mathcal{H}}$ *este spectrală dacă şi numai dacă*

$$\varphi \cdot \mu_{f,g} = \mu_{U_\varphi f, g} \tag{2.14}$$

pentru orice $\varphi \in C(Z)$, $f, \; g \in \mathcal{H}$.

(Să reamintim definiția măsurii $\varphi\cdot\mu$ pentru $\varphi \in C(Z)$ și μ măsură. Prin definiție $\nu = \varphi.\mu$ este măsură definită prin

$$\int_Z \psi(\zeta)\, \mathrm{d}\nu(\zeta) = \int_Z \psi(\zeta)\, \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu(\zeta), \qquad \psi \in C(Z).)$$

Demonstrație. Fie $\mathfrak{F}$ spectrală. Atunci

$$\int \psi \mathrm{d}(\varphi.\mu_{f,g}) = \int \psi\ \varphi\ \mathrm{d}\mu_{f,g} = (U_{\psi\varphi}\ f, g) = (U_\psi U_\varphi\ f, g) = \int \psi\ \mathrm{d}\mu_{U_\varphi f,g}$$

pentru orice $\psi \in C(Z)$, de unde deducem (2.14).

Să presupunem invers, că (2.14) are loc. Atunci pentru orice $\psi \in L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$ avem

$$(U_\psi\ U_\varphi\ f, g) = \int \psi(\zeta)\ d\mu_{U_\varphi f.g}(\zeta) = \int \psi(\zeta)\ \mathrm{d}(\varphi.\mu_{f,g})(\zeta) =$$

$$= \int \psi(\zeta)\ \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta) = (U_{\varphi\psi}\ f, g),$$

oricare ar fi $\varphi \in C(Z)$, $f, g \in \mathcal{H}$. În acest mod,

$$\int \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{U_\psi f,g}(\zeta) = (U_\varphi\ U_\psi\ f, g) = \overline{(U_{\bar\psi}\ U_{\bar\varphi} g, f)} = \overline{(U_{\bar\psi\bar\varphi}\ g, f)} = (U_{\varphi\psi}\ f, g) =$$

$$= \int \varphi(\zeta)\ \psi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta)$$

fiind adevărată pentru orice $\varphi \in C(Z)$, rămîne (prin continuitate în $L^1_{\mu_{f,g}}(Z)$ de exemplu) adevărată pentru orice $\varphi \in L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$ $(\subset L^1_{\mu_{f,g}+\mu_{U_\psi f,g}}(Z))$ așa că

$$(U_\varphi\ U_\psi\ f, g) = \int \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{U_\psi f,g}(\zeta) = \int \varphi(\zeta)\ \psi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta) = (U_{\varphi\psi}\ f, g)$$

pentru orice φ, $\psi \in L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$ și f, $g \in \mathcal{H}$, cta.

COROLARUL 1. *Fie $x \to T_x$ de tip pozitiv și fie $\mathfrak{F} = (\mu_{f,g})_{f,g\in\mathcal{H}}$ familia semispectrală atașată aplicației $x \to T_x$. Atunci $\mathfrak{F}$ este spectrală dacă și numai dacă $x \to T_x$ este multiplicativă.*

Demonstrație. Dacă $\mathfrak{F}$ este spectrală, pe baza definiției avem

$$T_x\ T_y = U_{\hat{x}}\ U_{\hat{y}} = U_{\hat{x}\hat{y}} = U_{\widehat{xy}} = T_{xy}, \quad x, y, \in \mathfrak{A}.$$

Invers, dacă $x \to T_x$ este multiplicativă, avem

$$\int \hat{x}(\zeta)\, \mathrm{d}\hat{y}\cdot\mu_{f,g}(\zeta) = \int \hat{x}(\zeta)\, \hat{y}(\zeta)\ \mathrm{d}\mu_{f,g}(\zeta) = (T_{xy}\ f, g) = (T_x\ T_y\ f, g) =$$

$$= \int \hat{x}(\zeta)\ \mathrm{d}\mu_{T_y f,g}(\zeta)$$

şi cum $\overline{\hat{\mathcal{A}}} = C(Z)$, deducem

$$\int \varphi(\zeta)\, d\hat{y}\cdot \mu_{f,g}(\zeta) = \int \varphi(\zeta)\, d\mu_{T_y f,g}(\zeta)$$

pentru orice $\varphi \in C(Z)$, f, $g \in \mathcal{H}$, sau echivalent

$$U_\varphi T_y = U_{\varphi\hat{y}}\,.$$

Prin urmare

$$(T_y U_\varphi f, g) = (f, U_{\bar{\varphi}} T_{y^*} g) = (f, U_{\bar{\varphi}\hat{y}^*} g) = (f, U_{\overline{\varphi\hat{y}}}\, g) = (U_{\varphi\hat{y}} f, g)$$

pentru orice f, $g \in \mathcal{H}$, adică

$$T_y U_\varphi = U_{\hat{y}\varphi},\quad \varphi \in C(Z),\ y \in \mathcal{A}\,.$$

Această ultimă egalitate dă

$$\int \hat{y}(\zeta)\, d(\varphi\cdot\mu_{f,g})(\zeta) = \int \hat{y}(\zeta)\, \hat{\varphi}(\zeta)\, d\mu_{f,g}(\zeta) = (U_{\varphi\hat{y}} f, g) = (T_y U_\varphi f, g) =$$

$$= \int \hat{y}(\zeta)\, d\mu_{U_\varphi f, g}(\zeta)\,,$$

şi cum $\hat{y} \in \hat{\mathcal{A}}$ este arbitrar iar $\hat{\mathcal{A}} = C(Z)$, deducem

$$\int \psi(\zeta)\, d(\varphi\cdot\mu_{f,g})(\zeta) = \int \psi(\zeta)\, d\mu_{U_\varphi f, g}(\zeta)$$

pentru orice $\psi \in C(Z)$, ceea ce înseamnă tocmai că $\mathcal{F}$ verifică (2.14). Pe baza teoremei 5, $\mathcal{F}$ este spectrală, cta.

Observații. 1°. *Fie* $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *verificînd*

(2.15) $$S T_x = T_x S\,,\quad x \in \mathcal{A}\,.$$

Atunci

$$S U_\varphi = U_\varphi S\,,\quad \varphi \in L^\infty_{\mathcal{F}}(Z)\,.$$

(Această implicaţie are loc fără ipoteza că $\mathcal{F}$ ar fi spectrală).

Într-adevăr, (2.15) este echivalentă cu $S U_{\hat{x}} = U_{\hat{x}} S$, $\hat{x} \in \hat{\mathcal{A}}$. Folosind faptul că aceşti $\hat{x}$ sînt denşi în $C(Z)$, relaţia (2.13) şi observaţia 2° de la punctul 3, deducem $S U_\varphi = U_\varphi S$ pentru orice $\varphi \in C(Z)$, aşa că

$$\int \varphi(\zeta)\, d\mu_{f, S^* g}(\zeta) = (U_\varphi f, S^* g) = (S U_\varphi f, g) = (U_\varphi S f, g) = \int \varphi(\zeta)\, d\mu_{Sf, g}(\zeta)$$

ceea ce arată că

(2.16) $$\mu_{f, S^* g} = \mu_{Sf, g}\,,\quad f,\ g \in \mathcal{H}\,,$$

şi prin urmare pentru orice $\psi \in L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$

$$(U_\varphi f, S^* g) = \int \psi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{f,\, S^* g}(\zeta) = \int \psi(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_{Sf,\, g}(\zeta) = (U_\psi S f, g)$$

adică

$$((S\, U_\psi - U_\psi S) f, g) = 0, \quad f,\ g \in \mathcal{H},$$

ceea ce înseamnează că $S U_\psi = U_\psi S$ pentru orice $\psi \in L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$, cta.

2°. Dacă $\mathfrak{F}$ este spectrală, relaţia (2.13) poate fi precizată, anume : *Dacă $\mathfrak{F}$ este spectrală, atunci*

$$\|U_\varphi\| = \|\varphi\|_{\mathfrak{F}}, \quad \varphi \in L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z). \tag{2.17}$$

Demonstraţie. Fie $f \in \mathcal{H}$; atunci

$$\|U_\varphi f\|^2 = (U_{|\varphi|^2} f, f) = \int |\varphi|^2\, \mathrm{d}\mu_{f,f} \leqslant \|\varphi\|^2_{\mathfrak{F}} \int \mathrm{d}\mu_{f,f} = \|\varphi\|^2_{\mathfrak{F}} (U_1 f, f).$$

Dar $U_1 = U_1^*$ şi $U_1 = U_{1^2} = U_1^2$ (căci $\mathfrak{F}$ este spectrală !), aşa că U_1 este o proiecţie ortogonală deci de normă $\leqslant 1$ (căci

$$\|U_1 f\|^2 = (U_1^* U_1 f, f) = (U_1^2 f, f) = (U_1 f, f) \leqslant \|U_1 f\|\, \|f\|)$$

şi prin urmare

$$\|U_\varphi f\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2_{\mathfrak{F}}\, \|f\|^2. \tag{2.18}$$

Fie acum $\varphi \in L^\infty_{\mathfrak{F}}(Z)$ fixat şi fie $\alpha < \|\varphi\|_{\mathfrak{F}}$. Atunci dacă $\sigma = \{\zeta ;\ |\varphi(\zeta)| > \alpha\}$, mulţimea σ nu este $\mathfrak{F}$-neglijabilă. Există prin urmare o măsură $\mu_{f,f}$ astfel ca $\mu_{f,f}(\sigma) > 0$, sau echivalent

$$(U_{\chi_\sigma} f, f) = \int \chi_\sigma\, \mathrm{d}\mu_{f,f} > 0.$$

Avem

$$\|U_\varphi U_{\chi_\sigma} f\|^2 = (U_{|\varphi|^2 \chi_\sigma} f, f) = \int \chi_\sigma(\zeta)\, |\varphi(\zeta)|^2\, \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) = \int_\sigma |\varphi(\zeta)|^2 \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^2 \int_\sigma \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) = \alpha^2 \int \chi_\sigma\, \mathrm{d}\mu_{f,f} = \alpha^2 (U\chi_\sigma f, f) =$$

$$= \alpha^2 (U_{\chi_\sigma^2} f, f) = \alpha^2 (U_{\chi_\sigma} U_{\chi_\sigma},\ f, f) = \alpha^2 \|U_{\chi_\sigma} f\|^2$$

ceea ce arată (întrucît $\|U_{\chi_\sigma} f\| = \sqrt{(U_{\chi_\sigma} f, f)} > 0,\ U_{\chi_\sigma} f \neq 0$) că $\|U_\varphi\| \geqslant \alpha$ şi prin urmare

$$\|U_\varphi\| \geqslant \|\varphi\|_{\mathfrak{F}}.$$

Inegalitatea aceasta împreună cu (2.18) ne dă (2.17), cta.

3°. Fie $x \to T_x$ multiplicativă (bineînţeles de tip pozitiv iar algebra $\mathcal{A}$ autoadjunctă cu involuţie continuă). Atunci familia semispectrală $\mathcal{F} = (\mu_{f,g})_{f,g\in\mathcal{H}}$ (de măsuri pe spectrul Z al lui $\mathcal{A}$) care corespunde în virtutea teoremei 3 aplicaţiei $x \to T_x$ este, în virtutea corolarului 1 al teoremei 5, o familie spectrală. Iată o completare a acestor rezultate :

Să presupunem că $\mathcal{A}$ *este o* C^**-algebră; atunci egalitatea*

$$S(\mathcal{F}) = Z$$

are loc dacă şi numai dacă aplicaţia $x \to T_x$ *este bicontinuă.*

Demonstraţie. Fie $S(\mathcal{F}) = Z$ şi să presupunem că $x \to T_x$ n-ar fi bicontinuă. Există deci un şir $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$, astfel $\| x_n \| = 1$ şi $\| T_{x_n} \| \to 0$. Dar pe baza observaţiei anterioare şi a observaţiei 3°, punctul 3,

$$\| T_{x_n} \| = \sup_{\zeta \in Z} | \hat{x}_n (\zeta) | = \| \hat{x}_n \| .$$

Cum $\mathcal{A}$ este o C^*-algebră, avem $\| \hat{x}_n \| \geqslant \frac{1}{K} \| x_n \|$ cu un anume K constant. Prin urmare $\| x_n \| \to 0$ în contradicţie cu $\| x_n \| = 1$.

Invers, dacă $x \to T_x$ este bicontinuă avem

$$\| \hat{x} \| \leqslant \| x \| \leqslant C \| T_x \|, \quad x \in \mathcal{A},$$

unde C este o constantă. Cum $\mathcal{A}$ este o C^*-algebră, $\hat{\mathcal{A}} = C(Z)$ aşa că dacă $S(\mathcal{F}) \neq Z$ există o funcţie $\hat{x} \in C(Z)$ diferită de 0 şi egală cu 0 pe $S(\mathcal{F})$. Prin urmare

$$0 < \| \hat{x} \| \leqslant C \| T_x \| = C \| \hat{x} \|_{\mathcal{F}} = C \max_{\zeta \in S(\mathcal{F})} | x(\zeta) | = 0$$

deci contradicţie. Prin urmare $S(\mathcal{F}) = Z$, cta.

5. Să notăm cu $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}(Z)$ familia mulţimilor $\sigma \subset Z$ pentru care $\chi_\sigma \in L^\infty_{\mathcal{F}}(Z)$, unde $\mathcal{F}$ este o familie cumsecade de măsuri pe spaţiul compact Z. Este evident că $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}(Z)$ este un *clan borelian* (adică o familie $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(Z)$ de părţi ale lui Z verificînd condiţiile : (i) $Z \in \mathcal{B}$; (ii) $A, B \in \mathcal{B}$ implică $A - B = A \cap CB \in \mathcal{B}$ şi (iii) $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathcal{B}$ implică $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$). Fie $\mathcal{B}(Z)$ familia mulţimilor boreliene din Z, adică cel mai mic clan borelian care cuprinde mulţimile deschise din Z. Este evident că $\mathcal{B}(Z) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{F}}(Z)$, *pentru orice* $\mathcal{F}$.

O aplicaţie $\sigma \to E(\sigma)$ a lui $\mathcal{B}(Z)$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se numeşte o *măsură semispectrală* (definită pe Z cu valori în $\mathcal{H}$) dacă $0 \leqslant E(\sigma)$ (adică dacă $(E(\sigma) f, f) \geqslant 0$ pentru orice $f \in H$) pentru orice $\sigma \in \mathcal{B}(Z)$ şi dacă pentru fiecare $f \in \mathcal{H}$ fixat, aplicaţia $\sigma \to (E(\sigma) f, f)$ este o măsură boreliană pe Z ($\mu \geqslant 0$ este o măsură boreliană pe Z dacă este definită pe $\mathcal{B}(Z)$, $\mu(Z) < \infty$ şi $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pentru orice sistem $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathcal{B}(Z)$ de mulţimi mutual disjuncte).

Observații. 1°. Pentru orice $\sigma \in \mathcal{B}(Z)$ dacă $E = (E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ este o măsură semispectrală avem

$$0 \leqslant E(\sigma) \leqslant E(Z). \tag{2.19}$$

Prima inegalitate are loc datorită definiției măsurii semispectrale. A doua din aceeași proprietate, căci

$$(E(Z)f, f) = (E(Z-\sigma)f, f) + (E(\sigma)f, f) \geqslant (E(\sigma)f, f).$$

2°. *Fie* $(\mathrm{E}(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ *o măsură semispectrală fixată. Atunci pentru orice* $f \in \mathcal{H}$

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma_i\right) f = \sum_{i=1}^{\infty} E(\sigma_i) f, \tag{2.20}$$

unde $\sigma_i \in \mathcal{B}(Z)$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ *pentru* $i \neq j$, *iar convergența are loc în* $\mathcal{H}$.

Întîi să observăm că dacă $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, atunci din $(E(\sigma_1)f, f) + (E(\sigma_2)f, f) = (E(\sigma_1 \cup \sigma_2)f, f)$, pentru orice f, deducem

$$E(\sigma_1 \cup \sigma_2) = E(\sigma_1) + E(\sigma_2), \ (\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset, \ \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{B}(Z)) \tag{2.21}$$

așa că

$$E(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_n) f = E(\sigma_1) f + E(\sigma_2) f + \ldots + E(\sigma_n) f. \tag{2.22}$$

Pe de altă parte (căci $E(\sigma_n) \geqslant 0$) avem și :

$$E(\sigma_1) \leqslant E(\sigma_1 \cup \sigma_2) \leqslant \ldots \leqslant E(\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_n) \leqslant \ldots \leqslant E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right).$$

Folosind o teoremă privind convergența șirurilor monotone de operatori hermitici {Dacă $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \ldots \leqslant A_n \leqslant \ldots \leqslant A$ și $\lim (A_n f, f) = (Af, f)$, atunci $A_n \rightarrow A$ în sens tare, adică $A_n f \rightarrow Af$ pentru orice f. Iată schița demonstrației. Avem

$$\|(A_n - A)f\|^2 = ((A - A_n)f, (A - A_n)f) \leqslant ((A - A_n)f, f)^{\frac{1}{2}}((A - A_n)^2 f, (A - A_n)f)^{\frac{1}{2}}$$

unde am aplicat inegalitatea lui Schwarz la forma hermitică $((A - A_n)g, h)$, așa că

$$\|(A - A_n)f\|^2 \leqslant ((A - A_n)f, f)^{\frac{1}{2}} \|A - A_n\|^{\frac{3}{2}} \|f\| \leqslant C[(Af, f) - (A_n f, f)]$$

(unde C este o constantă independentă de f), cta.} cît și faptul că $\left(E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) f, f\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (E(\sigma_n) f, f) = \lim_{n \to \infty} (E(\sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_n) f, f)$, deducem

$$E(\sigma_1 \ldots \sigma_n) f \rightarrow E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) f, \ f \in \mathcal{H}$$

de unde (2.20) rezultă pe baza relației (2.22), cta.

3°. Măsura semispectrală $(E(\sigma))_{\sigma\in\mathscr{B}(Z)}$ se numeşte *regulată* dacă fiecare măsură boreliană $(E(\sigma)\,f,\,f)$ este regulată (o măsură boreliană $\mu\geqslant 0$, este regulată dacă pentru orice $\sigma\in\mathscr{B}(Z)$ avem

$$\mu(\sigma)=\inf\,\mu(G)$$

unde $\sigma\subset G$ este deschisă).

TEOREMA 6. *Fiecărei măsuri semispectrale* $\mathscr{F}=(\mu_{f,g})_{f,g\in\mathscr{K}}$ *îi corespunde prin*

$$E(\sigma)=U_{\chi_\sigma}, \tag{2.23}$$

o măsură semispectrală regulată unic determinată. Invers, fiecărei măsuri semispectrale $(E(\sigma))_{\sigma\in\mathscr{B}(Z)}$ *regulate îi corespunde în mod unic o familie semispectrală* $\mathscr{F}=(\mu_{f,g})_{f,g\in\mathscr{K}}$ *de care este legată prin* (2.23).

Demonstraţie. Fie $\mathscr{F}=(\mu_{f,g})_{f,g\in\mathscr{K}}$ semispectrală. În acest caz, cum

$$(E(\sigma)\,f,f)=(U_{\chi_\sigma}\,f,f)=\int_\sigma \mathrm{d}\mu_{f,f}\,(\zeta)=\mu_{f,f}\,(\sigma)$$

şi cum prelungirea integralei (după *Bourbaki*) conduce la măsuri regulate, este evident că $(E(\sigma))_{\sigma\in\mathscr{B}(Z)}$ este o măsură semispectrală regulată.

Invers, dacă $(E(\sigma))_{\sigma\in\mathscr{B}}$ este o măsură semispectrală regulată, să considerăm aplicaţia

$$\varphi\rightarrow\int_Z \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}(E(\zeta)\,f,\,g)=\lim\sum\varphi_k\,(E\,(\sigma_k)\,f,\,g)\,,$$

unde $(\sum\varphi_k\chi_{\sigma_k})$ este un şir de funcţii simple cu $\sigma_k\in\mathscr{B}(Z)$ (în fapt σ_k pot fi luate unele deschise şi altele închise) care tinde uniform către $\varphi\in C(Z)$; aceasta defineşte o măsură Radon $\mu_{f,g}$. Se verifică fără nici o dificultate că familia $\mathscr{F}=(\mu_{f,g})_{f,g\in\mathscr{K}}$ este o familie semispectrală de măsuri. Cum măsura $(E(\sigma)\,f,f)$ este regulată, avem

$$(E(\sigma),\,f,\,f)=\mu_{f,f}(\sigma),\quad\sigma\in\mathscr{B}(Z),$$

de unde se deduce imediat că $(E(\sigma))$ este legată de $\mathscr{F}$ prin (2.23), cta.

Observaţii. 4°. Fie φ o funcţie boreliană definită pe Z, adică o funcţie pentru care

$$\{\zeta\,;\ \mathrm{Re}\,\varphi(\zeta)<a\}\ \text{şi}\ \{\zeta\,;\ \mathrm{Im}\,\varphi(\zeta)<b\}$$

sînt în $\mathscr{B}(Z)$ pentru orice a, b reali. Este evident că dacă φ este şi mărginită, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există o funcţie boreliană simplă $\sum\varphi_k\chi_{\sigma_k}$ astfel ca $\sigma_k\cap\sigma_h=\emptyset$ pentru $k\neq h$ şi

$$\left\|\sum\varphi_k\chi_{\sigma_k}-\varphi\right\|=\sup_{\zeta\in Z}\left|\sum\varphi_k\chi_{\sigma_k}(\zeta)-\varphi(\zeta)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{2.24}$$

Atunci (cum $\varphi \in L^{\infty}_{\mathfrak{F}}(Z)$, unde $\mathfrak{F}$ este familia semispectrală ataşată lui $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$, operatorul U_{φ} are sens)

$$\|U_{\varphi} - \sum \varphi_k E(\sigma_k)\| \leqslant \varepsilon K. \tag{2.25}$$

Într-adevăr, pentru orice $f, g \in \mathcal{H}$ avem

$$|([U_{\varphi} - \sum \varphi_k E(\sigma_k)] f, g)| = |(U_{\varphi - \Sigma \varphi_k \chi_{\sigma k}} f, g)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_Z |\varphi - \sum \varphi_k \chi_{\sigma_k}| \mathrm{d} |\mu_{f,g}| \leqslant \varepsilon |\mu_{f,g}|(Z) \leqslant \varepsilon K \|f\| \|g\|$$

de unde rezultă (2.25) cu K luată egală cu constanta din (2.13).

5°. În ipotezele anterioare *dacă* $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, *atunci* $SU_{\varphi} = U_{\varphi} S$ *(cu* $\varphi \in L^{\infty}_{\mathfrak{F}}(Z)$*) dacă şi numai dacă* $SE(\sigma) = E(\sigma) S$ *pentru orice* $\sigma \in \mathfrak{B}(Z)$.

Datorită relaţiei (2.23), faptul că prima relaţie implică pe a doua este evident. Invers, în virtutea observaţiei anterioare deducem $SU_{\varphi} = U_{\varphi} S$ pentru orice φ boreliană, în particular pentru toate $\varphi \in C(Z)$. Pe baza observaţiei 1° de la punctul 4 (se ia $\mathcal{A} = C(Z)$, $T_{\varphi} = U_{\varphi}$) deducem că $SU_{\varphi} = U_{\varphi} S$ pentru orice $\varphi \in L^{\infty}_{\mathfrak{F}}(Z)$, cta.

6°. Să remarcăm că dacă S este *suportul măsurii semispectrale* $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ *regulate* (adică complementara reuniunii mulţimilor deschise $G \subset Z$, $E(G) = 0$), *atunci* $S = S(\mathfrak{F})$, *unde* $S(\mathfrak{F})$ *este suportul familiei semispectrale ataşate lui* $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$.

În cele ce urmează toate măsurile semispectrale vor fi presupuse regulate (cînd vom construi o măsură semispectrală vom arăta totdeauna că ea este regulată !) fără a mai menţiona aceasta. O măsură semispectrală $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este *spectrală* dacă

$$E(\sigma_1 \cap \sigma_2) = E(\sigma_1) E(\sigma_2), \ \sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{B}(Z). \tag{2.26}$$

Eliminînd cazul trivial cînd $E(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \mathfrak{B}(Z)$, din definiţia măsurii spectrale rezultă ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$) că

$$E(\sigma) = E(\sigma)^2, \tag{2.27}$$

deci că $E(\sigma)$ sînt proiecţii (ortogonale) în $\mathcal{H}$. Măsura spectrală sau semispectrală $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este *totală* dacă $E(Z) = I$ (În general vom omite de a menţiona dacă $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este totală, menţionînd în schimb dacă nu este).

TEOREMA 7. *Dacă familia semispectrală* $\mathfrak{F} = (\mu_{f,g})_{f,g \in \mathcal{H}}$ *şi măsura semispectrală* $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ *sînt legate în sensul teoremei 6, atunci* F *este spectrală dacă şi numai dacă* $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ *este spectrală.*

Demonstraţie. Fie F spectrală; atunci pentru orice $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{B}(Z)$

$$E(\sigma_1 \cap \sigma_2) = U_{\chi_{\sigma_1 \cap \sigma_2}} = U_{\chi_{\sigma_1} \chi_{\sigma_2}} = U_{\chi_{\sigma_1}} U_{\chi_{\sigma_2}} = E(\sigma_1) E(\sigma_2).$$

Invers, pentru φ, $\widetilde{\varphi}$ boreliene mărginite şi

$$\|\varphi - \sum \varphi_j \chi_{\sigma_j}\| \leqslant \varepsilon,$$

$$\|\widetilde{\varphi} - \sum \widetilde{\varphi}_k \chi_{\widetilde{\sigma}_k}\| \leqslant \varepsilon,$$

avem (după (2.25))

$$\|U_\varphi U_{\widetilde{\varphi}} - \sum \varphi_j E(\sigma_j) \sum \widetilde{\varphi}_k E(\widetilde{\sigma}_k)\| \leqslant C\varepsilon,$$

unde C este o constantă independentă de ε. Avem

$$\|U_\varphi U_{\widetilde{\varphi}} - U_{\varphi\widetilde{\varphi}}\| \leqslant \|U_\varphi U_{\widetilde{\varphi}} - \sum \varphi_j E(\sigma_j) \sum \widetilde{\varphi}_k E(\widetilde{\sigma}_k)\| +$$
$$+ \|\sum \varphi_j E(\sigma_j) \sum \widetilde{\varphi}_k E(\widetilde{\sigma}_k) - U_{\varphi\widetilde{\varphi}}\| \leqslant C\varepsilon + \|\sum_{j,k} \varphi_j \widetilde{\varphi}_k E(\sigma_j \cap \widetilde{\sigma}_k) - U_{\varphi\widetilde{\varphi}}\|.$$

Or

$$\|\varphi\widetilde{\varphi} - \sum_{j,k} \varphi_j \widetilde{\varphi}_k \chi_{\sigma_j \cap \sigma_k}\| = \|\varphi\widetilde{\varphi} - \sum_j \varphi_j \chi_{\sigma_j} \sum_k \widetilde{\varphi}_k \chi_{\widetilde{\sigma}_k}\| \leqslant L\varepsilon,$$

unde L este independent de ε, aşa că după (2.25),

$$\|U_{\varphi\widetilde{\varphi}} - \sum \varphi_j \widetilde{\varphi}_k E(\sigma_j \cap \widetilde{\sigma}_k)\| \leqslant KL\varepsilon$$

şi prin urmare

$$\|U_{\varphi\widetilde{\varphi}} - U_\varphi U_{\widetilde{\varphi}}\| \leqslant (C + KL)\varepsilon$$

şi cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, obţinem

$$U_{\varphi\widetilde{\varphi}} = U_\varphi U_{\widetilde{\varphi}}$$

ceea ce este deci adevărat pentru orice $\varphi, \widetilde{\varphi} \in C(Z)$. Pe baza corolarului 1 la teorema 5 rezultă că $\mathcal{F}$ este spectrală, cta.

6. Fie $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$, unde $\mathcal{K}$ este un alt spaţiu Hilbert iar $\mathcal{H}$ este un subspaţiu (închis liniar) al lui $\mathcal{K}$. Fie P proiecţia ortogonală a lui $\mathcal{K}$ pe $\mathcal{H}$ şi fie $(F(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ o măsură spectrală valorificată în $\mathcal{K}$ (adică $F(\sigma) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$). Pentru $f \in \mathcal{H}$ să punem, prin definiţie,

$$E(\sigma)f = PF(\sigma)f, \quad \sigma \in B(Z). \tag{2.28}$$

Se verifică imediat că $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ este o măsură semispectrală (valorificată în $\mathcal{H}$) şi că dacă $(F(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ era totală, atunci şi $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ este totală.

Măsura semispectrală $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ este supusă încă la condiţia

$$E(\sigma) \leqslant I, \quad \sigma \in \mathcal{B}(Z). \tag{2.29}$$

Într-adevăr, pentru $f \in \mathcal{H}$

$$(E(\sigma)f, f) = (PF(\sigma)f, f) = (F(\sigma)f, f) \leqslant (f, f),$$

unde am folosit că o proiecţie ortogonală F este $\leqslant I$). Prin definiţie $(F(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ este o *dilatare spectrală* a măsurii semispectrale $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$. Ea este *minimală* dacă vectorii $F(\sigma)f$, unde $f \in \mathcal{H}$ şi $\sigma \in \mathcal{B}(Z)$ sînt arbitrare, generează un subspaţiu liniar dens în $\mathcal{K}$.

Observaţie. Dacă $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ *este totală şi are o dilatare spectrală, atunci are şi una totală.*

Într-adevăr, în acest caz din $f = PF(Z)f$ deducem $\|f\| = \|PF(Z)f\| \leqslant \|F(Z)f\|$ ceea ce este posibil (căci P este o proiecţie ortogonală) numai dacă $PF(Z)f = F(Z)f$, adică $F(Z)f = f$, de unde $F(Z)P = P$, deci $P \leqslant F(Z)$, Fie $\mathcal{H}_1 = F(Z)\,\mathcal{H}$ și fie $F_1(\sigma)$ restricția lui $F(\sigma)$ la $\mathcal{H}_1$. Atunci $(F_1(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este o măsură spectrală totală, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1$ și dacă P_1 este proiecția lui $\mathcal{H}_1$ pe $\mathcal{H}$, avem $F(\sigma) = P_1 F_1(\sigma) f$, pentru orice $f \in \mathcal{H}$, cta.

TEOREMA 8. *Fie* $(E(\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ *o măsură semispectrală (valorificată în* $\mathcal{H}$*) și fie* $(F_1(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ *(valorificată în* $\mathcal{H}_1 \supseteq \mathcal{H}$*) și* $(F_2(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ *valorificată în* $\mathcal{H}_2 \supseteq \mathcal{H}$*) două dilatări spectrale (care se presupun că există!) minimale ale lui* $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$. *Atunci există un operator unitar* W *de la* $\mathcal{H}_1$ *pe* $\mathcal{H}_2$ *astfel ca*

$$Wf = f \quad \textit{pentru orice}\ f \in \mathcal{H}$$

$$WF_1(\sigma) = F_2(\sigma)\,W \ \textit{pentru orice}\ \sigma \in \mathfrak{B}(Z).$$

(Să amintim că W, operator liniar de la $\mathcal{H}_1$ la $\mathcal{H}_2$, este izometric dacă $(Wf, Wg) = (f, g)$ pentru orice $f, g \in \mathcal{H}_1$. El este unitar dacă $W\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$. În acest caz $W^* = W^{-1}$ este de asemenea izometric (și de asemenea unitar)).

Demonstrație. Să punem

$$\check{W} \sum_{k=1}^{n} c_k F_1(\sigma_k) f_k = \sum_{k=1}^{n} c_k F_2(\sigma_k) f_k,$$

unde $c_k \in C$, $\sigma_k \in \mathfrak{B}(Z)$, și $f_k \in \mathcal{H}$ ca și $n < \infty$ sînt arbitrari. Avem

$$\|\check{W} \sum_{k=1}^{n} c_k F_1(\sigma) f_k\|^2 = \|\sum c_k F_2(\sigma_k) f_k\|^2 = \sum c_k \bar{c}_h (F_2(\sigma_k \cap \sigma_h) f_k, f_h) =$$

$$= \sum c_k \bar{c}_h (E(\sigma_k \cap \sigma_h) f_k, f_h) = \sum c_k \bar{c}_h (F_1(\sigma_k \cap \sigma_h) f_k, f_h) = \|\sum_{k=1}^{n} c_k F_1(\sigma) f_k\|^2$$

ceea ce arată întîi că $\check{W}$ este mărginit ($\|\check{W}\| \leqslant 1$) și deci se poate prelungi într-un operator liniar W mărginit de la $\mathcal{H}_1$ la $\mathcal{H}_2$. În al doilea rînd, relațiile de mai sus ne arată că $\check{W}$ este izometric deci W este de asemenea. Cum $W\mathcal{H}_1 \supseteq$ domeniul valorilor lui $\check{W}$ care este dens în $\mathcal{H}_2$, rezultă $W\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, deci W este unitar. Conform definiției, pentru $f \in \mathcal{H}$ ($n = 1$, $\sigma_1 = Z$, $f_1 = f$),

$$Wf = \check{W} f_1 = f_1 = f.$$

În plus

$$WF_1(\sigma) \sum_k c_k F_1(\sigma_k) f_k = \check{W} \sum_k c_k F_1(\sigma_k \cap \sigma) f_k = \sum_k c_k F_2(\sigma_k \cap \sigma) f_k =$$

$$= F_2(\sigma) \sum_k c_k F_2(\sigma_k) f_k = F_2(\sigma)\,\check{W} \sum c_k F_1(\sigma_k) f_k$$

de unde, prin continuitate, obținem

$$WF_1(\sigma) = F_2(\sigma)\,W, \text{ cta.}$$

Teorema 8 ne permite să nu mai facem, în cele ce urmează, nici o distincţie între dilatările spectrale (cînd ele există) minimale ale unei măsuri semispectrale. Să remarcăm de asemenea că dacă o măsură semispectrală are o dilatare spectrală, atunci în mod evident ea are şi una minimală.

Problema existenţei dilatării spectrale este complet rezolvată de următoarea :

TEOREMA 9. *Orice măsură semispectrală* $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ *verificînd* (2.29) *admite dilatări spectrale.* (Condiţia (2.29) este deci condiţia necesară şi suficientă ca $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(Z)}$ să aibă dilatări spectrale).

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{L}$ spaţiul vectorial complex generat de $\mathcal{B}(Z) \times \mathcal{H}$. Prin urmare $u \in \mathfrak{L}$ însemnează că

$$u = \sum_{k=1}^{n} c_k (\sigma_k, f_k),$$

unde $c_k \in C$, $\sigma_k \in \mathcal{B}(Z)$, $f_k \in \mathcal{H}$ şi $n < \infty$ sînt arbitrari. Să definim pe $\mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ funcţia

$$[u, \widetilde{u}] = [\sum c_j (\sigma_j, f_j), \sum \widetilde{c}_k (\widetilde{\sigma}_k, \widetilde{f}_k)] = \sum_{j,k} c_j \overline{\widetilde{c}}_k (E(\sigma_j \widetilde{\sigma}_k) f_j \widetilde{f}_k).$$

Avem

$$[u, \widetilde{u}] = \sum c_j \overline{\widetilde{c}}_k (E(\sigma_j \cap \widetilde{\sigma}_k) f_j, \widetilde{f}_k) = \overline{\sum \widetilde{c}_k \bar{c}_j (E(\widetilde{\sigma}_k \cap \sigma_j) \widetilde{f}_k, f_j)} =$$

$$= \overline{[\widetilde{u}, u]}, \quad u, \widetilde{u} \in \mathfrak{L},$$

$$[cu, \widetilde{u}] = c[u, \widetilde{u}], \quad u, \widetilde{u} \in \mathfrak{L}, \ c \in C,$$

şi în fine în mod asemănător

$$[u_1 + u_2, \widetilde{u}] = [\sum c_i^1 (\sigma_i^1, f_i^1) + \sum c_j^2 (\sigma_j^2, f_j^2), \sum \widetilde{c}_k (\widetilde{\sigma}_k, \widetilde{f}_k)] =$$

$$= \sum_{i,h} c_i^1 \overline{\widetilde{c}}_k (E(\sigma_i^1 \cap \widetilde{\sigma}_k) f_i^1, \widetilde{f}_k) + \sum_{j,k} c_j^2 \overline{\widetilde{c}}_k (E(\sigma_j^2 \cap \widetilde{\sigma}_k) f_j^2, \widetilde{f}_k) = [u_1, u] + [u_2, u].$$

Astfel $[u, \widetilde{u}]$ este o formă biliniară pe $\mathfrak{L}$. În plus $[u, u] \geqslant 0$. Pentru aceasta să remarcăm întîi că

$$[u, u] = \left[\sum_{j=1}^{n} c_j (\sigma_j, f_j), \sum_{j=1}^{n} c_j (\sigma_j, f_j)\right] = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \cdot \bar{c}_k (E(\sigma_j \cap \sigma_k) f_j, f_k).$$

Fie $\mathcal{G}$ familia tuturor intersecţiilor $\sigma_{i_1} \cap \sigma_{i_2} \cap \ldots \cap \sigma_{i_l}$ unde $1 \leqslant i_l \leqslant n$, $l = 1, 2, \ldots, \alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$. Fie $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ atomii acestei familii (finite). Prin aceasta înţelegem că : (i) $\omega_j \in \mathcal{G}$, (ii) dacă $\omega_j \cap \sigma \neq \emptyset$ pentru un $\sigma \in \mathcal{G}$, atunci $\omega_j \subset \sigma$ şi (iii) $\omega_j \cap \omega_h = \emptyset$, $j \neq h$. Existenţa acestor atomi este evidentă. De asemenea este evident că fiecare σ_i este o reuniune de atomi. Pentru un atom ω_j să notăm cu I_j mulțimea indicilor i pentru care $\omega_j \subset \sigma_i$. Atunci

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k (E(\sigma_j \cap \sigma_k) f_j, f_k) = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k \sum_{\omega_s \subset \sigma_j \cap \sigma_k} (E(\omega_s) f_j f_k) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \sum_{\sigma_j \cap \sigma_k \supset \omega_s} c_j \bar{c}_k (E(\omega_s) f_j, f_k) = \sum_{s=1}^{N} (E(\omega_s) \sum_{j \in I_s} c_j f_j, \sum_{k \in I_s} c_k f_k) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} (E(\omega_s) \sum_{j \in I_s} c_j f_j, \sum_{j \in I_s} c_j f_j) \geqslant 0.$$

Fie $\mathcal{L}_0$ mulțimea acelor $u \in \mathcal{L}$ pentru care $[u, u] = 0$. Evident, $\mathcal{L}_0$ este subspațiu vectorial al lui $\mathcal{L}$. Fie $\dot{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/_{\mathcal{L}_0}$. În $\dot{\mathcal{L}}$ vom defini

$$(\dot{u}, \dot{v}) = [u, v], \text{ unde } u \in \dot{u}, \ v \in \dot{v}. \tag{2.30}$$

Fie $u_1 \in \dot{u}$, $v_1 \in \dot{v}$; atunci

$$|[u_1, v_1] - [u, v]| = |[u_1 - u, v]| + |[u_1, v - v_1]| \leqslant [u_1 - u, u_1 - u]^{1/2} [v, v]^{1/2} +$$

$$+ [u_1, u_1]^{1/2} [v - v_1 v - v_1]^{1/2} =$$

așa că definiția (2.30) este coherentă și deci pe $\dot{\mathcal{L}}$, $(\dot{u}, \dot{v})$ este o formă biliniară hermitică (nedegenerată, adică $(\dot{u}, \dot{u}) = 0$ atrage $\dot{u} = 0$). Fie $\hat{\mathcal{L}}$ spațiul Hilbert obținut din $\dot{\mathcal{L}}$. Putem presupune fără a restrînge generalitatea că $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este totală {în caz contrar n-avem decît să considerăm

$$Z' = Z \cup \{0\}, \ E'(\sigma) = E(\sigma)$$

$$E'(\sigma \cup \{0\}) = E(\sigma) + I - E(Z) \text{ pentru } \sigma \in \mathfrak{B}(Z),$$

să observăm că $(E'(\sigma'))_{\sigma' \in \mathfrak{B}(Z')}$ este totală și că orice dilatare spectrală a lui $(E'(\sigma'))_{\sigma' \in \mathfrak{B}(Z')}$ este și o dilatare spectrală a lui $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}\}$. Fie

$$\check{F}(\sigma) \sum c_k (\sigma_k, f_k) = \sum c_k (\sigma \cap \sigma_k, f_k).$$

Avem

$$\| \overset{\cdot}{\overline{\check{F}(\sigma) \sum c_k (\sigma_k, f_k)}} \|^2 = \| \overset{\cdot}{\overline{\sum c_k (\sigma \cap \sigma_k, f_k)}} \|^2 = [\sum c_k (\sigma \cap \sigma_k, f_k),$$

$$\sum c_k (\sigma \cap \sigma_k, f_k)] = \sum c_k \bar{c}_h (E(\sigma \cap \sigma_k \cap \sigma_h) f_k, f_h) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} (E(\sigma \cap \omega_s) \sum_{\omega_s \subset \sigma_j} c_j f_j, \sum_{\omega_s \subset \sigma_j} c_j f_j) \leqslant \sum_{s=1}^{N} (E(\omega_s) \sum_{\omega_s \subset \sigma_j} c_j f_j, \sum_{\omega_s \subset \sigma_j} c_j f_j) =$$

$$= \| \overset{\cdot}{\overline{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}} \|^2$$

ceea ce arată că aplicația

$$\overline{\dot{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}} \to \overline{\check{F}(\sigma) \dot{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}}$$

se prelungește în mod unic într-un operator $F(\sigma)$ ($\|F(\sigma)\| \leqslant 1$) al lui $\hat{\dot{\mathfrak{L}}}$. Avem

$$F(\sigma)^2 \overline{\dot{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}} = F(\sigma) \overline{\dot{\sum c_k (\sigma \cap \sigma_k, f_k)}} = \overline{\dot{\sum c_k (\sigma \cap \sigma_k, f_k)}} =$$

$$= F(\sigma) \overline{\dot{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}}$$

ceea ce ne arată că $F(\sigma)^2 = F(\sigma)$. Analog putem verifica că $0 \leqslant F(\sigma)$ și că $F(\sigma_1 \cap \sigma_2) = F(\sigma_1) F(\sigma_2)$. În plus pentru $u = \sum c_k (\sigma_k, f_k)$ avem că

$$(F(\sigma)\dot{u}, \dot{u}) = \left(\overline{\dot{\sum c_k (\sigma \cap \sigma_k, f_k)}}, \overline{\dot{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}}\right) = \sum c_k \bar{c}_h (E(\sigma \cap \sigma_k \cap \sigma_h) f_k, f_k)$$

este o măsură boreliană pe Z, de unde, în particular, $F(\sigma_1 \cup \sigma_2) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2)$, dacă $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Fie acum $u_0 \in \hat{\dot{\mathfrak{L}}}$ arbitrar și fie $(\sigma_n) \subset \mathfrak{B}(Z)$, $\sigma_n \cap \sigma_m = \emptyset$ pentru $n \neq m$. Avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F(\sigma_n) u_0, u_0) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (F(\sigma_n) u_0, u_0) = \lim \left(F\left(\bigcup_{n=1}^{N} \sigma_n\right) u_0, u_0\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) u_0, u_0\right). \tag{2.31}$$

Fie acum $u = \overline{\dot{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}}$ astfel ca $\| u_0 - u \| < \varepsilon$, cu $\varepsilon > 0$ dat arbitrar dar fixat pentru moment. Avem

$$\sum_{n=1}^{N} (F(\sigma_n) u_0, u_0) - \sum_{n=1}^{N} (F(\sigma_n) u, u) = \left(F\left(\bigcup_{i=1}^{N} \sigma_n\right) u_0, u_0 - u\right) +$$

$$\left(F\left(\bigcup_{i=1}^{N} \sigma_n\right)(u_0 - u), u\right) \leqslant \| u_0 \| \, \| u_0 - u \| + \| u_0 - u \| \, \| u \| \leqslant \varepsilon (2 \| u_0 \| + \varepsilon)$$

și analog

$$\left(F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) u_0, u_0) - F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) u, u\right) \leqslant \varepsilon (2 \| u_0 \| + \varepsilon)$$

așa că

$$\left(F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) u_0, u_0\right) \leqslant \varepsilon (2 \| u_0 \| + \varepsilon) + \left(F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) u, u\right) = \varepsilon (2 \| u_0 \| + \varepsilon) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (F(\sigma_n) u, u) = \varepsilon (2 \| u_0 \| + \varepsilon) + \lim \sum_{n=1}^{N} (F(\sigma_n) u, u) \leqslant 2\varepsilon (2 \| u_0 \| + \varepsilon) +$$

$$+ \lim \sum_{n=1}^{N} (F(\sigma_n) u_0, u_0)$$

de unde, făcînd $\varepsilon \to 0$, obţinem

$$\left(F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) u_0, u_0\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (F(\sigma_n) u_0, u_0)$$

ceea ce, împreună cu (2.31), ne arată că $(F(\sigma) u_0, u_0)$ este o măsură. În acest mod $(F(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este o măsură spectrală în $\hat{\dot{\mathfrak{L}}}$. Faptul că măsura este regulată, se demonstrează la fel. În fine să identificăm pe $f \in \mathcal{H}$ cu $\overset{\cdot}{\overline{(Z, f)}} \in \hat{\dot{\mathfrak{L}}}$. (Aceasta este permis căci

$$\|f\|^2 = (E(Z) f, f) = (E(Z \cap Z) f, f) = [(Z, f), (Z, f)] = \|\overset{\cdot}{\overline{(Z, f)}}\|^2.)$$

Spaţiul obţinut din $\hat{\dot{\mathfrak{L}}}$ prin identificarea lui $\{\overset{\cdot}{\overline{(Z, f)}} : f \in \mathcal{H}\}$ cu $\mathcal{H}$ să-l notăm cu $\mathfrak{K}$. Atunci

$$\overset{\cdot}{\overline{\sum c_k (\sigma_k, f_k)}} = \sum c_k F(\sigma_k) f_k$$

şi prin urmare pentru orice $f, g \in \mathcal{H}$, $\sigma \in \mathfrak{B}(Z)$

$$(F(\sigma), f, g) = \left(\overset{\cdot}{\overline{(\sigma, f)}}, \overset{\cdot}{\overline{(Z, g)}}\right) = [(\sigma, f), (Z, g)] = (E(\sigma \cap Z) f, g) = (E(\sigma) f, g).$$

Fie P proiecţia ortogonală a lui $\mathfrak{K}$ pe $\mathcal{H}$ şi fie $u \in \mathfrak{K}$ arbitrar. Avem

$$(PF(\sigma) f, u) = (F(\sigma) f, Pu) = (E(\sigma) f, Pu) = (PE(\sigma) f, u) = (E(\sigma) f, u)$$

de unde

$$E(\sigma) f = PF(\sigma) f$$

pentru orice $f \in \mathcal{H}$ şi $\sigma \in \mathfrak{B}(Z)$, cta.

Observaţii. 1°. Dacă $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ nu verifică condiţia (2.29), teorema 9 nu se aplică. Dar dacă în loc de $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$, considerăm $(cE(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ cu $c > 0$ suficient de mic, condiţia (2.29) este satisfăcută şi putem aplica teorema anterioară. Există însă un impediment în aceasta, anume construcţia depinde de $c > 0$ şi nu este unic determinată de către $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$. Putem evita aceasta dacă presupunem că

$$E(Z) E(\sigma) = E(\sigma) E(Z), \qquad (\sigma \in \mathfrak{B}(Z)).$$

În acest caz există un spaţiu $\mathfrak{K} \supset \mathcal{H}$ ca subspaţiu (liniar, închis etc.) şi o măsură spectrală $(F(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ valorificată în K astfel ca

$$E(\sigma) f = PF(\sigma) E(Z) f, f \in \mathcal{H}, \quad \sigma \in \mathfrak{B}(Z),$$

unde P este proiecţia ortogonală a lui $\mathfrak{K}$ pe $\mathcal{H}$. În ipoteza de minimalitate funcţionează teorema 8. Lăsăm cititorului ca exerciţiu obţinerea acestei teoreme.

2°. Fie $x \to T_x$ de tip pozitiv şi $T_e \leqslant I$ (bineînţeles $\mathfrak{A}$ presupusă autoadjunctă şi cu involuţie continuă). Teoremele 9 şi 5 dau nemijlocit următorul rezultat: Există un „supraspaţiu” Hilbert $\mathfrak{K}$ al lui $\mathcal{H}$ şi o aplicaţie $x \to U_x$ de tip pozitiv şi multiplicativă a lui $\mathfrak{A}$ în $\mathfrak{L}(\mathfrak{K})$ astfel ca

$$T_x = PU_x f, \qquad x \in \mathfrak{A}, \quad f \in \mathcal{H},$$

unde P este proiecţia ortogonală a lui $\mathfrak{K}$ pe $\mathcal{H}$.

§ 3. DESCOMPUNEREA SPECTRALĂ A OPERATORILOR NORMALI, HERMITICI ŞI UNITARI. DESCOMPUNEREA SEMISPECTRALĂ A OPERATORILOR GENERALI ÎNTR-UN SPAŢIU HILBERT

1. Să remarcăm întîi următoarea teoremă legată de reprezentarea gelfandiană a algebrelor Banach:

TEOREMA 1. *Dacă* $\mathcal{A}$ *este separabilă* (adică există o familie numărabilă $(x_n) \subset \mathcal{A}$ care generează algebric o mulţime densă în $\mathcal{A}$: familia (x_n) se numeşte *familie generatoare*), *atunci* Z *este metrizabil. Dacă* $\mathcal{A}$ *în plus are o familie generatoare finită* $x_1, \ldots, x_N$, *atunci* Z *se poate identifica cu o submulţime a spaţiului euclidian* R^N.

Demonstraţie. Fie pentru $\zeta_1, \zeta_2 \in Z$

$$\rho(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\hat{x}_n(\zeta_1) - \hat{x}_n(\zeta_2)|}{1 + |\hat{x}_n(\zeta_1) - \hat{x}_n(\zeta_2)|};$$

evident $\rho(\zeta_1, \zeta_2) = \rho(\zeta_2, \zeta_1)$; se verifică imediat că

$$\rho(\zeta_1, \zeta_3) \leqslant \rho(\zeta_1, \zeta_2) + \rho(\zeta_2, \zeta_3)$$

căci

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} \leqslant \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta} \quad \text{pentru } \alpha, \beta \geqslant 0.$$

În plus dacă $\zeta_1 = \zeta_2$, $\rho(\zeta_1, \zeta_2) = 0$, iar invers din $\hat{x}_n(\zeta_1) = \hat{x}_n(\zeta_2)$ deducem $\hat{y}(\zeta_1) = \hat{y}(\zeta_2)$ pentru orice $y = p(x_1, \ldots, x_n)$, unde p este un polinom şi n număr natural arbitrar. Cum aceşti y sînt denşi în $\mathcal{A}$, obţinem $\hat{y}(\zeta_1) = \hat{y}(\zeta_2)$ pentru orice $y \in \mathcal{A}$ şi cum $\hat{\mathcal{A}}$ separă pe Z, $\zeta_1 = \zeta_2$. În acest mod ρ este o metrică pe Z. Ne rămîne să arătăm că ρ induce pe Z aceeaşi topologie cu cea construită în § 1. Fie

$$S_\rho(\zeta_0) = \{\zeta;\ \rho(\zeta, \zeta_0) < \rho\}.$$

şi fie n suficient de mare ca $\sum\limits_{n+1}^{\infty} 1/2^j < \frac{\rho}{2}\cdot$ Atunci

$$V_{\frac{1}{2^n}, x_1, x_2, \ldots, x_n}(\zeta_0) \subset S_\rho(\zeta_0)$$

aşa ca sfera este o vecinătate în Z a lui ζ_0. Invers, fie $V_{\varepsilon, y_0, \ldots, y_n}$ o vecinătate oarecare a lui ζ_0 fixată. Fie $P_j(x_1, \ldots, x_{n_j})$ un polinom de $x_1, \ldots, x_{n_j}$ astfel ca

$$\| P_j(x_1, \ldots, x_{n_j}) - y_j \| < \delta, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Fie $m = \max(n_1, n_2, \ldots, n_n)$. Atunci, evident, dacă $|\hat{x}_i(\zeta_0) - \hat{x}_i(\zeta)| < \eta$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ pentru un anumit $\eta > 0$, avem

$$|\widehat{P_j(x_1, \ldots, x_{nj})}(\zeta) - \widehat{P_j(x_1, \ldots, x_{nj})}(\zeta_0)| = |P_j[\hat{x}_1(\zeta), \ldots, \hat{x}_{nj}(\zeta)] -$$

$$- P_j[\hat{x}_1(\zeta_0), \ldots, \hat{x}_{nj}(\zeta_0)]| < \delta$$

pentru orice $j = 1, \ldots, n$. În acest mod deducem că dacă

$$|x_i(\zeta_0) - x_i(\zeta)| < \eta, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

atunci

$$|\hat{y}_j(\zeta) - \hat{y}_j(\zeta_0)| \leqslant |\hat{y}_j(\zeta) - \widehat{P_j(x_1, \ldots, x_{n_j})}(\zeta)| + |\widehat{P_j(x_1, \ldots, x_{n_j})}(\zeta) -$$

$$- \widehat{P_j(x, \ldots, x_{n_j})}(\zeta_0)| + |\widehat{P_j(x_1, \ldots, x_{n_j})}(\zeta_0) - \hat{y}(\zeta_0)| < 3\delta$$

așa că dacă $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, obținem

$$V_{\eta, x_1, \ldots, x_m}(\zeta_0) \subset V_{\varepsilon, y_1 \ldots y_n}(\zeta_0). \tag{3.1}$$

Cum este evident că pentru ρ suficient de mic $S_\rho(\zeta_0) \subset V_{\eta, x_1, \ldots, x_m}(\zeta_0)$, rezultă că orice vecinătate din Z cuprinde o sferă, ceea ce termină demonstrația metrizabilității lui Z.

Dacă $x_1, \ldots, x_N$ este o familie generatoare pentru $\mathcal{A}$, atunci aplicația

$$\zeta \to (\hat{x}_1(\zeta), \ldots, \hat{x}_N(\zeta)) \tag{3.2}$$

este o aplicație continuă a lui Z în R^N. În plus, Z este compact iar aplicația este biunivocă (căci $x_1, \ldots x_N$ este generatoare!) deci (exercițiu ușor de topologie generală) aplicația (3.2) este și bicontinuă, ceea ce arată că Z este homeomorf cu imaginea sa din R^N și prin urmare îl putem identifica în mod natural cu această imagine, cta.

Observații. 1°. Dacă $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathcal{A}$ *este familie generatoare, iar* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in Z \subset R^N$ (unde Z este *identificat cu imaginea sa prin* (3.2)), *atunci*

$$\hat{x}_1(\zeta) = \zeta_1, \; \hat{x}_2(\zeta) = \zeta_2, \ldots, \; \hat{x}_N(\zeta) = \zeta_N.$$

2°. Să remarcăm că relația (3.1) arată că *dacă* $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$ este *o familie generatoare oarecare, atunci* $\{V_{\eta, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}}(\zeta_0)\,;\ \eta > 0,\ i_1, \ldots, i_n \in I,\ n = 1, 2, \ldots\}$ *constituie un sistem fundamental de vecinătăți ale lui* ζ_0 *în* Z.

2. Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert și $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operator $\geqslant 0$ (adică $A \geqslant 0$). Atunci

$$\|A\| = \sup\ (Af, f). \tag{3.3}$$

Într-adevăr, avem

$$M_A = \sup_{\|f\| \leqslant 1} (Af, f) \leqslant \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|Af\|\,\|f\| = \|A\|$$

şi

$$\|Af\|^2 = (Af, f) \leqslant (Af, f)^{1/2}\,(AAf, Af)^{1/2} \leqslant M_A \|f\|\,\|Af\|$$

de unde

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|Af\| \leqslant M_A, \text{ cta.}$$

În continuare, *fie* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *arbitrar. Atunci*

$$\|T^*T\| = \|T\|^2 \tag{3.4}$$

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{3.5}$$

Relaţia (3.4) rezultă în felul următor din (3.3) :

$$\|T\|^2 = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \|Tf\|^2 = \sup_{\|f\| \leqslant 1} (T^*Tf, f) = \|T^*T\|$$

iar (3.5) din (3.4) întrucît

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\,\|T\|, \text{ cta.}$$

Un operator $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ este *normal* dacă $NN^* = N^*N$. Avem următoarea proprietate imediată : $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *este normal, dacă şi numai dacă* $\|Nf\| = \|N^*f\|$, $f \in \mathcal{H}$.

Într-adevăr, dacă N este normal,

$$\|Nf\|^2 = (N^*Nf, f) = (NN^*f, f) = \|N^*f\|^2.$$

Invers deducem

$$((N^*N - NN^*)f, f) = 0$$

de unde $N^*N - NN^* = 0$, cta. Este evident de asemenea că *dacă* $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *este normal,* $\lambda \in C$ *şi* $n \geqslant 0$ *este întreg, atunci* $(N - \lambda I)^n$ *este de asemenea normal.* O altă proprietate utilă a operatorilor normali este dată de inegalitatea

$$\|Nf\|^2 \leqslant \|N^2f\|\,\|f\| \tag{3.6}$$

valabilă pentru orice $f \in \mathcal{H}$ *şi* $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *normal.* Demonstraţia ei este imediată :

$$\|Nf\|^2 = (Nf, Nf) = (N^*Nf, f) \leqslant \|N^*Nf\|\,\|f\| = \|N^2f\|\,\|f\|.$$

Următoarea consecinţă a relaţiei (3.6) :

$$\|(N - \lambda I)f\|^{2^n} \leqslant \|f\|^{1+2+\dots+2^{n-1}}\,\|(N - \lambda I)^{2^n} f\| \quad (f \in \mathcal{H}) \tag{3.7}$$

va avea un anumit rol în continuare. Ea se demonstrează aplicînd succesiv (3.6) lui $N - \lambda I$, $(N - \lambda I)^2, \ldots, (N - \lambda I)^{2^{n-1}}$.

Iată acum cîteva consecinţe imediate ale rezultatelor anterioare :

TEOREMA 2. *Fie* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *o subalgebră Banach comutativă şi involutivă (cu element unitate). Atunci* $\mathcal{A}$ *este o* C^**-algebră izometrică cu algebra funcţiilor continue pe spectrul său* Z.

Corolar imediat al teoremei 8 şi observaţiei 4 din No. 3, § 1.

TEOREMA 3. *Fie* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *o subalgebră Banach comutativă şi involutivă (cu element unitate). Atunci există pe* Z *o măsură spectrală* $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ *unic determinată astfel ca*

$$A = \int_Z \hat{A}(\zeta)\, \mathrm{d}E(\zeta), \quad A \in \mathcal{A}.$$

(Aici se subînţelege că $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este regulată iar integrala este luată în sensul observaţiei 4°, punctul 5, § 2, adică $A = U_{\hat{A}}$).

N-avem decît să considerăm aplicaţia $A \rightarrow T_A = A$ a lui $\mathcal{A}$ în $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ şi să-i aplicăm rezultatele din § 2, punctul 2 şi 4.

Observaţii. 1°. Dacă $I \in \mathcal{A}$ (I fiind operatorul identic în $\mathcal{H}$), atunci $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este totală şi invers. Într-adevăr, în acest caz I este necesar unitatea în $\mathcal{A}$ şi deci

$$I = \int_Z \hat{I}(\zeta)\, \mathrm{d}E(\zeta) = \int_Z . dE(\zeta) = E(Z).$$

iar invers dacă $I = E(Z)$, cum $E(Z)$ este unitatea în $\mathcal{A}$, rezultă $I \in \mathcal{A}$, cta.

2°. În teorema 3, ţinînd seama de observaţiile 3°, punctul 4, § 2 şi 6°, punctul 5, § 2, rezultă că suportul lui $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ este Z.

Fie acum $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operator, normal fixat şi fie

$$A_1 = \mathrm{Re} N = \frac{1}{2}(N + N^*),\ A_2 = \mathrm{Im} N = \frac{1}{2i}(N - N^*)$$

şi fie $\mathcal{A}(N)$ algebra generată de A_1 şi A_2 în $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ (adică cea mai mică algebră Banach $\subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ care conţine pe I, A_1 şi A_2). Atunci $\{A_1, A_2\}$ este o familie generatoare pentru $\mathcal{A}(N)$, deci pe baza teoremei 1, Z este o submulţime (compactă) a lui R^2 şi $\hat{A}_1(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_1$, $\hat{A}_2(\zeta_1, \zeta_2) = \zeta_2$. Să identificăm pe R^2 cu C prin $(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$. Atunci $Z \subset C$. În plus $\hat{N}(\zeta) = \hat{A}_1(\zeta_1) + i\hat{A}_2(\zeta_2) = \zeta_1 + i\zeta_2 = \zeta$. Fie $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$ măsura spectrală ataşată algebrei $\mathcal{A}(N)$ conform teoremei 3. Avem

$$A = \int_Z \hat{A}(\zeta)\, \mathrm{d}E(\zeta)$$

pentru orice $A \in \mathcal{A}(N)$, în particular pentru $A = N - \lambda_0 I$. Obţinem (unde $\mathfrak{F} = (\mu_{f,g})_{(f,g \in \mathcal{H}}$ este familia spectrală ataşată lui $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(Z)}$)

$$\|(N - \lambda_0 I) f\|^2 = ((N^* - \bar{\lambda}_0 I)(N - \lambda_0 I) f_1 f) = (U_{|\zeta - \lambda_0|^2} f, f) =$$

$$= \int_Z |\zeta - \lambda_0|^2\, \mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta)$$

Fie $\|f\| = 1$ şi să presupunem că $\lambda_0 \notin \sigma(N)$. Atunci $\|(N - \lambda_0 I) f\| \geqslant \geqslant \varepsilon_0 > 0$ cu ε_0 independent de f (presupus $=$ 1 în normă). Avem

$$\varepsilon_0^2 \leqslant \int_Z |\zeta - \lambda_0|^2 \, d\mu_{f,f}(\zeta).$$

Dacă $Z \cap \{\zeta ; |\zeta - \lambda_0| < \varepsilon_0/2\} \neq \varnothing$, atunci cum Z este suportul măsurii $(E(\sigma))$ rezultă că

$$E(\sigma) = E(\{\zeta ;\ |\zeta - \lambda_0| < \varepsilon_0/2\}) \neq 0.$$

Fie $\|f\| = 1$, $f \in E(\{\zeta ;\ |\zeta - \lambda_0| < \varepsilon_0/2\})\,\mathcal{H}$; atunci

$$\int_Z |\zeta - \lambda_0|^2 \, d\mu_{f,f}(\zeta) = (U_{|\zeta-\lambda_0|^2} f, f) = (U_{|\zeta-\lambda_0|^2} U_{\chi_\sigma} f, f) =$$

$$= \int_Z |\zeta - \lambda_0|^2 \chi_\sigma(\zeta) \, d\mu_{f,f}(\zeta) =$$

$$= \int_{\{\zeta ;\ |\zeta-\lambda_0/ < \varepsilon_0/2\}} |\zeta - \lambda_0/^2 \, d\mu_{f,f}(\zeta) \leqslant (\varepsilon_0|_2)^2,$$

adică

$$\varepsilon_0^2 \leqslant \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2.$$

Această absurditate se datoreşte ipotezei că $Z \cap \{\zeta ; |\zeta - \lambda_0| < \varepsilon_0/2\} \neq \varnothing$. În acest mod $\sigma(N) \supset Z$. Dar pe de altă parte (vezi observaţia 1^0 cît şi observaţia 1° din §1, punctul 1)

$$Z = \{\hat{A}_1(\zeta) + i\,\hat{A}_2(\zeta) ; \zeta \in Z\} = \{\hat{N}(\zeta) ; \zeta \in Z\}$$

care este spectrul lui N considerat în $\mathcal{A}(N)$. Acest spectru include evident $\sigma(N)$, aşa că $Z \supseteq \sigma(N)$ şi prin urmare $Z = \sigma(N)$. În acest mod am obţinut o parte din *teorema de descompunere spectrală a unui operator normal* :

TEOREMA 4. *Pentru orice operator normal* $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *există o măsură spectrală* (*regulată, totală*) $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}\,\sigma(N))}$ (*unde* $\sigma(N)$ *este spectrul lui* N) *unic determinată astfel ca*

$$N = \int_{\sigma(N)} \zeta \, dE(\zeta). \tag{3.8}$$

Ne rămîne să demonstrăm unicitatea măsurii spectrale. Fie $(F(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{B}(\sigma(N))}$ o altă măsură spectrală cu aceleaşi proprietăţi. Avem $N = V_\zeta$, deci $A_1 = V_{\mathrm{Re}\zeta}$, $A_2 = V_{\mathrm{Im}\zeta}$, de unde

$$p(A_1, A_2) = p(V_{\mathrm{Re}\zeta}, V_{\mathrm{Im}\zeta}) = V_{p(\mathrm{Re}\zeta, \mathrm{Im}\zeta)} =$$

$$= \int p(Re\zeta, \mathrm{Im}\,\zeta) \, dF(\zeta).$$

pentru orice polinom $p(\zeta_1, \zeta_2)$. Or, $Z = \sigma(N)$, unde Z este spectrul algebrei $\mathcal{A}(N)$ şi $p(\zeta_1, \zeta_2) = \widehat{p(A_1, A_2)}$, aşa că

$$p(A_1, A_2) = \int_Z \widehat{p(A_1, A_2)}(\zeta)\, \mathrm{d}F(\zeta)$$

de unde prin continuitate

$$A = \int \hat{A}(\zeta)\, \mathrm{d}F(\zeta)$$

pentru orice $A \in \mathcal{A}(N)$. Pe baza teoremei 3, $(E(\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{B}(Z)} = (F(\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{B}(Z)}$, cta.

Observaţii. 3°. Partea din teoremă care priveşte unicitatea măsurii spectrale poate fi sensibil extinsă. Fie $(F(\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{B}(C)}$ *o măsură spectrală (regulată şi totală) definită pe C astfel ca*

$$(3.9) \qquad (Nf, g) = \int_C \zeta \mathrm{d}(F(\zeta)f, g), \; \|Nf\|^2 = \int_C |\zeta|^2 \mathrm{d}(F(\zeta)f, f).$$

Atunci

$$(3.10) \qquad F(\sigma) = E(\sigma \cap \sigma(N)).$$

Vom demonstra întîi că

$$(3.11) \qquad F(\{\zeta;\ |\zeta| > \|N\|\}) = 0,$$

aşa că dacă în loc de $(F(\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{B}(C)}$, considerăm

$$F'(\sigma) = F(\sigma), \; \sigma \in \mathfrak{B}(\{\zeta;\ |\zeta| \leqslant \|N\|\}) = \mathfrak{B}(D_{\|N\|}),$$

atunci

$$(3.12) \qquad F(\sigma) = F'(\sigma \cap D_{\|N\|}), \qquad \sigma \in \mathfrak{B}(C),$$

şi $(F'(\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{B}(D_{\|N\|})}$ este o măsură spectrală pe $D_{\|N\|}$. Or pentru $(F'(\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{B}(D_{\|N\|})}$ putem scrie (vezi observaţia 4°, punctul 5, §2)

$$N = \int_{D_{\|N\|}} \lambda\, \mathrm{d}F'(\lambda).$$

De aici deducem, într-un mod analog cu acel în care am dedus $Z \sqsubseteq \sigma(N)$, că suportul măsurii $(F'(\sigma))_{\sigma\in\mathfrak{B}(D_{\|N\|})}$ este inclus în $\sigma(N)$. Punînd

$$F''(\sigma) = F'(\sigma), \quad (\sigma \in \mathfrak{B}(\sigma(N))$$

obţinem o măsură spectrală (regulată, totală) care verifică (3.8), aşa că $F''(\sigma) = E(\sigma)$. Cum $F'(\sigma) = F''(\sigma \cap \sigma(N))$ pentru orice $\sigma \in \mathfrak{B}(D_{\|N\|})$, (3.10) rezultă acum direct din (3.12).

În acest mod, ne-a rămas de arătat (3.11). Iată schiţa demonstraţiei : Fie $g = F(\{\zeta;\ |\zeta| \geqslant \|N\| + \varepsilon\})\, g$, unde $\varepsilon > 0$ este fixat. Dacă (3.11) n-ar avea loc, am avea un $\varepsilon > 0$ şi un $g \neq 0$ cu proprietăţile de mai sus. Atunci

$$\|N\|^2 \|g\|^2 \geqslant \|Ng\|^2 = \int |\zeta|^2 \,\mathrm{d}(F(\zeta)g, g) = \int_{\{\zeta:\, |\zeta| \geqslant \|N\| + \varepsilon\}} |\zeta|^2 \,\mathrm{d}(F(\zeta)g, g) \geqslant$$

$$\geqslant (\|N\| + \varepsilon)^2 \int_{\{\zeta:\, |\zeta| \geqslant \|N\| + \varepsilon\}} \mathrm{d}(F(\zeta)g, g) = (\|N\| + \varepsilon)^2 \|g\|^2,$$

contradicţie !

4°. Fie $N = H$ hermitic (adică $H = H^*$). Atunci $A_1 = H$ şi $A_2 = 0$, ceea ce ne arată că $\sigma(H) = \{\hat{A}_1(\zeta)\,;\, \zeta \in Z\} = \{\mathrm{Re}\,\zeta,\, \zeta \in Z\}$ este real. Teorema 4 dă deci următoarea teoremă de descompunere spectrală a operatorilor hermitici :

Fie $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *hermitic* ; *atunci* $\sigma(H)$ *este pe axa reală şi există o măsură spectrală unic determinată definită pe* $\sigma(H)$ *astfel ca*

$$H = \int_{\sigma(H)} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda).$$

5°. Fie $N = U$ unitar (adică $UU^* = U^*U = I$). Atunci $\sigma(U) = Z = \{\hat{N}(\zeta)\,;\, \zeta \in Z\} = \{\hat{U}(\zeta)\,;\, \zeta \in Z\}$. Or

$$|\hat{U}(\zeta)|^2 = |\hat{U}(\zeta)\,\hat{U}^*(\zeta)| = |\hat{I}(\zeta)| = 1$$

aşa că $\sigma(U) \subset \{\lambda\,;\, |\lambda| = 1\}$. Obţinem deci următoarea *teoremă de descompunere spectrală a operatorilor unitari* :

Fie $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *unitar* ; *atunci* $\sigma(U)$ *este conţinut în cercul unitate şi există o măsură spectrală unic determinată definită pe* $\sigma(U)$ *astfel ca*

$$U = \int_{\sigma(U)} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda).$$

6°. Să remarcăm că *dacă* $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *comută cu* N *şi* N^*, *atunci* $XE(\sigma) = E(\sigma)X$ *pentru orice* $\sigma \in \mathcal{B}(\sigma(N))$ (*în particular* $NE(\sigma) = E(\sigma)N$). Într-adevăr, X comută cu A_1 şi A_2 deci cu orice element din $\mathcal{A}(N)$ şi prin urmare cu fiecare $T_A = A \in \mathcal{A}$; prin urmare pe baza observaţiilor 1°, punctul 4 şi 5°, punctul 5 din § 2 obţinem comutativitatea dorită.

3. Vom căuta în acest aliniat să lămurim semnificaţia descompunerii spectrale a operatorilor normali. În acest scop să convenim să numim un subspaţiu Hilbert $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ *maximal spectral pentru* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ dacă $\mathcal{M}$ este invariant la T şi dacă orice alt subspaţiu (Hilbert) $\mathcal{N}$ invariant la T cu proprietatea că $\sigma(T\,|\,\mathcal{N}) \subset \sigma(T\,|\,\mathcal{M})$ (notăm cu $T\,|$. restricţia lui T la un subspaţiu invariant la T ; evident, $\sigma(\,.\,)$ înseamnă spectrul operatorului) este inclus în $\mathcal{M}$. Iată o proprietate imediată a spaţiilor maximal spectrale ale unui operator T :

Fie $\mathcal{M}$ *maximal spectral pentru* $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; *atunci* $\mathcal{M}$ *este invariant pentru orice operator* $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *care comută cu* T.

Demonstrație. Fie $\lambda \notin \sigma(X)$ fixat și fie $U=\lambda I-X$. Atunci $UT = TU$, $U^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, așa că $\mathcal{N} = U\mathcal{M}$ este un subspațiu (Hilbert) al lui $\mathcal{H}$. Avem

$$T\mathcal{N} = T\,U\,\mathcal{M} = U\,T\,\mathcal{M} \subseteq U\,\mathcal{M} = \mathcal{N}$$

deci $\mathcal{N}$ este invariant la T. Fie $\mu \notin \sigma(T/\mathcal{M})$. Atunci

$$U\ (\mu I/\mathcal{M} - T/\mathcal{M})^{-1}\ U^{-1}/\mathcal{N}$$

este inversul lui $\mu I/\mathcal{N} - T/\mathcal{N}$ așa că $\mu \notin \sigma(T/\mathcal{N})$. Prin urmare $\sigma(T/\mathcal{N}) \subseteq \sigma(T/\mathcal{M})$ deci $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, adică $U\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$. Deci $(\lambda I - X)g \in \mathcal{M}$ pentru orice $g \in \mathcal{M}$ așa că și $Xg \in \mathcal{M}$ pentru orice $g \in \mathcal{M}$, cta.

Observația 1°. Noțiunea de spațiu maximal spectral cît și proprietatea demonstrată sînt evident valabile și dacă $\mathcal{H} = \mathfrak{X}$ ar fi fost un spațiu Banach.

TEOREMA 5. *Fie $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal și fie $\omega \subset \sigma(N)$ închisă. Atunci $E(\omega)\mathcal{H}$ este un spațiu maximal spectral pentru N și $\sigma(N \mid E(\omega)\mathcal{H}) \subseteq \omega$.*

Demonstrație. Pe baza observației 6°, punctul 2, $E(\omega)N = NE(\omega)$ așa că $E(\omega)\mathcal{H}$ este invariant la N. În plus, $N \mid E(\omega)\mathcal{H}$ este un operator normal în $E(\omega)\mathcal{H}$ care admite ca măsură spectrală măsura $(E(\sigma) \mid \mathrm{E}(\omega)\mathcal{H})_{\sigma\in\mathcal{B}(\sigma(N))} = (E(\sigma \cap \omega) \mid E(\omega)\mathcal{H})_{\sigma\in\mathcal{B}(\sigma(N))}$ al cărei suport $\subset \omega$. Prin urmare pe baza teoremei 4 și a observației 3° de la punctul precedent, $\sigma(N \mid E(\omega)\mathfrak{X}) \subset \omega$.

Ne rămîne de stabilit maximalitatea lui $E(\omega)\mathcal{H}$. Fie $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ un subspațiu Hilbert invariant la N astfel ca $\sigma(N \mid \mathcal{N}) \subseteq \omega$. Fie $f \in \mathcal{N}$, $g = E(\sigma(N) \cap \{\zeta ; |\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho_0\})f = E(\sigma_0)f$, unde ρ_0 și ζ_0 sînt aleși astfel ca

$$\omega \cap \sigma_0 = \emptyset \tag{3.13}$$

Avem

$$\|(N - \zeta_0 I)^n g\|^2 = \|(N - \zeta_0 I)^n E(\sigma(N) \cap \sigma_0)f\|^2 =$$

$$= \int_{\sigma(N)} \zeta - \zeta_0|^{2n} \chi_{\sigma_0}(\zeta)\,\mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) \leqslant \rho_0^{2n} \int_{\sigma(N)} \chi_{\sigma_0}(\zeta)\,\mathrm{d}\mu_{f,f}(\zeta) =$$

$$= \rho_0^{2n} (E(\sigma(N) \cap \sigma_0(f,f) = \rho_0^{2n} \|E(\sigma(N) \cap \sigma_0)f\|^2 = \rho_0^{2n} \|g\|^2,$$

așa că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(N - \zeta_0 I)^n g}{(\zeta - \zeta_0)^{n+1}}$$

converge absolut pentru $|\zeta - \zeta_0| > \rho_0$. Fie $g(\zeta)$ suma acestei serii. Ea este o funcție analitică definită pentru $|\zeta - \zeta_0| > \rho_0$ cu valori în $\mathcal{H}$. În plus cîteva calcule simple ne arată că

$$(\zeta I - N)\,g(\zeta) \equiv g, \quad |\zeta - \zeta_0| > \rho_0. \tag{3.14}$$

Fie pentru $\lambda \notin \omega$, $\tilde{g}(\lambda)$ definit prin

$$\tilde{g}(\lambda) = E(\sigma(N) \cap \sigma_0)(\lambda I \mid \mathcal{N} - N \mid \mathcal{N})^{-1} f.$$

Evident, $\widetilde{g}(\lambda)$ este o funcţie analitică de la $C\omega$ în $\mathcal{H}$. În plus

$$(\lambda I - N)\widetilde{g}(\lambda) = (\lambda I - N)E(\sigma(N) \cap \sigma_0)\,(\lambda I \mid \mathfrak{N} - N \mid \mathfrak{N})^{-1} f =$$
$$= E\,(\sigma(N) \cap \sigma_0)\,(\lambda I - N)\,(\lambda I \mid \mathfrak{N} - N \mid \mathfrak{N})^{-1} f =$$
$$= E(\sigma(N) \cap \sigma_0) f = g$$

adică

$$(3.15) \qquad (\lambda I - N)\widetilde{g}(\lambda) \equiv g, \quad \lambda \notin \omega.$$

Fie $\lambda_0 \notin \omega \cup \sigma_0$ şi $r_0 > 0$ astfel ca nici un λ cu $|\lambda - \lambda_0| \leqslant r_0$ să nu fie în reuniunea precedentă. Pentru astfel de λ avem (din (3.14) şi (3.15))

$$[(\lambda I - N)\,[\widetilde{g}(\lambda) - g(\lambda)] \equiv 0$$

Fie $\lambda \neq \lambda_0$. Atunci

$$\lambda(\widetilde{g}(\lambda) - g(\lambda),\ \widetilde{g}(\lambda_0) - g(\lambda_0)) = (N(\widetilde{g}(\lambda) - g(\lambda)),\ \widetilde{g}(\lambda_0) - g(\lambda_0)) =$$
$$= (\widetilde{g}(\lambda) - g(\lambda),\ N^*(\widetilde{g}(\lambda_0) - g(\lambda_0))) = \lambda_0(\widetilde{g}(\lambda) - g(\lambda),\ \widetilde{g}(\lambda_0) - g(\lambda_0)),$$
$$(\widetilde{g}(\lambda) - g(\lambda),\ \widetilde{g}(\lambda_0) - g(\lambda_0)) = 0$$

(unde ne-am folosit de faptul că dacă $Nf = \mu f$, atunci $N^* f = \overline{\mu} f$ căci

$$\|(N^* - \overline{\mu} I) f\| = \|(N - \mu I)^* f\| = \|(N - \mu I) f\|)$$

şi făcînd pe $\lambda \to \lambda_0$, obţinem $\widetilde{g}(\lambda_0) = g(\lambda_0)$. În acest mod definind

$$f(\lambda) = \begin{cases} g(\lambda), & \lambda \notin \sigma_0 \\ \widetilde{g}(\lambda), & \lambda \notin \omega \end{cases}$$

obţinem o funcţie uniformă întreagă (căci $\omega \cap \sigma_0 = \varnothing$).

Cum pe de altă parte pentru $\lambda \to \infty$,

$$f(\lambda) = g(\lambda) \to 0,$$

teorema lui Liouville ne dă $f(\lambda) \equiv 0$. Prin urmare $g(\lambda) \equiv 0$, deci $g = 0$. În acest mod

$$E(\sigma(N) \cap \sigma_0) f = 0$$

de unde pentru orice mulţime $F \subseteq \sigma(N)$ închisă şi $F \cap \omega = \varnothing$ avem (căci F poate fi acoperită cu un număr finit de cercuri de tipul $\sigma_0 = \{\zeta;\ |\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho_0\}$, $\sigma_0 \cap \omega = \varnothing$) $E(F) f = 0$ aşa că pentru orice mulţime deschisă în $\sigma(N)$, $G \supset \omega$ avem

$$E(G) f = f.$$

Folosind regularitatea măsurii $(E(\sigma))_{\sigma \in \mathfrak{B}(\sigma(N))}$ deducem $E(\omega) f = f$, adică $f \in E(\omega)\mathcal{H}$ şi aceasta pentru orice $f \in \mathfrak{N}$, cta.

Am văzut (observaţia 6°, punctul 2) că $E(\sigma)$ comută cu orice X care comută cu N şi N^*. Teorema anterioară ne permite să întărim acest rezultat.

COROLARUL 1. *Dacă* $X \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *comută cu* N, *atunci* X *comută şi cu* $E(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{B}(\sigma(N))$.

Demonstraţie. Fie $\omega \subset \sigma(N)$ închisă. Atunci pe baza proprietăţii de invarianţă a spaţiilor maximal spectrale avem

$$XE(\omega)\mathcal{H} \subseteq E(\omega)\mathcal{H}$$

adică

$$XE(\omega) = E(\omega)XE(\omega).$$

Proprietatea aceasta fiind valabilă pentru orice ω închis, pe baza regularităţii măsurii $(E(\sigma))_{\sigma\in\mathcal{B}(\sigma(N))}$ rămîne valabilă pentru orice $(\sigma \in \mathcal{B}(\sigma(N)))$; în particular pentru $\sigma = \sigma(N) - \omega$. Avem deci

$$X(I - E(\omega)) = (I - E(\omega))\,X(I - E(\omega)),$$

ceea ce dă

$$E(\omega)X = E(\omega)XE(\omega),$$

de unde $E(\omega)X = XE(\omega)$ pentru toţi $\omega \subset \sigma(N)$ închişi şi prin urmare pentru toţi $\sigma \in \mathcal{B}(\sigma(N))$, cta.

Observaţii. 2°. În ultimele consideraţii am folosit în fapt următoarea proprietate de regularitate: *Dacă* $\omega \subset Z$ *este închisă şi familia* $\{G;\ G$ *deschise,* $\sigma(N) \supset G \supset \omega\}$ *o dirijăm după incluziune, atunci pentru fiecare* $f \in \mathcal{H}$, $\lim\limits_{G\supset\omega} E(G)f = E(\omega)f$.

Demonstraţia acestui fapt este analoagă cu cea dată în observaţia 2°, punctul 5, § 2.

3°. Pentru un operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, $\lambda \in C$ este o *valoare proprie* dacă $(T - \lambda I)f = 0$ pentru un anume $0 \neq f \in \mathcal{H}$. f este în acest caz un *vector propriu*; $\lambda \in C$ este o *valoare caracteristică* dacă $(T - \lambda I)^n f = 0$ pentru un anume $n > 0$ întreg şi $0 \neq f \in \mathcal{H}$; f este în acest caz *vector caracteristic.* Este evident că orice valoare (vector) proprie λ (u) este şi valoare (vector) caracteristică. Este de asemenea evident că orice valoare caracteristică este şi valoarea proprie. Pentru vectori, aceasta nu este în general adevărat. *Dacă operatorul este normal, atunci orice vector caracteristic este şi propriu.*

Într-adevăr, dacă m este astfel ca $2^m > n$, atunci pe baza lui (3.7) avem

$$\|(N - \lambda I)f\|^{2^m} \leqslant \|f\|^{1+\cdots+2^{m-1}}\|(N - \lambda I)^{2^m}f\| = 0, \text{ cta.}$$

4°. *Fie* N *normal şi fie* $(E(\sigma))_{\sigma\in\mathcal{B}(\sigma(N))}$ *măsura sa spectrală. Atunci* $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$ *dacă şi numai dacă* λ_0 *este o valoare proprie a lui* N. $E(\{\lambda_0\})\mathcal{H}$ *este spaţiul vectorilor proprii în* λ_0 *ai lui* N.

Dacă $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$, atunci cum $\lambda\,\chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda) = \lambda_0\,\chi_{\{\lambda_0\}}(\lambda)$ rezultă $N E(\{\lambda_0\}) = \lambda_0 E(\{\lambda_0\})$, ceea ce ne arată că λ_0 este o valoare proprie (căci $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$) şi că fiecare $f \in E(\{\lambda_0\})\mathcal{H}$ este un vector propriu al lui N în λ_0. Invers, fie $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ spaţiul vectorilor proprii în λ_0 lui N. Fie $\rho_0 > 0$ dat.

Atunci cum $E(\{\lambda;\ |\lambda-\lambda_0|\leq\rho_0\})\mathcal{H}$ este un spaţiu maximal spectral şi $N|\mathfrak{M}_{\lambda_0}=\lambda_0 I|\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, rezultă $\mathfrak{M}_{\lambda_0}\subseteq E(\{\lambda;\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant\rho_0\}\mathcal{H}$ de unde

$$\mathfrak{M}_{\lambda_0}\subseteq\bigcap_{\rho_0>0}E(\{\lambda;\ |\lambda-\lambda_0|\leqslant\rho_0\})\mathcal{H}=E(\{\lambda_0\})\mathcal{H},\ \text{cta.}$$

4. Fie $T\in\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ fixat. O mulţime S compactă neseparînd planul complex (adică CS să fie cu o singură componentă) este o *mulţime spectrală pentru* T dacă pentru orice polinom $p(\lambda)$ avem

$$\|p(T)\|\leqslant\max_{\lambda\in S}|p(\lambda)|. \tag{3.16}$$

Fie $\mathcal{A}(S)$ aderenţa în $C(S)$ a mulţimii polinoamelor. Fie $f(\lambda)\in\mathcal{A}(S)$. Există $(p_n(\lambda))_{n=1,2,\ldots}$, uniform convergent pe S către $f(\lambda)$. Prin urmare în virtutea lui (3.16), $(p_n(T))$ este un şir Cauchy (în normă). Limita lui $p_n(T)$ va fi prin definiţie $f(T)$ (este evident că $f(T)$ nu depinde de şirul de polinoame ce converge uniform pe S către $f(\lambda)$). Prin continuitate se obţin următoarele proprietăţi

$$(\alpha f+\beta g)(T)=\alpha f(T)+\beta g(T),\qquad \alpha,\beta\in C, f,g\in\mathcal{A}(S), \tag{3.17}$$

$$(fg)(T)=f(T)\,g(T),\qquad f,g\in\mathcal{A}(S) \tag{3.18}$$

$$\|f(T)\|\leqslant\max_{\lambda\in S}|f(\lambda)|,\qquad f\in\mathcal{A}(S). \tag{3.19}$$

Pe baza unei teoreme astăzi clasice a lui *Mergelean* [16], $\mathcal{A}(S)$ este mulţimea funcţiilor din $C(S)$ care sînt analitice în Int S. În particular dacă $\lambda_0\notin S$, atunci $f(\lambda)\equiv(\lambda_0-\lambda)^{-1}$ este o astfel de funcţie. Folosind (3.18) obţinem că $(\lambda_0 I-T)^{-1}$ există şi este $=f(T)$ aşa că

$$\sigma(T)\subseteq S. \tag{3.20}$$

TEOREMA 5. *Există o măsură semispectrală* $(\omega(T;\sigma,S))_{\sigma\in\mathcal{B}(\partial S)}$ (*definită pe frontiera* ∂S *a lui* S) *unic determinată verificînd*

$$T^n=\int_{\partial S}\lambda^n\,\mathrm{d}\omega(T;\lambda,S),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.21}$$

(Măsura semispectrală $(\omega(T;\sigma,S))_{\sigma\in\mathcal{B}(\partial S)}$ se numeşte *măsura armonică-spectrală a lui* T *relativ la* S. Să remarcăm că această măsură este totală; cazul $n=0$ în (3.21).)

Demonstraţie. Fie $u(\lambda)$ o funcţie armonică într-un domeniu ce conţine pe S. Cum S nu separă planul, putem considera că D este simplu conex. Fie $f(\lambda)$ o funcţie analitică (care evident există în D) uniformă astfel ca Re $f(\lambda)\equiv u(\lambda)$, $\lambda\in D$.

Să punem

$$u(T)=\frac{1}{2}(f(T)+f(T)^*).$$

Cum $f(\lambda)$ este unic determinată, abstracție făcînd de o constantă aditivă pur imaginară, $u(T)$ este unic determinat pe $u(\lambda)$.

Să presupunem că $u(\lambda) \geqslant 0$ pe S. Atunci

$$g(\lambda) = \frac{1 - f(\lambda)}{1 + f(\lambda)} \in \mathcal{A}(S)$$

și $| g(\lambda) | \leqslant 1$ pentru $\lambda \in S$, așa că (vezi (3.19))

$$\| g(T) \| \leqslant 1. \tag{3.22}$$

Dar folosind (3.17) și (3.18) obținem

$$g(T)(I + f(T)) = (I + f(T))g(T) = I - f(T),$$

de unde

$$f(T)(I + g(T)) = I - g(T). \tag{3.23}$$

Fie acum $x = (I + g(T))y$. Atunci folosind (3.23) și apoi (3.22)

$$\begin{aligned}(u(T)x,\ x) &= \mathrm{Re}\ (f(T),\ x, x) = \mathrm{Re}\ ((I - g(T))y, ((I + g(T))y) = \\ &= \mathrm{Re}\ (\| y \|^2 - (g(T)y,\ y) + (y,\ g(T)y) - \| g(T)y \|^2) = \\ &= \| y \|^2 - \| g(T)y \|^2 \geqslant 0,\end{aligned}$$

așa că ne rămîne să ne convingem că elemente x considerate sînt dense în $\mathcal{H}$ pentru a fi demonstrat că *din* $u(\lambda) \geqslant 0$ *pe* S *rezultă* $u(T) \geqslant 0$. În cazul cînd elementele considerate n-ar fi dense în $\mathcal{H}$, am avea un $f \neq 0$ astfel ca

$$(I + g(T))^* f = 0.$$

Cum

$$(I - g(T))^* f = f(T)^* (I + g(T))^* f = 0,$$

$f = 0$, deci contradicția sperată.

Aplicînd rezultatul obținut la $u + \min\limits_{\lambda \in S} u(\lambda)$ și $-u + \max\limits_{\lambda \in S} u(\lambda)$ obținem

$$(\min_{\lambda \in S} u(\lambda))I \leqslant u(T) \leqslant (\max_{\lambda \in S} u(\lambda))I \tag{3.24}$$

de unde

$$\| u(T) \| \leqslant \max_{\lambda \in S} | u(\lambda) |. \tag{3.25}$$

Pe baza unei teoreme a lui *Walsh* [25], orice funcție reală $r(\lambda) \in C(\partial S)$ poate fi aproximată uniform prin funcții $u_n(\lambda)$ armonice în domenii ce conțin pe S (și în această teoremă ipoteza de bază este că CS este format dintr-un domeniu). Pe baza formulei (3.25), limita lui $\{u_n(T)\}$ există. Prin definiție s-o punem egală cu $u_r(T)$. Se verifică ușor că definiția este coherentă. Se păstrează proprietăţile (3.24), (3.25) cît şi cele de liniaritate (monogeneitatea faţă de numere reale). Fie acum $\varphi \in C(\partial S)$ arbitrară; vom pune

$$u_{\varphi}(T) = u_{\mathrm{Re}\varphi}(T) + iu_{\mathrm{Im}\varphi}(T).$$

Atunci aplicaţia $\varphi \to u_{\varphi}(T)$ este liniară de la $C(\partial S)$ la $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, continuă ($\|u(T)\| \leqslant 2 \max\limits_{\lambda\in\partial S} |\varphi(\lambda)|$) şi de tip pozitiv căci $\varphi^*\varphi(\lambda) = |\varphi(\lambda)|^2$ şi $u_{|\varphi|^2}(T) \geqslant 0$ conform relaţiei (2.24) extinsă prin continuitate. În acest mod $\varphi \to u_{\varphi}(T)$ este o aplicaţie de tip pozitiv. Fie $(\omega(T;\ \sigma,\ S))_{\sigma\in\mathcal{B}(\partial S)}$ măsura semispectrală care-i corespunde. Ea este unic determinată de condiţia

$$u_{\varphi}(T) = \int_{\partial S} \varphi(\zeta)\mathrm{d}\,\omega(T;\ \zeta,\ S), \quad \varphi \in C(\partial S). \tag{3.26}$$

În particular pentru $\varphi(\zeta) = \zeta^n$ obţinem (3.21) pentru fiecare $n = 0, 1, 2, \ldots$ Fie acum $(\Omega(\sigma))_{\sigma\in\mathcal{B}(\partial S)}$ o măsură semispectrală (bineînţeles regulată) ce verifică (3.21). Atunci avem pentru orice polinom $p(\lambda)$:

$$p(T) = \int_{\partial S} p(\lambda)\mathrm{d}\,\Omega(\lambda),$$

de unde prin continuitate şi pentru orice $f \in \mathcal{A}(S)$:

$$f(T) = \int_{\partial S} f(\lambda)\mathrm{d}\Omega(\lambda).$$

Fie $u(\lambda)$ armonică într-o vecinătate a lui S, şi fie $f(\lambda) \in \mathcal{A}(S)$ astfel ca $u(\lambda) \equiv \mathrm{Re} f(\lambda)$. Atunci pentru orice $g \in \mathcal{H}$

$$(u(T)g,\ g) = \mathrm{Re}\,(f(T),\ g, g) = \mathrm{Re} \int_{\partial S} f(\lambda)\mathrm{d}(\Omega(\lambda)\ g,\ g) =$$

$$= \int_{\partial S} u(\lambda)\mathrm{d}(\Omega(\lambda)g,\ g)$$

de unde

$$((u(T) - \int_{\partial S} u(\lambda)\mathrm{d}\,\Omega(\lambda))g,\ g) = 0, \quad g \in \mathcal{H};$$

rezultă

$$u(T) = \int_{\partial S} u(\lambda)\mathrm{d}\,\Omega(\lambda)$$

de unde prin continuitate

$$u_r(T) = \int r(\lambda)\mathrm{d}\,\Omega(\lambda)$$

pentru orice $r \in C(\partial S)$ reală şi de aici obţinem (2.26) de unde necesar $\Omega(\sigma) \equiv \omega(T;\ \sigma,\ S)$, cta.

COROLARUL 1. *Fie* $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *şi* S *o mulţime spectrală pentru* T. *Atunci există un supraspaţiu Hilbert* $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ *şi un operator normal* N *în* $\mathcal{K}$ *verificînd* $\sigma(N) \subset \partial S$ *şi*

$$T^n f = P N^n f, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ f \in \mathcal{H},$$

unde P *este proiecţia ortogonală a lui* $\mathcal{K}$ *pe* $\mathcal{H}$.

N-avem decît să considerăm dilatarea spectrală a măsurii semispectrale $(\omega(T;\ \sigma,\ S))_{\sigma \in \mathfrak{B}(\partial S)}$ (vezi § 2, punctul 6) şi să considerăm operatorul normal care are ca măsură spectrală această dilatare.

Un criteriu de caracterizare a mulţimii spectrale este dat de :

TEOREMA 6. *Pentru ca* $D_1 = \{\lambda,\ |\lambda| \leqslant 1\}$ *să fie spectrală pentru* T *este necesar şi suficient ca* $\| T \| \leqslant 1$.

Demonstraţie. Dacă D_1 este spectrală pentru T, atunci evident (vezi (2.16) cu $p(\lambda) \equiv \lambda$) că $\| T \| \leqslant 1$. Fie $|\alpha| < 1$ şi fie

$$\Phi_\alpha(\lambda) = \frac{\lambda + \alpha}{1 + \bar{\alpha}\lambda}.$$

Atunci $\Phi_\alpha(T)$ există (evident) şi avem

$$\| \Phi_\alpha(T) \| \leqslant 1. \tag{3.27}$$

Într-adevăr, pentru $f \in \mathcal{H}$ arbitrar să punem $g = (I + \bar{\alpha} T) f$. Atunci (3.27) este echivalentă cu

$$\| (T + \alpha I) g \| \leqslant \| (I + \bar{\alpha} T) g \|$$

care este adevărată întrucît

$$\| (I + \bar{\alpha} T) g \|^2 - \| (T + \alpha I) g \|^2 = (1 - |\alpha|^2)\, (\| g \|^2 - \| T g \|^2) \geqslant 0.$$

În acest mod o idee imediată este aceea de a încerca să obţinem orice polinom printr-un anumit procedeu de iterare de funcţii Φ_α. Se foloseşte în acest scop următoarea teoremă a lui *Schur*.

Fie $f(\lambda)$ *o funcţie analitică în* $\{\lambda;\ |\lambda| < 1\}$ *şi continuă pe* $D_1 = \{\lambda;\ |\lambda| \leqslant 1\}$ (adică $f \in \mathcal{A}(D_1)$) *astfel ca* $|f(\lambda)| \leqslant 1$ *pentru* $\lambda \in D_1$. *Atunci pentru fiecare* n, *funcţia* f, *admite o reprezentare de forma*

$$f(\lambda) \equiv \psi_{\alpha_{k_n},\, \alpha_{k_n - 1}, \ldots,\, \alpha_0}(\lambda) + 2\lambda^n k_n(\lambda), \tag{3.28}$$

unde

$$\begin{cases} \psi_{\alpha_0}(\lambda) \equiv \alpha_0 \\ \psi_{\alpha_1,\, \alpha_0}(\lambda) \equiv \Phi_{\alpha_1}(\lambda\, \psi_{\alpha_0}(\lambda)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{\alpha_k,\, \alpha_{k-1}, \ldots,\, \alpha_0}(\lambda) \equiv \Phi_{\alpha_k}(\lambda\, \psi_{\alpha_{k-1}, \ldots,\, \alpha_0}(\lambda)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{3.29}$$

$|\alpha_0| \leqslant 1$, $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| < 1, \ldots, |\alpha_{k_n}| < 1$, *iar* $k_n(\lambda) \in \mathfrak{A}(D_1)$ *şi* $(k_n(\lambda)) \leqslant 1$ *pentru* $\lambda \in D_1$. {Demonstraţia acestei teoreme se face prin inducţie. Pentru $n = 0$, descompunerea $f(\lambda) = f(0) + 2\dfrac{f(\lambda) - f(0)}{2}$ are evident această proprietate. Se presupune adevărată pentru $n - 1$ şi pentru orice funcţie. Dacă $f(\lambda)$ este o constantă, atunci totu-i terminat, căci punem $k_n = 0$, $k_n(\lambda) \equiv 0$. În caz contrar, $\alpha = f(0)$ verifică $|\alpha| < 1$. Să punem

$$h(\lambda) = \frac{f(\lambda) - \alpha}{1 - \bar{\alpha} f(\lambda)}.$$

Atunci $|h(\lambda)| \leqslant 1$ pentru $\lambda \in D_1$, este analitică în D_1 continuă pe D_1 şi $h(0) = 0$, deci dacă $g(\lambda) = \dfrac{h(\lambda)}{\lambda}$, atunci $g(\lambda)$ este în $\mathfrak{A}(D_1)$ şi $|g(\lambda)| \leqslant 1$ pentru $|\lambda| = 1$ aşa că $|g(\lambda)| \leqslant 1$ pentru orice $\lambda \in D_1$. Rezultă deci că

$$f(\lambda) \equiv \Phi_\alpha(\lambda g(\lambda)),$$

unde $g(\lambda) \in \mathfrak{A}(D_1)$ şi verifică condiţia $|g(\lambda)| \leqslant 1$, $\lambda \in D_1$. Fie

$$g(\lambda) \equiv \psi_{\alpha_{k_{n-1}}, \ldots, \alpha_0}(\lambda) + 2\lambda^{n-1} k_{n-1}(\lambda).$$

Atunci

$$f(\lambda) \equiv \Phi_\alpha(\lambda \psi_{\alpha_{k_{n-1}}, \alpha_{k_{n-1}-1}, \ldots, \alpha_0}(\lambda) + 2\lambda^n k_{n-1}(\lambda)).$$

Dar în dezvoltarea lor tayloriană

$$\Phi_\alpha(\lambda \psi_{\alpha_{k_{n-1}}, \ldots, \alpha_0}(\lambda) + 2\lambda^n k_{n-1}(\lambda)) \text{ şi } \Phi_\alpha(\lambda \psi_{\alpha_{k_{n-1}}, \ldots, \alpha_0}(\lambda)) = \psi_{\alpha_{k_n}, \ldots, \alpha_0}(\lambda)$$

au primii $n - 1$ coeficienţi aceiaşi aşa că

$$f(\lambda) - \psi_{\alpha_{k_n}, \ldots, \alpha_0}(\lambda) = l(\lambda)$$

are în $\lambda = 0$ un zero de ordin n. Pentru $k_n(\lambda) = \dfrac{l(\lambda)}{2\lambda^n}$ (care este analitică în D_1) obţinem $|k_n(\lambda)| \leqslant 1$ pentru $|\lambda| = 1$, de unde şi pentru orice $\lambda \in D_1$, cta}.

Să reluăm demonstraţia teoremei 6. Fie $\|S\| < 1$ un operator fixat în $\mathcal{H}$ şi fie $F(\lambda) \in \mathfrak{A}(D_1)$. Atunci dacă

$$F(\lambda) = a_0 + a\lambda + a\lambda^2 + \ldots + a\lambda^n + \ldots$$

este dezvoltarea tayloriană a lui $F(\lambda)$ în jurul originii avem (formulele lui Cauchy).

$$|a_n| \leqslant \max_{|\lambda|=1} |F(\lambda)|$$

așa că dacă punem

$$F(S) = a_0 I + a_1 S + a_2 S^2 + \dots + a_n S^n + \dots, \tag{3.30}$$

seria fiind absolut convergentă, $F(S)$ este corect definit și

$$\| F(S) \| \leqslant \frac{1}{1 - \| S \|} \max_{|\lambda| \leqslant 1} | F(\lambda) |. \tag{3.31}$$

În plus, aplicația $f(\lambda) \to f(S)$ de la $\mathcal{A}(D_1)$ în $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ este liniară și multiplicativă. Pe baza definiției (3.29), folosind proprietățile calculului funcțional definit de (3.30), avem că

$$(S\Phi_{\alpha_0}(S) + \alpha_1 I)(I + \alpha_1 S\Phi_{\alpha_0}(S))^{-1} = \psi_{\alpha_1 \alpha_0}(S)$$

$$(S\psi_{\alpha_1 \alpha_0}(S) + \alpha_2 I)(I + \overline{\alpha}_2 S\psi_{\alpha_1 \alpha_0}(S))^{-1} = \psi_{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0}(S)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(S\psi_{\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0}(S) + \alpha_k I)(I + \overline{\alpha}_k S\psi_{\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0}(S))^{-1} = \psi_{\alpha_k, \dots, \alpha_0}(S),$$

unde de fiecare dată membrul drept a fost definit după (3.30) (iată demonstrația valabilității acestor formule : avem

$$\lambda\psi_{\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0}(\lambda) + \alpha_k = [1 + \overline{\alpha}_k \lambda\psi_{\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0}(\lambda)]\, \psi_{\alpha_k, \dots, \alpha_0}(\lambda)$$

de unde pe baza liniarității și multiplicativității calculului funcțional dat de (3.30) avem

$$S\psi_{\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0}(S) + \alpha_k I = \psi_{\alpha_k, \dots, \alpha_0}(S)\,[I + \overline{\alpha}_k S\psi_{\alpha_k, \dots, \alpha_0}(S)], \text{ cta}).$$

În acest mod aplicînd succesiv (3.27) la $T = S$, $T = S\, \Phi_{\alpha_0}(S), \dots$ $T = S \,.\, \psi_{\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0}(S)$ obținem

$$\| \psi_{\alpha_k, \dots, \alpha_0}(S) \| \leqslant 1. \tag{3.32}$$

Pe baza calcului funcțional din (3.28) deducem

$$f(S) = \psi_{\alpha_k, \dots, \alpha_0}(S) + 2S^n \mathrm{k}_n(S)$$

de unde

$$\| f(S) \| \leqslant 1 + 2 \| S \|^n \frac{1}{1 - \| S \|}$$

(unde s-a folosit (3.31) și (3.32)). Făcînd $n \to \infty$, obținem $\| f(S) \| \leqslant 1$. Fie acum $p(\lambda)$ un polinom arbitrar fixat. Să punem

$$f(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{\max\limits_{|\zeta| \leqslant 1} | p(\zeta) |},$$

și $S = sT$, unde $0 < s < 1$. Aplicînd rezultatul obținut (cu atîta trudă !) avem $\| f(sT) \| \leqslant 1$, adică

$$\| p(sT) \| \leqslant \max_{|\lambda| \leqslant 1} | p(\lambda) |.$$

Făcînd aici pe $s \to 1$, obţinem inegalitatea mult căutată

$$\| p(T) \| \leqslant \max_{\lambda \in D_1} | p(\lambda) |$$

care ne arată că D_1 este o mulţime spectrală pentru T, cta.

Observaţii. 1°. Fie $\mathcal{A}_A(D_1)$ mulţimea funcţiilor analitice în D, continue pe D_1 cu valori într-o algebră Banach comutativă de operatori A care comută cu S. Atunci, dacă $F(\lambda) \in \mathcal{A}_A(D_1)$, avem

$$F(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \ldots + A_n\lambda^n + \ldots$$

unde din nou

$$\| A_n \| \leqslant \max_{|\lambda| \leqslant 1} \| F(\lambda) \|$$

şi $A_n \in A$. Punînd

$$F(S) = A_0 + A_1 S + \ldots + A_n S^n + \ldots = A_0 + \\ + SA_1 + \ldots + S^n A_n + \ldots$$

obţinem o aplicaţie $F(\lambda) \to F(S)$ liniară, multiplicativă şi verificînd

$$\| F(S) \| \leqslant (1 - \| S \|)^{-1} \max \| F(\lambda) \|.$$

Ar fi foarte util şi interesant dacă s-ar putea stabili şi relaţia

$$\| F(S) \| \leqslant \max_{|\lambda| \leqslant 1} \| F(\lambda) \|$$

care, după cum am văzut, are loc cînd $A = \{\lambda I ; \lambda \in C\}$. Să remarcăm că *dacă A este şi involutivă, această proprietate are loc*, dar cazul interesant este tocmai cel în care A nu este involutivă.

2°. Să aplicăm corolarul 1, operatorului $\| T \| \leqslant 1$ şi $S = D_1$. Cum $\sigma(N) \subset \partial D_1 = \{\lambda ; |\lambda| = 1\}$ rezultă că $N = U$ este unitar. Se obţine deci următorul rezultat : ***Fie** $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ o contracţie* ($\| T \| \leqslant 1$). ***Există** atunci un supraspaţiu Hilbert $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ şi un operator unitar U în $\mathcal{K}$ astfel ca $T^n f = PU^n f$, $n = 0, 1, 2, \ldots, f \in \mathcal{H}$, unde P este proiecţia ortogonală a lui $\mathcal{K}$ pe $\mathcal{H}$.*

Primită la redacţie la 16 septembrie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*. Livre VI, *Intégration*, Herman et C-ie, Act. Sci. et Ind. 1175, Paris, 1952.
2. N. Dunford, *Spectral operators*. Pacific J. Math., **4**, 321—354 (1954).
3. N. Dunford, *A survey of the theory of spectral operators*. (Bull. Amer. Math. Soc., **64**, 217—274 (1958).

4. C. Foiaş, *La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert.* Bull. Soc. Math. France, **85**, 263–282 (1957).
5. C. Foiaş, *Unele aplicaţii ale mulţimilor spectrale. I. Măsura armonică spectrală.* St. cerc. mat., **10**, 365–401 (1959).
6. C. Foiaş, *Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă.* Seminarul M. Nicolescu (1959 — 1960), Bucureşti, 1962.
7. C. Foiaş, *Spectral maximal spaces and decomposable operators.* Archiv der Math., **14**, 341–349 (1963).
8. B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**, 35–40 (1950).
9. I. M. Gelfand, *Normierte Ringe.* Mat. Sbornik N.S., **9** (**51**), 3–24 (1941).
10. И. М. Гелфанд, Д. А. Раиков, Г. Е. Силов, *Комутативные нормированные кольца.* Москва, 1960.
11. R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires.* Ann. of. Math., (**2**) **53**, 68–124 (1951).
12. P. R. Halmos, *Commutativity and spectral properties of normal operators.* Acta Scient. Math., 12 B, 153–156 (1950).
13. C. T. Ionescu Tulcea, *Spaţii Hilbert.* Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956.
14. A. Lebow, *On von Neumann's theory of spectral sets.* Journ. Math. Analysis and appl., **7**, 64–90 (1963).
15. L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis.* New York, 1953.
16. С. Н. Мержелян, *О представлении функции рядами полиномов на замкнутых множествах.* Доклады Акад. наук. СССР 18, 405—408 (1951).
17. М. А. Наимарк, *Спектральная функция симметрического оператора.* Доклады Акад. наук СССР (Н. С.) 277—218 (1940).
18. M. A. Naimark, *On a representation of additive operator set set functions. Doklady. Acad. Nauk SSSR* (N.S.) **41**, 359–361 (1943).
19. М. А. Наимарк, *Нормированные кольца.* Москва, 1956.
20. J. v. Neumann, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes.* Math. Nachr., **4**, 258–281 (1951).
21. C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras.* Princeton 1960.
22. B. Sz-Nagy, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert.* Acta Scient. Math., **15**, 87–92 (1953).
23. B. Sz-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace. Appendice au livre: Leçons d'analyse fonctionnelle* par F. Riesz et B. Sz-Nagy, Budapest, 1955.
24. B. Sz-Nagy, C. Foiaş, *Sur les contractions de l'espace de Hilbert (III).* Acta Scient. Math., **19**, 26–46 (1958).
25. J. L. Walsh, *Über die Entwichlung einer harmonischen Function nach harmonischen Polynomen.* Journal de Crelle, **159**, 197–209 (1928).

O CLASĂ DE MIŞCĂRI FLUIDE BIDIMENSIONALE GENERALIZÎND MIŞCAREA ROTAŢIONALĂ PLANĂ

DE

ION I. CRISTEA şi VICTORIA CRISTEA

Se presupune că mişcarea se poate raporta la un sistem de *coordonate turbionare*, adică la un sistem pentru care suprafeţele $q^1 = \text{const.}$ şi $q^2 = \text{const.}$ sînt suprafeţe de vîrtej ale mişcării. Pe baza reprezentării lui Clebsch (8), în ipotezele (6), (7) se studiază mişcarea fluidului cercetîndu-se condiţiile ca mişcarea să aibă un caracter bidimensional. Se marchează astfel rolul hamiltonianului H în studiul general al mişcării.

În particular, se definesc *mişcările cu vîrtej regulat* punîndu-se în evidenţă două tipuri de astfel de mişcări. În cazul *mişcărilor cu vîrtej regulat de speţa întîi* funcţiile ψ şi χ se aleg conform cu (53′), iar determinarea hamiltonianului H se face independent de aceste funcţii. Se studiază de asemenea şi *mişcările cu vîrtej regulat de speţa a doua.*

Această lucrare face parte din seria lucrărilor [3], [4], [5], [6], [7] în care ne ocupăm de *reprezentarea lui Clebsch* [1], [2], [7].

1. SISTEME TURBIONARE DE COORDONATE CURBILINII

Să presupunem că în mulţimea familiilor uniparametrice de *suprafeţe de vîrtej* ale mişcării se pot pune în evidenţă două astfel de familii de suprafeţe de vîrtej distincte care să fie invariabile în timp, anume

$$(1) \qquad \xi\,(x_1, x_2, x_3) = q^1 \quad \text{şi} \quad \eta\,(x_1, x_2, x_3) = q^2,$$

unde q^1 şi q^2 sînt parametrii acestor două familii.

Fie atunci

$$(2) \qquad \zeta\,(x_1, x_2, x_3) = q^3$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, p. 57–73, BUCUREŞTI, 1966

o altă familie uniparametrică de suprafețe fixe, de parametru q^3, independentă de suprafețele (1). Presupunînd că suprafețele (1) și (2) admit plan tangent în orice punct al lor, înseamnă că

$$D = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

Cei trei parametrii q^1, q^2, q^3 ai familiilor (1) și (2) definesc un sistem de coordonate curbilinii în spațiu, avînd proprietatea că suprafețele de coordonate $q^1 = \text{const.}$ și $q^2 = \text{const.}$ sînt *suprafețe de vîrtej* iar intersecțiile lor *linii de vîrtej*.

Să numim *sistem turbionar* de coordonate curbilinii orice sistem de coordonate curbilinii q^1, q^2, q^3 avînd o atare proprietate.

Pe baza unei teoreme relativă la funcțiile implicite, relațiile (1), (2) se pot rezolva local în raport cu x_1, x_2, x_3 astfel încît

$$x_i = x_i(q^1, q^2, q^3), \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

adică

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3). \tag{3'}$$

Într-un punct oarecare să considerăm vectorii

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

care sînt tangenți cu curbele de coordonate duse prin punctul considerat și care constituie baza sistemului de coordonate curbilinii adoptat. Componentele covariante ale tensorului metric al spațiului în raport cu acest sistem de coordonate turbionare fiind

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{5}$$

se știe că avem relațiile $g = \det(g_{ij}) = \frac{1}{D^2}$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \sqrt{g} = \frac{1}{|D|}$, și dacă $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ sînt reciprocii vectorilor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, atunci $\vec{e}^i = \operatorname{grad} q^i$, $(i = 1, 2, 3)$ și $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$, $(i, j = 1, 2, 3)$.

Vom presupune că sistemul de coordonate turbionare q^1, q^2, q^3 este biortogonal

$$g_{13} = g_{31} = 0 \quad \text{și} \quad g_{23} = g_{32} = 0 \tag{6}$$

și că în plus toți coeficienții g_{ij} ai metricei sînt funcții independente de q^3:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{ij}(q^1, q^2), \qquad (i, j = 1, 2) \\ g_{33} &= g_{33}(q^1, q^2). \end{aligned} \tag{7}$$

De o aceeași proprietate se bucură în consecință și coeficienții g^{ij} ai metricei.

2. REPREZENTAREA LUI CLEBSCH

Pentru viteza $\vec{v}$ a unei molecule de fluid se poate da următoarea reprezentare datorită lui Clebsch [1], [2], [7]:

$$\vec{v} = \text{grad}\ \varphi + \psi\ \text{grad}\ \chi. \tag{8}$$

Atunci

$$\text{rot}\ \vec{v} = \text{grad}\ \psi \times \text{grad}\ \chi \tag{9}$$

fapt pentru care funcţiile ψ şi χ sînt nişte *funcţii de vîrtej* [3]. Deci putem scrie

$$\psi = \psi\ (q^1, q^2, t) \quad \text{şi} \quad \chi = \chi\ (q^1, q^2, t) \tag{10}$$

şi analog

$$\varphi = \varphi (q^1, q^2, q^3, t). \tag{11}$$

Din (8) rezultă că componentele covariante ale vitezei $\vec{v}$ în raport cu baza (4) au expresiile

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial q^1} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial q^1}, \qquad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial q^2} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial q^2}, \qquad v_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial q^3} \tag{8'}$$

Eliminînd funcţia φ între primele două ecuaţii (8') obţinem

$$\frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \frac{\partial v_1}{\partial q^2} = D^*, \tag{12}$$

unde am notat pentru prescurtare

$$D^* = \frac{\partial (\psi, \chi)}{\partial (q^1, q^2)}. \tag{13}$$

În baza ipotezelor (6) putem deci scrie

$$v_1 = g_{11}\, v^1 + g_{12}\, v^2, \qquad v_2 = g_{21}\, v^1 + g_{22}\, v^2, \qquad v_3 = g_{33}\, v^3. \tag{14}$$

Ecuaţia (12), conform primelor două relaţii (14) se transcrie

$$\frac{\partial}{\partial q^1} (g_{21} v^1 + g_{22} v^2) - \frac{\partial}{\partial q^2} (g_{11} v^1 + g_{12} v^2) = D^*. \tag{12'}$$

De asemenea din (9) avem

$$\text{rot}\ \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} D^*\ \vec{e}_3$$

încît componentele contravariante ale vectorului $\vec{\Omega} = \text{rot}\ \vec{v}$ sînt

$$\Omega^1 = 0, \qquad \Omega^2 = 0, \qquad \Omega^3 = \frac{D^*}{\sqrt{g}}. \tag{9'}$$

3. ECUAŢIILE DE MIŞCARE IN COORDONATE TURBIONARE

Să presupunem că fluidul este perfect barotrop, iar relaţia dintre presiunea p şi densitatea ρ satisface condiţia fizică $\rho'(p) > 0$.

Dacă forţele de masă sînt conservative, ecuaţiile de mişcare ale lui Euler se pot pune sub forma lui Helmholtz

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v} = \operatorname{grad} B, \tag{15}$$

unde s-a notat

$$B = U - \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - \frac{1}{2} V^2, \tag{16}$$

U desemnînd potenţialul forţelor de masă, iar $V = |\vec{v}|$ modulul vitezei fluidului.

Conform cu (9′),

$$(\operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v})_1 = -D^* v^2, \qquad (\operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v})_2 = D^* v^1, \qquad (\operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v})_3 = 0,$$

iar

$$(\operatorname{grad} B)_i = \frac{\partial B}{\partial q^i}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Egalînd atunci componentele covariante ale vectorilor din cei doi membri ai ecuaţiei (15) obţinem

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - D^* v^2 = \frac{\partial B}{\partial q^1}, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial t} + D^* v^1 = \frac{\partial B}{\partial q^1}, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial q^3}$$

sau ţinînd cont de (8′)

$$\frac{\partial H}{\partial q^1} + \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(t, q^1)} = D^* v^2, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^2} + \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(t, q^2)} = -D^* v^1, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^3} = 0 \tag{17}$$

unde, ca în lucrările [4], [5], [6], am notat

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - U, \tag{18}$$

funcţie care, după cum am văzut în [4], are interpretarea unui *hamiltonian*.

Din ultima ecuaţie (17) rezultă

$$H = H(q^1, q^2, t) \tag{19}$$

astfel că funcţia H este o *funcţie de vîrtej*. Din primele două ecuaţii (17), cum funcţiile ψ, χ şi H nu depind de q^3, rezultă că şi componentele contravariante v^1 şi v^2 ale vitezei $\vec{v}$ de asemenea nu depind de q^3:

$$v^1 = v^1(q^1, q^2, t) \qquad \text{şi} \qquad v^2 = v^2(q^1, q^2, t). \tag{20}$$

Mai mult, în baza relaţiilor (14) şi a ipotezelor (7) rezultă că şi componentele covariante v_1 şi v_2 ale vitezei $\vec{v}$ nu depind de q^3 :

$$v_1 = v_1 (q^1, q^2, t) \quad \text{şi} \quad v_2 = v_2 (q^1, q^2, t). \tag{21}$$

Eliminînd funcţia H între primele două ecuaţii (17) şi ţinînd cont de identitatea

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial (\psi, \chi)}{\partial (q^1, q^2)}\right) + \frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{\partial (\psi, \chi)}{\partial (q^2, t)}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{\partial (\psi, \chi)}{\partial (t, q^1)}\right) = 0$$

obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial D^*}{\partial t} + \frac{\partial (D^* v^1)}{\partial q^1} + \frac{\partial (D^* v^2)}{\partial q^2} = 0. \tag{22}$$

4. ECUAŢIA DE CONTINUITATE

În raport cu coordonatele turbionare q^1, q^2, q^3, ecuaţia de continuitate se mai scrie sub forma

$$\frac{\partial (\rho \sqrt{g})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \sqrt{g} v^i)}{\partial q^i} = 0 \tag{23}$$

întrucît iacobianul $\sqrt{g}$ nu depinde explicit de t.

Observînd asemănarea ecuaţiilor (22) şi (23), o vom scrie pe aceasta din urmă sub forma

$$\frac{\rho \sqrt{g}}{D^*}\left[\frac{\partial D^*}{\partial t} + \frac{\partial (D^* v^i)}{\partial q^i}\right] + D^*\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho \sqrt{g}}{D^*}\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\rho \sqrt{g}}{D^*}\right) v^i\right] = 0$$

astfel că în baza lui (22), deoarece D nu depinde de q^3, deducem

$$\frac{\partial v^3}{\partial q^3} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln \frac{\rho \sqrt{g}}{D^*}\right) = 0. \tag{24}$$

5. CONDIŢII CA MIŞCAREA SĂ AIBĂ CARACTER BIDIMENSIONAL

Conform cu (21), din primele două relaţii (8′) rezultă că funcţia este de forma

$$\varphi = \Phi (q^1, q^2, t) + \alpha (q^3, t). \tag{25}$$

Prin urmare

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial q^1} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial q^1}, \qquad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial q^2} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial q^2}, \qquad v_3 = \frac{\partial \alpha}{\partial q^3}. \tag{26}$$

Avem

$$V^2 = v_i v^i = V_0^2 + v_3 v^3,$$

unde am pus

$$V_0^2 = v_1 v^1 + v_2 v^2$$

observîndu-se că

$$V_0 = V_0(q^1, q^2, t). \tag{27}$$

Notînd apoi

$$U_0 = U - \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{1}{2} v_3 v^3$$

expresia (18) a hamiltonianului H devine

$$H = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - U_0. \tag{18'}$$

Din această relație rezultă că o condiție necesară și suficientă ca densitatea ρ și presiunea p să nu depindă de q^3 este ca funcția U_0 să nu depindă de q^3 :

$$U_0 = U_0(q^1, q^2, t). \tag{28}$$

Presupunînd atunci realizată condiția (30), cum expresia $\dfrac{\rho\sqrt{g}}{D^*}$ este de asemenea independentă de q^3 iar

$$v^3 = \frac{1}{g_{33}} \frac{\partial \alpha}{\partial q^3},$$

urmează că în ecuația (25) variabilele q^1 și q^2 se pot separa de variabila q^3 :

$$\frac{\partial^2 \alpha}{(\partial q^3)^2} + g_{33} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln \frac{\rho\sqrt{g}}{D^*}\right) = 0 \tag{24'}$$

încît neapărat

$$\frac{\partial^2 \alpha}{(\partial q^3)^2} = a(t) \quad \text{și} \quad g_{33} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln \frac{\rho\sqrt{g}}{D^*}\right) = -a(t).$$

Prin urmare, abstracție de o funcție aditivă depinzînd de t, funcția α este de forma

$$\alpha(q^3, t) = \frac{1}{2} a(t) \cdot (q^3)^2 + b(t) \cdot q^3$$

încît

$$v_3 = a(t) \cdot q^3 + b(t), \tag{29}$$

iar

$$U = U_0(q^1, q^2, t) + \frac{1}{2}\dot{a}(t)(q^3)^2 + \dot{b}(t)\,q^3 + \frac{1}{2}g_{33}[a(t)\,q^3 + b(t)]^2 \tag{30}$$

Pentru ca și componentele v_3 și v^3 ale vitezei să nu depindă de q^3 conform cu (13) trebuie să admitem că $a(t) \equiv 0$, adică

$$v_3 = b(t). \tag{29'}$$

Atunci forma funcției de forță U se reduce la :

$$U = U_0(q^1, q^2, t) + b(t)\,q^3 + g_{33}\,b^2(t). \tag{30'}$$

În concluzie, mișcarea fluidului capătă un caracter bidimensional dacă în reprezentarea (8) funcția φ se prezintă sub forma

$$\varphi = \Phi(q^1, q^2, t) + b(t)\cdot q^3. \tag{31}$$

Dacă în plus $\dot{b}(t) \equiv 0$, componenta v_3 a vitezei se reduce la o constantă

$$v_3 = b \tag{29''}$$

în care caz funcția de forță U trebuie să fie independentă de q^3 :

$$U = U(q^1, q^2, t). \tag{30''}$$

Pentru ca acest caracter bidimensional al mișcării fluidului să fie posibil, evident este necesar ca în condițiile inițiale ale problemei, în condițiile la limită și la mari distanțe, variabila q^3 să nu intervină.

Din (24), conform cu (29'), rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\rho\sqrt{g}}{D^*}\right) = 0 \tag{32}$$

astfel că de-a lungul traiectoriilor moleculelor de fluid

$$\frac{\rho}{\Omega^3} \equiv \frac{\rho\sqrt{g}}{D^*} = \text{const.} \tag{31'}$$

constanta din membrul drept variind însă de la o traiectorie la alta. Conform cu (9') pe această ecuație (31') se citește că de-a lungul traiectoriei unei molecule de fluid vîrtejul este proporțional cu densitatea fluidului. În particular o astfel de proprietate poate avea loc în orice punct al domeniului ocupat de fluid.

6. CONDIȚIILE LA LIMITĂ

Fie S o suprafață ce delimitează domeniul ocupat de fluid și prin care nu avem transfer de fluid. Condiția de alunecare a moleculelor fluidului pe suprafața S se scrie

$$v^i n_i = \vec{v}^t \cdot \vec{n} \quad \text{pe} \quad S, \tag{33}$$

unde n_1, n_2, n_3 sînt componentele covariante ale versorului $\vec{n}$ al normalei la suprafaţa S, iar $\vec{v}^t$ viteza de transport a punctelor de pe S.

Înmulţind condiţia (33) cu D^* şi ţinînd cont de ecuaţiile (17), pe suprafaţa S avem

$$\left(-\frac{\partial H}{\partial q^2}n_1+\frac{\partial H}{\partial q^1}n_2\right)+\frac{\partial \psi}{\partial t}\left(-\frac{\partial \chi}{\partial q^2}n_1+\frac{\partial \chi}{\partial q^1}n_2\right)-\frac{\partial \chi}{\partial t}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial q^2}n_1+\frac{\partial \psi}{\partial q^1}n_2\right)+$$

$$+D^* v^3 n_3 = D^* \vec{v}^t\cdot\vec{n}. \tag{34}$$

Presupunînd că S admite reprezentarea parametrică

$$q^i = q^i(u, v, t), \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{35}$$

şi considerînd vectorul

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v},$$

Cum $\vec{N} = N\vec{n}$, condiţia (34) se transcrie

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial(q^3, H)}{\partial(u, v)}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial(q^3, \chi)}{\partial(u, v)}-\frac{\partial \chi}{\partial t}\frac{\partial(q^3, \psi)}{\partial(u, v)}\right]+\frac{D^*}{\sqrt{g}}v^3\frac{\partial(q^1, q^2)}{\partial(u, v)}=D^*\vec{v}^t\cdot\vec{N}. \tag{36}$$

Să luăm pe suprafaţa S ca parametri chiar pe q^3 şi arcul s pe curbele de pe S situate la intersecţia cu suprafeţele $q^3 = \text{const}$. Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei S vor deveni

$$q^1 = q^1(q^3, s, t), \qquad q^2 = q^2(q^3, s, t) \tag{35'}$$

iar condiţia la limită (36) se reduce la

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial s}+\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(t, s)}+D^* v^3\frac{\partial(q^1, q^2)}{\partial(q^3, s)}=\\&=D^*\left[-v^{t1}\frac{\partial q^2}{\partial s}+v^{t2}\frac{\partial q^1}{\partial s}+v^{t3}\frac{\partial(q^1, q^2)}{\partial(q^3, s)}\right]\end{aligned} \tag{36'}$$

unde v^{t1}, v^{t2}, v^{t3} sînt componentele contravariante ale vitezei de transport $\vec{v}^t$ în raport cu baza (4).

Pentru ca variabila q^3 să nu intervină deloc în condiţiile la limită (36′), să presupunem în particular că suprafaţa S este un cilindru curbiliniu, adică ecuaţiile (35′) se reduc la

$$q^1 = q^1(s, t), \qquad q^2 = q^2(s, t). \tag{37}$$

Evident, un astfel de cilindru curbiliniu S caracterizat de ecuaţiile (37) este nu numai o *suprafaţă de mişcare*, ci şi o *suprafaţă de vîrtej*. În acest caz, avem $N_3 = 0$ şi deci condiţia la limită (36′) se reduce la

$$(38)\qquad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(t, s)} = D^* \left(-v^{t1} \frac{\partial q^2}{\partial s} + v^{t2} \frac{\partial q^1}{\partial s} \right) \text{ pe } S.$$

Ţinînd cont de expresia (13) a lui D, această condiţie se mai scrie

$$(38')\qquad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(t, s)} + v^{t1} \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(q^1, s)} + v^{t2} \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(q^2, s)} = 0 \text{ pe } S,$$

sau încă

$$(38'')\qquad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \text{ pe } S.$$

Dacă, în particular, suprafaţa S este fixă, condiţia la limită (38″) ia forma simplificată

$$(39)\qquad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(t, s)} = 0 \text{ pe } S.$$

7. O IPOTEZĂ SUPLIMENTARĂ

Să presupunem în particular că funcţiile ψ şi χ nu depind explicit de timpul t, adică

$$(10')\qquad \psi = \psi(q^1, q^2) \quad \text{şi} \quad \chi = \chi(q^1, q^2).$$

În acest caz este evident că D^* nu depinde explicit de t şi prin urmare, conform cu (9′), vectorul turbion rot $\vec{v}$ este invariabil în timp.

Primele două ecuaţii (17) se reduc la

$$(40)\qquad \frac{\partial H}{\partial q^1} = D^* v^2, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^2} = -D^* v^1.$$

La un moment t fixat, ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de curent ale mişcării sînt

$$\frac{\delta q^1}{v^1} = \frac{\delta q^2}{v^2} = \frac{\delta q^3}{v^3}.$$

Conform cu (40) rezultă că pe o linie de curent avem $\delta H = 0$ ceea ce înseamnă că suprafeţele

$$(41)\qquad H = \text{const.}$$

la un moment t fixat sînt atît *suprafeţe de vîrtej* cît şi *suprafeţe de curent*, adică nişte *suprafeţe Bernoulli-Vâlcovici* [8].

Conform cu (10′), ecuaţia (18′) a hamiltonianului devine

$$H = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V_0^2 + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - U_0. \tag{42}$$

Condiţia la limită (38) pe o suprafaţă S prin care nu avem transfer de fluid se reduce la :

$$\frac{\partial H}{\partial s} = D^* \left(- v^{t1} \frac{\partial q^2}{\partial s} + v^{t2} \frac{\partial q^1}{\partial s} \right) \text{ pe } S, \tag{43}$$

condiţie care în cazul suprafeţei S fixe devine

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \text{ pe } S$$

şi deci

$$H = \text{const. pe } S. \tag{44}$$

Aşadar, în cazul condiţiilor suplimentare (10′), *suprafeţele S fixe ce delimitează fluidul şi prin care nu avem transfer de fluid sînt nişte suprafeţe Bernoulli-Vâlcovici.*

Condiţiile iniţiale constau de obicei în a se da la momentul iniţial t_0 viteza şi densitatea fluidului, adică

$$v^1|_{t=t_0} = v_0^1(q^1, q^2), \quad v^2|_{t=t_0} = v_0^2(q^1, q^2), \quad v_3|_{t=t_0} = b_0 \quad \rho|_{t=t_0} = \rho_0(q^1, q^2), \tag{45}$$

primele două din aceste condiţii, conform cu (40), dînd pentru H condiţiile iniţiale

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q^1}\right|_{t=t_0} = D^* v_0^2(q^1, q^2), \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial q^2}\right|_{t=t_0} = - D^* v_0^1(q^1, q^2). \tag{46}$$

În cazul cînd domeniul ocupat de fluid este nemărginit, trebuie cunoscută comportarea la mari distanţe a mişcării fluidului. Aceasta revine la a şti comportarea la infinit a derivatelor parţiale în raport cu q^1 şi q^2 ale funcţiei H.

În virtutea lui (40), ecuaţia (12′) devine

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left(- \frac{g_{21}}{D^*} \frac{\partial H}{\partial q^2} + \frac{g_{22}}{D^*} \frac{\partial H}{\partial q^1} \right) - \frac{\partial}{\partial q^2}\left(- \frac{g_{11}}{D^*} \frac{\partial H}{\partial q^2} + \frac{g_{12}}{D^*} \frac{\partial H}{\partial q^1} \right) = D^*$$

sau încă

$$\begin{aligned} & g_{22} \frac{\partial^2 H}{(\partial q^1)^2} - 2\, g_{21} \frac{\partial^2 H}{\partial q^1\, \partial q^2} + g_{11} \frac{\partial^2 H}{(\partial q^2)^2} + D^* \left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{22}}{D^*}\right) - \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{g_{12}}{D^*}\right) \right] \cdot \frac{\partial H}{\partial q^1} + \\ & + D^* \left[\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{g_{11}}{D^*}\right) - \frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{21}}{D^*}\right) \right] \frac{\partial H}{\partial q^2} = (D^*)^2. \end{aligned} \tag{47}$$

Se vede uşor că ecuaţia (47) este de tip eliptic.

Presupunînd că funcţiile ψ şi χ sînt alese convenabil, problema se reduce la determinarea hamiltonianului H conform ecuaţiei (47), condiţiei la limită (43), condiţiilor iniţiale (46) şi eventual unor condiţii la mari distanţe.

O dată H determinat, funcţia Φ se obţine cu ajutorul ecuaţiilor

$$(48)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial q^1}+\psi\frac{\partial\chi}{\partial q^1}&=\frac{1}{D^*}\left(g_{12}\frac{\partial H}{\partial q^1}-g_{11}\frac{\partial H}{\partial q^2}\right)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial q^2}+\psi\frac{\partial\chi}{\partial q^2}&=\frac{1}{D^*}\left(g_{22}\frac{\partial H}{\partial q^1}-g_{21}\frac{\partial H}{\partial q^2}\right)\end{aligned}$$

deduse din (14) conform cu (26) şi (40).

Din ecuaţiile (48) în baza lui (10′) prin derivare în raport cu t obţinem

$$(49)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_{12}}{D^*}\,\frac{\partial H}{\partial q^1}-\frac{g_{11}}{D^*}\,\frac{\partial H}{\partial q^2}\right)\\ \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_{22}}{D^*}\,\frac{\partial H}{\partial q^1}-\frac{g_{21}}{D^*}\,\frac{\partial H}{\partial q^2}\right),\end{aligned}$$

de unde reiese că derivata $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ depinde de ψ şi χ prin intermediul determinantului D^*.

Avem apoi

$$(50)\qquad V_0^2=\frac{1}{(D^*)^2}\left[g_{11}\left(\frac{\partial H}{\partial q^2}\right)^2-2\,g_{12}\frac{\partial H}{\partial q^2}\,\frac{\partial H}{\partial q^1}+g_{22}\left(\frac{\partial H}{\partial q^1}\right)^2\right]$$

astfel că din (42) în virtutea legii de stare se determină presiunea p şi densitatea ρ a fluidului. Este vizibil că în baza lui (49) şi (50) atît presiunea p cît şi densitatea ρ depind de ψ şi χ de asemenea prin intermediul lui D^*.

Ecuaţia (32) constituie o condiţie de compatibilitate a alegerii funcţiilor ψ şi χ. Se observă că în această ecuaţie (32) funcţiile ψ şi χ intervin de asemenea prin intermediul determinantului D^*. Aşadar, una din funcţiile ψ sau χ este arbitrară, cealaltă fiind aşa fel aleasă sau determinată încît determinantul D^* să satisfacă ecuaţia (32). Această nedeterminare este naturală, deoarece în reprezentarea (8) a lui Clebsch funcţiile ψ şi χ sînt determinate, abstracţiei făcînd de o transformare canonică [4].

Ecuaţia (32), conform cu (9′), se mai scrie

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\Omega^3}\right)+\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{\rho}{\Omega^3}\right)\cdot v^1+\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{\rho}{\Omega^3}\right)\cdot v^2=0$$

de unde, datorită lui (40) şi cum Ω^3 în baza ipotezei (10′) nu depinde de t, avem

$$(51)\qquad \sqrt{g}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(H,\ \dfrac{\rho}{\Omega^3}\right)}{\partial(q^1,\ q^2)}=0$$

sau încă

$$(51')\qquad \sqrt{g}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\Omega^3}\,\frac{\partial(H,\ \rho)}{\partial(q^1,\ q^2)}-\frac{\rho}{(\Omega^3)^2}\,\frac{\partial(H,\Omega^3)}{\partial(q^1,q^2)}=0.$$

8. MIŞCĂRI CU VIRTEJ REGULAT

Vom spune despre o mişcare a unui fluid că este o *mişcare cu vîrtej regulat* dacă în orice punct al domeniului ocupat de fluid este îndeplinită condiţia

$$(52)\qquad \frac{\mathrm{d}\,\Omega^3}{\mathrm{d}t}=0.$$

Orice mişcare fluidă descrisă de reprezentarea (8)—(10) dar care nu este cu vîrtej regulat se va numi *mişcare cu vîrtej neregulat.*

Cum în cazul ipotezei (10′) Ω^3 nu depinde de t, ecuaţia (52), analog ca şi ecuaţia (32), se transcrie

$$(52')\qquad \frac{\partial(H,\ \Omega^3)}{\partial(q^1,\ q^2)}=0.$$

De la început se pun în evidenţă două moduri de satisfacere a ecuaţiei (52′) [1].

I. Se poate presupune că în tot domeniul ocupat de fluid

$$(53)\qquad \Omega^3\equiv a\ (\text{const.}),$$

condiţie care fiind independentă de funcţiile H şi Φ ne dă posibilitatea alegerii de la început a unor funcţii ψ şi χ compatibile cu ecuaţia (32).

Acest lucru a fost făcut de noi în lucrările [5] şi [6]. În lucrarea [5] drept coordonate turbionare q^1, q^2, q^3 s-au luat chiar coordonatele carteziene x_1, x_2, x_3 şi s-a pus $\psi = ax$ şi $\chi = y$, ceea ce a condus la o mişcare cu vîrtej constant ($D^* = a$). În lucrarea [6] drept coordonate turbionare s-au luat coordonatele cilindrice r, θ, z şi s-a ales $\psi = a\,r^2$ şi $\chi = z$, obţinîndu-se o mişcare în care vîrtejul este proporţional cu distanţa r la axa Oz şi perpendicular pe planele meridiane ce trec prin Oz.

Mişcările caracterizate de condiţia (53) sînt mişcări cu vîrtej dat şi proporţional cu rădăcina patrată din coeficientul g_{33} al metricei

$$\operatorname{rot}\vec{v}\equiv a\vec{e}_3=a\sqrt{g_{33}}\cdot(\operatorname{vers}\vec{e}_3)$$

generalizînd evident mişcările studiate în [5] şi [6].

---

[1] Cazul $H = \text{const.}$ se va lăsa de-o parte deoarece conduce la mişcările irotaţionale.

Atunci, orice mişcare cu vîrtej regulat avînd o astfel de proprietate o vom numi *mişcare de speţa I-a cu vîrtej regulat.*

Ecuaţiile (40) conform cu (53) în cazul acestor mişcări devin

$$(40') \qquad \frac{\partial H}{\partial q^1} = a\sqrt{g}\,.v^2, \qquad \frac{\partial H}{\partial q^2} = -a\sqrt{g}\cdot v^1.$$

De asemenea ecuaţia (47) devine

$$g_{22}\frac{\partial^2 H}{(\partial q^1)^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 H}{\vartheta q^1\,\partial q^2} + g_{11}\frac{\partial^2 H}{(\partial q^2)^2} + \sqrt{g}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\right) - \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right)\right]\frac{\partial H}{\partial q^1} +$$

$$(47') \qquad + \sqrt{g}\left[\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\right) - \frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\right)\right]\frac{\partial H}{\partial q^2} = a^2 g$$

iar condiţiile iniţiale (46) :

$$(46') \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial q^1}\right|_{t=t_0} = a\sqrt{g}\cdot v_0^2(q^1, q^2), \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial q^2}\right|_{t=t_0} = -a\sqrt{g}\,v_0^1(q^1,q^2).$$

Adăugînd atunci şi condiţia la limită (43)

$$(43') \qquad \frac{\partial H}{\partial s} = a\sqrt{g}\left(-v^{t1}\frac{\partial q^2}{\partial s} + v^{t2}\frac{\partial q^1}{\partial s}\right) \text{ pe } S$$

şi eventualele condiţii la mari distanţe se observă că determinarea hamiltonianului H se face în acest caz independent de funcţiile ψ şi χ.

Ecuaţiile (48), de asemenea în baza lui (53), devin

$$(48') \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial q^1} + \psi\frac{\partial\chi}{\partial q^1} &= \frac{1}{a}\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial H}{\partial q^1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial H}{\partial q^2}\right), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial q^2} + \psi\frac{\partial\chi}{\partial q^2} &= \frac{1}{a}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial H}{\partial q^1} - \frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\frac{\partial H}{\partial q^2}\right). \end{aligned}$$

Presupunînd atunci că funcţiile ψ şi χ sînt *date* sau *alese* astfel încît

$$(53') \qquad \frac{\partial(\psi, \varkappa)}{\partial(q^1, q^2)} = a\sqrt{g}$$

din ecuaţiile (48'), abstracţie de o funcţie aditivă depinzînd de t, se determină funcţia Φ.

Expresia (50) a lui V_0^2 devine

$$(50') \qquad V_0^2 = \frac{1}{a^2 g}\left[g_{11}\left(\frac{\partial H}{\partial q^2}\right)^2 - 2g_{12}\frac{\partial H}{\partial q^2}\frac{\partial H}{\partial q^1} + g_{22}\left(\frac{\partial H}{\partial q^1}\right)^2\right]$$

astfel că funcţiile H şi $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ fiind independente de ψ şi χ, din (42) rezultă că şi presiunea p şi densitatea ρ nu depind de alegerea funcţiilor ψ şi χ.

Prin urmare, o mişcare de speţa I-a cu vîrtej regulat poate fi complet determinată, alegerea funcţiilor ψ şi χ satisfăcînd ecuaţiei (53′) nefiind esenţială.

II. Nu orice mişcare cu vîrtej regulat este de speţa I-a, deoarece s-ar putea ca

$$\Omega^3 \equiv \frac{D^*}{\sqrt{g}} \not\equiv \text{const.}$$

Aceasta revine la faptul că componenta Ω^3 nu are aceeaşi valoare în orice punct al domeniului ocupat de fluid. Cum însă în cazul mişcărilor cu vîrtej regulat avem ecuaţia de condiţie (52), componenta Ω^3 rămîne invariantă de-a lungul traiectoriilor moleculelor de fluid

$$\Omega^3 \equiv \text{const.} \tag{54}$$

constanta din această relaţie (54) variind în general de la o traiectorie la alta.

Astfel de mişcări guvernate de reprezentarea (8) şi de (10) pentru care Ω^3 este constant numai de-a lungul traiectoriilor moleculelor de fluid vor fi numite *mişcări de speţa a II-a cu vîrtej regulat.*

În cazul ipotezelor (10′) deoarece Ω^3 nu depinde de t, presupunînd că funcţiile ψ şi χ sînt alese sau determinate aşa fel ca să nu fie îndeplinită condiţia (53′), ecuaţia (54) este ecuaţia unei suprafeţe de mişcare fixe în spaţiu, adică ecuaţia unei *suprafeţe de curent*. Prin urmare, dacă funcţiile ψ şi χ sînt cunoscute, moleculele de fluid alunecă pe nişte suprafeţe de curent date sau cunoscute. Dacă funcţiile ψ şi χ nu sînt cunoscute, după determinarea lor, ecuaţia (54) determină o familie de suprafeţe de mişcare fixe pe care alunecă aceste molecule.

Dacă, în particular, $b(t) \equiv 0$ avem $v_3 = v^3 = 0$ şi suprafeţele de coordonate $q^3 = \text{const.}$ sînt de asemenea niste *suprafeţe de curent*, astfel că urmele pe care le lasă suprafeţele de curent (54) pe fiecare suprafaţă $q^3 = \text{const.}$ sînt nişte *linii de curent* ale mişcării. În acest caz, dacă funcţiile ψ şi χ sînt cunoscute, aceste linii de curent sînt date iar problema se reduce la determinarea modului cum se mişcă moleculele de fluid pe aceste linii de curent. În general, funcţiile ψ şi χ nefiind date, familia liniilor de curent de pe suprafeţele $q^3 = \text{const.}$ caracterizată de ecuaţia (54) trebuie aflată o dată cu aceste funcţii ψ şi χ.

În cazul mişcării de speţa a II-a cu vîrtej regulat din ecuaţia (52′) rezultă

$$H = H(\Omega^3, t) \tag{55}$$

încît ecuaţiile (40) se transcriu

$$\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial \Omega^3}\frac{\partial \Omega^3}{\partial q^1} = \sqrt{g}\,.\,v^2, \qquad \frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial \Omega^3}\frac{\partial \Omega^3}{\partial q^2} = -\sqrt{g}\,v^1 \tag{40''}$$

iar ecuaţiile (48) devin

$$(48'')\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial q^1} + \psi\frac{\partial\chi}{\partial q^1} &= \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^2}\right)\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial\,\Omega^3},\\ \frac{\partial\Phi}{\partial q^2} + \psi\frac{\partial\chi}{\partial q^2} &= \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^1} - \frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^2}\right)\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial\,\Omega^3}. \end{aligned}$$

Eliminînd între ecuaţiile (48″) funcţia Φ obţinem

$$(47'')\qquad \lambda\frac{\partial}{\partial\,\Omega^3}\left(\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial\,\Omega^3}\right) + \mu\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial\,\Omega^3} = (\Omega^3)^2,$$

unde am notat pentru prescurtare

$$(56)\qquad \lambda = \frac{1}{g}\left[g_{22}\left(\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^1}\right)^2 - 2\,g_{21}\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^1}\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^2} + g_{11}\left(\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^2}\right)^2\right]$$

$$(57)\qquad \begin{aligned} \mu = \frac{1}{g}\left[g_{22}\frac{\partial^2 H}{(\partial q^1)^2} - 2g_{21}\frac{\partial^2 H}{\partial q^1\partial q^2} + g_{11}\frac{\partial^2 H}{(\partial q^2)^2}\right] + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\right) -\right.\\ \left. - \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\right)\right]\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^1} + \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\right) - \frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\right)\right]\cdot\frac{\partial\,\Omega^3}{\partial q^2}. \end{aligned}$$

Ecuaţia (47″) s-ar fi putut de altfel obţine şi din (47). Dat fiind că această ecuaţie (47″) este o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul întîi în raport cu funcţia $\dfrac{1}{\Omega^3}\dfrac{\partial H}{\partial\,\Omega^3}$, avînd coeficienţii independenţi de timpul t, rezultă că această funcţie este în general de forma

$$\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial\,\Omega^3} = k(\Omega^3).C(t) + h(\Omega^3).$$

Reînlocuind însă această expresie în ecuaţia (47″) şi separînd variabilele t şi Ω^3 rezultă:

— sau că $C(t) \equiv$ const., în care caz abstracţie de o funcţie aditivă depinzînd de t neesenţială, avem

$$(55')\qquad H = H(\Omega^3);$$

— sau că $C(t) \not\equiv$ const., în care caz, de asemenea abstracţie de o funcţie aditivă depinzînd de t, H este o funcţie lineară de t:

$$(55'')\qquad H = H^*(\Omega^3).C(t) + H^{**}(\Omega^3).$$

În cazul unei dependenţe de forma (55′) între H şi Ω^3, din (48″) reiese că funcţia Φ, făcînd iarăşi abstracţie de o funcţie aditivă depinzînd de t, este de forma $\Phi = \Phi(q^1, q^2)$, astfel că întreaga mişcare, eventual cu excepţia lui v_3 şi v^3 este independentă de t. Dacă $b(t) \equiv b$

(const.), atunci mișcarea este permanentă. În acest caz, dacă funcția (55′) se presupune dată, din ecuația (47″) putem determina funcția $\Omega^3 = \Omega^3(q^2, q^2)$. Determinarea completă a acestei funcții Ω^3 se va face cu ajutorul condiției la limită (43), condiție care în cazul dependenței (55′) se transcrie :

$$\frac{1}{\Omega^3}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Omega^3}\frac{\mathrm{d}\Omega^3}{\mathrm{d}s} = \sqrt{g}\left(-v^{t1}\frac{\partial q^2}{\partial s} + v^{t2}\frac{\partial q^1}{\partial s}\right) \text{ pe } S. \tag{43''}$$

În cazul suprafeței S fixe, această condiție (43″) se reduce la

$$\Omega^3 = \text{const. pe } S. \tag{44''}$$

O dată funcția Ω^3 determinată, putem oricînd alege o pereche de funcții ψ și χ așa fel ca

$$\frac{\partial(\psi, \chi)}{\partial(q^1, q^2)} = \sqrt{g}\,.\,\Omega^3 \tag{58}$$

încît funcțiile ψ, χ, H și Ω^3 fiind cunoscute din (48″) se poate determina și funcția Φ. Astfel, toate elementele mișcării sînt determinate.

Dacă avem însă o dependență de forma (55″) între funcțiile H și Ω^3, din ecuațiile (48″) rezultă că și funcția Φ este o funcție liniară de $C(t)$. Deci, abstracție de o funcție aditivă depinzînd de t, putem scrie

$$\Phi = \Phi^*(q^1, q^2)\,.\,C(t) + \Phi^{**}(q^1, q^2). \tag{59}$$

Din ecuațiile (48″) rezultă atunci

$$\tag{59*} \begin{aligned} \frac{\partial\Phi^*}{\partial q^1} &= \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^2}\right)\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H^*}{\partial\Omega^3} \\ \frac{\partial\Phi^*}{\partial q^2} &= \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^1} - \frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^2}\right)\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H^*}{\partial\Omega^3} \end{aligned}$$

și

$$\tag{59**} \begin{aligned} \frac{\partial\Phi^{**}}{\partial q^1} + \psi\frac{\partial\chi}{\partial q^1} &= \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^1} - \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^2}\right)\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial\Omega^3}, \\ \frac{\partial\Phi^{**}}{\partial q^2} + \psi\frac{\partial\chi}{\partial q^2} &= \left(\frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^1} - \frac{g_{21}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\Omega^3}{\partial q^2}\right)\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial\Omega^3}. \end{aligned}$$

Eliminînd funcția Φ^* între ecuațiile (59*) și funcția Φ^{**} între ecuațiile (59**), obținem

$$\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega^3}\left(\frac{1}{\Omega^3}\frac{\mathrm{d}H^*}{\mathrm{d}\Omega^3}\right) + \mu\frac{1}{\Omega^3}\frac{\mathrm{d}H^*}{\mathrm{d}\Omega^2} = 0, \tag{60*}$$

$$\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega^3}\left(\frac{1}{\Omega^3}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Omega^3}\right) + \mu\frac{1}{\Omega^3}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Omega^3} = (\Omega^3)^2. \tag{60**}$$

Din aceste ultime două ecuații rezultă evident că funcțiile λ și μ sînt funcții de q^1 și q^2 prin intermediul lui Ω^3 :

$$\lambda = \lambda(\Omega^3), \qquad \mu = \mu(\Omega^3). \tag{61}$$

Dacă fluidul este în contact cu o suprafaţă impermeabilă fixă S, în baza condiţiei la limită (44) rezultă

$$H^* = \text{const.} \quad \text{şi} \quad H^{**} = \text{const. pe } S,$$

astfel că pe suprafaţa S avem de asemenea condiţia la limită (44″).

Aşadar, funcţia Ω^3 este caracterizată de ecuaţiile (56) şi (57), unde funcţiile λ şi μ sînt de forma (61) precum şi de condiţia la limită (44″).

Cum în cazul mişcărilor cu vîrtej regulat avem

$$V_0^2 = \lambda(\Omega^3)\left(\frac{1}{\Omega^3}\frac{\partial H}{\partial \Omega^3}\right)^2, \tag{50''}$$

rezultă că V_0 este de asemenea o funcţie de Ω^3 şi t de forma

$$V_0 = V_0^*(\Omega^3).C(t) + V_0^{**}(\Omega^3). \tag{62}$$

Observaţie. În raţionamentele precedente nu s-a ţinut cont de ecuaţia (32) provenită din ecuaţia de continuitate. Evident, în baza acestei ecuaţii (32) rezultă că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o mişcare fluidă descrisă de relaţiile (8) şi (10) să fie cu vîrtej regulat, adică să avem relaţia (52), este ca în domeniul ocupat de fluid

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \cdot \tag{63}$$

Or, din această ecuaţie (63) rezultă :

— fie că *fluidul este incompresibil*, adică

$$\rho \equiv \text{const.}$$

în domeniul ocupat de fluid ;

— fie că ***densitatea fluidului se conservă numai de-a lungul traiectoriilor moleculelor de fluid***, adică

$$\rho \equiv \text{const.},$$

de-a lungul acestor traiectorii însă constanta din membrul drept variind în general de la o traiectorie la alta.

Primită la redacţie la 17 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. P. A. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, vol. III, Paris, ed. a III-a, 1928, p. 460—463.
2. A. Clebsch, *Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1857, p. 293—312.
3. Ion I. Cristea, *Considerarea suprafeţelor de vîrtej în studiul mişcărilor rotaţionale permanente tridimensionale ale fluidelor perfecte barotrope.* Analele Universităţii din Bucureşti, seria Ştiinţele Naturii (Matematică-Fizică), 34, XI, 1962, p. 253—265.
4. — *Mecanica analitică a fluidelor perfecte barotrope*, Studia Universitatis Babeş-Bolyay, seria Mathematica-Physica, fasc. 2, 1963, p. 81—94.
5. — *O mişcare plană cu vîrtej constant pentru un fluid incompresibil*, Studii şi cercetări matematice, Bucureşti, **XIV**, *2*, 1963, p. 253—306.
6. — *Un tip de mişcări axial simetrice rotaţionale pentru fluidele incompresibile*, Analele Universităţii Bucureşti, seria Ştiinţele Naturii (Matematică-Mecanică) ***46***, **XIII**, 1964 (sub tipar).
7. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge, ed. VI-a, 1932, p. 248—249.
8. V. Vîlcovici, *Suprafeţele Bernoulli.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, Bucureşti, **XI**, *6* (1960).

ASUPRA UNEI METODE DE ESTIMAŢIE ÎN STATISTICA SISTEMELOR ALEATOARE CU LEGĂTURI COMPLETE

DE

M. BOTEZ

În lucrarea de faţă se propune ca metodă de estimaţie a parametrilor care intervin în repartiţiile unor variabile aleatoare legate în „sistem aleator cu legături complete'' 1), metoda minimului lui χ^2[de ex. [6], sau [12]]. Rezultatul principal al Notei de faţă arată că, în condiţii largi, valoarea parametrului care minimizează expresia lui χ^2 convenabil introdusă, converge aproape sigur către valoarea exactă a parametrului de estimat; se stabileşte şi normalitatea asimptotică a „erorii'', în sensul diferenţei convenabil normate dintre această valoare şi valoarea exactă a parametrului de estimat.

În § 1 se dau proprietăţile generale ale sistemelor cu legături complete. În § 2 se stabilesc rezultatele principale anunţate, iar în § 3 se dau generalizările acestor rezultate, pentru cazul în care parametrul de estimat este un vector; în sfîrşit, în § 4 se discută condiţiile impuse şi se schiţează generalizările.

§ 1. Fie $(X, \mathcal{F})$, $(W, \mathcal{V})$ două spaţii măsurabile, $(u(. ; x),\ x \in X)$ o familie de aplicaţii ale lui W în el însuşi, $X^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} X_j,\ X_j \equiv X,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ n \in N^* = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{F}^{(n)}$- σ-algebra produs corespunzătoare lui $X^{(n)}$, şi $u\ (. ;\ x^{(n)}) = u(\cdot ;\ x_n) \circ u\ (;\ x_{n-1}) \circ \ldots \circ u(\cdot ;\ x_1),\ x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$

Fie apoi $B(W, \mathcal{V})$ spaţiul Banach al funcţiilor φ definite pe W reale, mărginite şi $\mathcal{V}$-măsurabile, cu norma $\|\varphi\| = \sup_{c \in W} |\varphi(c)|$ şi $\boldsymbol{P}$ o funcţie defi-

---

1) Noţiunea de „lanţ cu legături complete'' a fost introduse în teoria probabilităţilor de O. Onicescu şi G. Mihoc în 1935 [11]; un studiu aprofundat al problemelor legate de acest tip de dependenţă statistică, bazat pe lucrări publicate pînă în 1960, se, află în monografia [3]. „Sistemul aleator cu legături complete'', introdus de M. Iosifescu în [7], este o generalizare a acestui concept.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, P. 75–86 BUCUREŞTI, 1966

nită pe $W \times \mathfrak{F}$ astfel că $P(c;.)$ este o probabilitate pe $\mathfrak{F}$ pentru orice $c \in W$, și $P(.\,;A) \in B(W, \mathfrak{V})$ pentru orice $A \in \mathfrak{F}$.

După [7], familia de aplicații $(u(\cdot\,;\,x),\ x \in X)$ și funcția P determină un sistem aleator omogen cu legături complete. Se poate arăta că pentru orice $c \in W$, există un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathfrak{K}, \mathfrak{P}_c)$ și un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N^*}$ definite pe Ω cu valori în X, astfel ca

$$\mathfrak{P}_c(\xi_1(\omega) \in A) = P(c;\ A)$$

$$\mathfrak{P}_c(\xi_{n+1} \in A \mid \xi_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n)_{\substack{\xi_j(\omega) = x_j \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = P(u(c;\ x^{(n)});\ A),$$

pentru orice $n \in N^*$, $x^{(n)} \in X^{(n)}$, $A \in \mathfrak{F}$.

Pentru orice l, $n \in N^*$, fie $P_{1,l}$ funcția definită pe $W < \mathfrak{F}^{(l)}$ prin relațiile

$$P_{1,l} = P \qquad \text{dacă } l = 1$$

$$P_{1.l}(c;\ A^{(l)}) = \int_X P(c;\ dx_1) \int_X \ldots \int_X P(u(c;\, x^{(l-1)});\, \mathrm{d}x_l\}\, \chi_{A^{(l)}}(x_1, \ldots\, x_l),$$

$$\text{dacă } l > 1,$$

cu$\chi_{A^{(l)}}$ indicatorul mulțimii $A^{(l)} \in F^{(l)}$, și pentru orice l, $n \in N^*$, fie $P_{1,l}^{(n)}(A^{(l)})$ funcția definită pe $W \times \mathfrak{F}^{(l)}$ prin relațiile

$$P_{1,l}^{(n)} = P_{1,l} \qquad \text{dacă } n = 1$$

$$P_{1,l}^{(n)}(c;\ A^{(l)}) = \int_X P(c;\ dx)\, P_{1,l}^{(n-1)}(u(c;\ x);\ A^{(l)}) \text{dacă } n > 1.$$

Se poate arăta că

$$P_{1,l}^{(n)}(c;\ A^{(l)}) = \mathfrak{P}_c(\xi_n \in A_1, \ldots,\ \xi_{n+l-1} \in A_l)$$

pentru $A^{(l)} = A_1 \times \ldots \times A_l$.

În condiții largi ([7], [13]) pentru orice $l \in N^*$ există o probabilitate $P_{1,l}^{\infty}$ pe $\mathfrak{F}^{(l)}$, astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} P_{1,l}^{(n)}(c;\ A^{(l)}) = P_{1,l}^{\infty}(A^{(l)})$$

uniform în raport cu l, $n \in N^*$, $c \in W$, $A^{(l)} \in \mathfrak{F}^{(l)}$.

În cele ce urmează, vom presupune că există un șir de numere reale $(\varepsilon_n)_{n \in N^*}$ astfel ca $\sum_{n \in N^*} \varepsilon_n < \infty$ și

$$|\,P_{1,l}^{(n)}(c;\ A^{(l)}) - P_{1,l}^{\infty}(A^{(l)})\,| < \varepsilon_n$$

pentru orice l, $n \in N^*$, $A^{(l)} \in \mathfrak{F}^{(l)}$, $c \in W$

Fie f o funcție reală, $\mathfrak{F}$-măsurabilă și mărginită 2), definită pe X. Vom folosi în cele ce urmează următoarele rezultate :

TEOREMA 1.1. (în [5], [8]). *Dacă notăm* $E^{\infty}(f)=\int_X f(x)\, P^{\infty}_{1,1}(\mathrm{d}x)$, *atunci șirul de variabile aleatoare* $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\right)_{n\in N^*}$ *converge aproape sigur către* $E^{\infty}(f)$ *pentru orice* $c\in W$

TEOREMA 1.2 [în [7], [4]). *Fie* $\sigma^2 = E^{\infty}(f^2) - (E^{\infty}(f))^2 + 2\sum_{h\in N^*}\{E^{\infty}(f(\xi_1)f(\xi_{h+1})) - (E^{\infty}(f))^2\}$

În condițiile stabilite anterior, șirul de variabile aleatoare $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}[f(\xi_j) - E_{\infty}(f)]\right)_{n\in N^*}$ *definite pe* $(\Omega, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}_c)$ *converge în repartiție pentru orice* $c\in W$ *cînd* $n\to\infty$ *către o variabilă normală, cu media 0 și dispersia* σ^2.

TEOREMA 1.3 (în [2]). *Fie* $f^1, \ldots, f^s$, *s-funcții reale,* $\mathfrak{F}$*-măsurabile mărginite, definite pe* X. *În condițiile stabilite anterior, șirul de vectori aleatori* $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(f^k(\xi_j) - E^{\infty}(f^k))\right)_{1\leqslant k\leqslant s}\right\}_{n\in N^*}$ *definit pe* $(\Omega, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}_c)$ *converge în repartiție pentru orice* $c\in W$ *cînd* $n\to\infty$, *către un vector aleator normal, cu media 0 și matricea covariantă cu elemente de forma*

$$\sigma_{ij} = E^{\infty}(f^i f^j) - E^{\infty}(f^j)E^{\infty}(f^i) + \sum_{h\in N^*}\{E^{\infty}(f^i(\xi_1)f^j(\xi_{h+1}) -$$

$$- E^{\infty}(f^i)E^{\infty}(f^j)\} + \sum_{h\in N^*}\{E^{\infty}(f^j(\xi_1)f^i(\xi_{h+1})) - E^{\infty}(f^i)E^{\infty}(f^i)\},\ 1\leqslant i,\ j\leqslant s.$$

§ 2. Problema de estimație statistică pe care o studiem poate fi formulată astfel : presupunem că aplicațiile $\{u(\cdot\,;x),\ x\in X\}$ sînt date și că funcția P depinde de un parametru $\theta\in\Theta$, unde $\Theta\subset R^s$ este un interval deschis nedegenerat, care cuprinde valoarea exactă θ_0 a acestui parametru. În cursul acestui paragraf, vom considera $s = 1$, cazul $s > 1$ va fi studiat în § 3.

Presupunem verificate următoarele condiții, în afara celor menționate la § 1 :

Condiția 2.1. Există o familie de mulțimi $\{A_i\}_{i\in I}$, $I = \{1, 2, \ldots, l\}$, cu proprietățile : $A_i\in\mathfrak{F}$, $i\in I$, $\bigcup_{i\in I} A_i = X$, $A_i\cap A_j = \emptyset$ pentru $i\neq j$, și $P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta) > 0$ pentru orice $\theta\in\Theta$, $i\in I$.

Condiția 2.2. Pentru orice $i\in I$, $\theta\in\Theta$, derivatele $\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta)$ $(k = 1, 2, 3)$ există și sînt mărginite.

Fie pentru orice $A\in\mathfrak{F}$, $\omega\in\Omega$, $c\in W$,

$$\nu_n(A, \omega) = \sum_{j=1}^{n}\Phi_{\xi_j(\omega)}(A),$$

---

2) Așa cum s-a arătat în [4], [5], ipoteza de mărginire a funcției se poate înlocui cu alte ipoteze ; pentru dezvoltările ulterioare, este însă suficientă această presupunere.

unde Φ_x este măsura degenerată cu masa 1 în punctul x şi 0 în rest (Heaveside).

Introducem statistica

$$\chi_n^2(\theta, \omega) = \sum_{i \in I} \frac{[\nu_n(A_i, \omega) - n P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta)]^2}{n P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta)}. \quad 3)$$

Vom arăta, în cele ce urmează, că valoarea $\theta_n^*(\omega)$ care minimizează valoarea acestei statistici, are proprietăţi importante ca estimator al valorii exacte θ_0 a parametrului necunoscut.

Aflarea valorii lui θ care dă minimul expresiei $\chi_n^2(\theta, \omega)$ conduce la rezolvarea ecuaţiei

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \chi_n^2(\theta, \omega) = 0 \quad 4),$$

sau

$$\sum_{i \in I} \left\{ \frac{\nu_n(A_i, \omega) - n P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta)}{P_{1,1}^{\infty}(A_i. \theta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{[\nu_n(A_i, \omega) - n P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta)]^2}{2n P_{1,1}^{\infty}(A_i \theta)} \right\} \frac{\partial}{\partial \theta} P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta) = 0.$$

Dar, aşa cum s-a arătat în [9], $\frac{\nu_n(A_i, \omega)}{n}$ converge aproape sigur, pentru orice $c \in W$, către $P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta)$; rezultă că, asimptotic, termenul al doilea din paranteză este neglijabil în raport cu primul. Ca şi în cazul variabilelor aleatoare independente [6], sîntem conduşi să considerăm ecuaţia modificată

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} X_n^2(\theta, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} [\nu_n(A_i, \omega) - n P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta)] \frac{\partial}{\partial \theta} \lg P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta) = 0$$

care, ţinînd seama că $P_{1,1}^{\infty}(X; \theta) = 1$ pentru orice $\theta \in \Theta$, poate fi pusă sub forma :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta} X_n^2(\theta, \omega) = \frac{1}{n} \sum_{i \in I} \nu_n(A_i, \omega) \frac{\partial}{\partial \theta} \lg P_{1,1}^{\infty}(A_i, \theta) = 0.$$

În cele ce urmează, vom demonstra mai întîi o lemă, care va fi folosită în demonstraţiile teoremelor.

---

3) **Această notaţie este justificată de corolarul 1 din [2], care arată că, în condiţiile teoremei 1.3 din § 1, statistica considerată este asimptotic repartizată χ^2 cu cel mult $(l - 1)$ grade de libertate.**

4) **Aici, şi în cele ce urmează, înţelegem prin $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta_0, \omega)$, cantitatea $\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta, \omega)|_{\theta=\theta_0}$.**

LEMĂ. *Pentru orice* $c \in W$ *în condiţiile impuse în* § 1 *şi în condiţiile* 2.1, 2.2 :

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\dfrac{\partial}{\partial\theta} X_n^2(\theta_0,\ \omega) = 0$ $\mathfrak{P}_c$-aproape sigur.

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} X_n^2(\theta_0,\ \omega) = -\sum_{i\in I}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\right]^2}{P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)}\ \mathfrak{P}_c\text{-aproape sigur}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} X_n^2(\theta_0,\omega) = \sum_{i\in I}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\,P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0) <$$

$< \infty$, $\mathfrak{P}_c$-aproape sigur

Demonstraţia acestei leme foloseşte teorema 1.1 din § 1.

a) Din relaţia

$$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta}X_n^2(\theta_0,\ \omega) = \frac{1}{n}\sum_{i\in I}\left[\sum_{j=1}^{n}\Phi_{\xi_j}(A_i)\right]\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}\sum_{i\in 1}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0),$$

aplicînd teorema 1.1 pentru

$$f(\xi_j) = \sum_{i\in I}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\theta_0)$$

obţinem că, $\mathfrak{P}_c$-aproape sigur

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta}X_n^2(\theta_0,\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j) = E^\infty(f(x)) =$$

$$= \int_X\left[\sum_{i\in I}\Phi_x(A_i)\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\right]P^\infty_{1,1}(\mathrm{d}x,\ \theta_0) =$$

$$= \sum_{i\in I}\frac{\partial}{\partial\theta}P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0) = 0$$

b) Din relaţia

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}X_n^2(\theta_0,\ \omega) = \frac{1}{n}\sum_{i\in I}\left[\sum_{j=1}^{n}\Phi_{\xi_j}(A_i)\right]\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in I}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)$$

aplicînd teorema 1.1 pentru

$$f(\xi_j) = \sum_{i\in I}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)$$

obţinem că, $\mathfrak{P}_c$-aproape sigur,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}X_n^2(\theta_0,\ \omega)=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)=E^\infty(f)=$$

$$=\int_X\left[\sum_{i\in I}\Phi_x(A_i)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\right]P^\infty_{1,1}(\mathrm{d}x;\ \theta_0)=$$

$$=\sum_{i\in I}\int_{A_i}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\right]P^\infty_{1,1}(\mathrm{d}x,\ \theta_0)=$$

$$=\sum_{i\in I}\int_{A_i}\frac{\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\,P^\infty_{1,1}(A_i\ \theta_0)-\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\right]^2}{[P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)]^2}\cdot P^\infty_{1,1}(\mathrm{d}x,\theta_0)=$$

$$=-\sum_{i\in I}\int_{A_i}\frac{\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}P^\infty_{1,1}(A_i,\theta_0)\right]^2}{[P^\infty_{1,1}(A_i,\theta_0)]^2}\cdot P^\infty_{1,1}(\mathrm{d}x;\ \theta_0)=-\sum_{i\in I}\frac{\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\right]^2}{P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)}.$$

c) Din relaţia

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}X_n^2(\theta_0,\ \omega)=\frac{1}{n}\sum_{i\in I}\left[\sum_{j=1}^{n}\Phi_{\xi_j}(A_i)\right]\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in I}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0),$$

aplicînd teorema 1.1 pentru

$$f(\xi_j)=\sum_{i\in I}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0),$$

obţinem că, $\mathfrak{P}_c$ -aproape sigur,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}X_n^2(\theta_0,\ \omega)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)=E^\infty(f)=$$

$$=\int_X\left[\sum_{i\in I}\Phi_x(A_i)\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\right]P^\infty_{1,1}(\mathrm{d}x,\ \theta_0)=$$

$$=\sum_{i\in I}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\lg P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)\,P^\infty_{1,1}(A_i,\ \theta_0)<\infty,$$ folosind condiţia 2.2.

Lema de mai sus va fi folosită pentru demonstrarea teoremei de mai jos.

TEOREMA 2.1. *În condițiile impuse la § 1 și în condițiile 2.1, 2.2, pentru orice* $c \in W$, *ecuația în* θ

$$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta} X_n^2(\theta,\ \omega) = \frac{1}{n}\sum_{i\in I} \nu_n(A_i\ ,\ \omega)\frac{\partial}{\partial\theta.}\lg P_{1,1}^{\infty}(A_i,\ \theta) = 0$$

admite o rădăcină simplă $\theta_n^*(\omega)$ *pentru* $n \geqslant N(\omega)$, *unde* $N(\omega)$ *este o variabilă aleatoare* $\mathfrak{P}_c$*-aproape sigur mărginită. În plus, cînd* $n \to \infty$,

$$\mathfrak{P}_c\{\omega\,;\ \lim_{n\to\infty}\ \theta_n^*(\omega) = \theta_0\} = 1,$$

unde θ_0 *este valoarea adevărată a parametrului* θ.

Demonstrația acestei teoreme urmează în linii mari metoda din [6]. Într-adevăr, folosind condiția 2.2, putem scrie, pentru orice $\theta \in \Theta$,

$$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta} X_n^2(\theta,\ \omega) = \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta} X_n^2(\theta_0,\ \omega) + \frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} X_n^2(\theta_0,\ \omega)\,[\theta - \theta_0] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} X_n^2(\theta_1,\ \omega)\,[\theta - \theta_0]^2,$$

unde $\theta_1 = \theta_0 + \eta(\theta - \theta_0)$, $|\eta| \leqslant 1$.

Din lema 1 rezultă că dacă luăm δ astfel ca

$$0 < \delta < \frac{-1}{2(M+1)}\lim_{n\to\infty}\int_X \frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} X_n^2\,[\theta_0,\ \omega)\,P_{1,1}^{\infty}(\mathrm{d}x,\ \theta_0),$$

cu M verificînd relația

$$\int_X \frac{1}{n}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3} X_n^2(\theta_1,\ \omega)\,P_{1,1}^{\infty}(\mathrm{d}x,\ \theta_0) \leqslant M < \infty, \quad \text{(din condiția (2.2))}$$

atunci, pentru n suficient de mare, pentru orice $c \in W$, $\mathfrak{P}_c$-aproape sigur,

$$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta} X_n^2(\theta,\ \omega) < 0 \qquad \text{pentru } \theta \in (\theta_0,\ \theta_0 + \delta)$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta} X_n^2(\theta,\ \omega) > 0 \qquad \text{pentru } \theta \in (\theta_0 - \delta,\ \theta_0)$$

ceea ce arată că funcția continuă $\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial\theta} X_n^2(\theta,\ \omega)$ se anulează cel puțin într-un punct $\theta_n^*(\omega)$ în intervalul $(\theta_0 - \delta,\ \theta_0 + \delta)$; faptul că rădăcina $\theta_n^*(\omega)$ este simplă, rezultă din lema demonstrată, (punctul b).

Teorema este demonstrată.

TEOREMA 2.2. *În condițiile impuse la § 1 și în condițiile 2.1, 2.2 pentru orice* $c \in W$,

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{P}_c\{\omega\,;\ \sqrt{n}\,[\theta_n^*(\omega) - \theta_0] \leqslant \lambda\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

unde σ este dat de relația

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{i\in I}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)\right]^2}{\left[\sum\limits_{i\in I}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)\right]^2}{P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)}\right]^2} +$$

$$+2\sum_{h\in N*}\frac{\sum\limits_{i,j\in I}\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^{\infty}_{1,1}(A_j\,\theta_0)\cdot P^{\infty}_{1h}(A^{(h)}_{i,j})}{\left[\sum\limits_{i\in I}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)\right]^2}{P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)}\right]^2}$$

unde $A^{(h)}_{ij} = A_i \times \underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{h-2 \text{ ori}} \times A_j$.

Demonstrație. Folosind condiția 2.2 și un raționament analog celui folosit în demonstrația teoremei 2.1, putem scrie

$$\sqrt{n}(\theta^*_n - \theta_0) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}X^2_n(\theta_0)}{-\frac{1}{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}X^2_n[\theta_0+\eta(\theta^*_n-\theta_0)]}, \quad |\eta|<1.$$

Aplicînd teorema clasică a lui Sluțsky (de ex. [6]) și lema (punctul b), obținem că șirul de variabile aleatoare considerat are aceeași repartiție limită cu șirul

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial}{\partial\theta}X^2_n(\theta_0)}{\sum\limits_{i\in I}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)\right]^2}{P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sum\limits_{i\in I}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)}{\sum\limits_{i\in I}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)\right]^2}{P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)}}.$$

Aplicînd acum teorema 1.2 pentru

$$f(\xi_j) = \frac{\sum\limits_{i\in I}\Phi_{\xi_j}(A_i)\frac{\partial}{\partial\theta}\lg P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)}{\sum\limits_{i\in I}\frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)\right]^2}{P^{\infty}_{1,1}(A_i,\theta_0)}},$$

obținem rezultatul cerut în enunțul teoremei.

§ 3. Generalizarea rezultatelor obținute la § 2 pentru cazul în care $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_s) \in \Theta \subset R^s$ $(s > 1)$ nu prezintă dificultăți principale. Modificăm condițiile 2.1 și 2.2 după cum urmează :

Condiția 3.1. Există o familie $\{A_i\}_{i\in I}$, $I = \{1, \ldots l\}$ cu proprietățile : $A_i \in \mathfrak{F}$, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$, și $P^{\infty}_{1,1}(A_i, \overline{\theta}) > 0$ pentru orice $\overline{\theta} \in \Theta$, $i \in I$.

Condiția 3.2. Pentru orice $i \in I$, $\overline{\theta} \in \Theta$, derivatele parțiale $\frac{\partial^k}{\partial \theta_j^k} P^{\infty}_{1,1}(A_i;\, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ $[k = 1, 2, 3;\ j = 1, \ldots, s]$, există și sînt mărginite.

Introducem, ca și în § 2, statistica

$$\chi_n^2(\overline{\theta}, \omega) = \sum_{i\in I} \frac{[\nu_n(A_i, \omega) - n\, P^{\infty}_{1,1}(A_i, \overline{\theta})]^2}{n\, P^{\infty}_{1,1}(A_i, \overline{\theta})}.$$

Ecuația considerată în § 2, care are ca soluție minimul statisticii χ_n^2 este înlocuită pe acest model cu sistemul de s ecuații în $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \chi_n^2(\theta_1, \ldots, \theta_s;\ \omega) = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

și, ca în § 2, cu sistemul modificat

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} X_n^2(\theta_1, \ldots, \theta_s;\ \omega) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i\in I} \left[\nu_n(A_i, \omega) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \lg P^{\infty}_{1,1}(A_i\ \theta) \right] = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Ca și în § 2, se pot demonstra următoarele teoreme :

TEOREMA 3.1. *În condițiile impuse la § 1 și în condițiile* 3.1, 3.2, *pentru orice* $c \in W$, *sistemul de s ecuații în necunoscutele* $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} X_n^2(\theta_1, \ldots, \theta_s, \omega) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i\in I} \nu_n(A_i, \omega) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \lg P^{\infty}_{1,1}(A_i, \theta) = 0, \qquad (j = 1, \ldots, s)$$

admite o soluție simplă $\overline{\theta}^*_{(n)}(\omega) = (\theta^*_{n:1}(\omega), \ldots, \theta^*_{n:s}(\omega))$ pentru $n \geqslant N(\omega)$, unde $N(\omega)$ este o variabilă aleatoare $\mathfrak{P}_c$-aproape sigur mărginită. În plus, cînd $n \to \infty$

$$\mathfrak{P}_c\{\omega;\ \lim_{n\to\infty} \theta^*_{n:1}(\omega) = \theta_{01}, \ldots, \lim_{n\to\infty} \theta^*_{n:s}(\omega) = \theta_{0s}\} = 1,$$

unde $\overline{\theta}_0 = (\theta_{01}, \ldots, \theta_{0s})$ este valoarea adevărată a parametrului $\overline{\theta}$.

Demonstrația acestei teoreme este imediată și folosește pentru fiecare j, $1 \leqslant j \leqslant s$, rezultatul teoremei 2.1

TEOREMA 3.2. *În condițiile impuse la § 1 și în condițiile* 3.1, 3.2 *pentru orice* $c \in W$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{P}'_c \{\omega;\sqrt{n}[\theta^*_{n,1} - \theta_{01}] \leqslant \lambda_1, \ldots, \sqrt{n}[\theta^*_{n,s} - \theta_{0s}] \leqslant \lambda_s\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\det \Sigma}}{(2\pi)^{\frac{s}{2}}} \int_{-\infty}^{\lambda_1} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda_s} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{s} \sigma_{ij} x_i x_j} \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_s$$

unde matricea $\Sigma = \| \sigma_{ij} \|$ de determinant $\det \Sigma$, are elemente de forma

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum\limits_{k\in I} \frac{\partial}{\partial\theta_i} \lg P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0) \frac{\partial}{\partial\theta_j} \lg P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)\, P_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)}{\sum\limits_{k\in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i} P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)} \sum\limits_{l\in I} \frac{\frac{\partial}{\partial\theta_j} P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)}{P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)}} +$$

$$+ \sum_{h\in N^*} \frac{\sum\limits_{k,l\in I} \frac{\partial}{\partial\theta_i} \lg P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0) \frac{\partial}{\partial\theta_j} \lg P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)\, P^\infty_{1,h}(A^{(h)}_{i,j})}{\sum\limits_{k\in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i} P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)} \sum\limits_{l\in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j} P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)}} +$$

$$+ \sum_{h\in N^*} \frac{\sum\limits_{k,l\in I} \frac{\partial}{\partial\theta_i} \lg P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0) \frac{\partial}{\partial\theta_j} \lg P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)\, P^\infty_{1,h}(A^{(h)}_{j,i})}{\sum\limits_{k\in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i} P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P^\infty_{1,1}(A_k, \overline{\theta}_0)} \sum\limits_{l\in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j} P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P^\infty_{1,1}(A_l, \overline{\theta}_0)}},$$

unde $A^{(h)}_{i,j} = A_i \times \underbrace{X \ldots X}_{h-2 \text{ ori}} \times A_j$ iar $A^{(h)}_{j,i} = A_j \times \underbrace{X \ldots X}_{h-2 \text{ ori}} \times A_i$

Demonstrație. Ca și la teorema 2.2, putem scrie pentru orice j, $1 \leqslant j \leqslant s$,

$$\sqrt{n}(\theta^*_{n,j} - \theta_{0,j}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial\theta_j} X^2_n(\overline{\theta}_0)}{-\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2} X^2_n(\overline{\theta}_0 + <\eta, \overline{\theta}^*_{(n)} - \overline{\theta}_0>)},$$

cu $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$, $|\eta_j| < 1$, $1 \leqslant j \leqslant s$, și $< .,. >$ produsul scalar în R^s.

Folosind teorema lui Sluţsky şi lema, punctul (b), obţinem că vectorul considerat are aceeaşi repartiţie asimptotică cu vectorul

$$\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta_j} X_n^2(\overline{\theta}_0)}{\sum\limits_{i \in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} P_{1,1}^{\infty}(A_i, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P_{1,1}^{\infty}(A_i, \overline{\theta}_0)}} \right)_{1 \leqslant j \leqslant s} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sum\limits_{i \in I} \Phi_{\xi_k}(A_i) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \lg P_{1,1}^{\infty}(A_i, \overline{\theta}_0)}{\sum\limits_{i \in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} P_{1,1}^{\infty}(A_i, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P_{1,1}^{\infty}(A_j, \overline{\theta}_0)}} \right)_{1 \leqslant j \leqslant s}.$$

Aplicînd acum teorema 1.3, cu

$$f^j(\xi_k) = \frac{\sum\limits_{i \in I} \Phi_{\xi_k}(A_i) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \lg P_{1,1}^{\infty}(A_i, \overline{\theta}_0)}{\sum\limits_{i \in I} \frac{\left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} P_{1,1}^{\infty}(A_i, \overline{\theta}_0)\right]^2}{P_{1,1}^{\infty}(A_i, \overline{\theta}_0)}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant s,$$

obţinem rezultatul cerut în enunţul teoremei

§ 4. În enunţurile teoremelor 2.1, 2.2, 3.1 şi 3.2, condiţiile 2.1, 2.2, 3.1 şi 3.2 se pot modifica. Astfel, de exemplu, în locul ipotezei de mărginire a derivatelor parţiale, se pot pune alte condiţii care să asigure verificarea ipotezelor diferitelor variante ale teoremei limită centrală, date în [4].

În cursul demonstraţiei s-au folosit doar teoremele limită stabilite în [2], [4], [5], [7] , [8]. Rezultă că dezvoltări de acelaşi tip se pot face pe modelul unor procese ergodice generale, pentru care se pot demonstra teoreme de tipul legii numerelor mari şi teoremei limită centrale.

Primită la redacţie la 27 martie 1965

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. P. Billingsley, *Statistical inference for Markov processes*. Univ. of. Chicago-Press, 1961.
2. M. Botez, H. Cohn *O teoremă limită multidimensională pentru sisteme cu legături complete* (sub tipar).
3. G. Ciucu, R. Theodorescu, *Procese cu legături complete*. Bucureşti, 1960.
4. H. Cohn, *Asupra comportării asimptotice a sistemelor cu legături complete*. St. cerc. mat., **17**, *3*, 419—433 (1965).

5. H. Cohn, *Teoreme limită pentru sistemele cu legături complete*. St. cerc. mat. **17**, *5*, 757–765 (1965).
6. H. Cramér, *Mathematical Methods in Statistics*, 1946.
7. M. Iosifescu, *Случайные системы с полными связями с произвольным множеством состояний*. Rev. Math. pures et appl., **8**, 611–645 (1964).
8. M. Iosifescu, *Sur la loi forte des grands nombres*. C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 4421–4423 (1964).
9. B. T. Lieu, *Estimations pour des processus de Markov*, Publ. Inst. de Stat. de l'Univ. de Paris **IX**, *2* (1962).
10. M. Loève, *Probability Theory*, sec. ed., 1960.
11. O. Onicescu, G. Mihoc, *Sur les chaînes de variables statistiques*. Bull. Sci. Math. France, **59**, 174–192 (1935).
12. O. Onicescu, G. Mihoc, *Lecții de statistică matematică*. Ed. tehnică, București, 1957.
13. R. Theodorescu, *Une propriété limite pour les chaînes a liaisons complétes*. C.R. Acad. Sci., Paris, **259**, 1941–1943 (1964).

CONTRIBUȚII LA REZOLVAREA PROBLEMEI SINTEZEI SCHEMELOR CU CONTACTE ȘI RELEE (II)

DE

ION MUNTEAN

Se continuă cercetările întreprinse în [4] privind sinteza schemelor cu contacte și relee.

În capitolul 2 se dă un nou algoritm pentru sinteza schemelor fără repetiție, pornind de la proprietățile de grup ale implicanților primi ai dualei $\overline{F}$ a unei funcții de lucru F date. Mai departe se asociază funcțiilor de lucru, respectiv schemelor corespunzătoare, coduri grupale și folosind noțiunea de rang a unei coloane în matricele de cod respective se dă un algoritm pentru sinteza schemelor fără repetiție, care se aplică apoi și la sinteza schemelor cu repetiție. În afară de acestea, în lucrare se mai dă o nouă reprezentare a funcțiilor booleene pe cubul unitate și se pune în evidență importanța studierii codurilor grupale asociate funcțiilor booleene pentru sinteza schemelor cu contacte și relee, obținîndu-se și unele proprietăți ale matricelor de cod asociate.

1

1.1. În [4] am pus în evidență unele proprietăți grupale ale ecuațiilor de curenți.

În continuare vom aprofunda cercetarea acestor proprietăți și pe baza rezultatelor ce se vor obține vom da noi algoritme de sinteză pentru schemele cu contacte și relee cu repetiție și pentru schemele cu funcționare reală.

De fapt, atît algoritmul de sinteză din [4] cît și cele ce se vor descrie în lucrarea de față se aplică atît schemelor cu contacte și relee, cît și schemelor cu elemente arbitrare. De asemenea se pretează, cu completările ce se vor arăta, atît pentru sinteza dipolilor cît și a multipolilor.

1.2. Definiție. Spunem că o funcție booleană F se realizează prin scheme fără repetiție dacă există o schemă dipolară S_F în care fiecare

ST. CERC. MAT. TOM. 18, NR. 1, P. 87–131, BUCUREȘTI, 1966

variabilă, cuprinsă în F, apare o singură dată şi dacă F este funcţia de lucru a dipolului S_F. În plus, dacă $\tilde{x}$ este una din variabilele lui F, atunci în S_F nu apare $\bar{\tilde{x}}$ în acelaşi timp cu $\tilde{x}$.

Dacă nu există o schemă fără repetiţie S_F care să realizeze funcţia F, spunem că F se realizează prin scheme cu repetiţie.

Important pentru teoria schemelor cu contacte şi relee este să se găsească, printre schemele care realizează o funcţie dată F, cele cu număr minim de contacte.

1.3. Fie

$$F = \bigcup_i A_i, \; i \in I \tag{1.1}$$

funcţia F scrisă sub forma de disjuncţie de conjuncţii, unde A_i este un produs de variabile (litere), iar I o mulţime de indici

$$A_i = \beta_{i_1} \beta_{i_2} \ldots \beta_{i_k}. \tag{1.2}$$

Definiţie. Spunem că A_i este un implicant prim al funcţiei F dacă

$$A_i = 1 \Rightarrow F = 1 \tag{1.3}$$

şi dacă implicaţia (1.3) încetează în cazul cînd eliminăm din A_i cel puţin o variabilă.

Observaţie. În [2] se foloseşte pentru noţiunea de implicant prim expresia „conjuncţie minimal suficientă”.

1.4. Definiţie. Se numeşte formă disjunctivă normală redusă a unei funcţii booleene F, disjuncţia tuturor implicanţilor primi ai lui F.

După cum se arată în [5], formele disjunctive normale reduse prezintă importanţă pentru teoria schemelor cu contacte şi relee din cauză că elimină hazardul static.

2

2.1. Presupunem mai întîi că funcţia F se realizează prin scheme fără repetiţie.

Atunci, pe baza celor arătate în [4], Cap. 2, ecuaţiile de tensiuni şi ecuaţiile de curenţi, corespunzătoare lui F, pot fi organizate ca grupuri G_X cu operaţia „$\oplus$”, definită astfel:

$$\begin{gathered} X_s \oplus X_r = X_t, \; X_s \subset X, \; X_r \subset X, \; X_t \subset X, \\ t = s \bigcup r_{/s \cap r}, \; s \subset M_l, \; r \subset M_l, \; t \subset M_l, \end{gathered} \tag{2.1}$$

unde

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$$

este o mulţime de l elemente, M_l este mulţimea părţilor mulţimii

$$I = \{1, 2, \ldots, l\}$$

s, t, r sînt elemente ale mulţimii M, iar X_s, X_r, X_t sînt părţi ale mulţimii X, şi anume X_s se compune din acele elemente ale lui X care au indicii cuprinşi în s etc.

Luînd în locul lui X,

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_l\},$$

mulţimea tensiunilor în laturile 1, 2, ..., l ale unei scheme electrice oarecare conexe, fără repetiţie, se obţine grupul G_U al ecuaţiilor de tensiuni, iar dacă X se înlocuieşte cu mulţimea

$$I = \{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$$

a curenţilor din laturile 1, 2, ..., l, se obţine grupul G_I al ecuaţiilor de curenţi.

Grupurile G_U şi G_I admit, primul un sistem de $l - n + 1$ generatori compus din $l - n + 1$ ecuaţii de tensiuni liniar independente, iar al doilea un sistem de $n - 1$ generatori compus din $n - 1$ ecuaţii de curenţi liniar independente.

2.2. Fie F_p funcţia booleană obţinută din F prin înmulţirea fiecărei conjuncţii A_i cu o variabilă p, corespunzătoare laturii sursei.

Dacă notăm $\alpha_i = pA_i$, atunci

$$F_p = \bigcup_i \alpha_i,$$

i parcurgînd o mulţime dată de indici I.

Dacă acum S_F este schema care realizează funcţia F, atunci fiecare α_i reprezintă un ciclu simplu al lui S_F.

Putem stabili un izomorfism între grupul ecuaţiilor de tensiune şi mulţimea ciclurilor simple, ale schemei S_F dacă punem în corespondenţă fiecare tensiune cu variabila booleană ataşată laturii respective şi dacă în mulţimea ciclurilor simple ale schemei S_F introducem o operaţie analogă cu (2.1), care să se păstreze prin corespondenţa stabilită, adică din

$$X_s \Leftrightarrow \alpha_s, \ X_r \Leftrightarrow \alpha_r$$

să rezulte

$$X_s \oplus X_r \Leftrightarrow \alpha_s \oplus \alpha_r,$$

operaţia „$\oplus$" fiind definită ca în (2.1).

Ca urmare a izomorfismului respectiv rezultă :

TEOREMA 1. *Mulţimea ciclurilor simple ale unei scheme S_F, fără repetiţie, formează grup comutativ cu operaţia „$\oplus$", avînd $l - n + 1$ generatori, pe care-l notăm G_F.*

Exemplul 1. Fie

$$F = ac + bd + afd + bfc,$$

$$F_p = acp + bdp + afdp + bfcp.$$

Un sistem de generatori ai grupului G_F este dat de ciclurile simple

$$\{acp, bdp, afdp\}$$

întrucît prin compunerea acestor cicluri după operația „$\oplus$" se obțin toate elementele grupului :

$$\begin{aligned} bfcp &= acp \oplus bdp \oplus afdp \\ acbd &= acp \oplus bdp \\ cfd &= acp \oplus afdp \\ abf &= bdp \oplus afdp \\ &= acp \oplus bdf \oplus afdp \oplus bfcp. \end{aligned}$$

Schema care relizează funcția F este schema punții Wheatstone din figura 1, iar elementele grupului G_F sînt toate ciclurile simple ale acestei scheme după cum se poate verifica ușor.

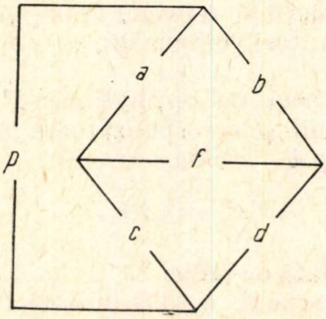


Fig. 1

2.3. Fie F_i suma ciclurilor simple care conțin pe i. Să notăm cu $F^{(i)}$ funcția booleană obținută prin înlăturarea variabilei i din fiecare factor al lui F_i.

Se poate demonstra

TEOREMA 2. *Dacă i este una din laturile unei scheme oarecare, fără repetiție, S_F, iar F_i este suma ciclurilor simple care conțin pe i, atunci funcția $F^{(i)}$ obținută prin înlăturarea variabilei i din fiecare factor al lui F_i, este funcția de lucru a dipolului D_i obținut din S_F prin fixarea drept poli a nodurilor la care este conectat i, latura i devenind latura sursei.*

Demonstrație. Fiecare ciclu simplu care conține latura i, conține o conjuncție a dipolului D_i, deoarece orice conjuncție completată cu latura i devine un ciclu simplu al schemei S_F.

Pe de altă parte, orice ciclu simplu din care se înlătură variabila i devine fie o conjuncție a dipolului D_i, fie se absoarbe într-o astfel de conjuncție din cauză că reprezintă un drum continuu între nodurile la care este conectat i, în care fiecare latură apare o dată și numai o dată.

Din teorema 2 rezultă că grupul G_F caracterizează nu numai dipolul a cărui funcție de lucru este F, ci multipolul S_F.

2.4. Dacă

$$F = \Phi(a, b, c, \ldots),$$

atunci vom nota

$$\overline{F} = \overline{\Phi}(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots)$$

duala lui F.

Dacă $\overline{A}_k$ sînt implicanții primi ai lui $\overline{F}$ și dacă notăm cu $\overline{B}_k$ dualul lui $\overline{A}_k$, atunci există următoarele implicații :

(2.2)
- 1°. $F = 1 \Rightarrow \overline{B}_k = 1$.
- 2°. $\overline{B}_k = 0 \Rightarrow F = 0$.
- 3°. $\overline{A}_k$ încetează de a mai fi un implicant al funcției $\overline{F}$ dacă se înlătură din el cel puțin o variabilă.

Din proprietățile 2° și 3° rezultă că suma curenților care trec prin laturile cuprinse în $\overline{A}_k$ este egală cu curentul sursei. Prin egalarea curentului care trece prin latura sursei cu suma curenților care trec prin laturile cuprinse în $\overline{A}_k$, se obține deci o ecuație de curenți.

Punînd în corespondența biunivocă fiecare curent cu variabila atașată laturii respective, fiecărei ecuații de curenți îi corespunde un ciclu simplu în schema $S_{\overline{F}}$, duala schemei S_F, de unde se obține :

TEOREMA 3. *Mulțimea ciclurilor simple ale schemei $S_{\overline{F}}$, duala schemei S_F, formează grup comutativ $G_{\overline{F}}$ față de operația „$\oplus$", ordinul acestui grup fiind 2^{n-1}.*

Demonstrația teoremei rezultă imediat din faptul că mulțimea ecuațiilor de curenți formează grup și se face la fel ca demonstrația teoremei 1.

Ordinul grupului $G_{\overline{F}}$ este 2^{n-1} deoarece ordinul grupului G_I cu care este izomorf are de asemenea ordinul 2^{n-1}.

TEOREMA 4. *Dacă se dă un multipol oarecare S_F, tare conex, fără repetiție și dacă φ și Φ sînt funcțiile de lucru a doi dipoli din S_F care conțin toate variabilele din F, atunci grupurile G_φ și G_Φ corespunzătoare funcțiilor φ și Φ sînt izomorfe și reprezintă aplicații ale grupului G_F pe el însuși.*

Demonstrația teoremei rezultă imediat din teorema 2 și din faptul că multipolul este tare conex și nu are laturi sau subscheme izolate.

2.5. DEFINIȚIE. Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sînt k cicluri simple ale unei scheme oarecare S_F, o combinație liniară a acestor cicluri este o expresie de forma :

$$\alpha = \mu_1 \alpha_1 \oplus \mu_2 \alpha_2 \oplus \cdots \oplus \mu_k \alpha_k, \tag{2.3}$$

unde μ_i, α_i, ia valori în $z/2$, iar

$$\mu_i \alpha_i = \begin{cases} \alpha_i \text{ dacă } \mu_i = 1, \\ \theta \text{ dacă } \mu_i = 0, \end{cases}$$

unde θ este ciclul nul (fără elemente).

Dacă egalitatea

$$\mu_1 \alpha_1 \oplus \mu_2 \alpha_2 \oplus \cdots \oplus \mu_k \alpha_k = \theta \tag{2.4}$$

are loc numai pentru $\mu_i = 0$, $\forall i \in z/2$, spunem că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sînt liniar independente.

Dacă există cel puţin un $\mu_i \neq 0$ astfel încît egalitatea (2.4) să aibă loc, spunem că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sînt liniar dependente.

2.6. Să considerăm acum funcţia $\overline{F}$, duala funcţiei F şi grupul $G_{\overline{F}}$ corespunzător.

Conform teoremei 2 elementele grupului $G_{\overline{F}}$ care conţin pe p sînt cicluri simple ale schemei $S_{\overline{F}}$ şi dacă înlăturăm pe p, fiecare reprezintă un implicant prim al lui F sau se absoarbe într-un astfel de implicant.

Din faptul că fiecare ciclu simplu al schemei $S_{\overline{F}}$ reprezintă o ecuaţie de curenţi pentru schema S_F, se pot obţine nodurile schemei S_F prin compunerea acestor cicluri după legea „$\oplus$", aşa cum se obţin din ecuaţiile de curenţi [4], Cap. 2.

Se obţine deci un algoritm de sinteză a schemelor cu contacte şi relee ţără repetiţie, diferit de cel dat în [4].

DESCRIEREA ALGORITMULUI

1°. Fiind dată funcţia F scrisă sub forma disjunctivă normală redusă, calculăm mai întîi duala acesteia $\overline{F}$ pe care o scriem de asemenea sub forma disjunctivă normală redusă.

2°. Se completează fiecare conjuncţie elementară a funcţiei $\overline{F}$ cu latura sursei p, obţinîndu-se ciclurile simple ale schemei $S_{\overline{F}}$.

3°. Se alege numărul maxim de cicluri simple liniar independente. Se va obţine o bază formată din $n-1$ cicluri.

4°. Se compun ciclurile simple ale bazei obţinute, două cîte două, după legea „$\oplus$" în scopul reducerii numărului de variabile.

După fiecare operaţie se înlocuieşte unul din ciclurile simple care intervin în compunere cu rezultatul compunerii, dacă acesta este mai scurt.

Se realizează în felul acesta o schimbare a bazei de generatori a grupului $G_{\overline{F}}$.

Observaţie. Se fac numai acele compuneri care conduc la reducerea numărului de variabile.

Se continuă procesul de compunere pînă cînd fiecare variabilă apare în cel mult două cicluri simple. O astfel de bază de generatori a grupului $G_{\overline{F}}$ reprezintă $n-1$ noduri ale schemei S_F, al n^{lea} nod fiind determinat de variabilele care apar cîte o singură dată.

Exemplul 2. Fie

$$F = ag + bh + ci + adh + bdg + cfh + bfi + adfi + cfdg$$

$$\overline{F} = abc + ghi + abfi + adhi + ghfc + gdbc + adhfc + gdbfi$$

$$\overline{F}_p = abcp + ghip + abfip + adhip + ghfcp + gdbcp + adhfcp + gdbfip.$$

Un sistem liniar independent de generatori ai lui $G_{\overline{F}}$ este *abcp*, *ghip*, *adhip*, *ghfcp*. Compunînd pe *ghip* cu *adhip* şi cu *ghfcp* se obţine o nouă bază

abcp, *ghip*, *adg*, *cfi*

în care fiecare variabilă apare de cel mult două ori şi deci reprezintă patru noduri ale schemei căutate cu ajutorul cărora se construieşte schema respectivă (fig. 2).

Observaţie. După cum se arată în [5], p. 2, Shannon în primele sale lucrări a adoptat convenţia de a defini o funcţie de „impedanţă", pe care a numit-o „hindrance", egală cu 1 pentru circuitul deschis şi egală cu 0 pentru circuitul închis, invers decît convenţia actuală prin care se defineşte o funcţie de „admitanţă", conductibilitatea dipolului fiind egală cu 1 cînd circuitul este închis şi egală cu 0 cînd circuitul este deschis.

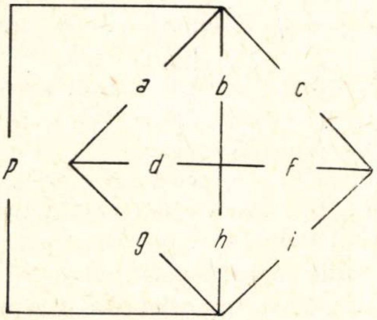


Fig. 2

Dacă pentru analiza schemelor cu contacte şi relee este avantajos să se folosească funcţia de „admitanţă" , din cele arătate mai sus rezultă că pentru sinteza acestora este avantajos să se folosească funcţia de „impedanţă".

3

3.1. După cum se ştie, o funcţie booleană poate fi reprezentată geometric pe un cub unitate n-dimensional, ale cărui vîrfuri sînt colorate în două culori, originea coordonatelor fiind centrul hipercubului.

Rezultatele din capitolul precedent ne permit să dăm o nouă reprezentare a funcţiilor booleene pe hipercubul unitate.

Să considerăm din nou grupul G_F. Acest grup are $l - n + 1$ generatori. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-n+1}$ aceşti generatori. Atunci oricare din elementele lui G_F se poate scrie sub forma :

$$\alpha = \mu_1 \alpha_1 \oplus \mu_2 \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \mu_{l-n+1} \alpha_{l-n+1}, \tag{3.1}$$

unde μ_i, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, l - n + 1$, ia valori în $z/2$ iar

$$\mu_i \alpha_i = \begin{cases} \alpha_i \text{ dacă } \mu_i = 1, \\ \theta \text{ dacă } \mu_i = 0. \end{cases}$$

Numărul total de elemente ale grupului G_F va fi egal cu numărul de şiruri de lungime $l - n + 1$, formate din zerouri şi unităţi

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{l-n+1})$$

în număr de 2^{l-n+1}.

Fiecărui μ i se poate pune în corespondenţă o componentă a unităţii în algebra booleană cu $l - n + 1$ argumente.

Deoarece coeficienţii μ_i, $i = 1, 2, \ldots, l - n + 1$, ai elementelor α din grupul G_F iau valorile 0 şi 1, acest grup poate fi considerat spaţiu vectorial $\mathfrak{B}_{l-n+1}$ peste corpul $z/2$ al claselor de resturi modulo 2.

Mulţimea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-n+1}\}$ de elemente liniar independente din $\mathfrak{B}_{l-n+1}$, poate fi interpretată ca un sistem de vectori (puncte) liniar independente în acest spaţiu, iar $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{l-n+1}$ drept coordonate ale vectorului α în baza $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-n+1}\}$.

3.2. Spaţiul vectorial $\mathfrak{B}_{l-n+1}$ poate fi reprezentat pe cubul unitate $(l - n + 1)$-dimensional, punînd în corespondenţă fiecărui vector din $\mathfrak{B}_{l-n+1}$, un vîrf al acestui cub.

Convenim să stabilim această corespondenţă astfel :

Fixăm unul din vîrfurile hipercubului drept origină a axelor de coordonate şi-l punem în corespondenţă cu vectorul θ de coordonate $(0, 0, \ldots, 0)$. Vîrfurile incidente cu θ le punem în corespondenţă într-o ordine oarecare cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-n+1}$.

Restul de vectori $\alpha = (\mu_1 \alpha_1 \oplus \mu_2\alpha_2 \oplus \ldots \oplus \mu_{l-n+1} \alpha_{l-n+1})$ ai spaţiului $\mathfrak{B}_{l-n+1}$ îi punem în corespondenţă cu vîrfurile cubului $(l - n + 1)$-dimensional în funcţie de coordonatele $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{l-n+1})$ ale vectorilor respectivi în baza $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-n+1}$.

Prin faptul că grupul G_F caracterizează multipolul S_F şi nu numai dipolul cu funcţia de lucru F, rezultă că pe hipercubul $\mathfrak{B}_{l-n+1}$ este reprezentat de fapt acest multipol.

Într-adevăr, pentru a obţine funcţia de lucru a dipolului care are drept poli nodurile la care este conectat p, este suficient să facem suma tuturor elementelor (punctelor) care conţin pe p, după ce am înlăturat pe p.

Hiperfeţele cubului $(l - n + 1)$-dimensional reprezintă subscheme ale multipolului S_F obţinute prin egalarea cu 0 a unor argumente din F, ceea ce este echivalent cu eliminarea unor laturi din S_F.

De exemplu o reprezentare a multipolului din figura 1 pe cubul unitate tridimensional este dată în figura 3.

Observaţie. Grupul $G_{\overline{F}}$ corespunzător dualei $\overline{F}$ a funcţiei F poate fi interpretat de asemenea ca un spaţiu vectorial $\mathfrak{B}_{n-1}$, $(n - 1)$-dimensional şi reprezentat pe cubul unitate $(n - 1)$-dimensional.

3.3. Reprezentările funcţiilor F şi $\overline{F}$ pe hipercuburile unitate $(l-n + 1)$-dimensional respectiv $(n - 1)$-dimensional prezintă avantajul, faţă

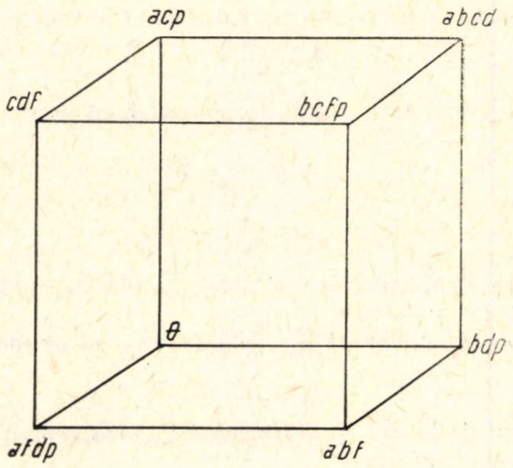


Fig. 3

de reprezentarea obişnuită, că dimensiunea acestor cuburi este în general mai mică decît numărul de argumente ale funcţiilor respective şi că o dată cu S_F pe hipercubul unitate se reprezintă şi submultipolii acestuia.

4

4.1. Să considerăm acum spaţiul vectorial l-dimensional $\mathfrak{B}_l$ peste corpul $z/2$ al claselor de resturi modulo 2.

Acest spaţiu ale cărui elemente (puncte) sînt şirurile ordonate de lungime l, formate din zerouri şi unităţi devine un spaţiu metric dacă introducem distanţa între două puncte

$$\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{kl})$$

şi

$$\alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \ldots, \alpha_{jl})$$

dată de expresia

$$r(\alpha_k, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ki} \oplus \alpha_{ji}). \tag{4.1}$$

Evident,

$$r(\alpha_k, \alpha_j) = r(\alpha_k \oplus \alpha_j, \theta), \tag{4.2}$$

unde θ este elementul nul al spaţiului $\mathfrak{B}_l$

$$\theta = (0, 0, \ldots, 0)$$

4.2. După cît se ştie, o submulţime

$$H \subset \mathfrak{B}_l$$

formată din k puncte distincte ale spaţiului $\mathcal{B}_l$ se numeşte cod de puterea k:

$$k \leqslant 2^n.$$

DEFINIŢIE. Un cod K se numeşte grupal dacă pentru orice pereche de puncte

$$\alpha_k \in K, \quad \alpha_j \in K$$

avem

$$\alpha_k \oplus \alpha_j \in K.$$

4.3. Revenind la spaţiul vectorial $\mathcal{B}_{l-n+1}$ pus în evidenţă în capitolul precedent, putem demonstra:

LEMA 1. *Spaţiul vectorial* $\mathcal{B}_{l-n+1}$ *este un cod grupal*

$$\mathcal{B}_{l-n+1} \subset \mathcal{B}_l$$

unde l *este numărul de laturi în multipolul* S_F *fără repetiţie, iar* n *numărul de noduri ale acestui multipol.*

Demonstraţie. Fiecărui element

$$B_l \in \mathcal{B}_{l-n+1}, \quad B_i = \beta_{i1}\beta_{i2}\dots\beta_{ik}$$

îi putem pune în corespondenţă, biunivoc, un şir ordonat de lungime l, format din zerouri şi unităţi

$$B_i \Leftrightarrow \alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{il}), \tag{4.3}$$

unde

$$\alpha_{ij} = 1$$

dacă B_i conţine variabila (latura) β_j şi

$$\alpha_{ij} = 0$$

în caz contrar.

Corespondenţa (4.3) păstrează operaţia „$\oplus$".

Într-adevăr, dacă B_k şi B_j sînt două elemente din B_{l-n+1}, atunci

$$B_k \oplus B_j$$

conţine acele variabile β_i care apar o dată şi numai o dată în B_k sau B_j şi nu apar în acelaşi timp şi în B_k şi în B_j.

Pe de altă parte, dacă

$$B_k \Leftrightarrow \alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kl})$$

$$B_j \Leftrightarrow \alpha_j = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jl})$$

atunci

$$\alpha_k \oplus \alpha_j = (\alpha_{k1} \oplus \alpha_{j1}, \alpha_{k2} \oplus \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{kl} \oplus \alpha_{jl})$$

conţine 1 atunci şi numai atunci cînd α_{ki} şi α_{ji} sînt diferiţi şi 0 în cazul cînd α_{ki} şi α_{ji} sînt egali, de unde se obţine:

$$B_k \oplus B_j \Leftrightarrow \alpha_k \oplus \alpha_j.$$

Rezultă că $\mathcal{B}_{l-n+1}$ este izomorf cu un subgrup al lui $\mathcal{B}_l$ de ordin 2^{l-n+1} şi poate fi interpretat ca un cod grupal de putere 2^{l-n+1} înclus în $\mathcal{B}_l$.

4.4. Din lema 1 rezultă o teoremă importantă pentru studiul schemelor cu contacte fără repetiţie :

TEOREMA 5. *Unui multipol conex dat, fără repetiţie, i se poate asocia biunivoc un cod grupal $\mathcal{B}_{l-n+1}$ de putere 2^{l-n+1}, unde l este numărul de laturi iar n numărul de noduri ale multipolului respectiv.*

Teorema 5 ne pune la dispoziţie un instrument comod pentru studiul schemelor cu contacte fără repetiţie (în general al schemelor cu elemente arbitrare) şi anume studiul codurilor grupale asociate.

5

5.1. În acest capitol vom aminti unele proprietăţi ale codurilor grupale (vezi şi [1]) şi vom pune în evidenţă alte cîteva proprietăţi ale acestor coduri care ne sînt necesare pentru studiul multipolilor cu contacte şi relee.

DEFINIŢIE. O familie de matrici pătrate $\{U_{2^m-1}\}$ se numeşte familie de matrici universale, dacă se construieşte prin recurenţă, după cum urmează :

$$U_1 = \|1\|$$

este o matrice universală. Apoi U_{2^m-1} se obţine din $U_{2^{m-1}-1}$ scriind de două ori (la rînd) fiecare coloană a matricii $U_{2^{m-1}-1}$ (păstrînd ordinea coloanelor respective), se adaugă la stînga o coloană formată în întregime numai din zerouri, se scrie sub matricea obţinută o linie de forma 1010....01 (1 şi 0 alternativ), sub zerourile acestei linii se scriu aceleaşi coloane ca cele deasupra lor, iar sub unităţi coloanele complementare coloanelor situate deasupra lor.

Spre exemplu :

$$U_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|, \qquad U_7 = \left\| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

Observaţii. 1. Toate coloanele şi toate liniile matricilor universale sînt distincte.

2. Matricile universale sînt simetrice.

5.2. Definiție. O matrice de cod se numește canonică dacă se obține dintr-o matrice universală după cum urmează :

1. Fiecare coloană a matricii universale se păstrează într-un singur exemplar, sau se scrie de cîteva ori (la rînd), sau se elimină.

2. Se adaugă sus linia nulă (uneori pentru comoditate linia nulă nu se mai scrie).

5.3. În [1] se demonstrează că orice matrice canonică este o matrice grupală și că posedă proprietatea (A).

Definiție. Se spune că o matrice K, formată din 0 și 1, posedă proprietatea (A) dacă pentru orice s și t, $0 \leqslant s \leqslant m-1$, $0 \leqslant t < 2^s$, linia

$$\alpha_{2^s+t}$$

este suma modulo 2 a liniilor α_{2^s} și α_t,

$$\alpha_{2^s+t} = \alpha_{2^s} \oplus \alpha_t \tag{5.1}$$

5.4. Lema 2. *Dacă* α_i *este o linie oarecare a matricei unui cod grupal*

$$K = \|\alpha_{ij}\|$$

atunci α_i *se poate scrie sub forma :*

$$\alpha_i = \lambda_0^i\, \alpha_1 \oplus \lambda_1^i\, \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_{m-1}^i\, \alpha_{2^{m-1}}, \tag{5.2}$$

unde $\lambda_0^i, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{m-1}^i$ *iau valorile* 0 *și* 1. *Cu alte cuvinte mulțimea liniilor*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{2^2}, \ldots, \alpha_{2^{m-1}}\}$$

genereaza codul grupal dat.

Demonstrație. Presupunem lema adevărată pentru

$$i < 2^{m-1}$$

şi vom arăta prin inducţie că lema va fi adevărată și pentru $i > 2^{m-1}$.

Fie

$$i = 2^{m-1} + t, \quad t < 2^{m-1}.$$

Atunci din proprietatea (A) se deduce

$$\alpha_i = \alpha_{2^{m-1}+t} = \alpha_{2^{m-1}} \oplus \alpha_t\,. \tag{5.3}$$

Dar

$$t < 2^{m-1}$$

şi avem, conform presupunerii,

$$\alpha_t = \lambda_0^t\, \alpha_1 \oplus \lambda_1^t\, \alpha_2 \oplus \ldots . \oplus \lambda_{m-2}^t\, \alpha_{2^{m-2}}. \tag{5.4}$$

Înlocuind pe (5.4) în (5.3) se obține (5.2) ceea ce demonstrează lema.

5.5. Din cauza simetriei matricii universale din lema 2 se obține următoarea lemă consecință :

LEMA 3. *Mulţimea coloanelor* $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{2^m-1}\}$ *ale unei matrici universale* U_{2^m-1}, *formează grup faţă de operaţia „⊕" generat de submulţimea formată din coloanele*

$$\{\beta_1, \beta_2, \beta_{2^2}, \ldots, \beta_{2^{m-1}}\}$$

adică

$$\beta_j = \mu_0^j\, \beta_1 \oplus \mu_1^j\, \beta_2 \oplus \mu_2^j\, \beta_{2^2} \oplus \ldots \oplus \mu_{m-1}^j\, \beta_{2^{m-1}} \tag{5.5}$$

$$\forall j \leqslant 2^m - 1$$

5.6. Convenim să numim pe i rangul liniei α_i iar pe j rangul coloanei β_j în matricea universală U_{2^m-1}.

În matricile de cod apare, în general, numai un număr $k < 2^m - 1$ de coloane şi este important să ştim rangul fiecărei coloane fără să scriem întreaga matrice universală din care provine codul respectiv.

În cele ce urmează coloanele identice ale unui cod dat se consideră că au acelaşi rang.

Să ataşăm fiecărei linii

$$\alpha_{2^i}, \quad 0 \leqslant i \leqslant m - 1$$

o pondere $p_i = 2^{m-i-1}$.

Se poate demonstra :

LEMA 4. *Rangul* j *al coloanei* β_j *în matricea universală* U_{2^m-1} *din care provine un cod grupal* K *dat, se obţine din expresia :*

$$j = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{2^i,j}\, 2^{m-i-1}, \tag{5.6}$$

unde $\alpha_{2^i,j}$ *este elementul coloanei* β_j *cuprins în linia* α_{2^i}, $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Demonstraţie. Pentru $j = 1$ lema se verifică întrucît coloana β_1 are toate elementele $\alpha_{2^i,1}$ pentru $i \leqslant m-1$ nule în afară de $\alpha_{2^{m-1},1}$ care este egal cu 1.

Pe de altă parte, să presupunem lema verificată pentru matricile universale

$$U_{2^i-1}, \quad \forall i \leqslant m - 1$$

şi să arătăm că în acest caz lema se verifică şi pentru matricea universală U_{2^m-1}.

Din construcţia matricii universale U_{2^m-1} rezultă că orice coloană β_j a matricii $U_{2^{m-1}-1}$ apare în U_{2^m-1} de două ori şi anume în poziţiile $2j$ şi $2j + 1$, şi în plus

$$\alpha'_{2^i,j} = \alpha_{2^i,2j} = \alpha_{2^i,2j+1} \tag{5.7}$$

pentru orice $i = 0, 1, 2, \ldots, m - 2$ şi $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1} - 1$, unde cu accent s-au notat elementele matricii $U_{2^{m-1}-1}$ iar fără accent elementele matricii U_{2^m-1}

(5.8) $$\alpha_{2^{m-1}, 2j} = 0, \quad \alpha_{2^{m-1}, 2j+1} = 1.$$

Deoarece, conform presupunerii, lema se verifică pentru matricea $U_{2^{m-1}-1}$, rezultă că

(5.9) $$j = \sum_{i=0}^{m-2} \alpha'_{2^i, j} 2^{m-i-2}.$$

Înmulţind pe (5.9) cu 2 şi înlocuind $\alpha'_{2^i, j}$ cu $\alpha_{2^i, 2j}$ se obţine :

(5.10) $$2j = \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_{2^i, 2j} 2^{m-i-1}$$

şi deoarece $\alpha_{2^{m-1}, 2j} = 0$ suma se poate extinde pînă la $m - 1$, obţinîndu-se

(5.10′) $$2j = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{2^i, 2j} 2^{m-i-1}.$$

Adăugînd 1 în amîndoi termenii egalităţii (5.10) şi ţinînd seama de (5.7) şi (5.8) se obţine

(5.11) $$2j + 1 = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{2^i, 2j+1} 2^{m-i-1}$$

ceea ce demonstrează lema, întrucît după cum s-a arătat, pentru $j = 1$ aceasta se verifică.

Din cauza simetriei matricii universale U_{2^m-1} se obţine o lemă duală cu lema 4.

LEMA 4′. *Rangul i al liniei α_i în matricea universală U_{2^m-1} se obţine din expresia :*

(5.12) $$i = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{i, 2^j} 2^{m-j-1}$$

care se demonstrează în acelaşi mod cu lema 4.

6

6.1. În acest capitol ne vom ocupa de transformările matricilor de cod.

Printre tansformările care operează asupra matricilor de cod distingem două tipuri :

I. Transformări de echivalenţă.

II. Transformări de structură.

6.2. I. Transformări de echivalenţă

I^1. Permutarea liniilor

I^2. Permutarea coloanelor

I^3. Adunarea modulo 2 a tuturor liniilor cu un punct fix din $\mathfrak{B}_l$ care aparţine codului.

Definiţie. Două coduri $K \subset \mathfrak{B}_l$, $K' \subset \mathfrak{B}_l$ se numesc echivalente dacă matricea de cod a unuia poate fi obţinută din matricea de cod a celuilalt cu ajutorul unui număr finit de transformări de echivalenţă.

Lema 5. *Dacă unui multipol S_F, conex, fără repetiţie, îi corespunde un cod grupal K, atunci oricărui cod K', echivalent cu K îi corespunde acelaşi multipol S_F sau un multipol echivalent cu acesta.*

Observaţie. Doi multipoli, fără repetiţie, se numesc echivalenţi dacă se poate găsi o corespondenţă biunivocă între mulţimile dipolilor conţinuţi în cei doi multipoli, astfel încît funcţiile de lucru pentru oricare pereche de dipoli, stabilită prin această corespondenţă, să fie identice.

Demonstraţie. Convenim să notăm liniile α_i ale codului K astfel:

$$\alpha_i = \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_k}, \tag{6.1}$$

unde $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_k}$ sînt simbolurile coloanelor în care pe linia i se află 1.

Să arătăm că transformările de tipul I nu modifică expresiile (6.1) ale liniilor α_i din K.

Într-adevăr:

I^1 permută între ele liniile, deci nu afectează pe (6.1) întrucît după aplicarea lui I^1 liniile lui K se regăsesc în K' în altă ordine.

I^2 permută coloanele şi deci permută literele $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_k}$ între ele, ceea ce nu modifică pe α_i.

I^3 păstrează de asemenea liniile α_i ale lui K întrucît adunarea tuturor liniilor lui K cu un punct fix din K este un automorfism al acestui grup, adică reproduce, într-o altă ordine, toate liniile din K.

Lema 5 justifică definiţia de transformări de echivalenţă dată transformărilor de tipul I.

6.3. Transformări de structură.

II^1 Eliminarea uneia sau a mai multor coloane.

II^2 Eliminarea părţii inferioare a uneia din matricile de cod ataşate unui multipol dat.

II^3. Adunarea modulo 2 a coloanelor.

II^4. Dedublarea coloanelor (modulo 2).

Transformările de tipul II se numesc transformări de structură întrucît conduc la modificări structurale ale multipolilor ataşaţi codurilor asupra cărora operează.

6.4. Lema 6. *Dacă S_F este un multipol fără repetiţie şi K codul ataşat acestui multipol, atunci prin aplicarea unei transformări de tipul* II^1 *codului K, se obţine un cod K' căruia i se ataşază un multipol S_F, care se obţine din S_F prin scurtcircuitarea nodurilor între care este conectată variabila β, corespunzătoare coloanei care se elimină prin transformarea respectivă.*

Demonstrație. Scurtcircuitarea lui β se realizează prin înlocuirea, în F, a lui β cu 1. Dar atunci și implicanții α_i' ai lui F' se obțin prin înlocuirea lui β în α_i cu 1 și deoarece α_i' nu conțin pe β în K' nu va apare coloana β, ceea ce demonstrează lema.

LEMA 7. *Dacă se dă un multipol S_F, fără repetiție și dacă K este matricea codului grupal atașat acestui multipol, atunci prin aplicarea transformării de tipul* II^2 *matricii K se obține o matrice K' căreia îi corespunde un multipol $S_{F'}$ obținut din multipolul S_F prin înlăturarea unor incidențe sau eliminarea unor laturi.*

Demonstrație. Se pot întîmpla două cazuri :

1°. Există o coloană β (sau mai multe) care are toate elementele α_i, $i = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}-1$, egale cu 0.

În acest caz, evident, eliminarea părții inferioare a matricii K conduce la eliminarea variabilei β deoarece liniile matricii K' a codului transformat se obțin din liniile matricii codului K prin egalarea lui β cu 0

$$\alpha_i\,(\beta = 0) = \alpha_i'.$$

2°. Fiecare coloană β are cel puțin un element definit de zero în partea superioară a matricii K.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{2^2}, \ldots, \alpha_{2^{m-1}}$ baza codului K.

Conform presupunerii, oricare ar fi coloana β există cel puțin o linie α_{2^i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, care are 1 în coloana β.

Apoi, din algoritmul de sinteză descris în [4] rezultă că liniile α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_{2^{m-1}}$ care formează un sistem de implicanți primi liniar independenți sînt suficiente pentru sinteza multipolului S_F. Eliminarea părții inferioare a matricii codului K conduce la eliminarea liniei $\alpha_{2^{m-1}}$ și implicit la eliminarea incidențelor introduse de implicantul prim corespunzător, ceea ce demonstrează lema.

Exemplul 3. Fie

$$F = acp + adp + bdp + bcp.$$

Luînd $\alpha_1 = acp$, $\alpha_2 = adp$, $\alpha_3 = bdp$ se obține codul cu matricea de cod K de mai jos :

$$\begin{array}{r||ccccc||l} & b & d & a & c & p & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & adp \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & cd \\ K = & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & bdp \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & bdac \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ab \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & bcp \end{array}$$

Observație. În matricea K nu s-a scris linia nulă, lucru ce se va face și în viitor.

Eliminarea părţii inferioare a matricii K conduce la codul cu matricea K'

$$\begin{array}{c||cccc||l} & d & a & c & p & \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\ K' = & 1 & 1 & 0 & 1 & adp \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & cd \end{array}$$

Multipolul ataşat codului K este dat în figura 4. Prin eliminarea laturii b din acest multipol se obţine multipolul din figura 5 ataşat codului K'.

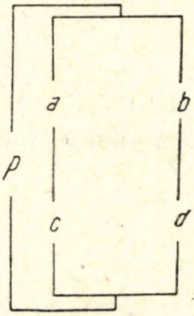


Fig. 4

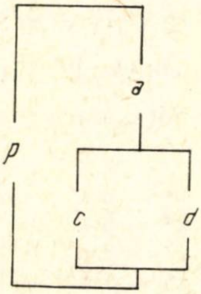


Fig. 5

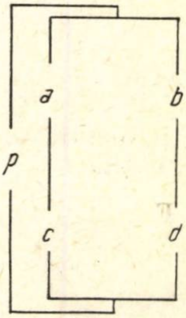


Fig. 6

Prin transformări de echivalenţă, codul K se transformă în codul echivalent K'' :

$$\begin{array}{c||ccccc||l} & b & d & a & c & p & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & bdp \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & bdac \\ K'' = & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & adp \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & cd \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ab \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & bcp \end{array}$$

căruia îi este ataşat tot multipolul din figura 4.

Eliminînd partea inferioară a matricii codului K'' se obţine codul K''' :

$$\begin{array}{c||ccccc||l} & b & d & a & c & p & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\ K''' = & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & bdp \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & bdac \end{array}$$

care conduce la multipolul din figura 6 obţinut din multipol din figura 4 prin înlăturarea incidenţelor introduse de implicantul prim *adp*.

6.6. Fie S_F un multipol fără repetiție și K matricea codului grupal atașat multipolului S_F.

Să analizăm cum se transformă codul K atunci cînd în multipolul S_F se identifică două laturi oarecare γ, δ.

Dacă γ și δ sînt coloanele corespunzătoare ale matricii codului K', atunci liniile α_i ale acestei matrici se împart în patru clase C^1, C^2, C^3, C^4, astfel încît

$$\begin{aligned} &\alpha^1 \subset C^1 \Rightarrow \alpha^1 = \gamma\,\delta\alpha', \\ &\alpha^2 \subset C^2 \Rightarrow \alpha^2 = \gamma\,\alpha'', \\ &\alpha^3 \subset C^3 \Rightarrow \alpha^3 = \delta\,\alpha''', \\ &\alpha^4 \subset C^4 \Rightarrow \alpha^4 = \alpha^{IV}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

unde α^{I}, α^{II}, α^{III} și α^{IV} nu conțin pe γ și δ.

Prin identificarea lui γ cu δ, dacă $\gamma = \delta = \beta$ ținînd seama de $\beta^2 = \beta$ se obține :

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}^1 &= \beta\,\alpha' \\ \widetilde{\alpha}^2 &= \beta\,\alpha'' \\ \widetilde{\alpha}^3 &= \beta\,\alpha''' \\ \widetilde{\alpha}^4 &= \alpha^{IV} \end{aligned}$$

unde prin „$\sim$'' am însemnat operația de identificare.

Rezultă că implicanții primi ai funcției de lucru F a unui dipol dat al multipolului S_F, prin repetarea a două laturi γ și δ se transformă după relațiile (6.3), transformîndu-se într-o funcție de lucru F'.

Fie α_1, α_2, α_{2^2}, ..., α_{2m-1} un sistem de implicanți primi ai funcției F liniar independenți. Prin egalarea lui γ cu δ, acești implicanți se transformă într-un sistem de implicanți $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$, $\widetilde{\alpha}_{2^2}$, ..., $\widetilde{\alpha}_{2m-1}$ ai funcției F' care nu sînt neapărat liniar independenți. Dacă γ și δ nu sînt conectate în serie, se poate alege un sistem de implicanți primi ai funcției F care să nu conțină elemente din clasa C^1.

Din cauză că $\beta \oplus \beta = 0$, în codul K' generat de implicanții $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$, $\widetilde{\alpha}_{2^2}$, ..., $\widetilde{\alpha}_{2m-1}$, toate liniile $\widetilde{\alpha}'_i$ care nu sînt în bază și care provin din linii ale clasei C^1 nu vor conține pe β. Dacă $\widetilde{\alpha}'_i$ sînt linii ale codului K' corespunzătoare implicanților primi ai funcției F', aceștia vor diferi de implicanții primi respectivi prin lipsa lui β ceea ce ne conduce la un criteriu de recunoaștere a laturilor care se repetă, dat de :

LEMA 8. *a) Prin adunarea (modulo 2) a două coloane* γ *și* δ *a matricii unui cod* K *al unui multipol* S_F, *fără repetiție, se obține un cod* K' *corespunzător multipolului* $S_{F'}$, *cu repetiție, obținut din* S_F *prin repetarea laturilor* γ *și* δ.

b) *Codul* K' *depinde de baza aleasă.*

c) *Implicanții primi ai funcției* F' *se obțin după legea* $\gamma \cup \delta = \beta$, *(reuniunea în sensul teoriei mulțimilor) în timp ce liniile codului* K' *se obțin după legea* $\gamma \oplus \delta = \beta'$. *Prin compararea lui* β *cu* β' *se identifică laturile care se repetă.*

Exemplul 4. Fie

$$F = acp + adp + abp + bdcp.$$

Alegînd sistemul de implicanți primi acp, adp, $bdcp$ se obține codul K'

$$K' \equiv \begin{array}{||ccccc||l} b & d & a & c & p & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & adp \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & dc \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & bdcp \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & abd \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & abc \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & bp \end{array}$$

Comparînd ultima linie a codului K' cu implicantul prin abp al funcției F se vede că se repetă variabila a.

6.7. Pentru aflarea laturilor care se repetă, este necesar să aplicăm o transformare de tipul II^4, adică să găsim două coloane x, y astfel încît $x \oplus y = a$, ceea ce se scrie dezvoltat :

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_1 \oplus y_1 \\ x_2 \oplus y_2 \\ x_3 \oplus y_3 \\ x_4 \oplus y_4 \\ x_5 \oplus y_5 \\ x_6 \oplus y_6 \\ x_7 \oplus y_7 \end{Vmatrix}$$

cu condițiile suplimentare :

$$x_1 \oplus x_2 = x_3, \quad x_1 \oplus x_4 = x_5, \quad x_2 \oplus x_4 = x_6, \quad x_3 \oplus x_4 = x_7$$

$$y_1 \oplus y_2 = y_3, \quad y_1 \oplus y_4 = y_5, \quad y_2 \oplus y_4 = y_6, \quad y_3 \oplus y_4 = y_7$$

impuse de proprietatea (A) care este verificată de codul K'.

De asemenea, din condițiile problemei rezultă

$$x_4 = y_4 = 0$$

deoarece implicantul prim $bdcp$ nu conține pe a și

$$x_7 = y_7 = 1$$

întrucît linia a 7^a din K' provine dintr-o linie din clasa C^1 în care s-au identificat două variabile.

Apoi

$$x_3 = x_7 = 1, \; y_3 = y_7 = 1.$$

Alegînd arbitrar de exemplu $x_1 = 1$, rezultă succesiv
$y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 1$, $x_5 = x_1 = 1$, $x_6 = x_2 = 0$, $y_5 = y_1 = 0$
$y_6 = y_2 = 1$, de unde

$$x = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\| ; \quad y = \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right|$$

Înlocuind în K' pe a cu x și y se obține codul K'' care corespunde multipolului din figura 7.

$$K'' = \begin{array}{c|cccccc|l} & b & d & x & y & c & p & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & xcp \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & dyp \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & dxyc \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & bdcp \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & bdx \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & byc \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & bxyc \end{array}$$

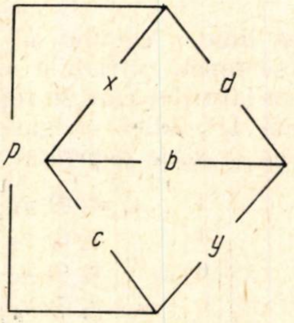


Fig. 7

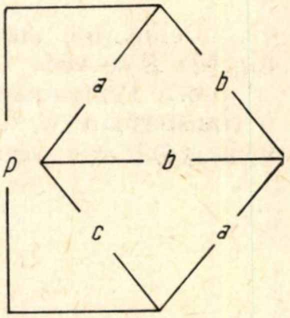


Fig. 8

în care dacă facem $x = y = a$ se obține multipolul cu repetiție din figura 8 corespunzător funcției de lucru F.

7

7.1. Ținînd seama de faptul că liniile codurilor grupale se compun după operația „$\oplus$" în timp ce implicanții primi ai funcțiilor care se realizează prin scheme cu repetiție se obțin din implicanții primi ai unor funcții care se realizează prin scheme fără repetiție după legea $\beta^2 = \beta$ pentru orice variabilă care se repetă, în general nu există un cod K care să conțină toți implicanții primi ai unei funcții date F, fără să se introducă implicanți primi nedoriți care nu se absorb în implicanții inițiali.

Definiție. Un cod grupal K spunem că este atașat unei funcții booleene $F = \bigcup\limits_{i \in I} \alpha_i$ dacă este generat de un sistem de implicanți primi liniar independenți ai lui F și dacă orice implicant prim al lui F este egal cu o linie a codului K sau dacă se include într-o astfel de linie sau dacă include o astfel de linie și dacă nu există linii ale codului K care să nu îndeplinească proprietatea precedentă.

Conform definiţiei, codul K' este ataşat funcţiei F din exemplul 3, deoarece liniile acp, adp şi $bdcp$ sînt implicanţi primi ai funcţiei F iar $abp \subset bp$. Dacă plecăm de la implicanţii primi acp, adp, abp se obţine codul K''', de asemenea ataşat funcţiei F.

$$\begin{array}{r|ccccc|l} & b & d & a & c & p & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & adp \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & dc \\ K''' = & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & abp \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & bc \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & bd \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & abcdp \end{array}$$

a cărui linie $abcdp$ se include în implicantul prim $bdcp$ al funcţiei F.

Prin schimbarea bazei ne putem aranja astfel încît să obţinem coduri ataşate funcţiilor F de tipul lui K' ale căror linii să includă implicanţii primi ai lui F (astfel încît din implicanţii lui F să lipsească unele variabile, nu să se adauge).

DEFINIŢIE. Codurile de tipul K' le vom numi coduri K^-, iar codurile de tipul K''' le vom numi coduri K^+.

7.2. Rezultatele din aliniatul precedent ne permit să dăm un algoritm pentru sinteza unor dipoli cu funcţia de lucru F, căruia i se ataşază coduri de tipul K^- respectiv K^+.

Descrierea algoritmului. Fiind dată o funcţie de lucru F se alege un sistem liniar independent de implicanţi primi ai lui F şi se construieşte un cod ataşat K. Dacă se obţine un cod K de tipul K^+, prin schimbarea bazei acestuia se aduce într-un cod K^-.

Se pleacă de la codul K^- obţinut şi prin transformări de tipul II^4 aplicate variabilelor care lipsesc în anumiţi implicanţi primi ai lui F se construieşte un cod K ale cărui linii prin repetarea variabilelor respective se reduc la implicanţii primi ai lui F.

Observaţie. Codul K se construieşte prin recurenţă, astfel : se pleacă de la 2 implicanţi primi şi se construieşte codul generat de aceştia. Se adaugă apoi succesiv cîte un implicant prim care nu este consecinţă a implicanţilor primi aleşi anterior şi care nu include sau nu se include în liniile deja obţinute ale codului K.

7.3. Există funcţii booleene F care se realizează prin scheme cu repetiţie ale căror coduri ataşate nu pun în evidenţă variabilele care se repetă şi cărora le corespunde coduri grupale unice, în afară de o echivalenţă, sau se aduc prin transformări de tipul II^4 la funcţii cărora le corespund coduri grupale unice.

Exemplul 5. Fie

$$F = aycp + axdp + bydp + bxcp$$

al cărui cod ataşat este :

$$K = \begin{array}{||ccccccc||c}
\multicolumn{1}{c}{b} & d & x & a & c & y & \multicolumn{1}{c}{p} & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & acyp \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & axdp \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & xydc \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & bydp \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & abdc \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & abxy \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & bxcp
\end{array}$$

sau un cod echivalent cu K.

După cum se va arăta în capitolul 8, lui F îi corespunde multipolul din figura 9 sau un multipol echivalent cu acesta.

Un alt exemplu de funcţii care se realizează prin scheme cu repetiţie ale căror coduri ataşate nu pun în evidenţă variabilele care se repetă îl constituie funcţiile care se realizează prin scheme fără repetiţie dar din care se elimină unii implicanţi primi.

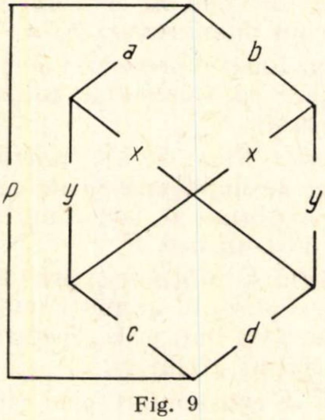


Fig. 9

Pentru exemplificare să redăm exemplul 1 în care

$$F = acp + bdp + afdp + bfcp.$$

Dacă din F se elimină de exemplu implicantul prim $bfcp$, se obţine funcţia

$$F' = acp + bdp + afdp$$

care se realizează prin scheme cu repetiţie dacă dorim să nu se introducă implicanţi primi nedoriţi (în cazul de faţă $bfcp$).

Într-adevăr, codul grupal al funcţiei F' este acelaşi cu codul funcţiei F:

$$K = \begin{array}{||cccccc||l}
f & b & d & a & c & p & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & bdp \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & acbd \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & afdp \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & fdc \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & fba \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & fbcp
\end{array}$$

şi deoarece $bfcp$ este liniar dependent de implicanţii primi ai funcţiei F', dipolul generat de aceşti implicanţi primi va conţine şi implicantul prim $bfcp$ şi de fapt realizează funcţia F.

Pentru evitarea acestei situaţii, este necesar să se repete unele variabile, astfel încît implicantul prim $bfcp$ să se transforme într-o conjuncţie care se absoarbe într-unul oricare din implicanţii primi ai lui F'.

Întrucît avem:

$$bfcp = acp \oplus bdp \oplus afdp$$

se caută variabilele care se repetă printre variabilele care apar de două sau mai de multe ori în combinaţia liniară care ne dă pe $bfcp$, respectiv a sau d. Dacă, de exemplu, în acp se înlocuieşte a cu α, se obţine:

$$bfcpa\alpha = \alpha cp \oplus bdp \oplus afdp$$

de unde

$$bfcpa\alpha \subset \alpha cp$$

iar codul K devine:

$$K' = \begin{array}{||ccccccc||l}
\alpha & f & b & d & a & c & p & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha cp \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & bdp \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha bdc \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & afdp \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \alpha fdac \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & fba \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \alpha fbacp
\end{array}$$

care conduce la schema din figura 10 și prin revenire la vechile variabile se obține schema cu repetiție din figura 11.

7.4. LEMA 9. *Condiția necesară și suficientă ca două variabile ale unei funcții de lucru F să fie conectate în serie este ca să le corespundă coloane identice în codul grupal K atașat funcției F.*

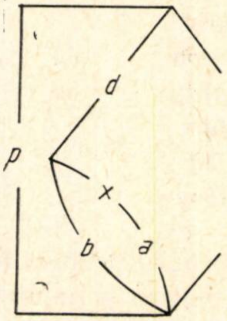


Fig. 10

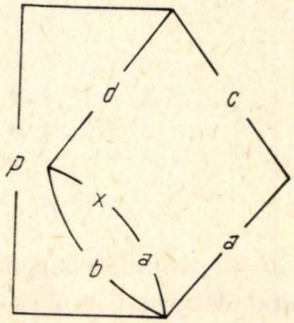


Fig. 11

Demonstrație. Într-adevăr, două variabile conectate în serie apar fie împreună în implicanții primi ai lui F, fie nu apar de loc.

7.5. LEMA 10. *Condiția necesară și suficientă ca două variabile ale unei funcții de lucru F să fie conectate în paralel este ca în afară de coloanele corespunzătoare celor două variabile să le corespundă linii identice în codul grupal atașat funcției F.*

Demonstrație. Dacă două variabile Υ și δ sînt conectate în paralel, atunci pentru oricare implicant prim care conține spre exemplu pe Υ :

$$\alpha_i = \Upsilon\alpha'$$

există un implicant prim care conține pe δ și care este de forma

$$\alpha_j = \delta\alpha'.$$

7.6. LEMA 11. *O condiție necesară pentru ca un nod al unei scheme fără repetiție să fie format din variabilele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$, este dată de relația :*

$$\beta_1 \oplus \beta_2 \oplus \ldots \oplus \beta_j = \theta. \tag{7.1}$$

Demonstrație. Pentru $k = 2$ lema este adevărată întrucît din lema 9 rezultă că două variabile conectate în serie au coloane identice, de unde :

$$\beta_1 \oplus \beta_2 = \theta.$$

Presupunem lema adevărată pentru $j - 1$ și vom arăta că în acest caz va rezulta că este adevărată și pentru j.

Fie K matricea de cod dată și K_j submatricea matricii K compusă din coloanele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$. Prin transformări elementare putem aduce pe β_j în primul loc și astfel încît primele $2^{m-1} - 1$ locuri ale lui β_j să fie egale cu 0. Partea superioară a matricii K_j este matricea K_{j-1} a multipolului obţinut din multipolul dat prin înlăturarea laturii β_j. Partea superioară a laturilor $\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}$ pe care le notăm $\beta_1^s, \beta_2^s, \ldots, \beta_{j-1}^s$ se bucură, conform presupunerii, de proprietatea :

$$\beta_1^s \oplus \beta_2^s \oplus \ldots \oplus \beta_{j-1}^s = \theta \tag{7.2}$$

care se scrie dezvoltat astfel :

$$\alpha_{i,1} \oplus \alpha_{i,2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{i,j-1} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 2^{m-1} - 1. \tag{7.3}$$

Deoarece

$$\alpha_{i,j} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 2^{m-1} - 1, \tag{7.4}$$

din (7.3) şi (7.4) se obţine:

$$\alpha_{i.1} \oplus \alpha_{i.2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{i.j-1} \oplus \alpha_{i.j} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 2^{m-1} - 1. \tag{7.5}$$

Partea inferioară a coloanelor $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{j-1}$ se obţin după regula

$$\alpha_{2^{m-1}+i.k} = \alpha_{2^{m-1}.k} \oplus \alpha_{i.k} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 2^{m-1} - 1 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, j - 1 \tag{7.6}$$

de unde

$$\begin{aligned} &\alpha_{2^{m-1}+i,1} \oplus \alpha_{2^{m-1}+i,2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{2^{m-1}+i,j} = \\ &= (\alpha_{2^{m-1},1} \oplus \alpha_{i,1}) \oplus (\alpha_{2^{m-1},2} \oplus \alpha_{i,2}) \oplus \ldots \oplus (\alpha_{2^{m-1},j} \oplus \alpha_{i,j}) = \\ &= (\alpha_{2^{m-1},1} \oplus \alpha_{2^{m-1},2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{2^{m-1},j}) \oplus (\alpha_{i,1} \oplus \alpha_{i,2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{i,j}) = \\ &= \alpha_{2^{m-1},1} \oplus \alpha_{2^{m-1},2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{2^{m-1},j} \end{aligned}$$

şi deoarece $\alpha_{2^{m-1}}$ este un ciclu simplu al schemei date care trece prin nodul $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j\}$, conţine un număr par de variabile dintre $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ de unde

$$\alpha_{2^{m-1},1} \oplus \alpha_{2^{m-1},2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{2^{m-1},j} = 0$$

şi deci şi

$$\alpha_{2^{m-1}+i,1} \oplus \alpha_{2^{m-1}+i,2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{2^{m-1}+i,j} = 0, \quad \forall i=1, 2, \ldots, 2^{m-1} - 1, \tag{7.7}$$

Din (7.5) şi (7.7) se obţine relaţia (7.1), ceea ce demonstrează lema.

7.7. După cum s-a arătat în capitolul 4, oricărui multipol fără repetiţie i se asociază un cod grupal a cărui matrice de cod K este o matrice canonică în sensul definiţiei din capitolul 5, rangul fiecărei coloane β_j în matricea universală U_{2^m-1} din care provine fiind dat de relaţia :

$$j = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{2^i,j}\, 2^{m-i-1}. \tag{7.8}$$

Definiție. În matricea K a unui cod grupal dat spunem că două coloane sînt distincte dacă variabilele corespunzătoare acestor coloane nu sînt conectate în serie sau nu sînt conectate în paralel.

Am afirmat în capitolul 5 că în codurile atașate unor scheme fără repetiție apare în general un număr mai mic decît 2^m de coloane distincte.

Ne propunem să demonstrăm o lemă care să ne indice numărul maxim de coloane distincte ale unei matrici universale care pot apare în matricea de cod a unui multipol fără repetiție :

Lema 12. *Numărul maxim de coloane distincte ale unei matrici universale care pot apare în matricea de cod a unui multipol fără repetiție, este determinat de relațiile :*

$$(7.9) \qquad \begin{array}{ll} 1)\ C^2_{i+1} \leqslant m & \quad 3)\ l - n + 1 = m \\ 2)\ i + 2 = n & \quad 4)\ l_{\max} = C^2_n \end{array}$$

unde n este numărul de noduri, l numărul de laturi neconectate în paralel (laturile conectate în paralel se identifică), m numărul maxim de cicluri simple liniar independente.

Demonstrație. E clar că valoarea maximă a lui l pentru schema cu n noduri este dată de relația

$$l_{\max} = C^2_n .$$

Înlocuind această valoare a lui l în a treia relație din (7.9) se obține :

$$C^2_{n-1} \geqslant m$$

sau

$$n^2 - 3n + 2 - 2m \geqslant 0$$

care ne conduce la

$$(7.10) \qquad n \geqslant \frac{3 + \sqrt{1 + 8\,m}}{2}$$

în care n este întreg pentru $1 + 8m$ pătrat perfect adică pentru

$$m = \frac{i\,(i+1)}{2} \quad \text{sau} \quad i = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2}$$

de unde

$$i + 2 = n$$

ceea ce demonstrează lema.

Lema 12 justifică afirmația că funcția din exemplul 4 se realizează numai prin scheme cu repetiție.

Într-adevăr, în cazul respectiv $m = 3$, ceea ce conduce la $i = 2$ și $n = 4$ de unde se obține că

$$l_{\max} = C^2_4 = 6$$

care este mai mic decît numărul de variabile ale funcției D.

8

8.1. Sîntem acum în măsură să dăm un algoritm de sinteză a multipolilor fără repetiţie pe care-l vom aplica şi pentru sinteza multipolilor cu repetiţie.

Fie, spre exemplu, de făcut sinteza dipolului cu funcţia de structură

$$F = acp + bdp + axdp + bxcp$$

a cărei matrice de cod grupal este :

$$K = \begin{array}{c|cccccc|c} & b & d & x & a & c & p & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & acp \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & bdp \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & acbd \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & axdp \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & dxc \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & bxa \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & bxcp \end{array}$$

Dacă asociem fiecărei linii din baza care generează codul K, α_{2^i}, $\forall i = 1, 2, \ldots, m - 1$, o pondere 2^{m-i-1}, datorită relaţiei (7.8) putem pune în corespondenţă fiecărei variabile β_j, rangul j al acesteia în matricea universală din care provine codul grupal K.

În exemplul pe care-l analizăm obţinem :

$$\alpha_1 = acp \Leftrightarrow 2^2$$

$$\alpha_2 = bdp \Leftrightarrow 2$$

$$\alpha_{2^2} = axdp \Leftrightarrow 1$$

şi aplicînd (7.8) se obţine :

$$\begin{aligned} &a \Rightarrow 5,\ b \Rightarrow 2,\ c \Rightarrow 4, \\ &d \Rightarrow 3,\ x \Rightarrow 1,\ p \Rightarrow 7. \end{aligned} \tag{8.0}$$

Convenim să scriem nodurile multipolului respectiv sub forma :

$$\frac{(i_1, i_2, \ldots, i_k)}{(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_k})}, \tag{8.1}$$

la numitor scriind variabilele conectate la nodul respectiv iar la numărător rangurile corespunzătoare acestora.

Spre exemplu, ţinînd seama de relaţiile (8.0), nodurile multipolului din figura 1 în care s-a luat $f = x$, vor fi

$$\frac{(1,\ 2,\ 3)}{(x,\ b,\ d)} \quad \frac{(1,\ 4,\ 5)}{(x,\ c,\ a)} \quad \frac{(2,\ 5,\ 7)}{(b,\ a,\ p)} \quad \frac{(3,\ 4,\ 7)}{(d,\ c,\ p)} \tag{8.2}$$

Acest mod de scriere este comod pentru sinteza multipolilor fără repetiţie şi după cum se va vedea şi pentru sinteza multipolilor cu repetiţie din cauză că permite realizarea sintezei prin recurenţă aşa cum se construiesc codurile grupale ataşate multipolilor.

Observaţie. Dacă se consideră numere $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m-1}$ ca bază într-un spaţiu vectorial V peste corpul $z/2$, atunci rangul j al coloanei β_j poate fi interpretat ca punct în acest spaţiu şi ţinînd seama de corespondenţa biunivocă între j şi β_j şi de relaţia (7.1), dacă $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ este un nod oarecare, atunci în spaţiul V există relaţia

$$i_1 \oplus i_2 \oplus \ldots \oplus i_k = \theta. \tag{8.3}$$

8.2. LEMA 13. *Dacă funcţia de lucru F are un sistem de m implicanţi primi liniar independenţi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{2^2}, \ldots, \alpha_{2^{m-1}}$, care generează codul grupal K şi multipolul S şi dacă notăm prin K' codul generat de implicanţii primi α_1, $\alpha_2, \alpha_{2^2}, \ldots, \alpha_{2^{m-2}}$ şi S' multipolul ataşat, atunci Rangul j al coloanei β_j din K, $\forall j$, se obţine din rangul j' pe care-l are partea superioară a coloanei β_j în codul K', cu ajutorul relaţiei*

$$j = 2j' + \alpha_{2^{m-1}.j}. \tag{8.4}$$

Demonstraţie. Relaţia (8.4) se obţine imediat din relaţia (7.8) care se mai scrie :

$$j = 2 \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_{2^i.i}\ 2^{m-i-2} + \alpha_{2^{m-1}.j}$$

şi deoarece

$$j' = \sum_{i=0}^{m-2} \alpha_{2^i.j}\ 2^{m-i-2}$$

se obţine (8.4).

Lema 13 ne indică un criteriu de construcţie prin recurenţă a multipolului, respectiv multipolilor, care realizează o funcţie de lucru dată, bazat pe construcţia prin recurenţă a nodurilor multipolului căutat.

Descrierea algoritmului de sinteză. Pentru simplitatea expunerii vom descrie algoritmul de sinteză pe un exemplu.

Exemplul 6. Fie

$$F = acfp + bdgp + acygp + axdgp + bxcfp +$$
$$+ bdyfp + axdyfp + bxcygp.$$

Un sistem de implicanţi primi liniar independenţi ai funcţiei F este dat de :

8.5) $acfp,\ bdgp,\ acygp,\ axdgp$

iar codul grupal ataşat va fi :

$$\begin{array}{r||ccccccccc||l}
 & x & y & b & d & g & a & c & f & p & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & acfp \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & bdgp \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & bdgacf \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & acygp \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & ygf \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & ybdac \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & ybdfp \\
K = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & axdgp \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & xdgcf \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & xba \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & xbcfp \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & xydc \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & xydafp \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & xybgcp \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & xybgaf
\end{array}$$

Orice sistem de implicanţi primi liniar independenţi va conduce la un cod echivalent cu K.

În primul pas al sintezei se alege un implicant prim al funcţiei F, începînd cu implicanţii primi de lungime minimă. Dacă lungimea acestui implicant prim este k, numărul de noduri introduse de acest implicant prim va fi k. Dar întrucît pentru $k > 3$ există C_k^2 noduri posibile, este necesar să alegem dintre acestea k noduri. Pentru aceasta vom folosi următoarele proprietăţi de legătură între implicanţii primi şi variabilele lui F pe de o parte şi nodurile multipolului S_F căutat pe de altă parte.

1) Fiecare implicant prim conţine două şi numai două variabile conectate la oricare din variabilele conţinute în acesta.

2) Fiecare nod conţine cel mult două variabile cuprinse într-un implicant prim.

3) Fiecare variabilă apare în două şi numai în două noduri.

Alegînd pe *acfp* în primul pas al sintezei şi folosind proprietatea 1) şi sistemul (8.5) de implicanţi primi ales, se stabileşte că nodurile introduse de *acfp* sînt :

$$acfp \Rightarrow \frac{(1,1)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,1)}{(a,p)\,(f,p)\,(a,c)\,(c,f)}. \tag{8.6}$$

În al doilea pas al sintezei se adaugă un nou implicant prim din sistemul de implicanţi primi aleşi. Fie *bdgp*. Nodurile obţinute în pasul precedent se transformă prin adăugarea noului implicant prim după relația (8.4) și se va obține :

$$bdgp \Rightarrow \frac{(1,2,3)\ (1,2,3)\ (2,2)\ (2,2)\ (1,1)\ (1,1)}{(b,\ a,\ p)\ (g,\ f,\ p),\ (a,\ c)\ (c,\ f)\ (b,\ d)\ (d,\ g)}.$$

Să analizăm acum transformarea nodurilor în procesul de iterație.

Dacă notăm cu S_k multipolul obținut în pasul k al procesului de iterație, implicantul prim $\alpha_{2^{k-1}}$ care se folosește în pasul k al iterației, va conține cel mult două variabile din fiecare nod al multipolului S_{k-1} obținut în pasul $k-1$ al iterației. Nodurile multipolului S_{k-1} le împărțim în 3 clase, C_1, C_2, C_3 referitoare la $\alpha_{2^{k-1}}$, astfel : în clasa C_1 includem toate nodurile din S_{k-1} care nu conțin nici o variabilă din $\alpha_{2^{k-1}}$, în clasa C_2 includem acele noduri ale lui S_{k-1} care conțin două variabile din $\alpha_{2^{k-1}}$ și în clasa C_3 nodurile care conțin o singură variabilă din $\alpha_{2^{k-1}}$.

Aplicînd relația (8.4) nodurilor din clasele C_1 și C_2, condiția necesară de existență a nodurilor (8.3) se păstrează întrucît în cazul nodurilor de clasa C_1 rangurile se dublează, ceea ce păstrează relația (8.3), iar în cazul nodurilor de clasa C_2 în afară de dublarea rangurilor se adaugă 1 în număr par, din care cauză relația (8.3) se păstrează și în acest caz.

În cazul nodurilor de clasa C_3 din cauza adăugării lui 1 în număr impar, relația (8.3) nu se mai păstrează, ceea ce ne arată că în astfel de noduri trebuie să apară noi variabile cu ponderea 1 dintre cele cuprinse în implicantul prim $\alpha_{2^{k-1}}$.

În exemplul nostru se observă că s-au păstrat nodurile (a, c) și (c, f) care nu conțin variabile din $bdgp$, în timp ce la nodurile (a, p) și (f, p) s-a adăugat cîte o variabilă a implicantului prim $bdgp$.

Observație. Adăugarea lui b la nodul (a, p) este unic determinată de proprietatea 2). Într-adevăr, dacă am fi adăugat de exemplu pe d, atunci nodul (d, a, p) ar fi conținut 3 variabile din implicantul prim $axdgp$ contrar lui 2), în mod analog dacă am fi adăugat pe g, nodul (g, a, p) ar fi conținut 3 variabile din implicantul prim $acygp$ contrar lui 2).

Întrucît în pasul 2 al iterației apar 3 variabile noi, am fost nevoiți să adăugăm 2 noduri în plus pentru satisfacerea proprietății 3).

În pasul al 3-lea al iterației se adaugă un nou implicant prim, fie $acygp$:

$$acygp \Rightarrow \frac{(2,\ 5,\ 7)\ (3,\ 4,\ 7)\ (5,\ 5)\ (1,\ 5,\ 4)\ (2,\ 2)\ (1,\ 2,\ 3)}{(b,\ a,\ p)\ (g,\ f,\ p)\ (a,\ c)\ (y,\ c,\ f)\ (b,\ d)\ (y,\ d,\ g)}$$

variabila y se trece în dreptul lui 1 care apare de două ori.

În pasul al 4-lea se adaugă ultimul implicant prim liniar independent ales, $axdgp$:

$$(8.7)\quad axdgp \Rightarrow \frac{(4,11,15)\ (7,8,15)\ (1,11,10)\ (2,10,8)\ (1,\ 4,5)\ (2,5,7)}{(b,\ a,\ p)\ (g,\ f,\ p)\ (x,\ a,\ c)\ (y,\ c,\ f)\ (x,\ b,\ d)\ (y,\ d,\ g)}$$

variabila x se trece în dreptul lui 1 și se obține schema din figura **10.**

Observaţie. Procesul de sinteză se opreşte în momentul cînd fiecare variabilă apare în două noduri, ceea ce corespunde cu folosirea tuturor implicanţilor primi liniar independenţi. Acest lucru rezultă din faptul că codul K al funcţiei F este grupal şi că implicanţii primi generează acest cod.

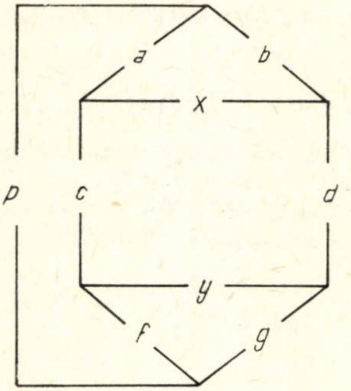


Fig. 12

Folosind noi implicanţi primi, se poate verifica, că aceştia sînt consecinţă a multipolului obţinut. Fie, de exemplu, *axdyfp*,

$$axdyfp \Rightarrow \frac{(8,23,31)\,(14,17,31)\,(3,23,20)\,(5,20,17)\,(3,8,11)\,(5,11,14)}{(b,\ a,\ p)\ (g,\ f,\ p)\ (x,\ a,\ c)\ (y,\ c,\ f)\ (x,\ b,\ d)\ (y,\ d,\ g)}.$$

8.3. În primul pas al sintezei din aliniatul precedent am afirmat că din *acfp*, folosind proprietatea 1) şi sistemul (8.5) de implicanţi primi, obţinem nodurile (8.6).

În continuare vom justifica această afirmaţie.

Într-adevăr, din *acfp* rezultă că sînt posibile, printre altele, nodurile $(a,\ p)$, $(c,\ p)$, $(f,\ p)$. Pe de altă parte, din *bdgp* rezultă că sînt posibile nodurile $(b,\ p)$, $(d,\ p)$, $(g,\ p)$. Apoi din compararea lui *acfp* cu *acygp* rezultă că unul din noduri este $(f,\ p)$ întrucît f este singura variabilă cuprinsă în *acfp* şi neinclusă în *acygp* şi din compararea lui *acfp* cu *axdgp* se obţine că $(a,\ p)$ este un nod întrucît a este singura variabilă din *acfp* inclusă în *axdgp*. La fel prin compararea lui *bdgp* cu *acygp* respectiv *axdgp* se obţin nodurile $(g,\ p)$ respectiv $(b,\ p)$. Sînt excluse deci nodurile $(c,\ p)$ şi $(d,\ p)$ lucru ce se observă şi din aplicarea proprietăţii 1) la implicanţii primi *acygp* respectiv *axdgp* care conţin nodurile $(a,\ p)$ şi $(g,\ p)$.

Acest criteriu simplu aplicat oricărui sistem de implicanţi primi liniar independenţi, care conţine cei mai scurţi implicanţi primi, ne conduce în cazul schemelor fără repetiţie la separarea elementelor iniţiale şi finale.

8.4. *Operaţii asupra nodurilor.* Transformările de structură care se aplică codurilor grupale ataşate funcţiilor de lucru pot fi aplicate direct nodurilor. Vom arăta cum se aplică direct nodurilor transformările ,,contopirea nodurilor" care de fapt este acelaşi lucru cu ,,scurtcircuitarea laturilor" şi ,,eliminarea laturilor".

Fie

$$(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r)\ \text{şi}\ (j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_q)$$

două noduri scrise prin rangurile laturilor $a_1, a_2, \ldots, a_r$ respectiv $b_1, b_2, \ldots, b_q$.

Nodul

$$(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r) \oplus (j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_q),$$

unde operaţia ,,$\oplus$" trebuie să fie interpretată în sensul relaţiilor (2.1), se obţine prin ,,contopirea" nodurilor $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ şi $(j_1, j_2, \ldots, i_q)$ respectiv prin scurtcircuitarea laturilor pentru care $i_k = j_l$.

Spre exemplu prin contopirea nodurilor

$\frac{(1,\ 11,\ 10)}{(x,\ a,\ c)}$ şi $\frac{(1,\ 4,\ 5)}{(x,\ b,\ d)}$ ale schemei din figura 10

întrucît

$$(1,\ 11,\ 10) \oplus (1,\ 4,\ 5) = (4,\ 5,\ 10,\ 11)$$

se obţine nodul

$$\frac{(4,\ 5,\ 10,\ 11)}{(b,\ d,\ c,\ a)}$$

care se obţine după cum se vede pe figură prin scurticircuitarea laturii x.

Dacă

$$(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r) \tag{8.8}$$

este un nod oarecare şi i unul din rangurile laturilor unei scheme date care conţine nodul (8.8), rangurile $i_1, i_2, \ldots, i_r$ ale laturilor $a_1, a_2, \ldots, a_r$ pot fi schimbate prin compunere cu i după operaţia ,,$\oplus$", obţinîndu-se

$$i_1 \oplus i,\quad i_2 \oplus i,\ \ldots,\ i_r \oplus i$$

unde ,,$\oplus$" este adunarea în spaţiul m-dimensional generat de $1, 2, \ldots, 2^{m-1}$ peste corpul $z/_{2}$.

Se vede că prin compunerea cu i a două sau a unui număr par dintre rangurile $i_1, i_2, \ldots, i_r$ astfel încît

$$i_k \oplus i \neq 0 \quad \forall\, k \subset I \subset \{1,\ 2,\ \ldots,\ r\}$$

nodul (8.8) rămîne neschimbat, I fiind o mulţime pară de indici din mulţimea $\{1, 2, \ldots, r\}$. Dacă spre exemplu $i = i_1$ şi $I = \{1, 2, \}$, atunci

$$\begin{aligned} &(i_1 \oplus i_1,\ i_1 \oplus i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_r) = \\ &= (0,\ i_1 \oplus i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_r) = (i_1 \oplus i_2,\ i_3,\ \ldots,\ i_r) \end{aligned} \tag{8.9}$$

de unde rezultă că prin compunerea cu i_1 nodul $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ se transformă în nodul $(i_2', i_3, \ldots, i_r)$ din care lipseşte latura a_1. O astfel de transformare în care I este o mulţime pară de indici conduce la eliminarea laturilor.

Spre exemplu dacă dorim să eliminăm latura x (în figura 10), este suficient să efectuăm o serie de transformări de tipul (8.9) nodurilor (8.7) ale schemei din figura 10, astfel : în nodul

$$\frac{(1, 11, 10)}{(x,\ a,\ c)}$$

se compune cu 1 rangul lui x şi al lui a sau c (fie x şi a) şi acesta devine

$$\frac{(10, 10)}{(a,\ c)}$$

Apoi în nodul $\dfrac{(4, 11, 15)}{(b,\ a,\ p)}$ se compune rangul lui b şi a cu 1 şi se obţine :

$$\frac{(5, 10, 15)}{(b,\ a,\ p)}$$

Acest lucru atrage transformarea nodului

$$\frac{(1,\ 4,\ 5)}{(x,\ b,\ d)}$$

prin 1 şi se obţine :

$$\frac{(5, 5)}{(b,\ d)}.$$

După aceste transformări nodurile (8.7) ale schemei din figura 10, din care s-a eliminat latura x, se scriu :

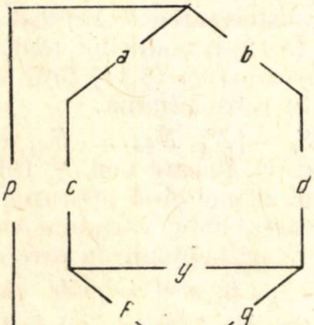


Fig. 13

$$\frac{(5,\ 10,\ 15)\ (7,\ 8,\ 15)\ (10,\ 10)\ (2,\ 10,\ 8)\ (5,\ 5)\ (2,\ 5,\ 7)}{(b,\ a,\ p)\ (g,\ f,\ p)\ (a,\ c)\ (y,\ c,\ f)\ (b,\ d)\ (y,\ d,\ g)} \tag{8.10}$$

la care corespunde schema din figura 13

DEFINIȚIE. Un nod la care sînt conectate numai două laturi va fi numit nod binar.

LEMA 14. *Rangurile* $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ *ale variabilelor care apar într-un nod oarecare* $(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \ldots, \beta_{i_r})$ *sînt diferite pentru* $r > 2$ *și egale pentru nodurile binare,* $r = 2$.

Demonstrație. Pentru ca două variabile β_k, β_j să aibă ranguri identice, trebuie să aibă coloane identice în matricea codului grupal care conțin aceste variabile. Dar atunci

$$\beta_k \oplus \beta_j = \theta,$$

ceea ce arată că acestea compun un nod binar.

Să introducem acum o transformare a rangurilor, inversă transformării (8.4), care să ne dea pe j' atunci cînd se cunoaște j și pe care să o notăm

$$j' = E\left(\frac{j}{2}\right) \tag{8. 11}$$

prin $E\left(\frac{j}{2}\right)$ înțelegînd partea întreagă a lui $\frac{j}{2}$.

Aplicînd transformarea (8.11) nodurilor (8.10) ale multipolului din figura 11 se obține :

$$\frac{(2,5,7)\ (3,4,7)\ (5,5)\ (1,5,4)\ (2,2)\ (1,2,3)}{(b,a,p)\ (g,f,p)\ (a,c)\ (y,c,f)\ (b,d)\ (y,d,g)} \tag{8.12}$$

și întrucît în nodurile nebinare nu au apărut ranguri egale și nu s-au eliminat unele variabile, transformarea (8.11) lasă acest multipol nemodificat. Întrucît în expresia (8.12) a nodurilor multipolului din figura 11 nu se mai poate aplica transformarea (8.11) fără să se elimine o variabilă, rezultă că expresia (8.12) este minimă.

DEFINIȚIE. Dacă $S_l = \{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ este mulțimea nodurilor unui multipol dat cu l laturi, fiecare nod N_i fiind scris sub forma (8.1), spunem că S_l este minimă atunci cînd aplicarea unei transformări (8.11) lui S_l conduce la eliminarea unor variabile conținute în nodurile N_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sau la noduri nebinare în care apar ranguri egale.

LEMA 15. *Dacă* $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \beta_{j_l}$ *sînt laturile unui multipol fără repetiție generat de funcția de lucru* F, *unde* j_1, j_2, j_l *sînt rangurile celor* l *laturi în forma minimă a lui* S_l *și dacă :*

$$j = \max j_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

atunci, numărul m *de implicanți primi ai lui* F, *liniar independenți, este dat de relația*

$$2^m = j + 1. \tag{8.13}$$

Demonstraţie. Din relaţia (5.6) rezultă că valoarea maximă a rangului j_k se obţine atunci cînd $\alpha_{2i,\, j_k} = 1$, $\forall i$ şi este egală cu :

$$j = \sum_{i=0}^{m-1} 2^{m-i-1} = 2^m - 1$$

ceea ce conduce la (8.13). Pe de altă parte, maximul lui j se realizează întotdeauna întrucît există cel puţin o latură, latura sursei, care apare în toţi implicanţii primi ai funcţiei F.

9

9.1. În capitolul 7 aliniatul 7.2 am dat un algoritm pentru sinteza unor dipoli cu funcţia de lucru căreia i se asociază coduri de tipul K^- respectiv K^+, bazat pe posibilitatea transformării codurilor K^+ şi K^- în coduri grupale unice (în afară de echivalenţă) prin transformări de tipul II^4.

Am arătat că există coduri K, ataşate unor funcţii F care se realizează prin scheme cu repetiţie şi cara nu pun în evidenţă laturile care se repetă (exemplul 5).

În scopul efectuării sintezei în astfel de cazuri se va folosi un algoritm similar cu cel descris în capitolul precedent pentru funcţiile care se realizează prin scheme fără repetiţie.

Descrierea algoritmului se va face pe exemplul 5 în care :

$$F = aycp + axdp + bydp + bxcp. \tag{9.1}$$

Pasul I. Se presupune că funcţiei F îi corespunde un cod grupal unic (în afară de echivalenţă) cum este cazul în exemplul de faţă. Dacă acest lucru nu se întîmplă, prin transformări de tipul II^4 codul K ataşat lui F se aduce la un cod grupal unic.

Pasul II. Se desfăşoară procesul de sinteză, prin iteraţie ca în capitolul precedent sau aplicînd un alt algoritm de sinteză adăugînd succesiv cîte un implicant prim, începînd cu cei de lungime minimă şi în măsura în care este posibil astfel încît în fiecare pas al iteraţiei să se adauge o singură variabilă neavută în vedere pînă la pasul respectiv. Se continuă acest proces atîta timp cît se realizează scheme fără repetiţie.

Acest pas se poate desfăşura şi invers. Se pleacă de la numărul maxim de implicanţi primi liniar independenţi şi dacă funcţia se realizează prin scheme cu repetiţie în nodurile ce se vor obţine unele variabile apar mai mult de două ori. Se elimină apoi cîte un implicant prim, începînd cu cei de lungime maximă pînă se ajunge la o schemă fără repetiţie.

Pasul III. Se pleacă de la pasul precedent şi prin adăugarea unui nou implicant prim în nodurile obţinute va apare 1 în mai mult de două locuri pentru fiecare variabilă nouă introdusă prin implicantul prim respectiv astfel încît înlocuirea lui 1 cu aceste variabile într-un mod compatibil cu proprietăţile 1), 2,) 3) din aliniatul 8.2 să nu fie posibilă şi să fim conduşi la repetarea cel puţin a unei variabile în cel puţin 3 noduri.

Spre exemplu considerînd implicanţii primi *aycp* şi *axdp* se obţin nodurile :

$$\frac{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (1,2,3)\ (1,2,3)}{(x,d)\ (y,c)\ (a,p)\ (x,y,p)\ (d,c,a)}$$

sau

$$\frac{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (1,2,3)\ (1,2,3)}{(x,d)\ (y,c)\ (a,p)\ (d,c,p)\ (x,y,a)}$$

Observaţie. Nu pot apare nodurile $(x,\ c,\ p)$ sau $(d,\ y,\ p)$ întrucît ar cuprinde cîte trei variabile din implicanţii primi *bxcp* respectiv *bydp*.

Mai departe, pornind de la a doua din expresiile de mai sus se obţine :

$$bxcp \Rightarrow \frac{(1,\ 3,2)\ (1,\ 4,5)\ (1,\ 6,7)\ (2,5,7)\ (1,\ 3,4,6)}{(-x,d)\ (-y,c)\ (-,a,p)\ (d,c,p)\ (-,x,y,a)}$$

şi deoarece se adaugă o singură variabilă nouă, b, în timp ce 1 apare în patru noduri, schema obţinută este cu repetiţie. Pentru a afla variabilele care se repetă, observăm că acestea trebuie să se găsească pe de o parte printre variabilele implicantului *bxcp*, şi pe de altă parte printre variabilele care apar de două ori în nodurile care conţin pe 1. Făcînd intersecţia celor două mulţimi de variabile se obţine :

$$\{b,\ x,\ c\} \cap \{x,\ y,\ a\} = \{x\}$$

de unde rezultă că se repetă variabila x. Fie atunci $x = \alpha$

$$b\alpha cp \Rightarrow \frac{(2,2)\ (1,4,5)\ (1,6,7)\ (2,5,7)\ (2,4,6)\ (1,1)}{(x,d)\ (\alpha,y,c)\ (b,a,p)\ (d,c,p)\ (x,y,a)\ (\alpha,b)}$$

Observaţie. Nu putem avea *αap* deoarece prin revenire la variabila x am obţine nodul $(x,\ a,\ p)$ care conţine 3 variabile din implicantul prim *axdp* contrar proprietăţii 2).

Prin înlocuirea lui x cu α în *bxcp*, implicantul prim *bydp* nu mai este consecinţă a implicanţilor primi consideraţi şi trebuie adăugat la aceştia obţinînd un sistem de 4 implicanţi primi liniar independenţi şi se obţine :

$$bydp \Rightarrow \frac{(1,\ 4,5)\ (1,\ 2,9,10)\ (3,12,15)\ (5,10,15)\ (1,\ 4,9,12)\ (1,\ 2,3)}{(-,x,d)\ (-,\alpha,y,\ c)\ (b,\ a,\ p)\ (d,\ c,\ p)\ (-,x,\ y,\ a)\ (-,\alpha,b)}.$$

Se repetă

$$\{b,\ y\ d\} \cap \{x,\ \alpha,\ y\} = \{y\}.$$

Fie $y = \beta$; atunci

$$b\beta dp \Rightarrow \frac{(1,4,5)\ (2,8,10)\ (3,12,15)\ (5,10,15)\ (4,8,12)\ (1,2,3)}{(\beta\ x\ d)\ (\alpha\ y\ c)\ (b\ \ a\ \ p)\ (d\ \ c\ \ p)\ (x\ y\ a)\ (\beta,\alpha,b)}$$

Deoarece toţi implicanţii primi au fost luaţi în considerare, procesul de sinteză este terminat şi se obţine schema din figura 14 care se reduce la schema din figura 9 dacă facem $\alpha = x$ şi $\beta = y$.

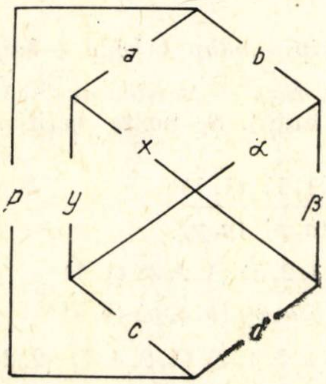


Fig. 14

9.2. În cazul funcţiilor care se realizează prin scheme cu repetiţie, există, în general, un număr mai mare de scheme cu număr minim de contacte care realizează funcţia respectivă. Spre exemplu dipolul din figura 9 are funcţia de lucru

$$G = aycp + axdp + bydp + bxcp$$

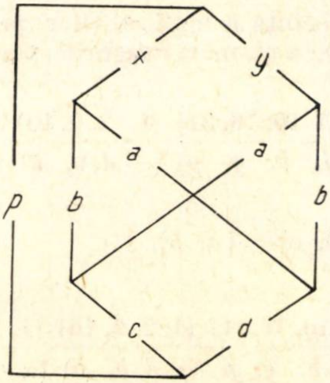


Fig. 15

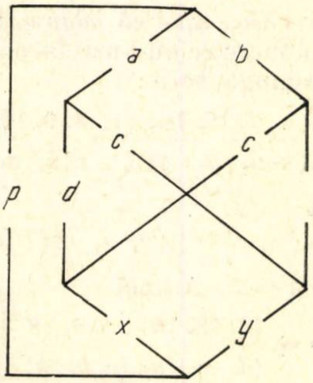


Fig. 16

la fel cu dipolii din figura 15 şi figura 16 deşi structural sînt diferiţi între ei şi au număr minim de contacte.

Algoritmul de sinteză descris ne conduce la toţi aceşti dipoli. De exemplu, dacă în pasul III al sintezei am fi plecat de la nodurile :

$$\frac{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (1,2,3)\ (1,2,3)}{(x,d)\ (y,c)\ (a,p)\ (x,y,p)\ (d,c,a)}$$

am fi obţinut dipolul din figura 16.

9.3. Vom da acum un exemplu care arată că nu este necesar întotdeana să pornim de la coduri grupale unice pentru sinteză şi că putem pleca şi de la coduri K^+ sau K^-.

Exemplul 7. Fie

$$F = agp + bhp + cip + adhp + bdgp + baip + cahp + adip.$$

Vom începe sinteza fără să verificăm dacă F admite cod grupal unic (în afară de echivalenţă). Se poate verifica, că acest lucru nu se întîmplă :

$$agp \Rightarrow \frac{(1,1)\ (1,1)\ (1,1)}{(a,g)\ (a,p)\ (g,p)}$$

$$bhp \Rightarrow \frac{(2,2)\ (1,2,3)\ (1,2,3)\ (1,1)}{(a,g)\ (b,a,p)\ (h,g,p)\ (b,h)}$$

$$cip \Rightarrow \frac{(4,4)\ (1,2,4,7)\ (1,2,4,7)\ (2,2)\ (1,1)}{(a,g)\ (c,b,a,p)\ (i,h,g,p)\ (b,h)\ (c,c)},$$

$$adhp \Rightarrow \frac{(1,9,8)\ (2,4,9,15)\ (2,5,8,15)\ (1,4,5)\ (2,2)}{(d,a,g)\ (c,b,a,p)\ (i,h,g,p)\ (d,b,h)\ (c,i)}$$

Se verifică apoi că $bdgp$ este consecinţă a implicanţilor primi aleşi pînă acum, lucru ce nu-l mai facem pentru a nu mări rangurile variabilelor.

Se adaugă $baip$:

$$baip \Rightarrow \frac{(1,2,19,16)\ (1,4,9,19,31)\ (5,10,16,31)\ (1,2,9,10)\ (1,4,5)}{(-d,a,g)\ (-c,b,a,p)\ (i,h,g,p)\ (-d,b,h)\ (-c,i)}$$

Se repetă

$$\{b, a, i\} \cap \{d, a, b, c\} = \{a, b\}.$$

Fie $a = \alpha$. Atunci

$$b\alpha ip \Rightarrow \frac{(2,18,16)\ (4,9,18,31)\ (5,10,16,31)\ (1,2,9,10)\ (1,4,5)}{(d,a,g)\ (c,b,a,p)\ (i,h,g,p)\ (\alpha,d,b,h)\ (\alpha,c,i)}$$

$$caph \Rightarrow \frac{(1,4,37,32)\ (1,9,18,37,63)\ (10,21,32,63)}{(-d,a,g)\ (-c,b,a,p)\ (i,h,g,p)}$$

$$\frac{(1,2,4,18,21)\ (1,2,9,10)}{(-\alpha,d,b,h)\ (-\alpha,c,i)}$$

Dar a poate fi egal cu α. Se verifică $a = \alpha$ şi se obţine :

$$c\alpha hp \Rightarrow \frac{(4,36,32)\ (9,18,36,63)\ (10,21,32,63)}{(d,a,g)\ (c,b,a,p)\ (j,h,g,p)}$$

$$\frac{(3,4,18,21)\ (3,9,10)}{(\alpha,d,b,h)\ (\alpha,c,i)}$$

$$adip \Rightarrow \frac{(9, 73, 64)\ (18, 36, 73, 127)\ (21, 42, 64, 127)}{(d,\ a,\ g)\ (c,\ d,\ a,\ p)\ (i,\ h,\ g,\ p)}$$

$$\frac{(1,\ 6, 9, 36, 42)\ (1,\ 6, 18, 21)}{(-\ \alpha, d,\ b,\ h)\ (-\alpha,\ c,\ i)}$$

Dar a poate fi înlocuit cu $a\alpha$, de unde :

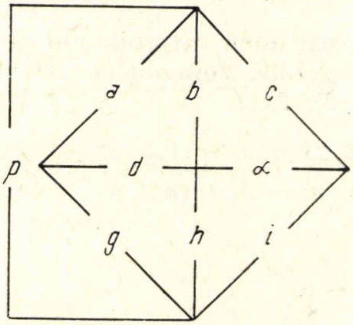


Fig. 17

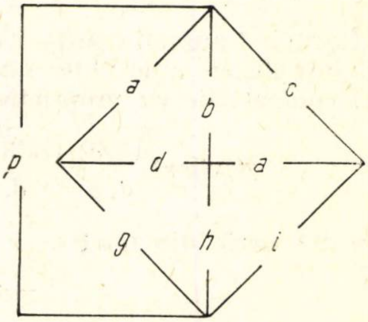


Fig. 18

$$a\alpha dip \Rightarrow \frac{(9, 73, 64)\ (18, 36, 73, 127)\ (21, 42, 64, 127)}{(d,\ a,\ g)\ (c,\ b,\ a,\ p)\ (i,\ h,\ g,\ p)}$$

$$\frac{(7, 9, 36, 42)\ (7, 18, 12)}{(\alpha, d,\ b,\ h)\ (\alpha,\ c,\ i)}$$

şi se obţin schemele din figura 17 şi figura 18 (după ce se înlocuieşte α cu a).

Observaţie. Nu se poate considera că se repetă b deoarece dacă $b = \alpha$, atunci

$$\alpha aip \Rightarrow \frac{(1, 2, 19, 16)\ (4, 8, 19, 31)\ (5, 10, 16, 31)\ (2, 8, 10)\ (1, 4, 5)}{(\alpha, d,\ a,\ g)\ (c, b,\ a,\ p)\ (i,\ h,\ g,\ p)\ (d, b,\ h)\ (\alpha, c,\ i)}$$

şi dacă revenim la vechile variabile, nodul $(\alpha,\ d,\ a,\ g)$ devine $(b,\ d,\ a,\ g)$ şi conţine trei variabile din implicantul prim $bdgp$ ceea ce contrazice proprietatea 2.

9. 4. În cazul funcţiilor care se realizează prin schema cu repetiţie nu este posibil întotdeauna să se stabilească nodurile în primul pas al sintezei prin aplicarea criteriului descris în aliniatul 8.3 ; din această cauză este necesar să se dea criterii specifice cazului respectiv.

Vom examina problema pe un exemplu :

Exemplul 8. Fie

$$F = adytp = acxtp + bcytp + bdxtp + acyzp + adxzp + \tag{9.2}$$

$$+ bdyzp + bcxzp.$$

Luînd în primul pas al sintezei implicantul prim $adytp$, sînt posibile $C_5^2 = 10$ noduri, necesare fiind numai cinci. Alegem la întîmplare 5 noduri.

Fie

$$adytp \Rightarrow \frac{(1,1)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,1)\ (1,1)}{(a,p)\ (d,p)\ (a,y)\ (d,\ t)\ (t,\ y)}$$

Mai departe

$$(9.3)\qquad acxtp \Rightarrow \frac{(3,3)\ (1,\ \ 2,3)\ (1,\ \ 3,2)\ (1,\ \ 2,3)\ (1,\ \ 3,2)}{(a,p)\ (-\ d,\ p)\ (-\ a,\ y)\ (-\ d,\ t)\ (-\ t,\ y)}$$

Întrucît 1 apare în patru locuri şi apar două variabile noi c, x, căutăm să introducem în locul lui 1 aceste variabile. Vom obţine următoarele noduri compatibile cu proprietăţile 1), 2), 3) :

$$acxtp \Rightarrow \frac{(3,3)\ (1,2,3)\ (1,3,2)\ (1,2,3)\ (1,3,2)}{(a,\ p)\ (c,d,\ p)\ (x,a,y)\ (c,d,\ t)\ (a,t,y)}$$

Pe de altă parte din relaţia

$$l - m + 1 = n,$$

unde l este numărul de variabile, n numărul de implicanţi primi liniar independenţi şi n numărul de noduri, adevărată pentru scheme fără repetiţie, se obţine $n = 6$, ceea ce arată că s-a omis un nod.

Acest inconvenient poate fi înlăturat dacă se aplică ,,principiul maximului de noduri'' care constă în aceea că în fiecare pas al sintezei trebuie să obţinem numărul maxim de noduri posibil în pasul respectiv, ceea ce se realizează prin reducerea numărului de locuri, din nodurile existente, în care apare 1, printr-o permutare convenabilă de variabile. Acest principiu rezultă din proprietatea a două variabile care au acelaşi rang de a fi incluse în noduri binare.

Astfel expresia (9.3), prin permutarea lui d cu t sau t cu y, devine

$$(9.4)\qquad acxtp \Rightarrow \frac{(3,3)\ (3,3)\ (1,3,2)\ (1,3,2)\ (2,2)\ (1,1)}{(a,p)\ (t,\ p)\ (x,a,y)\ (c,\ t,d)\ (d,y)\ (c,\ x)}$$

respectiv

$$(9.5)\qquad acxtp \Rightarrow \frac{(3,3)\ (1,2,3)\ (3,3)\ (2,2)\ (1,2,3)\ (1,1)}{(a,p)\ (c,\ d,p)\ (a,\ t)\ (d,y)\ (x,y,\ t)\ (c,\ x)}$$

şi se obţine cîte un nod în plus faţă de expresia (9.3).

Plecînd de la expresia (9.4) şi adăugînd implicantul prim *bcytp* se obţine :

$$bcytp \Rightarrow \frac{(1,\ \ 6,7)\ (7,7)\ (1,\ \ 2,6,5)\ (3,7,4)\ (1,\ \ 4,5)\ (1,\ \ 3,2)}{(-\ a,p)\ (t,\ p)\ (-\ x,a,y)\ (c,\ t,\ d)\ (-\ d,y)\ (-\ c,\ x)}$$

Se repetă

$$\{b,\ c,\ y,\ t\} \cap \{a,\ x,\ y\} = \{y\}.$$

Fie $y = \alpha$, atunci

$$bc\alpha tp \Rightarrow \frac{(1,6,7)\ (7,7)\ (2,6,4)\ (3,7,4)\ (4,4)\ (1,3,2)\ (1,1),}{(b\ \ a\ p)\ (t,p)\ (x\ \ a\ y)\ (c,t,d)\ (d,y)\ (\alpha,c,x)\ (b,\alpha)}$$

$$bdxtp \Rightarrow \frac{(3,12,15)\ (15,15)\ (1,\ \ 5,12,8)\ (6,15,9)}{(b,\ a,\ p)\ (t,\ \ \ p)\ (-,\ x,\ a,y)\ (c,\ t,d)}$$

$$\frac{(1,\ \ 9,8)\ (1,\ \ 2,6,5)\ (1,\ \ 3,2)}{(-,d,y)\ (-,\alpha,c,x)\ (-,h,\alpha)}$$

Se repetă

$$\{b,\ d,\ x,\ t\} \cap \{x,\ y,\ \alpha\} = \{x\}$$

Fie $x = \beta$. Atunci

$$bd\beta tp \Rightarrow \frac{(3,12,15)\ (15,15)\ (4,12,8)\ (6,15,9)\ (1,9,8)\ (2,6,4)\ (1,3,2)}{(b,\ a,\ p)\ (t,\ \ p)\ (x,a,y)\ (c,\ t,\ d)\ (\beta,d,y)\ (\alpha,c,x)\ (\beta,b,\alpha)}$$

$$acyzp \Rightarrow \frac{(6,25,31)\ (1,\ \ 30,31)\ (8,25,17)\ (1,\ \ 13,30,18)}{(b,\ a,\ p)\ (-\ t,\ \ p)\ (x,\ a,\ y)\ (-\ \ c,\ t,\ \ d)}$$

$$\frac{(12,18,16)\ (1,\ \ 4,13,8)\ (2,6,4)}{(-,\beta,d,y)\ (-\ \alpha,\ c,\ x)\ (\beta,b,\alpha)}$$

Se repetă

$$\{a,\ c,\ y,\ z\} \cap \{t\ c\} = \{c\}$$

Fie $c = \Upsilon$. Atunci

$$a\Upsilon yzp \Rightarrow \frac{(6,25,31)\ (1,30,31)\ (8,25,17)\ (12,30,18)}{(b,\ a,\ p)\ (z,\ t,\ p)\ (x,\ a,\ y)\ (c,\ \ t,\ \ d)}$$

$$\frac{(1,2,18,17)\ (4,12,8)\ (2,6,4)\ (1,1)}{(\Upsilon,\beta,\ d,\ y)\ (\alpha,\ c,x)\ (\beta,b,\alpha)\ (z,\Upsilon)}$$

$$adxzp \Rightarrow \frac{(12,51,63)\ (3,60,63)\ (17,51,34)\ (1,\ \ 2,4,60,37)}{(b,\ \ a,\ \ p)\ (z,\ \ t,\ p)\ (x,\ \ a,\ \ y)\ (-\ c,\ t,\ d\ \ \ \ )}$$

$$\frac{(1,\ \ 2,4,37,34)\ (1,\ \ 8,24,17)\ (4,\ \ 12,8)\ (1,\ \ 3,2)}{(-\ \Upsilon,\beta,\ d,\ y)\ (-\ \alpha,\ c,\ x)\ (-\beta,b,\alpha)\ (-\ z,\Upsilon)}$$

Se repetă

$$\{a,\ d,\ x,\ z\} \cap \{c,\ d,\ \beta,\ \alpha\} = \{d\}.$$

Fie $d = \delta$. Atunci

$$a\,\delta x z p \Rightarrow \frac{(12, 51, 63)\ (3, 60, 63)\ (17, 51, 34)\ (24, 60, 36)}{(b,\ a,\ p)\ (z,\ t,\ p)\ (x,\ a,\ y)\ (c,\ t,\ d)}$$

$$\frac{(2, 4, 36, 34)\ (1, 8, 24, 17)\ (4, 13, 8)\ (1, 3, 2)}{(\Upsilon, \beta, d,\ y)\ (\delta, \alpha,\ c,\ x)\ (\beta,\ b,\ \alpha)\ (\delta, z, \gamma)}$$

$$bdyzp \Rightarrow \frac{(25, 102, 127)\ (7, 120, 127)\ (1, 34, 102, 69)\ (1, 48, 120, 73)}{(b,\ a,\ p)\ (z,\ t,\ p)\ (-\ x,\ a,\ y)\ (-\ c,\ t,\ d)}$$

$$\frac{(4, 8, 73, 69)\ (2, 16, 48, 34)\ (1,\ 8, 27, 16)\ (1, 2, 7, 4)}{(\Upsilon, \beta,\ d,\ y)\ (\delta,\ \alpha,\ c,\ x)\ (-,\ \beta,\ b.\ \alpha)\ (-\ \delta, z, \Upsilon)}$$

Deoarece nu există nici-o variabilă care să apară în două noduri care conțin pe 1, înseamnă că se repetă cel puțin două variabile. Pentru aflarea acestor variabile intersectăm mulțimea variabilelor din implicantul prim ***bdyzp*** diferite de ***p*** cu mulțimea variabilelor cuprinse în nodurile care conțin pe 1 și se obține :

$$\{b,\ d,\ y,\ z\} \cap \{x,\ a,\ y,\ c,\ t,\ d,\ \beta,\ b,\ \alpha,\ \delta,\ z,\ \Upsilon\} = \{b,\ d,\ z,\ y\}$$

Nu se poate repeta b deoarece în nodul (b, a, p) ar apare o nouă variabilă și după cum se verifică ușor oricare ar fi aceasta, acest nod ar conține 3 variabile dintr-unul cel puțin din implicanții primi ai funcției F. La fel se arată că nu se poate repeta z.

Rezultă deci că se repetă d și y. Se verifică mai întîi $d = \delta$ și $y = \alpha$, ceea ce elimină pe 1. Într-adevăr :

$$b\,\delta\alpha z p \Rightarrow \frac{(25, 102, 127)\ (7, 120, 127)\ (34, 102, 68)\ (48, 120, 72)}{(b,\ a,\ p)\ (z,\ t,\ p)\ (x,\ a,\ y)\ (c,\ t,\ d)}$$

$$\frac{(4, 8, 72, 68)\ (2, 16, 48, 34)\ (4, 13, 9)\ (3, 7, 4)}{(\Upsilon, \beta,\ d,\ y)\ (\delta,\ \alpha,\ c,\ x)\ (\beta,\ b, \alpha)\ (\delta, z, \Upsilon)}$$

$$bcxzp \Rightarrow \frac{(51, 204, 255)\ (15, 240, 255)\ (1, 69, 204, 136)}{(b,\ a,\ p)\ (z,\ t,\ p)\ (-\ x,\ a,\ y)}$$

$$\frac{(1, 97, 240, 144)\ (8, 16, 144, 136)\ (4, 32, 97, 69)}{(-\ c,\ t,\ d)\ (\Upsilon,\ \beta,\ d,\ y)\ (\delta,\ \alpha,\ c,\ x,)}$$

$$\frac{(1,\ 8, 27, 18)\ (1,\ 6, 15, 8)}{(-\ \beta,\ b,\ \alpha)\ (-\ \delta,\ z,\ \Upsilon)}$$

Se repetă

$$\{b,\ c,\ x,\ z\} \cap \{x,\ a,\ y,\ c,\ t\ d,\ \beta,\ b,\ \alpha,\ \delta,\ z,\ \Upsilon\} = \{b,\ c,\ x,\ z\}.$$

Dar b și z s-a arătat că nu se pot repeta, de unde rezultă că se repetă c și x. Se verifică mai întîi $c=\Upsilon$ și $x=\beta$ ceea ce conduce la eliminarea lui 1.

$$b\Upsilon\beta zp \Rightarrow \frac{(51, 204, 255)\,(15, 240, 255)\,(68, 204, 136)\,(98, 240, 144)}{(b,\ a,\ p)\,(z,\ t,\ p)\,(x,\ a,\ y)\,(c,\ t,\ d)}$$

$$\frac{(8, 16, 144, 136)\,(4, 32, 97, 69)\,(9, 27, 18)\,(6, 15, 9)}{(\Upsilon,\ \beta,\ d,\ y)\,(\delta,\ \alpha,\ c,\ x)\,(\beta,\ b,\ \alpha)\,(\delta,\ z, \gamma)}$$

Întrucît toți implicanții primi ai funcției F au fost întrebuințați, procesul de sinteză încetează și se obține schema din figura 19 care conduce la schema din figura 20 prin revenire la vechile variabile.

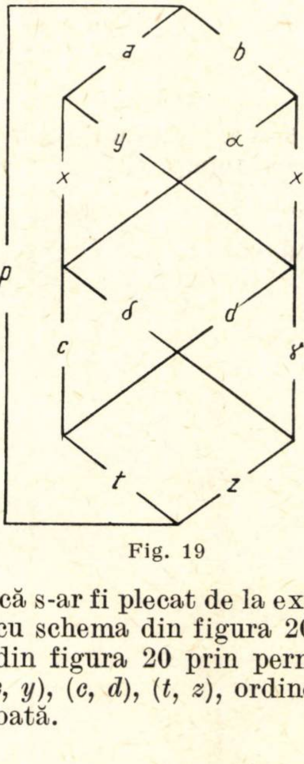


Fig. 19

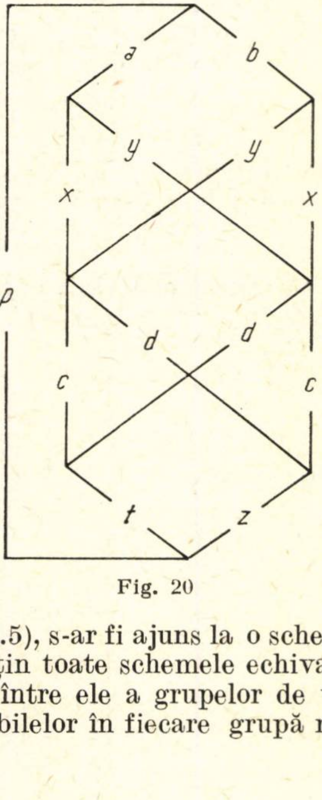


Fig. 20

Dacă s-ar fi plecat de la expresia (9.5), s-ar fi ajuns la o schemă echivalentă cu schema din figura 20. Se obțin toate schemele echivalente cu schema din figura 20 prin permutarea între ele a grupelor de variabile (a, b), (x, y), (c, d), (t, z), ordinea variabilelor în fiecare grupă rămînînd neschimbată.

10

Să notăm acum

(10.1) $$x_1 \oplus x_2 = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$

suma modulo 2 a variabilelor x_1 și x_2 și în general să notăm

(10.2) $$x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$$

suma modulo 2 a variabilelor $x_1, \ldots, x_2, \ldots, x_n$, operația „$\oplus$" avînd de data aceasta semnificația folosită în mod curent în algebrele booleene

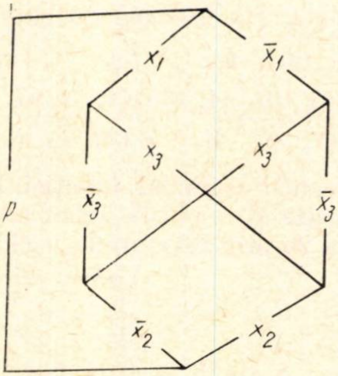

x_1
$\bar{x}_1$
x_3
x_3
p
$\bar{x}_3$
$\bar{x}_3$
$\bar{x}_2$
x_2

Fig. 21

Dacă în figura 9 se notează $a = x_1$, $b = \bar{x}_1$, $x = x_3$, $y = \bar{x}_3$, $c = \bar{x}_2$ și $d = x_2$, se obține schema din figura 21 a cărei funcție de lucru este

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3. \tag{10.3}$$

De asemenea dacă în figura 20 se notează :

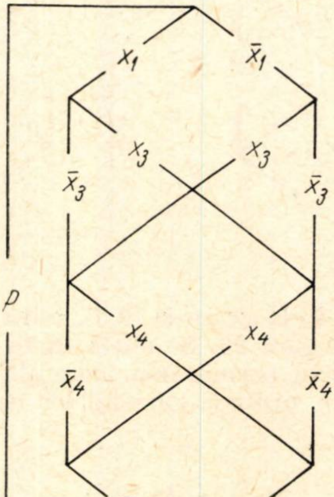

x_1
$\bar{x}_1$
x_3
x_3
$\bar{x}_3$
$\bar{x}_3$
p
x_4
x_4
$\bar{x}_4$
$\bar{x}_4$
$\bar{x}_2$
x_2

Fig. 22

$a = x_1$, $b = \bar{x}_1$, $y = x_3$, $x = \bar{x}_3$, $d = x_4$, $c = \bar{x}_4$, $z = x_2$, $t = \bar{x}_2$ se obține schema din figura 22 a cărei funcție de lucru este

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4. \tag{10.4}$$

Dar după cum se ştie, schemele din figura 21 şi figura 22 realizează cu număr minim de contacte funcţiile de lucru (10.3), respectiv (10.4), de unde se vede că algoritmul descris în capitolul 9, pentru schemele cu repetiţie, ne-a condus la scheme cu număr minim de contacte.

Ca şi în cazul funcţiilor care se realizează prin scheme fără repetiţie, în cazul schemelor cu repetiţie sinteza trebuie făcută plecînd de la forma normal disjunctivă a funcţiilor de lucru date, cu observaţia că fiecare variabilă a formei normal disjunctive, în procesul de sinteză, se consideră diferită de negaţia ei. Pentru aplicarea implicanţilor primi ai funcţiilor date se poate folosi procedeul descris în [3].

11

Rezultatele obţinute în cadrul acestei lucrări demonstrează utilitatea studierii codurilor grupale ataşate funcţiilor de lucru date. Deşi în lucrare nu s-a demonstrat, în cazul schemelor cu repetiţie, că algoritmul de sinteză coduce la scheme cu număr minim de contacte, toate exemplele au arătat însă că se realizează acest lucru dacă în fiecare pas al sintezei se urmăreşte adăugarea unui număr minim de variabile noi, prin reducerea la minimum a nodurilor în care apare 1.

Primită la redacţie la 12 iunie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Н. Б. Демидович, *К теории групповых кодов*. Проблемы кибернетики, *5* (1961).
2. А. В. Кузнецов, *Об одном свойстве функции реализуемых неплоскими бесповторными схемами*. Труды Математического Института имени ,,В. Стеклова'', **LI** (1918).
3. Mc Cluskey, *Minimization of Boolean functions*. Bell System Technical Journal (november 1956).
4. Ion Muntean, *Contribuţii la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte şi relee* (I). St. cerc. mat., **15**, *4* (1964).
5. P. Naslin, *Circuits à relais et automatismes à sequences*. Dunod, Paris, 1958, p. 196.

GRUPURILE DE SIMETRII ALE ORNAMENTELOR 4-DIMENSIONALE

DE

TIBERIU ROMAN

1. INTRODUCERE

Studiul ornamentelor plane a fost făcut de R. Fricke în 1897, G. Polya în 1924 (v. [7]), al ornamentelor în relief în 1928–1929 de C. Hermann [4], E. Alexander – K. Hermann [1], L. Weber [14]. Ideea lui A. Heesch [3] de a considera grupuri 4-dimensionale ale spaţiului tridimensional nu a fost dezvoltată ca atare. Direcţia în care se continuă în ultimii ani cercetările este dominată de noţiunile de antisimetrie, simetrie bicoloră, grupuri ale lui Şubnikov, în spaţii cu 2 şi 3 dimensiuni. Sînt mai rare cercetările cu privire la simetrii multicolore sau simetrii în spaţii abstracte.

Studiul simetriilor chenarelor 4-dimensionale [8] şi $(n+1)$-dimensionale [9] fiind încheiat, am abordat aspectul bicolor al ornamentelor în relief [10], [11] ca o pregătire a prezentului studiu.

2. NOTAŢII, DEFINIŢII ŞI REZULTATE FOLOSITE

Notaţii. *a*) O transformare a spaţiului euclidian real 4-dimensional este dată de relaţia

$$y = Ax + a,$$

unde A este o matrice 4×4, unitară, iar a un vector 4-dimensional. O asemenea transformare se va nota (A, a).

Compunerea a două asemenea transformări se efectuează, după cum se ştie, conform relaţiei

$$(A, a)\,(B, b) = (AB, Ab + a).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, P. 133–156, BUCUREŞTI, 1966

DEFINIȚIA 1. Se numește *mulțime elementară* m, o mulțime compactă de puncte ale spațiului 4-dimensional care satisface axiomelor

(i) $m \subset S$, S fiind o sferă de rază dată;

(ii) $O \in m$, O fiind originea $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$;

(iii) $m \cap H_1$ nu admite alte transformări în sine însăși decît transformări unitare, H_1 fiind hiperplanul $x_4 = 0$.

DEFINIȚIA 2. Se numește *ornament 4-dimensional* mulțimea de puncte ale spațiului 4-dimensional ce se obține aplicînd mulțimii elementare m transformările grupului C^2_∞, alcătuit de translațiile $(E,\ k_1 t_1 + k_2 t_2)$, unde k_1 și k_2 sînt numere întregi,

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

DEFINIȚIA 3. Se numesc *simetrii ale unui ornament 4-dimensional* transformările de forma $(A,\ a)$ care aplică acest ornament pe el însuși.

Două simetrii $(A,\ a)$ și $(B,\ b)$ sînt *geometric echivalente* dacă

$$A = B \text{ și } a = b + h_1 t_1 + h_2 t_2$$

(unde h_1 și h_2 sînt două numere întregi).

DEFINIȚIA 4. Simetriile unui ornament de forma $(A,\ 0)$ se numesc *rotații* iar cele de forma $\left(A, \frac{1}{2} t_1\right)$, $\left(A, \frac{1}{2} t_2\right)$ sau $\left(A, \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_2\right)$ — *rototranslații*.

b) Pentru simplificare, în cele ce urmează se folosesc următoarele notații pentru matrici:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_7=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad R_8=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad R_9=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_1=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad O_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad O_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rotațiile se vor nota cu aceiași literă și indice ca și matricea corespunzătoare.

c) Rototranslațiile se vor nota cu litera și indicele rotației corespunzătoare, însoțită de un accent, două, respectiv trei (în ordinea dată în definiția 4).

d) Pentru desemnarea tipurilor de ornamente plane se folosesc notațiile (nebarate) din [10], p. 72—80, conform tabelului 1.

Tabelul 1

Rețeaua plană	Tipurile de ornamente plane
paralelogramică	C_1, C_2
dreptunghiulară	C_s^{I}, C_s^{II}, C_{2v}^{I}, C_{2v}^{II}, C_{2v}^{III}
rombică	C_s^{III}, C_{2v}^{IV}
pătratică	C_4, C_{4v}^{I}, C_{4v}^{II}
triunghiulară-centrată	C_3, C_{3v}^{I}, C_{3v}^{II}, C_6, C_{6v}

e) Axele Ox_1 și Ox_2 ale ornamentului 4-dimensional sînt axele folosite în cristalografie pentru rețeaua plană corespunzătoare.

Observații. 1) Simetriile geometric neechivalente ale ornamentelor în relief sînt indicate în [14], în tabelul 5 din [2] (cu unele scăpări) sau în [10], p. 194—196.

2) În această lucrare nu se iau în considerație ornamentele 4-dimensionale continue, pentru care mulțimea elementară din definiția 2 nu mai este inclusă într-o sferă de rază finită.

3. REZULTATE GENERALE

În acest paragraf se prezintă teoreme care se referă la ansamblul tipurilor de ornamente 4-dimensionale sau la tipurile corespunzătoare unei anumite rețele, urmînd ca aspecte cu caracter mai particular, să fie prezentate în alte paragrafe.

TEOREMA 1. *Dacă*

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ cu } a_{33} = \pm 1,$$

este matricea unei simetrii $y = A_1x$ a unui ornament în relief, atunci

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B_1F$$

sînt singurele matrice care au ca submatrice pe A_1 și conduc la simetriile

$$y = B_1 x \text{ și } y = B_2 x \qquad (1)$$

ale unui ornament 4-dimensional.

În adevăr, transformarea $y = A_1x$ fiind o simetrie a unui ornament în relief, submatricea

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

indică o simetrie a rețelei și a ornamentului iar elementul a_{33} precizează dacă $x_3 = 0$ este plan de simetrie al ornamentului sau nu.

Așadar, transformările (1) sînt simetrii ale ornamentului 4-dimensional pentru că sînt simetrii ale rețelei și indică dacă hiperplanul $x_4 = 0$ este sau nu plan de simetrie al ornamentului. Dacă elementele a_{3j}, a_{j3} ($j = 1, 2$) și a_{4i}, a_{i4} ($i = 1, 2, 3$) ar fi diferite de zero în B_1 și B_2, atunci între coordonatele a două puncte omoloage ar avea loc relațiile

$$y_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dar, pentru $i = 1, 2$, simetriile rețelei impun $a_{i3} = a_{i4} = 0$, iar din definiția 2 rezultă că $y_3 = \pm x_3$ și $y_4 = \pm x_4$, așa că

$$a_{3j} = a_{j3} = 0, \quad (j = 1, 2) \text{ și } a_{4i} = a_{i4} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

COROLARUL 1. *Dacă*

$$y = A_1 x + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2$$

$\left(\right.$*unde* ε_1 *şi* ε_2 *sînt egali cu 0 sau* $\left.\frac{1}{2}\right)$ *este o simetrie a unui ornament în relief, atunci*

$$y = Bx + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2$$

(*unde* B *este egal cu* B_1 *sau* B_2) *este o simetrie a unui ornament 4-dimensional.*

COROLARUL 2. *Dacă* A_2 *nu indică o simetrie a reţelei, atunci relaţiile* (1) *nu sînt simetrii ale unui ornament 4-dimensional, conform definiţiei 2.*

TEOREMA 2. *Dacă* $(E, T_1, T_2, \ldots, T_k)$ *este un grup de simetrii geometric neechivalente ale unui ornament în relief şi* U_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ *simbolizează transformări ale unui ornament 4-dimensional* (*matricile* U_j *fiind deduse din* T_j, *aşa cum* B_1 *a fost dedusă din* A_1), *atunci* :

a) $(E, U_1, \ldots, U_k)$ *este un grup de simetrii, geometric neechivalente, ale unui ornament 4-dimensional;*

b) $(E, U_1, \ldots, U_k, F, U_1F, \ldots, U_kF)$ *este de asemenea un astfel de grup.*

În adevăr, din modul cum s-au definit transformările U_j, rezultă îndată afirmaţia a). Produsul direct dintre grupul de la a) şi grupul (E, F) conduce la un grup ale cărui elemente, geometric neechivalente, sînt cele de la *b*).

TEOREMA 3. *Dacă* $(T_1, \ldots, T_j)$ *sînt elemente generatoare în număr minim, ale unui grup de simetrii, geometric neechivalente, ale unui ornament în relief şi* $(U_1, \ldots, U_j)$ *transformările corespunzătoare* (*v. teorema* 2) *ale unui ornament 4-dimensional, atunci*

a) $(U_1, \ldots, U_j)$ *sînt elemente generatoare, în număr minim, ale unui grup de simetrii, geometric neechivalente, ale unui ornament 4-dimensional;*

b) $(U_1, \ldots, U_j, F)$ *sînt elemente generatoare în număr minim ale unui grup de simetrii, geometric neechivalente, ale unui ornament 4-dimensional;*

c) $(U_1F, \ldots, U_j), \ldots, (U_1, \ldots, U_jF)$ *reprezintă elemente generatoare, în număr minim, ale altor j grupuri de simetrii, geometric neechivalente, ale unor ornamente 4-dimensionale;*

d) *mulţimile ce se obţin din* $(U_1, \ldots, U_j)$ *prin înmulţirea a două elemente cu* F *reprezintă mulţimi de elemente generatoare în număr minim ale altor* $\frac{j(j-1)}{2}$ *grupuri de simetrii, geometric neechivalente, ale unor ornamente 4-dimensionale;*

e) *dacă 3 elemnte din* $(U_1, \ldots, U_j)$ *se înmulţesc cu* F *se obţin alte* $\frac{j(j-1)(j-2)}{6}$ *grupuri;*

f) *dacă 4 elemente din* $(U_1, \ldots, U_j)$ *se înmulţesc cu* F *se obţin alte grupuri.*

Afirmaţiile a) şi b) sînt consecinţe ale punctelor a) şi b) ale teoremei 2. Deoarece U_hF $(h = 1, \ldots, j)$ este un element de acelaşi ordin ca U_h, iar o relaţie de definiţie între elementele generatoare din a) se păstrează dacă un element, două, trei sau patru se înlocuiesc cu produsul lor prin F, rezultă celelalte afirmații ale teoremei. (Se subînțelege că este necesar ca transformarea $U_i\,F$ să fie posibilă în rețeaua considerată).

TEOREMA 4. a) *În rețelele paralelogramică și dreptunghiulară (cu excepția tipurilor provenite din* C_{2v}^{II}*), din fiecare grup de simetrii, geometric neechivalente, ale unui ornament 4-dimensional definit de elementele generatoare* $(U_1, \ldots, U_j)$ *se poate obține un alt grup, definit de elementele generatoare* $(U_1, \ldots, U_j, F')$ *sau* $(U_1, \ldots, U_j, F'')$*, unde* $F' = \left(F, \frac{1}{2}t_1\right)$ *iar* $F'' = \left(F, \frac{1}{2}t_2\right)$.

b) *În rețeaua pătratică, din fiecare grup de simetrii, geometric neechivalente, ale unui ornament 4-dimensional definit de elementele generatoare* $(U_1, \ldots, U_j)$ *se poate obține un alt grup definit de elementele generatoare* $(U_1, \ldots, U_j, F''')$*, unde* $F''' = \left(F, \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)$.

Deoarece $F'\cdot F'$, $F''\cdot F''$, $F'''\cdot F'''$ reprezintă transformări echivalente cu $(E, 0)$, rezultă că o rototranslație Φ (F', F'' sau F''') este un element de ordinul doi și că elementele generatoare $(U_1, \ldots, U_j, \Phi)$ definesc un grup de ordin dublu față de cel definit de $(U_1, \ldots, U_j)$. O rototranslație Φ păstrează elementele de simetrie ale rețelei, compatibile cu ornamentul dat și este generalizarea simetriei analoge, ce apare în trecerea de la un ornament plan la unul în relief.

Observații. 1) După cum se știe, un grup poate fi definit de mai multe mulțimi de elemente generatoare, chiar dacă acestea sînt în număr minim; în teoremele 3 și 4 (ca și în aplicarea lor în paragrafele următoare) se consideră una din aceste mulțimi.

2) Pentru definirea completă a unui grup cu ajutorul unor elemente generatoare este necesar să se dea și relațiile între acestea. Tipurile de relații care se ivesc în cazul grupurilor de simetrii ale ornamentelor 4-dimensionale sînt:

$$\text{a) } F^2 = E,\quad C^2 = E,\quad R_1^2 = E,\quad R_2^2 = E,\quad R_3^2 = E,\quad R_4^4 = E,$$

$$R_5^4 = E,\quad R_6^6 = E,\quad R_7^6 = E,\quad R_8^3 = E,\quad R_9^3 = E,$$

$$O_1^2 = E,\quad O_2^2 = E,\quad O_3^2 = E;$$

b) rototranslațiile deduse din rotațiile de la a) au același ordin cu rotațiile corespunzătoare;

c) $U_j\,F = F\,U_j$ (U_j fiind una din rotațiile de la a);

d) dacă U este o rotație de ordinul doi, atunci

$$UF' = F'U,\quad U'F = FU',\quad UF'' = F''U;$$

e) dacă V este o rotație de ordinul trei, patru sau șase, atunci au loc relațiile: $VU = UV^{-1}$, $V(UF) = (UF)V^{-1}$, $(VF)U = U(VF)^{-1}$ și altele analoge cînd F se înlocuiește cu F', F'', F''', sau U și V cu U', U'', U''' respectiv V', V'', V''' (dacă VF și rototranslațiile deduse din U și V sînt compatibile cu rețeaua)

3) Folosind teoremele de mai sus şi analizînd toate situaţiile ce se ivesc, se deduc în paragrafele 4—8 toate tipurile de ornamente 4-dimensionale, pornind de la cele 17 tipuri de ornamente plane, grupate în 5 reţele.

4. REŢEAUA PARALELOGRAMICĂ

a) Tipul C_1. Teorema 3a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

1) (E), 2) (O_3), 3) (O'_3) ;

teorema 3 b) conduce la :

4) (F), 5) (O_3, F), 6) (O'_3, F) ;

teorema 3 c) la :

7) $(O_3 F)$, 8) $(O'_3 F)$;

iar teorema 4 a) la :

9) (F'), 10) (O_3, F'), 11) (O'_3, F'), 12) (O'_3, F'').

b) Tipul C_2. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

13) (R_3), 14) (C), 15) (R_3, C), 16) (R_3, C') ;

teorema 3 b) conduce la :

17) (R_3, F), 18) (C, F), 19) (R_3, C, F), 20) (R_3, C', F) ;

teorema 3 c) la :

21) $(R_3 F)$, 22) (CF), 23) $(R_3 F, C)$, 24) (R_3, CF), 25) $(R_3 F, C')$,

26) $(R_3, C' F)$;

teorema 3 d) la :

27) $(R_3 F, CF)$, 28) $(R_3 F, C'F)$;

iar teorema 4 a) la :

29) (R_3, F'), 30) (C, F'), 31) (R_3, C, F'), 32) $R_3, C', F')$,

33) (R_3, C', F'').

5. REŢEAUA DREPTUNGHIULARĂ

c) Tipul C_s^I. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

34) (O_1), 35) (R_2), 36) (O_1, R_2), 37) (O_1, R'_2), 38) (O_1, R''_2),

39) (O_1'', R_2), 40) (O_1, R_2', R_2'');

teorema 3b) conduce la :

41) (O_1, F), 42) (R_2, F), 43) (O_1, R_2, F), 44) (O_1, R_2', F),
45) (O_1, R_2'', F), 46) (O_1'', R_2, F), 47) (O_1, R_2', R_2'', F);

teorema 3 c) conduce la :

48) (O_1F), 49) (R_2F), 50) (O_1F, R_2), 51) $(O_1, R_2 F)$, 52) (O_1F, R_2')
53) $(O_1, R_2'F)$, 54) (O_1F, R_2''), 55) $(O_1, R_2'' F)$, 56) $(O_1''F, R_2)$,
57) (O_1'', R_2F), 58) (O_1F, R_2', R_2''), 59) $(O_1, R_2' F, R_2'')$,
60) $(O_1, R_2', R_2'' F)$;

teorema 3 d) la :

61) (O_1F, R_2F), 62) $(O_1F, R_2'F)$, 63) $(O_1F, R_2'' F)$, 64) $(O_1''F, R_2F)$,
65) $(O_1F, R_2'F, R_2'')$, 66) $(O_1F, R_2', R_2''F)$, 67) $(O_1, R_2'F, R_2''F)$;

teorema 3 e) la :

68) $(O_1F, R_2'F, R_2''F)$;

teorema 4a) la :

69) (O_1, F'), 70) (O_1, F''), 71) (R_2, F'), 72) (R_2, F''),
73) (O_1, R_2, F'), 74) (O_1, R_2, F''), 75) (O_1, R_2', F'), 76) (O_1, R_2', F''),
77) (O_1, R_2'', F'), 78) (O_1, R_2'', F''), 79) (O_1'', R_2, F'),
80) (O_1'', R_2, F''), 81) (O_1, R_2', R_2'', F') sau (O_1, R_2', R_2'', F'').

Deoarece axele Ox_1 şi Ox_2 au rol deosebit, teorema 4a) se poate aplica şi pentru ambele rototranslaţii F' şi F'', în ceea ce priveşte ornamentele 34), 35), 36); pentru 37), 38), 39) aceasta nu este posibil întrucît semitranslaţiile marcate cu accente la R_2', R_2'' şi O_1'' indică o poziţie particulară a cîte unei axe ; pentru ornamentul 40) însă, aceasta este realizat căci o dată cu adăugarea lui F' apare şi F'' (v. 81)). Aşadar se adaugă ornamentele 4-dimensionale definite de elementele generatoare :

82) (O_1, F', F''), 83) (R_2, F', F''), 84) (O_1, R_2, F', F'').

Teorema 4 a) se poate aplica, la acest tip, şi unora dintre grupurile obţinute prin aplicarea teoremei 3 c) şi 3d) în funcţie de concordanţa dintre elementele de simetrie şi semitranslaţie cuprinse în F' şi F''. Astfel, din 48), 49), 52), 54), 57) şi 62) rezultă

85) (O_1F, F''), 86) (R_2F, F''), 87) (O_1F, R_2', F''), 88) (O_1F, R_2'', F'),

89) $(O_1F,\ R_2'',\ F'')$, 90) $(O_1'',\ R_2F,\ F')$, 91) $(O_1'',\ R_2F,\ F'')$,

92) $(O_1F,\ R_2'F,\ F'')$, adică din grupurile deduse din 34) și 35) rezultă cîte un grup nou, iar din cele deduse din 37), 38), 39) rezultă cîte 2.

Aplicînd teorema 4a) celorlalte grupuri rezultate după aplicarea teoremei 3c) și 3d) se obțin grupuri echivalente cu cele de mai sus, dacă se introduce o semitranslație $\frac{1}{2}\ t_1$ în rețea.

Observație. Dacă axele Ox_1 și Ox_2 se schimbă între ele ca notație, atunci indicii simetriilor O_1 și R_2 se schimbă între ei, în toate grupurile de mai sus, iar O_1'' devine O_2'; în 85), 86), 87), 92), F'' devine F'; în 87), 92), R_2' devine R_1''; în 88), 89), R_2'' devine R_1'.

d) Tipul C_s^{II}. Teorema 3a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

93) (O_1''), 94) (R_2''), 95) $(O_1'',\ R_2'')$, 96) $(O_1'',\ R_2''')$;

teorema 3b) conduce la :

97) $(O_1'',\ F)$, 98) $(R_2'',\ F)$, 99) $(O_1'',\ R_2'',\ F)$, 100) $(O_1'',\ R_2''',\ F)$;

teorema 3 c) conduce la :

101) $(O_1''F)$, 102) $(R_2''F)$, 103) $(O_1''F,\ R_2'')$, 104) $(O_1'',\ R_2''F)$,

105) $(O_1''F,\ R_2''')$, 106) $(O_1'',\ R_2'''F)$;

teorema 3d) conduce la :

107) $(O_1''F,\ R_2''F)$, 108) $(O_1''F,\ R_2'''F)$;

iar teorema 4 a) la :

109) $(O_1'',\ F')$, 110) $(R_2'',\ F')$, 111) $(O_1'',\ R_2'',\ F')$, 112) $(O_1'',\ R_2''',\ F')'$

Observații. Din cauza situației privilegiate a axei Ox_2 față de Ox_1, în grupurile 93) — 96), teorema 4a) nu poate fi aplicată cu privire la F''.

Dacă axele Ox_1 și Ox_2 se schimbă între ele ca notație, atunci indicii și accentele simetriilor se schimbă : O_1'', R_2'', R_2''' devin O_2', R_1', R_1'' iar în grupurile 109) — 112), F' se înlocuiește cu F''.

e) Tipul C_{2v}^{I}. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

113) $(O_1,\ O_2)$, 114) $(R_1,\ R_2)$, 115) $(O_1,\ R_1)$, 116) $(O_1,\ O_2,\ O_3)$ sau $(R_1,\ R_2,\ C)$, 117) $(O_1,\ O_2,\ O_3')$, 118) $(R_1,\ R_2,\ C')$, 119) $(O_1,\ O_2,\ O_3',\ O_3'')$;

teorema 3b) conduce la :

120) (O_1, O_2, F), 121) (R_1, R_2, F), 122) (O_1, R_1, F), 123) (O_1, O_2, O_3, F) sau $(R_1,\ R_2,\ C,\ F)$, 124) $(O_1,\ O_2,\ O_3',\ F)$, 125) $(R_1,\ R_2,\ C',\ F)$,

126) $(O_1,\ O_2,\ O_3',\ O_3'',\ F)$;

teorema 3 c) conduce la :

127) $(O_1F,\ O_2)$ sau $(O_1,\ O_2F)$, 128) $(R_1F,\ R_2)$ sau $(R_1,\ R_2F)$,
129) $(O_1F,\ R_1)$, 130) $(O_1,\ R_1F)$, 131) $(O_1F,\ O_2,\ O_3)$ sau $(O_1,\ O_2F,\ O_3)$,
132) $(O_1,\ O_2,\ O_3F)$, 133) $(O_1F,\ O_2,\ O_3')$, 134) $(O_1,\ O_2F,\ O_3')$,
135) $(O_1,\ O_2,\ O_3'F)$, 136) $(R_1F,\ R_2,\ C')$, 137) $(R_1,\ R_2F,\ C')$,
138) $(R_1,\ R_2,\ C'F)$, 139) $(O_1F,\ O_2, O_3',\ O_3'')$ sau $(O_1, O_2F, O_3',\ O_3'')$,
140) $(O_1,\ O_2,\ O_3'F, O_3'')$ sau $(O_1,\ O_2,\ O_3',\ O_3''F)$;

teorema 3d) conduce la :

141) $(O_1F,\ O_2F)$, 142) $(R_1F,\ R_2F)$, 143) $(O_1F,\ R_1F)$,
144) $(O_1F,\ O_2\ F,\ O_3)$, 145) $(O_1F,\ O_2,\ O_3F)$ sau $(O_1,\ O_2\ F,\ O_3F)$,
146) $(O_1F,\ O_2F,\ O_3')$,
147) $(O_1F,\ O_2,\ O_3'F)$, 148) $(O_1,\ O_2F,\ O_3'F)$, 149) $(R_1F,\ R_2F,\ C')$,
150) $(R_1,F,\ R_2,C'F)$, 151) $(R_1,\ R_2F,\ C'F)$, 152) $(O_1\ F, O_2F,\ O_3',\ O_3'')$,
153) $(O_1F,\ O_2,\ O_3'F,\ O_3'')$ sau $(O_1,\ O_2\ F,\ O_3'F,\ O_3'')$,
154) $(O_1F,\ O_2,O_3',\ O_3''F)$ sau $(O_1,\ O_2F,\ O_3',\ O_3''F)$,
155) $(O_1,\ O_2,\ O_3'F,\ O_3''F)$;

teorema 3 e) și 3 f) conduce la :

156) $(O_1F,\ O_2F,\ O_3F)$, 157) $(O_1F,\ O_2F,\ O_3'F)$, 158) $(R_1F, R_2F,\ C'F)$,
159) $(O_1F,\ O_2F,\ O_3'F,\ O_3'')$ sau $(O_1F,\ O_2F,\ O_3',\ O_3''F)$,
160) $(O_1F,\ O_2,\ O_3'F,\ O_3''F)$ sau $(O_1,\ O_2F,\ O_3'F,\ O_3''F)$,
161) $(O_1F,\ O_2F,\ O_3'F,\ O_3''F)$;

teorema 4 a) conduce la :

162) $(O_1,\ O_2,\ F')$ sau (O_1, O_2, F''), 163) $(R_1,\ R_2,\ F')$ sau $(R_1,\ R_2,\ F'')$,
164) $(O_1,\ R_1,\ F')$ sau $(O_1,\ R_1,\ F'')$, 165) $(O_1,\ O_2,\ O_3,\ F')$ sau
$(O_1,\ O_2,\ O_3,\ F'')$, 166) $(O_1,\ O_2,\ O_3',\ F')$, 167) $(O_1,\ O_2,\ O_3',\ F'')$,
168) $(R_1,\ R_2,\ C',\ F')$, 169) $(R_1,\ R_2,\ C',\ F'')$.

Ca și la tipul C_s^{I}, teorema 4 a) se poate aplica și pentru ambele rototranslații F' și F'' ornamentelor 113) — 117), ale căror grupuri nu conțin rototranslații care să facă o deosebire între axe. Se adaugă deci grupurile :

170) $(O_1,\ O_2,\ F',\ F'')$, 171) $(R_1,\ R_2,\ F',\ F'')$, 172) $(O_1,\ R_1,\ F',\ F'')$,
173) $(O_1,\ O_2,\ O_3,\ F',\ F'')$, 174) $(O_1,\ O_2,\ O_3',\ F',\ F'')$.

Ca şi la tipul C_s^{I}, teorema 4 a) se poate aplica şi unora dintre grupurile obţinute prin aplicarea teoremei 3c), d) şi e), grupurilor 113) — 118). Astfel, din grupurile obţinute din 113), 114), 116), rezultă cîte un nou grup :

175) (O_1, O_2F, F'), 176) (R_1, R_2F, F'), 177) (O_1, O_2F, O_3, F').

Deoarece compunerea simetriilor O_3F şi F' (sau F'') face să apară simetria O_3', care nu este element în grupul 116) şi nici în cele deduse din el, rezultă că din acest ornament nu se pot obţine şi alte grupuri noi, în afară de 177).

Din grupurile obţinute din 115) rezultă două grupuri noi :

178) $(O_1, R_1 F, F')$, 179) (O_1, R_1F, F'')

iar din grupurile obţinute din 117) şi 118) rezultă încă 4 respectiv 3 grupuri :

180) (O_1, O_2F, O_3', F'), 181) (O_1F, O_2, O_3', F''), 182) $(O_1, O_2, O_3'F, F'')$,

183) $(O_1, O_2 F, O_3'F, F'')$, 184) (R_1, R_2F, C', F''),

185) $(R_1, R_2, C'F, F'')$, 186) $(R_1F, R_2, C'F, F'')$.

Aplicînd teorema 4 a) celorlalte grupuri care provin din grupurile 113) — 118) prin aplicarea teoremei 3c), d), e), se obţin grupuri echivalente cu cele de mai sus, dacă se introduce o semitranslaţie $\frac{1}{2}\, t_1$ sau $\frac{1}{2}\, t_2$ în reţea sau nu se obţin grupuri noi de simetrii ale unui ornament 4-dimensional.

Observaţie. Dacă axele Ox_1 şi Ox_2 se schimbă între ele, atunci grupurile 115), 117), 118) se înlocuiesc prin (O_2, R_2), (O_1, O_2, O_3'') respectiv (R_1, R_2, C'') şi în mod corespunzător cele ce provin din ele, prin aplicarea teoremelor 3 şi 4.

f) Tipul $\mathrm{C}_{2v}^{\mathrm{II}}$. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

187) (O_1''', O_2'''), 188) (R_1''', R_2'''), 189) (O_1''', R_1'''), 190) (O_1''', O_2''', O_3);

teorema 3b) conduce la :

191) (O_1''', O_2''', F), 192) (R_1''', R_2''', F), 193) (O_1''', R_1''', F),

194) (O_1''', O_2''', O_3, F);

teorema 3 c) conduce la :

195) $(O_1'''F, O_2''')$ sau $(O_1''', O_2'''F)$, 196) $(R_1''', R_2'''F)$ sau $(R_1'''F, R_2''')$,

197) $(O_1'''F, R_1''')$, 198) $(O_1''', R_1'''F)$, 199) $(O_1'''F, O_2''', O_3)$ sau $(O_1''', O_2'''F, O_3)$, 200) (O_1''', O_2''', O_3F);

teorema 3d) şi e) conduce la :

201) $(O_1'''F,\ O_2'''F)$, 202) $(R_1'''F,\ R_2'''F)$, 203) $(O_1'''F,\ R_1'''F)$,
204) $(O_1'''F,\ O_2'''F,\ O_3)$, 205) $(O_1'''F,\ O_2''',\ O_3F)$ sau $(O_1''',\ O_2'''F, O_3F)$,
206) $(O_1'''F,\ O_2'''F,\ O_3F)$.

Observaţie. Teorema 4a) nu se poate aplica acestui tip deoarece un produs de forma $O_1'''.\ F'$ (de exemplu)

$$O'''\cdot F' = \left(O_1, \frac{1}{2}(t_1 + t_2)\right)\left(F, \frac{1}{2}t_1\right) = \left(O_1F, \frac{1}{2}t_2\right)$$

(conform regulei de compunere dată în paragraful 1) implică existenţa unor simetrii cu semitranslaţia $\frac{1}{2}t_2$, care nu pot exista.

g) Tipul C_{2v}^{III}. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare

207) $(O_1',\ O_2')$, 208) $(R_1',\ R_2')$, 209) $(O_1',\ R_1')$, 210) $(O_2',\ R_2')$,
211) $(O_1',\ O_2',\ O_3)$, 212) $(O_1',\ O_2',\ O_3'')$, 213) $(O_1',\ R_1',\ O_3')$;

teorema 3 b) conduce la :

214) (O_1', O_2', F), 215) (R_1', R_2', F), 216) $(O_1',\ R_1', F)$, 217) (O_2', R_2', F),
218) $(O_1',\ O_2',\ O_3,\ F)$, 219) $(O_1',\ O_2',\ O_3'',\ F)$, 220) $(O_1',\ R_1',\ O_3',\ F)$;

teorema 3 c) conduce la:

221) $(O_1'F,\ O_2')$, 222) $(O_1',\ O_2'F)$, 223) $(R_1'F,\ R_2')$, 224) $(R_1',\ R_2'F)$,
225) $(O_1'F,\ R_1')$, 226) $(O_1', R_1'F)$, 227) $(O_2'F,\ R_2')$, 228) $(O_2',\ R_2'F)$,
229) $(O_1'F,\ O_2',\ O_3)$, 230) $(O_1',\ O_2'F,\ O_3)$, 231) $(O_1',\ O_2',\ O_3F)$,
232) $(O_1'F,\ O_2',\ O_3'')$, 233) $(O_1', O_2'F, O_3'')$, 234) $(O_1', O_2', O_3''F)$,
235) $(O_1'F, R_1', O_3')$, 236) $(O_1', R_1'F, O_3')$, 237) $(O_1', R_1', O_3'F)$;

teorema 3 d) conduce la :

238) $(O_1'F, O_2'F)$, 239) $(R_1'F, R_2'F)$, 240) $(O_1'F, R_1'F)$,
241) $(O_2'F, R_2'F)$, 242) $(O_1'F, O_2'F, O_3)$, 243) $(O_1'F, O_2', O_3F)$,
244) $(O_1', O_2'F, O_3F)$, 245) $(O_1'F, O_2'F, O_3'')$, 246) $(O_1'F, O_2', O_3''F)$,
247) $(O_1', O_2'F, O_3''F)$, 248) $(O_1'F, R_1'F, O_3')$, 249) $(O_1'F, R_1', O_3'F)$,
250) $(O_1', R_1'F, O_3'F)$;

teorema 3 e) conduce la :

251) $(O_1'F, O_2'F, O_3F)$, 252) $(O_1'F, O_2'F, O_3''F)$, 253) $(O_1'F, R_1'F, O_3'F)$;

teorema 4 a) conduce la :

254) (O_1', O_2', F''), 255) (R_1', R_2', F''), 256) (O_1', R_1', F''),

257) (O_2', R_2', F''), 258) (O_1', O_2', O_3, F''), 259) (O_1', O_2', O_3'', F''),

260) (O_1', R_1', O_3', F'').

Deoarece axele au roluri deosebite la acest tip, teorema 4 a) nu se poate aplica decît cu privire la Ox_2, dacă rototranslaţiile generatoare ale grupurilor de simetrii conţin semitranslaţia $\frac{1}{2} t_1$; aşadar nu se poate aplica nici pentru ambele axe.

Ca şi la tipurile C_s^{I} şi C_{2v}^{I}, teorema 4 a) se poate aplica la acest tip şi unora dintre grupurile obţinute prin aplicarea teoremei 3 c) grupurilor 207) — 211). Rezultă grupurile noi :

261) $(O_1'F, O_2', F'')$, 262) $(R_1', R_2'F, F'')$, 263) $(O_1'F, R_1', F'')$,

264) $(O_2', R_2'F, F'')$, 265) $(O_1'F, O_2', O_3, F'')$.

6. REŢEAUA ROMBICĂ

h) Tipul C_s^{III}. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

266) (O_1, O_1'''), 267) (R_1, R_1'''), 268) (O_1, O_3'''), 269) (O_1''', R_2),

270) (O_1, R_2, O_1''');

teorema 3 b) conduce la :

271) (O_1, O_1''', F), 272) (R_1, R_1''', F), 273) (O_1, O_3''', F),

274) (O_1''', R_2, F), 275) (O_1, R_2, O_1''', F);

teorema 3 c) conduce la :

276) (O_1F, O_1'''), 277) $(O_1, O_1'''F)$, 278) (R_1F, R_1'''), 279) $(R_1, R_1'''F)$,

280) (O_1F, O_3'''), 281) $(O_1, O_3'''F)$, 282) $(O_1'''F, R_2)$, 283) (O_1''', R_2F),

284) (O_1F, R_2, O_1'''), 285) (O_1, R_2F, O_1'''), 286) $(O_1, R_2, O_1'''F)$;

teorema 3 c) şi d) conduce la :

287) $(O_1F, O_1'''F)$, 288) $(R_1F, R_1'''F)$, 289) $(O_1F, O_3'''F)$,

290) $(O_1'''F, R_2F)$, 291) (O_1F, R_2F, O_1'''), 292) $(O_1F, R_2, O_1'''F)$,

293) $(O_1, R_2F, O_1'''F)$, 294) $(O_1F, R_2F, O_1'''F)$.

i) Tipul C_{2v}^{IV}. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

295) (O_1, O_2, O_1'''), 296) (R_1, R_2, R_2'''), 297) (O_1, R_1, O_1'''),

298) (O_1, O_2, O_3'''), 299) (R_1, R_2, O_1'''), 300) (O_1, R_1, O_3'''),

301) (O_1, O_2, O_1''', O_3);

teorema 3 b) conduce la :

302) (O_1, O_2, O_1''', F), 303) (R_1, R_2, R_2''', F), 304) (O_1, R_1, O_1''', F),

305) (O_1, O_2, O_3''', F), 306) (R_1, R_2, O_1''', F), 307) (O_1, R_1, O_3''', F),

308) $(O_1, O_2, O_1''', O_3, F)$;

teorema 3 c) conduce la :

309) (O_1F, O_2, O_1''') sau (O_1, O_2F, O_1'''), 310) $(O_1, O_2, O_1'''F)$,

311) (R_1F, R_2, R_2''') sau (R_1, R_2F, R_2'''), 312) $(R_1, R_2, R_2'''F)$,

313) (O_1F, R_1, O_1'''), 314) (O_1, R_1F, O_1'''), 315) $(O_1, R_1, O_1'''F)$,

316) (O_1F, O_2, O_3''') sau (O_1, O_2F, O_3'''), 317) $(O_1, O_2, O_3'''F)$,

318) (R_1F, R_2, O_1''') sau (R_1, R_2F, O_1'''), 319) $(R_1, R_2, O_1'''F)$,

320) (O_1F, R_1, O_3'''), 321) (O_1, R_1F, O_3'''), 322) $(O_1, R_1, O_3'''F)$,

323) (O_1F, O_2, O_1''', O_3) sau (O_1, O_2F, O_1''', O_3), 324) $(O_1, O_2, O_1'''F, O_3)$,

325) (O_1, O_2, O_1''', O_3F);

teorema 3 d) conduce la :

326) (O_1F, O_2F, O_1'''), 327) $(O_1F, O_2, O_1'''F)$ sau $(O_1, O_2F, O_1'''F)$,

328) (R_1F, R_2F, R_2'''), 329) $(R_1F, R_2, R_2'''F)$ sau $(R_1, R_2F, R_2'''F)$,

330) (O_1F, R_1F, O_1'''), 331) $(O_1F, R_1, O_1'''F)$, 332) $(O_1, R_1F, O_1'''F)$,

333) (O_1F, O_2F, O_3'''), 334) $(O_1F, O_2, O_3'''F)$ sau $(O_1, O_2F, O_3'''F)$,

335) (R_1F, R_2F, O_1'''), 336) $(R_1F, R_2, O_1'''F)$ sau $(R_1, R_2F, O_1'''F)$,

337) (O_1F, R_1F, O_3'''), 338) $(O_1F, R_1, O_3'''F)$, 339) $(O_1, R_1F, O_3'''F)$,

340) $(O_1F, O_2F, O_1''', O_3)$, 341) $(O_1F, O_2, O_1'''F, O_3)$ sau $(O_1, O_2F, O_1'''F, O_3)$, 342) $(O_1F, O_2, O_1''', O_3F)$ sau $(O_1, O_2F, O_1''', O_3F)$,

343) $(O_1, O_2, O_1'''F, O_3F)$;

teorema 3 e) și f) conduce la :

344) $(O_1F, O_2F, O_1'''F)$, 345) $(R_1F, R_2F, R_2'''F)$, 346) $(O_1F, R_1F, O_1'''F)$,

347) $(O_1F, O_2F, O_3'''F)$, 348) $(R_1F, R_2F, O_1'''F)$, 349) $(O_1F, R_1F, O_3'''F)$,

350) $(O_1F,\ O_2F, O_1'''F, O_3)$, 351) $(O_1F, O_2, O_1'''F, O_3F)$ sau

$(O_1, O_2F, O_1'''F, O_3F)$, 352) $(O_1F, O_2F, O_1''', O_3F)$,

353) $(O_1F, O_2F, O_1'''F, O_3F)$.

Observație. Teorema 4 nu este valabilă în rețeaua rombică, deoarece axele (diagonalele rombului fundamental) nu coincid cu direcțiile translațiilor cuprinse în F' și F''.

7. REȚEAUA PĂTRATICĂ

j) Tipul C_4. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

354) (R_4), 355) (R_4, O_3), 356) (R_5), 357) (R_4, O_3'''), 358) (R_4, R_1''');

teorema 3 b) conduce la :

359) (R_4, F), 360) (R_4, O_3, F), 361) (R_5, F), 362) (R_4, O_3''', F),

363) (R_4, R_1''', F);

teorema 3 c) conduce la :

364) (R_4F), 365) (R_4F, O_3), 366) (R_4, O_3F), 367) (R_5F),

368) (R_4F, O_3'''), 369) $(R_4, O_3'''F)$, 370) (R_4F, R_1'''), 371) $(R_4, R_1'''F)$;

teorema 3 d) conduce la :

372) (R_4F, O_3F), 373) $(R_4F, O_3'''F)$, 374) $(R_4F, R_1'''F)$;

teorema 4 b) conduce la :

375) (R_4, F'''), 376) (R_4, O_3, F'''), 377) (R_5, F'''), 378) (R_4, O_3''', F''').

Observație. Teorema 4 b) nu se poate aplica grupului 358), pentru că se obține :

$$R_1'''.F''' = \left(R_1,\ \frac{1}{2}\,t_1 + \frac{1}{2}\,t_2\right)\left(F, \frac{1}{2}\,t_1 + \frac{1}{2}\,t_2\right) = (R_1F,\ t_1)$$

care este o transformare nesimetrică, rețeaua avînd axele Ox_1 și Ox_2 indiscernabile.

k) Tipul C_{4v}^{I}. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

379) (R_4, O_1) sau (R_4, O_2), 380) (R_4, O_1, O_3) sau (R_4, O_2, O_3),

381) (R_4, R_1) sau (R_4, R_2), 382) (R_5, O_1) sau (R_5, O_2),

383) $(R_5,\ R_1)$ sau $(R_5,\ R_2)$, 384) $(R_4,\ O_1,\ O_3''')$ sau $(R_4,\ O_2,\ O_3''')$,

385) $(R_5,\ O_1,\ O_3''')$ sau $(R_5,\ O_2,\ O_3''')$;

teorema 3 b) conduce la :

386) (R_4, O_1, F), 387) (R_4, O_1, O_3, F), 388) (R_4, R_1, F),
389) (R_5, O_1, F), 390) (R_5, R_1, F), 391) (R_4, O_1, O_3''', F),
392) (R_5, O_1, O_3''', F);

teorema 3 c) conduce la :

393) (R_4F, O_1), 394) (R_4, O_1F), 395) (R_4F, O_1, O_3), 396) (R_4, O_1F, O_3),
397) (R_4, O_1, O_3F), 398) (R_4F, R_1), 399) (R_4, R_1F), 400) (R_5F, O_1),
401) (R_5, O_1F), 402) (R_5F, R_1), 403) (R_5, R_1F), 404) (R_4F, O_1, O_3'''),
405) (R_4, O_1F, O_3'''), 406) $(R_4, O_1, O_3'''F)$, 407) (R_5F, O_1, O_3'''),
408) (R_5, O_1F, O_3'''), 409) $(R_5, O_1, O_3'''F)$;

teorema 3 d) conduce la :

410) (R_4F, O_1F), 411) (R_4F, O_1F, O_3), 412) (R_4F, O_1, O_3F),
413) (R_4, O_1F, O_3F), 414) (R_4F, R_1F), 415) (R_5F, O_1F),
416) (R_5F, R_1F), 417) (R_4F, O_1F, O_3'''), 418) $(R_4F, O_1, O_3'''F)$,
419) $(R_4, O_1F, O_3'''F)$, 420) (R_5F, O_1F, O_3'''), 421) $(R_5F, O_1, O_3'''F)$,
422) $(R_5, O_1F, O_3'''F)$;

teorema 3 e) conduce la :

423) (R_4F, O_1F, O_3F), 424) $(R_4F, O_1F, O_3'''F)$, 425) $(R_5F, O_1F, O_3'''F)$;

teorema 4 b) conduce la :

426) (R_4, O_1, F'''), 427) (R_4, O_1, O_3, F'''), 428) (R_4, R_1, F'''),
429) (R_5, O_1, F'''), 430) (R_5, R_1, F'''), 431) (R_4, O_1, O_3''', F''').

Ca şi la tipurile C_s^{I}, C_{2v}^{I}, C_{2v}^{III}, teorema 4 (b, la acest tip) se poate aplica şi unora dintre grupurile obţinute prin aplicarea teoremei 3 c) grupurilor 379) — 383). Rezultă grupurile noi :

432) (R_4F, O_1, F'''), 433) (R_4, O_1, O_3F, F'''),
434) (R_4F, O_1, O_3F, F'''), 435) (R_4F, R_1, F'''), 436) (R_5F, O_1, F'''),
437) (R_5F, R_1, F''').

l) Tipul C_{4v}^{II}. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

438) (R_4, O_1''') sau (R_4, O_2'''), 439) (R_4, O_1''', O_3) sau (R_4, O_2''', O_3),
440) (R_5, R_1''') sau (R_5, R_2'''), 441) (R_5, O_1''') sau (R_5, O_2''');

teorema 3 b) conduce la :

442) (R_4, O_1''', F), 443) (R_4, O_1''', O_3, F'''), 444) (R_5, R_1''', F'''),

445) (R_5, O_1''', F''');

teorema 3 c) conduce la :

446) $(R_4 F, O_1''')$, 447) $(R_4, O_1''' F)$, 448) $(R_4 F, O_1''', O_3)$,

449) $(R_4, O_1''' F, O_3)$, 450) $(R_4, O_1''', O_3 F)$, 451) $(R_5 F, R_1''')$,

452) $(R_5, R_1''' F)$, 453) $(R_5 F, O_1''')$, 454) $(R_5, O_1''' F)$;

teorema 3 d) şi e) conduce la :

455) $(R_4 F, O_1''' F)$, 456) $(R_4 F, O_1''' F, O_3)$, 457) $(R_4 F, O_1''', O_3 F)$,

458) $(R_4, O_1''' F, O_3 F)$, 459) $(R_5 F, R_1''' F)$, 460) $(R_5 F, O_1''' F)$,

461) $(R_4 F, O_1''' F, O_3 F)$.

Observaţia de la tipul C_4 este valabilă pentru toate grupurile acestui tip.

8. REŢEAUA TRIUNGHIULARĂ CENTRATĂ

m) Tipul C_3. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

462) (R_8), 463) (R_8, O_3);

teorema 3 b) conduce la :

464) (R_8, F), 465) (R_8, O_3, F);

teorema 3 c) conduce la :

466) $(R_8, O_3 F)$.

Observaţie. Rotaţia R_8 este un element de ordinul trei, $(R_8)^3 = E$, pe cînd $R_8 F$ este de ordinul şase ; aceasta explică inexistenţa grupurilor $(R_8 F, O_3)$ şi $(R_8 F, O_3 F)$.

n) Tipul C_{3v}^{I}. Teorema 3 a) conduce la ornamente 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

467) (R_8, O_1), 468) (R_8, O_1, O_3), 469) (R_8, R_1);

teorema 3 b) conduce la :

470) (R_8, O_1, F), 471) (R_8, O_1, O_3, F), 472) (R_8, R_1, F);

teorema 3 c) şi d) conduce la :

473) $(R_8, O_1 F)$, 474) $(R_8, O_1 F, O_3)$, 475) $(R_8, O_1, O_3 F)$,

476) $(R_8, R_1 F)$, 477) $(R_8, O_1 F, O_3 F)$.

Observația dela tipul precedent rămîne valabilă, explicînd inexistența grupurilor în care ar urma să apară elementul $R_8 F$.

p) Tipul C_{3v}^{II}. Teorema 3 a) conduce la ornamente 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

478) (R_8, O_2), 479) (R_8, O_2, O_3), 480) (R_8, R_2);

teorema 3 b) conduce la :

481) (R_8, O_2, F), 482) (R_8, O_2, O_3, F), 483) (R_8, R_2, F);

teorema 3 c) și d) conduce la :

484) $(R_8, O_2 F)$, 485) $(R_8, O_2 F, O_3)$, 486) $(R_8, O_2, O_3 F)$,
487) $(R_8, R_2 F)$, 488) $(R_8, O_2 F, O_3 F)$.

Observația de la tipul C_3 rămîne valabilă.

q) Tipul C_6. Teorema 3 a) conduce la ornamente 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

489) (R_6), 490) (R_6, O_3), 491) (R_7);

teorema 3 b) conduce la :

492) (R_6, F), 493) (R_6, O_3, F), 494) (R_7, F);

teorema 3c) și d) conduce la :

495) $(R_6 F)$, 496) $(R_6 F, O_3)$, 497) $(R_6, O_3 F)$, 498) $(R_7 F)$,
499) $(R_6 F, O_3 F)$.

r) Tipul C_{6v}. Teorema 3 a) conduce la ornamentele 4-dimensionale avînd grupurile de simetrii definite de elementele generatoare :

500) (R_6, O_1) sau (R_6, O_2), 501) (R_6, O_1, O_3) sau (R_6, O_2, O_3),
502) (R_6, R_1) sau (R_6, R_2), 503) (R_7, O_1) sau (R_7, R_1),
504) (R_7, O_2) sau (R_7, R_2);

teorema 3 b) conduce la :

505) (R_6, O_1, F), 506) (R_6, O_1, O_3, F), 507) (R_6, R_1, F),
508) (R_7, O_1, F), 509) (R_7, O_2, F);

teorema 3 c) conduce la :

510) $(R_6 F, O_1)$, 511) $(R_6, O_1 F)$, 512) $(R_6 F, O_1, O_3)$, 513) $(R_6, O_1 F, O_3)$,
514) $(R_6, O_1, O_3 F)$, 515) $(R_6 F, R_1)$, 516) $(R_6, R_1 F)$, 517) $(R_7 F, O_1)$,
518) $(R_7, O_1 F)$, 519) $(R_7 F, O_2)$, 520) $(R_7, O_2 F)$;

teorema 3 d) și e) conduce la :

521) $(R_6 F, O_1 F)$, 522) $(R_6 F, O_1 F, O_3)$, 523) $(R_6 F, O_1, O_3 F)$,
524) $(R_6, O_1 F, O_3 F)$, 525) $(R_6 F, R_1 F)$, 526) $(R_7 F, O_1 F)$,
527) $(R_7 F, O_2 F)$, 528) $(R_6 F, O_1 F, O_3 F)$.

9. CONCLUZII

a) Ornamentele 4-dimensionale sînt de 528 tipuri, cărora le corespund cele 528 grupuri de simetrii, definite mai sus prin elementele lor generatoare. Tabelul 2 indică, pentru fiecare tip plan fundamental, numărul grupurilor obținute prin aplicarea teoremei 3a), 3b) sau 3c), 3d), 3e) și a teoremei 4 a) respectiv 4 b).

Tabelul 2

Rețea	Tip plan fundamental	Numărul grupurilor de simetrii ale ornamentelor 4-dimensionale						Total
		deduse prin aplicarea teoremei					total	
		3 a)	3 b)	3 c), d), e), f)	4 a)	4 b)		
paralelogramică	C_1	3	3	6			12	
	C_2	4	4	8	5		21	33
dreptunghiulară	C_s^{I}	7	7	21	24		59	
	C_s^{II}	4	4	8	4		20	
	C_{2v}^{I}	7	7	35	25		74	
	C_{2v}^{II}	4	4	12	—		20	
	C_{2v}^{III}	7	7	33	12		59	232
rombică	C_s^{III}	5	5	19	—		29	
	C_{2v}^{IV}	7	7	45	—		59	88
pătratică	C_4	5	5	11		4	25	
	C_{4v}^{I}	7	7	33		12	59	
	C_{4v}^{II}	4	4	16		-	24	108
triunghiulară centrată	C_3	2	2	1			5	
	C_{3v}^{I}	3	3	5			11	
	C_{3v}^{II}	3	3	5			11	
	C_6	3	3	5			11	
	C_{6v}	5	5	19			29	67
Total		80	80	282	70	16	528	528

$$\underbrace{282 \quad 70 \quad 16}_{368}$$

Tabelul 3

Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din	
	[11]	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare
C_1	a	9	C_s^{I}	b_{24}	84	C_s^{I}	c_{52}	56	C_{2v}^{I}	b_{23}	165
	b_1	7		b_{25}	89		c_{53}	79		b_{24}	173
	b_{21}	10		b_{31}	50		c_{54}	90		b_{25}	177
	b_{31}	11		b_{32}	78		c_{55}	57		b_{31}	156
	c_{11}	8		b_{33}	75		d_{31}	52		b_{32}	145
	d_1	12		b_{34}	81		d_{32}	87		b_{33}	166
C_2	a_1	21		b_{35}	80		d_{41}	66		b_{34}	174
	a_2	29		c_{11}	49		d_{42}	58		b_{35}	180
	b_1	24		c_{12}	72	C_s^{II}	a_1	101		c_{11}	142
	b_{21}	27		c_{13}	71		a_2	109		c_{12}	128
	b_{22}	31		c_{14}	83		b_1	104		c_{13}	163
	b_{31}	23		c_{15}	86		b_{21}	107		c_{14}	171
	b_{32}	32		c_{21}	63		b_{22}	111		c_{15}	175
	c_{11}	22		c_{22}	55		b_{31}	103		c_{21}	143
	c_{12}	30		c_{23}	77		b_{32}	112		c_{22}	130
	c_{21}	28		c_{24}	88		c_{11}	102		c_{23}	164
	c_{22}	26		c_{25}	54		c_{12}	110		c_{24}	172
	d_{21}	25		c_{31}	62		c_{21}	108		c_{25}	178
	d_{22}	33		c_{32}	76		c_{22}	106		c_{31}	146
C_s^{I}	a_1	48		c_{33}	53		d_{21}	105		c_{32}	134
	a_2	70		c_{34}	91	C_{2v}^{I}	a_1	141		c_{33}	135
	a_3	69		c_{35}	92		a_2	127		c_{34}	182
	a_4	82		c_{41}	68		a_3	162		c_{35}	157
	a_5	85		c_{42}	60		a_4	170		c_{41}	152
	b_1	51		c_{43}	59		a_5	175		c_{42}	139
	b_{21}	61		c_{44}	67		b_1	132		c_{43}	140
	b_{22}	74		c_{45}	65		b_{21}	144		c_{44}	155
	b_{23}	73		c_{51}	64		b_{22}	131		c_{45}	159

Tabelul 3 (continuare)

Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din	
	[11]	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare
C_{2v}^{I}	c_{51}	149	C_{2v}^{II}	b_{22}	199	C_{2v}^{III}	c_{15}	262	C_{s}^{III}	b_{1}	285
	c_{52}	150		b_{31}	206		c_{21}	240		b_{21}	294
	c_{53}	138		b_{32}	205		c_{22}	226		b_{22}	286
	c_{54}	185		c_{11}	202		c_{23}	225		b_{23}	291
	c_{55}	158		c_{12}	196		c_{24}	256		b_{31}	292
	d_{21}	129		c_{21}	203		c_{25}	263		b_{32}	293
	d_{22}	179		c_{22}	198		c_{31}	241		b_{33}	284
	d_{31}	148		d_{21}	197		c_{32}	227		c_{11}	288
	d_{32}	133	C_{2v}^{III}	a_{1}	238		c_{33}	228		c_{12}	279
	d_{33}	167		a_{2}	222		c_{34}	257		c_{13}	278
	d_{34}	147		a_{3}	221		c_{35}	264		c_{21}	280
	d_{35}	181		a_{4}	254		c_{41}	245		c_{22}	281
	d_{36}	183		a_{5}	261		c_{42}	233		c_{23}	289
	d_{41}	161		b_{1}	231		c_{43}	232		c_{31}	290
	d_{42}	153		b_{21}	242		c_{44}	234		c_{32}	282
	d_{43}	154		b_{22}	230		c_{45}	246		c_{33}	283
	d_{44}	160		b_{23}	229		c_{51}	248	C_{2v}^{V}	a_{1}	344
	d_{51}	186		b_{24}	258		c_{52}	235		a_{2}	309
	d_{52}	184		b_{25}	265		c_{53}	236		a_{3}	310
	d_{53}	136		b_{31}	251		c_{54}	237		a_{4}	326
	d_{54}	151		b_{32}	244		c_{55}	250		a_{5}	327
	d_{55}	168		b_{33}	243		d_{41}	252		b_{1}	325
	d_{56}	137		b_{34}	259		d_{42}	247		b_{21}	350
	d_{57}	169		b_{35}	260		d_{51}	253		b_{22}	323
C_{2v}^{II}	a_{1}	201		c_{11}	239		d_{52}	249		b_{23}	324
	a_{2}	195		c_{12}	223	C_{s}^{III}	a_{1}	287		b_{24}	340
	b_{1}	200		c_{13}	224		a_{2}	277		b_{25}	341
	b_{21}	204		c_{14}	255		a_{3}	276		b_{31}	353

Tabelul 3 (continuare)

Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din	
	[11]	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare
C_{2v}^{IV}	b_{32}	342	C_{2v}^{IV}	c_{55}	339	C_{4v}^{I}	b_1	397	C_{4v}^{I}	c_{43}	417
	b_{33}	343		d_{21}	331		b_{21}	396		c_{44}	406
	b_{34}	352		d_{22}	313		b_{22}	395		c_{45}	418
	b_{35}	351		d_{51}	320		b_{23}	411		c_{51}	408
	c_{11}	345		d_{52}	338		b_{24}	427		c_{52}	407
	c_{12}	310	C_4	a_1	364		b_{25}	431		c_{53}	420
	c_{13}	311		a_2	375		b_{31}	413		c_{54}	409
	c_{14}	328		a_3^*	447		b_{32}	412		c_{55}	421
	c_{15}	329		b_1	366		b_{33}	423		d_{41}	419
	c_{21}	346		b_{21}	365		b_{34}	433		d_{42}	424
	c_{22}	314		b_{22}	376		b_{35}	434		d_{51}	422
	c_{23}	315		b_{23}^*	449		c_{11}	399		d_{52}	425
	c_{24}	330		b_{31}	372		c_{12}	398	C_{4v}^{II}	a_1	455
	c_{25}	332		b_{32}	378		c_{13}	414		a_2	446
	c_{31}	333		b_{33}^*	458		c_{14}	428		b_1	450
	c_{32}	316		c_{11}	367		c_{15}	435		b_{21}	456
	c_{33}	317		$c_{12}=c_{13}$	377		c_{21}	401		b_{22}	448
	c_{34}	347		c_{21}	368		c_{22}	400		b_{31}	461
	c_{35}	334		c_{22}	369		c_{23}	415		b_{32}	457
	c_{41}	348		c_{23}	373		c_{24}	429		c_{11}	459
	c_{42}	318		c_{31}	370		c_{25}	436		c_{12}	451
	c_{43}	319		c_{32}	374		c_{31}	403		c_{21}	460
	c_{44}	335		c_{33}	371		c_{32}	402		c_{22}	453
	c_{45}	336	C_{4v}^{I}	a_1	394		c_{33}	416		d_{11}	452
	c_{51}	337		a_2	393		c_{34}	430		d_{12}	454
	c_{52}	321		a_3	410		c_{35}	437	C_3	b_1	466
	c_{53}	322		a_4	426		c_{41}	405	C_{3v}^{I}	a_1	473
	c_{54}	349		a_5	432		c_{42}	404		b_1	475

Tabelul 3 (continuare)

Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din		Tipul	Notaţia din	
	[11[	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare		[11]	această lucrare
C_{3v}^{I}	b_{21}	474	C_6	a_1	495	C_{6v}	b_1	514	C_{6v}	c_{12}	525
	b_{31}	477		b_1	497		b_{21}	513		c_{13}	515
	c_{11}	476		b_{21}	496		b_{22}	522		c_{21}	518
C_{3v}^{II}	a_1	484		b_{31}	499		b_{23}	512		c_{22}	517
	b_1	486		c_{11}	498		b_{31}	524		c_{23}	526
	b_{21}	485	C_{6v}	a_1	511		b_{32}	528		c_{31}	520
	b_{31}	488		a_2	521		b_{33}	523		c_{32}	527
	c_{11}	487		a_3	510		c_{11}	516		c_{33}	519

* Cele 3 tipuri de ornamente în relief bicolore : $_3C_4a$, $_3C_4b_2$, $_3C_4b_3$ se deduc geometric din ornamentele în relief $_3C_4$. Grupurile de simetrie corespunzătoare ornamentelor 4-dimensionale se deduc din tipul C_{4v}^{II}, cum rezultă din numărul de ordine.

b) În [13] se fac următoarele observaţii :

1°. Rotaţiile sau rototranslaţiile 4-dimensionale pot fi privite ca rotaţii sau rototranslaţii cu păstrarea culorii (dacă $a_{44} = 1$) sau cu schimbarea ei (dacă $a_{44} = -1$), într-un spaţiu tridimensional ;

2°. Produsul direct al grupului (E, F) cu un grup de simetrii din spaţiul 4-dimensional (în care elementul $a_{44} = 1$ în toate matricile rotaţiilor) poate fi privit ca un grup de simetrii ale unei varietăţi tridimensionale cenuşii (în care coexistă cele două culori).

Aplicîndu-le în cazul ornamentelor 4-dimensionale, rezultă :

— cele deduse prin aplicarea teoremei 3 a) corespund ornamentelor monocolore tridimensionale ;

— cele deduse prin aplicarea teoremei 3 b) corespund ornamentelor cenuşii tridimensionale ;

— cele deduse prin aplicarea celorlalte teoreme (3c), d), e), f) ; 4a), b)) corespund ornamentelor tridimensionale alb-negre (sau bicolore) ; dintre acestea cele deduse prin aplicarea teoremei 4 conduc la înjumătăţirea modulului vectorului de translaţie (t_1, t_2 sau atît t_1 cît şi t_2) pentru motivele m antiegale (adică obţinute printr-o translaţie, urmată de schimbarea culorii).

c) În [5] şi [6] se consideră că numărul ornamentelor bicolore tridimensionale este 530, incluzîndu-le pe cele monocolore şi pe cele cenuşii în rîndul celor bicolore : este o greşeală (două ornamente sînt considerate de cîte două ori) dar şi o interpretare improprie a termenului de bicolor. De fapt, nu sînt decît 368 de ornamente bicolore tridimensionale (cum am arătat în [10], pag. 196—200 şi le-am dedus în [11]). Acelaşi rezultat se obţine din cele de mai sus.

d). Corespondenţa între notaţiile din [11] şi această lucrare pentru cele 368 de ornamente bicolore este dată de tabelul 3 în care, pentru simplificarea scrierii, notaţiile din [11] de forma : ${}_iC_\alpha^\beta\, a$, $C_\alpha^\beta\, b_1$, ${}_iC_\alpha^\beta\, b_2$, ${}_iC_\alpha^\beta\, b_3$, $C_\alpha^\beta\, c_{ij}$, ${}_iC_\alpha^\beta\, d_j$ se transcriu a_i, b_1, b_{2i}, b_{3i}, c_{ij} sau d_{ij}, tipul C_α^β fiind scris odată, într-o coloană separată.

Primită la redacţie la 1 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. E. Alexander u. K. Hermann, *Zur Theorie der flüssigen Kristalle*, Z. f. Krist. **69**, 285—299 (1929); *Die 80 zweidimensionalen Raumgruppen*, Z.f. Krist **70**, 328—345 (1929).
2. S. Bhagavantam, T. Venkatarayudu, *Theory of groups and its applications to physical problems*. Andhra University, Waltair, 1951.
3. H. Heesch, *Über die vierdimensionalen Gruppen des dreidimensionalen Raumes*, Z. f. Krist., **73**, 325—345 (1930).
4. C. Hermann, *Zur systematischen Strukturtheorie. III Ketten-und Netzgruppen*. Z.f. Krist, **69**, 250—270 (1928).
5. N. N. Neronova, N. V. Belov, *Edinnaia shema kristallograficeskih grupp simmetrii klasiceskih i cernobelth.*, Kristallografia, **6**, *1*, 3—12 (1961).
6. A. Pabst, *The 179 two-sided, two-colored, band groups and their relations*. Z.f. Krist, **117**, 2/3, 132 (1962).
7. G. Polya, *Die Analogie der Kristallsymetrie in der Ebene*. Z. f. Krist, **60**, 278 (1924).
8. T. Roman, *Simmetrii 4-mernth bordiurnth ornamentov*. Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R., **128**, *6*, 1122—24 (1959).
9. T. Roman, *Simmetrii bordiurnth ornamentov b(n + 1)— mernom prostranstve*. Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., **147**, *5*, 1038—1041 (1962).
10. T. Roman, *Simetria. Prezentarea matematică a unor fenomene din natură şi artă*. Bibl. S.S.M.F., Editura tehnică, 1963.
11. T. Roman, *Les groupes de symétrie des ornements bicolores en relief*. Bull. math. de la Soc. math. R.P.R., **7** (53), *3—4* (1963).
12. A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*. Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1956.
13. A. V. Şubnikov, *Simmetria i antisimmetria konecinth figur*. Izd. Akad. Nauk S.S.S.R., Moskva, 1951.
14. L. Weber, *Die Symmetrie homogener ebener Punktsysteme*. Z. F. Krist., **70**, 309—327 (1929).

EXTINDEREA UNEI TEOREME DIN TEORIA SUPRAFEŢELOR

DE

N. N. TEODORESCU şi GH. N. RIZESCU

Se extinde pentru o varietate riemanniană de clasă 1 următoarea teoremă pentru o suprafaţă din E_3 : *Dacă o geodezică este linie de curbură, ea este o curbă plană.* Pentru demonstraţie se folosesc formulele Frenet date în [3].

Fiind dată o suprafaţă scufundată într-un spaţiu euclidian cu două dimensiuni se cunoaşte următoarea teoremă :

Dacă o geodezică este linie de curbură, ea este curbă plană.

Folosindu-ne de formulele lui Frenet date în [3], vom generaliza această teoremă pentru o varietate riemanniană de clasă 1.

★

Fie hipersuprafaţa V_n scufundată într-un E_{n+1} avînd ecuaţia vectorială :

$$\vec{r} = \vec{r}\,(x^1, x^2, \ldots, x^n) = X^1 \vec{e}_1 + X^2 \vec{e}_2 + \ldots + X^{n+1} \vec{e}_{n+1},$$

unde $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n + 1)$ sînt versorii axelor de coordonate.

Metrica acestei hipersuprafeţe este dată de :

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = a_{ij}\, \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^j,$$

unde

$$a_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^j}.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, P. 157 – 160, BUCUREŞTI, 1966

Normala într-un punct la varietate are forma :

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots\cdots & \vec{e}_{n+1} \\ \dfrac{\partial X^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial X^{n+1}}{\partial x^1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial X^1}{\partial x^n} & \dfrac{\partial X^2}{\partial x^n} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial X^{n+1}}{\partial x^n} \end{vmatrix}$$

sau $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$, unde $\vec{n}$ este un vector unitar.

Pentru a obţine ecuaţiile geodezicelor, scriind ecuaţiile lui Lagrange pentru funcţia $T = \dfrac{d\vec{r}}{ds} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{ds}$, găsim :

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} = 0\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

adică $\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \lambda \vec{n}.$

Ţinînd seama de prima formulă a lui Frenet :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{\nu},$$

unde $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ se obţine, [1], [4], [5], de-a lungul unei geodezice :

$$\vec{\nu} = \vec{n}. \tag{1}$$

Curbura unei curbe de pe varietate este dată, [1], [5], de :

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{b_{ij}\, dx^i\, dx^j}{a_{ij}\, dx^i\, dx^j,}\,, \tag{1'}$$

unde b_{ij} se numesc coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale şi avem : $b_{ij} = \vec{n} \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial x^i\, \partial x^j}$ iar θ este unghiul format de $\vec{n}$ cu $\vec{\nu}$.

Formula (1′) rezultă înmulţind scalar cu $\vec{n}$ prima formulă a lui Frenet.

Dacă curba este plană, ceea ce este totdeauna posibil ducînd prin $\vec{n}$ un plan oarecare, se obţine curbura normală :

$$\frac{1}{R} = \frac{b_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j}{a_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j}.$$

Locurile punctelor pentru care curbura normală este maximă sau minimă se numesc linii de curbură şi sînt date, [1], [5], de sistemul diferenţial :

$$(a_{ij}\,b_{kl} - a_{kl}\,b_{ij})\,\mathrm{d}x^j\,\mathrm{d}x^l = 0$$

Se demonstrează, [1], [2], [5], că, de-a lungul unei linii de curbură, avem formula lui Rodrigues :

$$\mathrm{d}\vec{r} + R\,\mathrm{d}\vec{n} = 0 \tag{2}$$

Fie Γ o geodezică a varietăţii V_n scufundată într-un E_{n+1}. Avem deci conform cu (1) :

$$\vec{\nu} = \vec{n}.$$

Derivînd în raport cu arcul curbei, şi ţinînd seama de ultima formulă a lui Frenet [3] :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\nu}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}\vec{\tau} - \frac{1}{T_\gamma}\vec{\beta}_\gamma$$

obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} + R\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{T_\gamma}\vec{\beta}_\gamma.$$

Pe de altă parte dacă Γ este şi linie de curbură, avem, conform cu (2),

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} + R\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Rezultă deci :

$$\frac{1}{T_\gamma}\vec{\beta}_\gamma = 0.$$

Cum însă vectorii $\vec{\beta}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$ sînt liniar independenţi avem :

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = \ldots = \frac{1}{T_{n-2}} = 0$$

deci Γ este curbă plană deoarece are toate torsiunile nule.

Primită la redacţie la 20 iulie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Dobrescu, *Curs de geometrie diferenţială*. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1961.
2. J. C. H. Gerretsen, *Lectures on Tensor Calculus and Differential Geometry*. Groningen, 1962.
3. Gh. N. Rizescu şi N. N. Teodorescu, *Asupra generalizării formulelor lui Frenet*. St. cerc. mat., **17**, *8* (1965).
4. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, Editura Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.
5. C. E. Weatherburn, *Riemannian Geometry*, 1935.

MIŞCAREA UNUI FLUID ELECTROCONDUCTOR SITUAT ÎN INTERIORUL A DOI CILINDRI COAXIALI, SUB INFLUENŢA UNUI CÎMP MAGNETIC TRANSVERSAL

DE

N. MARCOV

Se consideră mişcarea unui fluid vîscos, omogen, incompresibil, electroconductor, situat în interiorul a doi cilindri infiniţi, coaxiali, sub influenţa unui cîmp magnetic transversal. Cilindrii se rotesc cu vitezele unghiulare ω_1 şi ω_2, iar mişcarea este presupusă plană. Funcţia de curent a cîmpului vitezelor şi funcţia de forţă a cîmpului magnetic satisfac un sistem neliniar de ecuaţii diferenţiale. Soluţia se dezvoltă după puterile crescătoare ale numărului Reynolds magnetic, şi sistemul se reduce la sisteme de tip parabolic cvasiliniare. În cazul mişcării permanente, aceste sisteme se reduc la sisteme de ecuaţii diferenţiale care pot fi rezolvate. Ca aplicaţie, pentru prima aproximaţie, se regăsesc expresiile obţinute de P. Smith în cazul unui singur cilindru.

Mişcarea nepermanentă a unui fluid vîscos, omogen, incompresibil, situat între doi cilindri coaxiali infiniţi, mişcare care are loc într-un plan perpendicular pe axa cilindrilor, a fost studiată de către I. Sneddon [2] în 1951. În 1959, C. D. Ghildyal [3] obţine mişcarea nepermanentă a fluidului pentru cazul în care la momentul iniţial cilindrul interior începe să se rotească brusc cu o viteză unghiulară constantă Ω_1, distribuţia vitezelor la acest moment fiind cea din mişcarea staţionară corespunzătoare rotaţiei cilindrului exterior cu o viteză unghiulară constantă Ω.

Problema considerată de C. D. Ghildyal este reluată de către Devi Singh şi Ali Tahir Rizvi [4] pentru cazul unui fluid electroconductor. Astfel a fost studiată mişcarea fluidului într-un cîmp magnetic radial în ipoteza că atît cîmpul electric cît şi perturbaţiile cîmpului magnetic sînt neglijabile. Pentru cîmpul vitezelor componenta v_r este nulă, iar componenta v_θ depinde de variabila spaţială r şi de timpul t.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 1, P. 161–179, BUCUREŞTI, 1966

Una din problemele considerate de V. P. Sidlovski [5] în 1963 a fost mişcarea unui fluid electroconductor situat în exteriorul unui cilindru infinit, în prezenţa unui cîmp magnetic, simetric în raport cu axa cilindrului, presupunînd cîmpul electric absent, iar cîmpul magnetic staţionar. A fost obţinut cîmpul vitezelor pentru cazul în care la momentul iniţial cilindrul începe să se rotească brusc cu o viteză unghiulară constantă, fluidul fiind în repaus la acel moment.

Spre deosebire de problemele amintite, P. Smith [6] studiază mişcarea permanentă a unui fluid electroconductor, dar sub influenţa unui cîmp magnetic transversal. Fluidul este situat în interiorul unui cilindru construit dintr-un material izolator, iar permeabilitatea magnetică a fluidului este presupusă a fi egală cu cea a mediului exterior. Folosindu-se dezvoltarea soluţiei după puterile numărului Reynolds magnetic, se arată că în aproximaţia a doua, componenta v_r este nenulă, iar componenta v_θ depinde şi de unghiul polar θ.

1. *Punerea problemei.* În cele ce urmează considerăm mişcarea unui fluid vîscos, incompresibil, electroconductor, situat în interiorul a doi cilindri coaxiali infiniţi, sub influenţa unui cîmp magnetic, conductibilitatea mediului exterior fluidului fiind nulă. Presupunem că pînă la momentul iniţial cilindrii nu se rotesc şi că fluidul se află în repaus sub influenţa unui cîmp electric nul şi a unui cîmp magnetic care la infinit este uniform, de intensitate H şi perpendicular pe axa cilindrilor. La momentul iniţial cilindrii de raze a_i încep să se rotească în jurul axei lor cu vitezele unghiulare $\omega_i = \omega_i(t)$, $i = 1, 2$. Pentru a cunoaşte aproximativ cîmpul vitezelor şi cîmpul electromagnetic, vom dezvolta soluţia după puterile crescătoare ale numărului Reynolds magnetic, şi vom determina cîmpul electromagnetic în prima aproximaţie. Considerînd cazul mişcării permanente, vom determina şi cîmpul vitezelor pentru această aproximaţie. În această primă aproximaţie componenta v_r a vitezei este nenulă.

Pentru a scrie ecuaţiile şi condiţiile la limită, alegem un sistem cartezian drept ca sistem de referinţă, axa OZ avînd direcţia axei cilindrilor, iar axa OX direcţia cîmpului magnetic de la infinit. Trecem la variabilele adimensionale $x = L^{-1}X$, $y = L^{-1}Y$, $z = L^{-1}Z$, în care L este o lungime caracteristică. Considerăm $a_1 > a_2$ şi notăm în planul xOy :

$$D_1 = \{(x, y) \mid r > \alpha_1\},\ D = \{(x, y) \mid \alpha_2 < r < \alpha_1\},\ D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant r < \alpha_2\},$$

$$C_1 = \{(x,\ y) \mid r = \alpha_1\},\ C_2 = \{(x,\ y) \mid r = \alpha_2\},$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha_i = a_i\, L^{-1}$, $i = 1, 2$. Desigur, domeniile D_1, D, D_2 pot preciza domeniul fluid şi cel exterior fluidului, iar C_1 şi C_2 frontierele acestor domenii.

2. *Ecuaţiile fundamentale.* Dacă neglijăm curenţii de deplasare în tot spaţiul şi presupunem că fluidul este omogen şi de densitate electrică

nulă, atunci ecuaţiile fundamentale pentru variabilele adimensionale sînt :

— Pentru domeniul D ocupat de fluid :

$$(1) \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\mathrm{grad})\,\vec{v} = -\,\mathrm{grad}\,P + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\vec{v} + R_\rho\,(\vec{h}\,\mathrm{grad})\,\vec{h}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

$$(2) \qquad \mathrm{rot}\,\vec{h} = R_m\,(\vec{e} + \vec{v}\times\vec{h}), \quad \mathrm{div}\,\vec{h} = 0$$

$$(3) \qquad \mathrm{rot}\,\vec{e} = -\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\vec{e} = 0, \quad P = p + \frac{1}{2}\,R_\rho\,h^2, \quad \text{unde}$$

$$(4) \qquad \mathrm{Re} = \frac{LV}{\nu} \qquad R_m = 4\pi\sigma\,\mu L V \qquad R_\rho = \frac{\mu H^2}{\rho V^2}$$

mărimile reale fiind

$$(5) \qquad \vec{V} = V\,\vec{v},\ \vec{H} = H\,\vec{h}\ ,\ \vec{E} = \mu V\cdot H\,\vec{e}\ ,\ p_{\mathrm{real}} = \rho V^2 p,\ t_{\mathrm{real}} = LV^{-1}\,t;$$

— Pentru domeniul $D_1 \cup D_2$ exterior fluidului

$$(6) \qquad \mathrm{rot}\,\vec{h} = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{h} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\vec{e} = -\frac{\partial\vec{h}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\vec{e} = 0,$$

mărimile reale fiind

$$(7) \qquad \vec{H} = H\,\vec{h},\ \vec{E}_i = \mu_i\,V\cdot H\,\vec{e} \ \text{ în } \ D_i,\ i = 1,\ 2,$$

unde μ_i este permeabilitatea magnetică a mediului din D_i, $i = 1,\ 2$.

Condiţiile la limită. Deoarece am presupus fluidul vîscos, se impune condiţia de aderenţă a fluidului la pereţii cilindrilor. Pentru cîmpul electric şi magnetic se obţin condiţii la limită din conservarea fluxului inducţiei electrice respectiv magnetice. Presupunem că cilindrii sînt construiţi dintr-un material izolator şi că nu au pe suprafaţa lor sarcini electrice sau magnetice nenule. Aşa cum se arată în [7], aceasta implică continuitatea componentei tangenţiale a cîmpului magnetic şi electric la trecerea frontierei domeniului fluid. Scriind aceste condiţii obţinem :

$$(8) \qquad \vec{v}\,|_{C_k} = \frac{1}{V}\,\vec{V}_{k\ \mathrm{transp.}}\ \vec{V}_k = a_k\,\omega_k\,(t)\ \vec{e}_\theta\ ,\ k = 1,\ 2,$$

$$(9) \qquad [\varepsilon_\alpha\, e_n]\,|_{C_k} = [\mu h_n]\,|_{C_k} = [\mu e_s]\,|_{C_k} = [h_s]\,|_{C_k} = 0, \quad k = 1,\ 2.$$

Condiţia la infinit pentru cîmpul magnetic este :

$$(10) \qquad \vec{h}\,|_\infty = \vec{i}.$$

Condiţiile iniţiale. Condiţiile iniţiale pentru $t = 0$ rezultă din ipoteza $\vec{v} = 0$, $\vec{e} = 0$ pentru $t \leqslant 0$. Înlocuind aceste mărimi în ecuaţiile fundamentale şi presupunînd $p =$ constant pentru $t \leqslant 0$ se obţin ecuaţiile $\operatorname{rot} \vec{h} = 0$, $\operatorname{div} \vec{h} = 0$, $\dfrac{\partial \vec{h}}{\partial t} = 0$. Ţinînd seama de (9) şi (10), obţinem pentru cîmpul magnetic, pentru $t \leqslant 0$, expresia

$$\vec{h} = \vec{h}_0 = \operatorname{rot} \left[\chi_0 (x, y)\, \vec{k}\right], \tag{11}$$

unde χ_0 este dat de ecuaţia $\Delta\chi_0 = 0$ în tot planul xOy şi condiţiile $[\mu\chi_0]|_C = 0$, $\left[\dfrac{\partial\chi_0}{\partial x}\right]\Big|_C = 0$, $\dfrac{\partial\chi_0}{\partial y}\Big|_\infty = 1$ în care $\vec{k}$ este versorul axei Oz, $\dfrac{\partial\chi_0}{\partial n}$ derivata pe direcţia normalei la conturul $C = C_1 \cup C_2$. În cazul coroanei circulare cu razele α_1, α_2 $(\alpha_1 > \alpha_2 > 0)$, χ_0 are expresia

$$\chi_0(r, \theta) = \begin{cases} \left(r - \dfrac{C}{r}\right) \sin\theta & \text{în } D_1 \\ \left(Ar - \dfrac{B}{r}\right) \sin\theta & \text{în } D \\ Dr \sin\theta & \text{în } D_2 \end{cases} \tag{12}$$

în care constantele A, B, C şi D sînt date de sistemul liniar

$$\mu_1\left(1 - \frac{C}{\alpha_1^2}\right) = \mu\left(A - \frac{B}{\alpha_1^2}\right), \qquad \left(1 + \frac{C}{\alpha_1^2}\right) = \left(A + \frac{B}{\alpha_1^2}\right),$$

$$\mu\left(A - \frac{B}{\alpha_2^2}\right) = \mu_2 D, \qquad \left(A + \frac{B}{\alpha_2^2}\right) = D.$$

Condiţiile iniţiale se scriu :

$$\vec{v}|_{t=0} = 0, \quad \vec{h}|_{t=0} = \vec{h}_0, \quad p|_{t=0} = \text{const.}, \tag{13}$$

unde $\vec{h}_0$ este dat de (11).

Dacă permeabilitatea magnetică a fluidului şi mediului exterior este aceeaşi $(\mu_1 = \mu = \mu_2)$, atunci $\vec{h}_0 = \vec{i}$.

Punînd condiţia continuităţii datelor la limită (8) şi a condiţiilor iniţiale pentru viteză, şi scriind ecuaţia (1) la momentul $t = 0$, obţinem pentru funcţiile $\omega_k(t)$ condiţiile :

$$\omega_k(0) = 0, \quad \omega_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2 \tag{14}$$

3. *Determinarea cîmpului electric presupunînd cîmpul magnetic cunoscut.* Căutăm soluţia sistemului de ecuaţii (1)—(3), (6) cu condiţiile (8)—(10) şi (13), pentru $t > 0$, sub forma :

$$(15)\quad \begin{cases} v_x = v_x\,(x, y, t),\ v_y = v_y\,(x, y, t),\ h_x = h_x\,(x, y, t),\ h_y = h_y\,(x, y, t), \\ v_z = h_z = e_x = e_y = 0,\quad e_z = e\,(x, y, t),\ p = p\,(x, y, t). \end{cases}$$

Pentru a satisface ecuaţiile $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ şi $\operatorname{div} \vec{h} = 0$, punem

$$(16)\qquad \vec{v} = \operatorname{rot}\,[\Psi\,(x, y, t)\,\vec{k}]\ ,\ \vec{h} = \operatorname{rot}\,[\chi\,(x, y, t)\,\vec{k}].$$

Scriem ecuaţia $\operatorname{rot} \vec{e} = -\dfrac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ pe componente, ţinem seama că funcţia χ este determinată în afara unei constante aditive de timp şi obţinem prin integrare :

$$(17)\qquad \vec{e} = -\frac{\partial \chi}{\partial t}\,\vec{k}.$$

Pentru a elimina presiunea p introducem rotorul vitezei şi al cîmpului magnetic $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v} = \Omega\,(x, y, t)\,\vec{k},\ \vec{\xi} = \operatorname{rot} \vec{h} = \xi\,(x, y, t)\,\vec{k}$. Aplicînd operatorul rot ecuaţiei de mişcare (1), obţinem :

$$(18)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\vec{v}\ \operatorname{grad})\ \Omega = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\Omega = R_p\,(\vec{h}\ \operatorname{grad})\ \xi.$$

Ţinînd seama de (15) şi (16), rezultă relaţiile

$$(\vec{v}\ \operatorname{grad})\ \Omega = \frac{\partial\,(\Omega, \Psi)}{\partial\,(x, y)},\quad (\vec{h}\ \operatorname{grad})\,\xi = \frac{\partial\,(\xi, \chi)}{\partial\,(x, y)}$$

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot}[\operatorname{rot}\,(\Psi \vec{k})] = -\,\Delta\Psi\,\vec{k},\ \vec{\xi} = -\Delta\chi\,\vec{k},\ \vec{v} \times \vec{h} = -\,\frac{\partial\,(\chi, \Psi)}{\partial\,(x, y)}\,\vec{k}$$

unde $\dfrac{\partial\,(a, b)}{\partial\,(x, y)}$ este determinantul funcţional al funcţiilor a şi b, iar $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot$ Ecuaţiile (2), (6) şi (18) se scriu :

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\Delta\chi = R_m\left[\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial\,(\chi, \Psi)}{\partial\,(x, y)}\right] \text{ în } D,\ \Delta\chi = 0 \text{ în } D_1 \cup D_2, \\ &\Delta\,\Omega = \mathrm{Re}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial\,(\Omega, \Psi)}{\partial\,(x, y)} + R_p\,\frac{\partial\,(\Delta\chi, \chi)}{\partial\,(x, y)}\right],\ \Omega = -\,\Delta\Psi \text{ în } D. \end{aligned}$$

Condiţiile la limită şi iniţiale (8)–(10), (13) impun condiţiile :

$$(20)\quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_C = \dfrac{1}{V} u_{\text{trp.}}, \quad -\left.\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_C = \dfrac{1}{V} v_{\text{trp.}}, \quad \left.\dfrac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_{t=0} = -\left.\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_{t=0} = 0 \\ [\mu\chi]|_C = 0, \quad \left.\left[\dfrac{\partial \chi}{\partial x}\right]\right|_C = 0, \quad \left.\dfrac{\partial \chi}{\partial y}\right|_\infty = \vec{i}, \quad \left.\dfrac{\partial \chi}{\partial x}\right|_\infty = 0. \end{cases}$$

Soluţia aproximativă. Considerăm pentru mărimea caracteristică L valoarea $L = a_1$, deci $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \dfrac{a_2}{a_1} = \alpha$, iar pentru V o valoare astfel încît $R_m = 4\pi\sigma\mu L V < 1$. Aşadar facem ipoteza că $R_m < 1$ şi căutăm soluţia sub forma :

$$(21)\quad \begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 + R_m \vec{v}_1 + \ldots, \ \vec{h} = \vec{h}_0^* + R_m \vec{h}_1 + \ldots, \ P = P_0 + R_m P_1 + \ldots \\ \Psi = \Psi_0 = R_m \Psi_1 + \ldots, \ \chi = \chi_0^* + R_m \chi_1 + \ldots, \ \Omega = \Omega_0 + R_m \Omega_1 + \ldots \end{cases}$$

Introducînd în ecuaţiile (1) şi (19) obţinem :

Pentru aproximaţia de ordinul zero

$$(22)\quad \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \operatorname{grad}) \vec{v}_0 = -\operatorname{grad} P_0 + R_p (\vec{h}_0 \operatorname{grad}) \vec{h}_0, \ \operatorname{div} \vec{v}_0 = 0$$

$$(23)\quad \begin{cases} \Delta \chi_0^* = 0 & \text{în } D_1 \cup D_2 \\ \Delta \Omega_0 = \operatorname{Re}\left[\dfrac{\partial \Omega_0}{\partial t} + \dfrac{\partial(\Omega_0, \Psi_0)}{\partial(x, y)}\right], \quad \Omega_0 = -\Delta \Psi_0 & \text{în } D; \end{cases}$$

Pentru aproximaţia de ordinul $k \geqslant 1$

$$(24)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial t} + (\vec{v}_k \operatorname{grad}) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \operatorname{grad}) \vec{v}_k = -\operatorname{grad} P_k + \\ &\qquad + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \vec{v}_k + \vec{N}_k, \quad \operatorname{div} \vec{v}_k = 0 \end{aligned}$$

$$(25)\quad \begin{cases} \Delta \chi_k = F_k(x, y, t) \ \text{în} \ D, \quad \Delta \chi_k = 0, \qquad \text{în } D_1 \cup D_2 \\ \Delta \Omega_k = \operatorname{Re}\left[\dfrac{\partial \Omega_k}{\partial t} + \dfrac{\partial(\Omega_k, \Psi_0)}{\partial(x, y)} + \dfrac{\partial(\Omega_0, \Psi_k)}{\partial(x, y)} + G_k(x, y, t)\right], \\ \Omega_k = -\Delta \Psi_k, \end{cases}$$

unde pentru $k \geqslant 2$

$$(26)\quad \begin{cases} \vec{N}_k = -\sum\limits_{j=1}^{k-1} (\vec{v}_j \operatorname{grad})\, \vec{v}_{k-j} + R_p \sum\limits_{j=0}^{k} (\vec{h}_j \operatorname{grad})\, \vec{h}_{k-j} \\ F_k = \dfrac{\partial \chi_{k-1}}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{k-1} \dfrac{\partial (\chi_j,\, \Psi_{k-1-j})}{\partial (x,\, y)}, \quad G_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} \dfrac{\partial (\Omega_j,\, \Psi_{k-j})}{\partial (x,\, y)} + \\ \qquad + R_p \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\partial (\Delta \chi_j,\, \chi_{k-j})}{\partial (x,\, y)}, \end{cases}$$

iar pentru $k = 1$ aceleaşi expresii (26), dar fără prima sumă. Aşadar funcţiile F_k, G_k şi $\vec{N}_{k-1}$ se exprimă cu ajutorul aproximaţiilor de ordin mai mic decît k. Condiţiile la limită şi iniţiale (8) şi (20) se scriu :

$$(27)\quad \begin{cases} \vec{v}_0 \Big|_C = \dfrac{1}{V} \vec{V}_{\text{trp.}}\ \vec{v}_k |_C = 0 \text{ sau } \Psi_k |_C = \text{const. şi } \dfrac{\partial \Psi_k}{\partial x}\Big|_C = 0 \text{ pentru } k \geqslant 1, \\ [\mu \chi_0^*]|_C = 0,\ \left[\dfrac{\partial \chi_0^*}{\partial x}\right]\Big|_C = 0,\ \dfrac{\partial \chi_0^*}{\partial y}\Big|_\infty = \vec{i},\ -\dfrac{\partial \chi_0^*}{\partial x}\Big|_\infty = 0 \\ [\mu \chi_k]|_C = 0,\ \left[\dfrac{\partial \chi_k}{\partial x}\right]\Big|_C = 0,\ \dfrac{\partial \chi_k}{\partial y}\Big|_\infty = 0,\ -\dfrac{\partial \chi_k}{\partial x}\Big|_\infty = 0 \text{ pentru } k \geqslant 1, \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \vec{v}_k \Big|_{t=0} = 0,\ \dfrac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y}\Big|_{t=0} = -\dfrac{\partial \Psi_k}{\partial x}\Big|_{t=0} = 0, & \text{pentru } k \geqslant 0, \\ \chi_0^* |_{t=0} = \chi_0\,,\ \chi_k |_{t=0} = 0, & \text{pentru } k \geqslant 1. \end{cases}$$

4. *Aproximaţia de ordinul zero*. Ecuaţia (23) şi condiţiile (27) pentru χ_0^* sînt identice cu ecuaţia (11) pentru χ_0. Deci

$$(29)\qquad \vec{h}_0^* = \vec{h}_0 = \operatorname{rot}\, [\chi_0 (x,\, y)\, \vec{k}],\quad \chi_0^* = \chi_0,$$

unde χ_0 este dat de (12) pentru $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha$.

Cîmpul electric are valoarea

$$(30)\qquad \vec{e}_0 = -\frac{\partial \chi_0}{\partial t} \vec{k} = 0.$$

Pentru a rezolva ecuaţia pe care o verifică viteza $\vec{v}_0$, trecem la coordonatele polare şi obţinem :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r v_{0r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} v_{0\theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_{0r}\frac{\partial}{\partial r}+v_{0\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v_{0r}-\frac{1}{r}v_{0\theta}^{2}=-\frac{\partial}{\partial r}p_{0}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\Delta v_{0r}-\frac{2}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}v_{0\theta}-\frac{1}{r^{2}}v_{0r}\right]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_{0r}\frac{\partial}{\partial r}+v_{0\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)v_{0\theta}+\frac{1}{r}v_{0r}v_{0\theta}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}p_{0}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\Delta v_{0\theta}+\frac{2}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}v_{0r}-\frac{1}{r^{2}}v_{0\theta}\right]$$

deoarece rot $\vec{h}_0=0$, şi unde $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\cdot$ Acest sistem este caracteristic mişcării nemagnetice şi admite o soluţie de forma $v_{0r}=0$, $v_{0\theta}=v_{0\theta}(r,\ t)$, $p_0=p_0(r,\ t)$. Înlocuind obţinem:

$$-\frac{1}{r}v_{0\theta}^{2}=-\frac{\partial}{\partial r}p_{0} \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_{0\theta}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^{2}}\right)v_{0\theta}. \tag{32}$$

Presiunea p_0 se determină din (31), iar $v_{0\theta}$ din (32) cu condiţiile la limită şi iniţiale

$$v_{0\theta}\big|_{t=0}=0,\quad v_{0\theta}\big|_{r=\alpha_l}=\frac{a_l}{V}\,\omega_l(t),\quad l=1,\ 2 \tag{33}$$

presupunînd că funcţiile $\omega_l(t)$ au derivată integrabilă pe $[0,\ T)$ şi satisfac condiţiilor (14). Ecuaţia (32) cu condiţiile (33) pentru $\omega_1(t)=0$ sau $\omega_1(t)=$ $=$ const. şi $\omega_2=0$ a fost rezolvată în [2]. Obţinem soluţia pe aceeaşi cale.

În [2] se arată în particular că şirul de funcţii $T_1(r,\ \alpha,\ \xi_i)$ $0<\alpha\leqslant r\leqslant 1$, dat de

$$T_1(r,\ \alpha,\ \xi_i)=\frac{\pi}{2}\,[J_1(r\xi_i)Y_1(\alpha\xi_i)-J_1(\alpha\xi_i)Y_1(r\xi_i)], \tag{34}$$

unde $J_1(z)$ şi $Y_1(z)$ sînt funcţiile Bessel de prima şi a doua speţă, iar ξ_i sînt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei transcendente

$$T_1(r,\ \alpha,\ \xi_i)=0 \tag{35}$$

este ortogonal faţă de produsul scalar

$$<f,g>=\int_{\alpha}^{1}rf(r)\,g(r)\,\mathrm{d}r, \tag{36}$$

şi

$$\|T_1(r,\ \alpha,\ \xi_i)\|^2 = \frac{1}{2\xi_i^2}\left[\frac{J_1^2(\alpha\xi_i)}{J_1^2(\xi_i)} - 1\right]. \tag{37}$$

Dacă funcţia $f = f(r)$ este de clasă C^2 pe $[\alpha, 1]$, atunci

$$\int_\alpha^1 r\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}\right) f(r)\, T_1(r, \alpha, \xi_i)\,\mathrm{d}r = f(\alpha) - f(1)\frac{J_1(\alpha\xi_i)}{J_1(\xi_i)} - \xi_i^2 f_i. \tag{38}$$

Dacă $f = f(r)$ este continuă şi satisface condiţiilor lui Dirichlet pe $[\alpha, 1]$, atunci

$$f(r) = \sum \frac{2\xi_i^2 J_1^2(\xi_i)}{J_1^2(\alpha\xi_i) - J_1^2(\xi_i)} \cdot f_i \cdot T_1(r, \alpha, \xi_i), \qquad (\forall)\ x \in (\alpha, 1) \tag{39}$$

sumarea făcîndu-se după ξ_i, şi unde

$$f_i = \int_\alpha^1 r f(r) T_1(r,\ \alpha,\ \xi_i)\,\mathrm{d}r. \tag{40}$$

Înmulţind ecuaţia (32) şi $v_{0\theta}|_{t=0} = 0$ cu $rT_1(r, \alpha, \xi_i)$ şi integrînd pe $[\alpha, 1]$, obţinem din (38) ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_{0\theta i} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\frac{a_2}{v}\,\omega_2(t) - \frac{a_1}{v}\,\omega_1(t)\frac{J_1(\alpha\xi_i)}{J_1(\xi_i)} - \xi_i^2 v_{0\theta i}\right\} \tag{41}$$

cu condiţia iniţială $v_{0\theta i}|_{t=0} = 0$. Ecuaţia (41) are soluţia

$$\begin{aligned} v_{0\theta i} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\int_0^t \left[\frac{a_2}{V}\,\omega_2(\tau) - \frac{a_1}{V}\,\omega_1(\tau)\frac{J_1(\alpha\xi_i)}{J_1(\xi_i)}\right] \mathrm{e}^{-\frac{\xi_i^2}{\mathrm{Re}}(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{1}{\xi_i^2}\left[\frac{a_2}{V}\,\omega_2(t) - \frac{a_1}{V}\,\omega_1(t)\frac{J_1(\alpha\xi_i)}{J_1(\xi_i)}\right] - \\ &\quad - \frac{1}{\xi_i^2}\int_0^t \left[\frac{a_2}{V}\,\omega_2(\tau) - \frac{a_1}{V}\,\omega_1(\tau)\frac{J_1(\alpha\xi_i)}{J_1(\xi_i)}\right] \mathrm{e}^{-\frac{\xi_i^2}{\mathrm{Re}}(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{42}$$

Funcţia $v_{0\theta}$ se obţine prin inversare utilizînd relaţia (39)

$$\begin{aligned} v_{0\theta}(r, t) &= \frac{a_2}{V}\,\omega_2(t)\frac{\alpha}{r}\frac{1 - r^2}{1 - \alpha^2} + \frac{a_1}{V}\,\omega_1(t)\frac{1}{r}\frac{r^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} - \\ &- 2\sum \frac{J_1^2(\xi_i)}{J_1^2(\alpha\xi_i) - J_1^2(\xi_i)} \cdot \int_0^t \left[\frac{a_2}{V}\,\omega_2(\tau) - \frac{a_1}{V}\,\omega_1(\tau)\frac{J_1(\alpha\xi_i)}{J_1(\xi_i)}\right] \mathrm{e}^{-\frac{\xi_i^2}{\mathrm{Re}}(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \cdot T_1(r, \alpha, \xi_i). \end{aligned} \tag{43}$$

Aşadar în această aproximaţie nu apare influenţa cîmpului magnetic asupra mişcării fluidului, acesta deplasîndu-se ca un fluid neconductor.

Date fiind condiţiile (14), se verifică uşor că

$$(44) \qquad v_{0\theta}|_{t=0} = 0 \quad \text{şi} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} v_{0\theta}\right)\Big|_{t=0} = 0.$$

Ţinînd seama de (16) se obţine

$$(45) \qquad \Psi_0 = -\int v_{0\theta}\,\mathrm{d}r \qquad \Omega_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_{0\theta}).$$

5. *Aproximaţia de ordinul* $k \geqslant 1$. În această aproximaţie funcţiile χ_k verifică ecuaţia (25) şi condiţiile (27). Căutăm soluţia acestei ecuaţii sub forma

$$(46) \qquad \chi_k(P) = U_k^{(1)}(P) + U_k^{(2)}(P) + U_k(P)$$

în care

$$(47) \left\{ \begin{aligned} & U_k(P) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D F_k(Q) \ln\frac{1}{r_{PQ}}\,\mathrm{d}\sigma_Q \\ & U_k^{(l)}(P) = \oint_{C_l} \nu_k^{(l)}(Q)\frac{\partial}{\partial n_{iQ}}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right)\mathrm{d}s_Q \qquad \text{pentru } l = 1, 2 \end{aligned} \right.$$

şi unde $\dfrac{\partial}{\partial n_{iQ}}$ reprezintă operatorul derivatei pe direcţia normalei interioare la cercul C_1 sau C_2. În reprezentarea soluţiei nu am considerat potenţialii de simplu strat deoarece au derivată normală discontinuă şi nu satisfac condiţiei (27). Funcţia $U_k(P)$ este cunoscută deoarece F_k este dată de aproximatele de ordin mai mic decît k. Funcţiile $\nu_k^{(l)}(Q)$, $l = 1, 2$ le determinăm din condiţia $[\mu\chi_k]|_C = 0$. Punînd această condiţie rezultă

$$\mu_1[U_k^{(1)}(M_1) - \pi\nu_k^{(1)}(M_1) + U_k^{(2)}(M_1) + U_k(M_1)] =$$

$$= \mu[U_k^{(1)}(M) + \pi\nu_k^{(1)}(M_1) + U_k^{(2)}(M_1) + U_k(M_1)] \qquad \text{pentru } M_1 \in C_1$$

şi

$$\mu[U_k^{(1)}(M_2) + U_k^{(2)}(M_2) - \pi\nu_k^{(2)}(M_2) + U_k(M_2)] =$$

$$= \mu_2[U_k^{(1)}(M_2) + U_k^{(2)}(M_2) + \pi\nu_k^{(2)}(M_2)\,U_k(M_2)] \qquad \text{pentru } M_2 \in C_2.$$

Dacă notăm

$$(48) \qquad \lambda_1 = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 + \mu} \qquad \lambda_2 = \frac{\mu - \mu_2}{\mu + \mu_2},$$

atunci relaţiile de mai sus se scriu

$$\nu_k^{(1)}(M_1) = \frac{\lambda_1}{\pi}\left[\sum_{l=1}^{2}\oint_{C_l}\nu_k^{(l)}(Q)\frac{\partial}{\partial n_{iQ}}\left(\ln\frac{1}{r_{M_1Q}}\right)\mathrm{d}s_Q + U_k(M_1)\right], \qquad M_1 \in C_1$$

$$\nu_k^{(2)}(M_2) = \frac{\lambda_2}{\pi}\left[\sum_{l=1}^{2}\oint_{C_l}\nu_k^{(l)}(Q)\frac{\partial}{\partial n_{iQ}}\left(\ln\frac{1}{r_{M_2Q}}\right)\mathrm{d}s_Q + U_k(M_2)\right], \qquad M_2 \in C_2$$

C_1 şi C_2 fiind cercuri, se obţine

$$\oint_{C_l} \nu_k^{(l)}(Q)\frac{\partial}{\partial n_{iQ}}\left(\ln\frac{1}{r_{M_lQ}}\right)\mathrm{d}s_Q = \text{ constant } = \mathrm{d}_k^{(l)},\ M_l \in C_l,\ l = 1, 2$$

deci

$$(49)\begin{cases} \nu_k^{(l)}(M_1) = \dfrac{\lambda_1}{\pi}\left[\mathrm{d}_k^{(1)} + \displaystyle\oint_{C_2} \nu_k^{(2)}(Q)\frac{\vartheta}{\partial n_{iQ}}\left(\ln\frac{1}{r_{M_1Q}}\right)\mathrm{d}s_Q + U_k(M_1)\right],\ M_1 \in C_1, \\ \nu_k^{(2)}(M_2) = \dfrac{\lambda_2}{\pi}\left[\mathrm{d}_k^{(2)} + \displaystyle\oint_{C_1} \nu_k^{(1)}(Q)\frac{\partial}{\partial n_{iQ}}\left(\ln\frac{1}{r_{M_2Q}}\right)\mathrm{d}s_Q + U_k(M_2)\right],\ M_2 \in C_2. \end{cases}$$

Să presupunem deocamdată că funcţia F_k se scrie

$$(50)\qquad F_k(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{k} f_{kj}(r, t) \quad \cos[(2j-1)\theta - f_j(r, t)] \text{ pentru } k \geqslant 1.$$

Înlocuind în (47) se obţine

$$U_k(r, \theta, t) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}\int_{\alpha}^{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{2j-1} f_{kj}(\rho, t)\cos[(2j-1)\theta - f_j(\rho, t)]\rho\mathrm{d}\rho -$$

$$(51)\qquad -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2j-1}\int_{r}^{1}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{2j-1} f_{kj}\cos[(2j-1)\theta - f_j]\rho\mathrm{d}\rho.$$

Deci funcţiile $U_k(M_1)$, $U_k(M_2)$ se scriu sub forma

$$(52)\qquad U_k(M_l) = \sum_{j=1}^{k} u_{kj}^{(l)}(t)\cos[(2j-1)\theta - u_j^{(l)}(t)],\quad l = 1,\ 2$$

şi astfel căutăm funcţiile $\nu_k^{(l)}(\theta, t)$, $l = 1, 2$ sub forma

$$(53)\qquad \nu_k^{(l)}(\theta, t) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{k} \nu_{kj}^{(l)}\cos[(2j-1)\theta - \lambda_j^{(l)}],\quad l = 1, 2.$$

Înlocuind (53) în (49), efectuînd integralele şi identificînd coeficienţii pentru cos $(2j-1)\,\theta$ şi sin $(2j-1)\,\theta$ se obţin sistemele

$$(54)\qquad \begin{aligned} \nu_{kj}^{(1)}\cos\lambda_j^{(1)} &= \lambda_1(-\alpha^j\nu_{kj}^{(2)}\cos\lambda_j^{(2)} + u_{kj}^{(1)}\cos u_j^{(1)}) \\ \nu_{kj}^{(2)}\cos\lambda_j^{(2)} &= \lambda_2(\alpha^j\nu_{kj}^{(2)}\cos\lambda_j^{(1)} + u_{kj}^{(2)}\cos u_j^{(2)}),\ j = 1, \ldots, k \\ \nu_{kj}^{(1)}\sin\lambda_j^{(1)} &= \lambda_1(-\alpha^j\nu_{kj}^{(2)}\sin\lambda_j^{(2)} + u_{kj}^{(1)}\sin u_j^{(1)}) \\ \nu_{kj}^{(2)}\sin\lambda_j^{(2)} &= \lambda_2(+\alpha^j\nu_{kj}^{(1)}\sin\lambda_j^{(1)} + u_{kj}^{(2)}\sin u_j^{(2)}),\quad j = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

care determină coeficienţii $\nu_{kj}^{(l)}\cos\lambda_j^{(l)}$, $\nu_{kj}^{(l)}\sin\lambda_j^{(l)}$, $l = 1, 2$ şi în care α este raza cercului C_2. În felul acesta înlocuind (53) în (47) şi (47) în (46), se obţine expresia funcţiei χ_k, expresie de forma

$$(55)\qquad \chi_k(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{kj}(r, t)\cos[(2j-1)\theta - \varkappa_j(r, t)].$$

În exteriorul coroanei circulare χ_k este armonică şi deci funcţiile $\chi_{kj} \cos \varkappa_j$ au forma $r^{-2j+1} T_{kj}(t)$, analog pentru funcţiile $\chi_{kj} \sin \varkappa_j$. Aceasta implică în particular

$$\left.\frac{\partial \chi_k}{\partial t}\right|_{\infty} = 0. \tag{56}$$

Din (55) şi (17), obţinem

$$\vec{e}_k = -\frac{\partial \chi_k}{\partial t} \vec{k}. \tag{57}$$

Aşadar prin (56) rezultă că în orice aproximaţie cîmpul electric este nul la infinit.

Trecem acum la rezolvarea ecuaţiilor (25) pentru Ω_k şi Ψ_k cu condiţiile corespunzătoare din (27) şi (28). Presupunem

$$G_k(r, \theta, t) = g_{k0} + \sum_{j=1}^{k} g_{kj}^{(1)} \cos 2j\theta + \sum_{j=1}^{k} g_{kj}^{(2)} \sin 2j\theta. \tag{58}$$

Ţinînd seama de (45) şi (32) se obţin relaţiile

$$\frac{\partial(\Omega_k, \Psi_0)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\Omega_k, \Psi_0)}{\partial(r, \theta)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \theta} = \frac{1}{r} v_{0\theta} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial(\Omega_0, \Psi_k)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega_0}{\partial r} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \theta} = \mathrm{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial v_{0\theta}}{\partial t} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \theta}$$

şi ecuaţiile (25) se scriu

$$\frac{\partial \Omega_k}{\partial t} + \frac{v_{0\theta}}{r} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \theta} + \mathrm{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial v_{0\theta}}{\partial t} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \theta} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \Omega_k - G_k, \quad \Omega_k = -\Delta \Psi_k. \tag{59}$$

Căutăm soluţia sub forma

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \Omega_{k0} + \sum_{j=1}^{k} \Omega_{kj}^{(1)} \cos 2j\theta + \sum_{j=1}^{k} \Omega_{kj}^{(2)} \sin 2j\theta \\ \Psi_k &= \Psi_{k0} + \sum_{j=1}^{k} \Psi_{kj}^{(1)} \cos 2_j\theta + \sum_{j=1}^{k} \Psi_{kj}^{(2)} \sin 2j\theta \end{aligned} \tag{60}$$

Notăm operatorul

$$U_j = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(2j)^2}{r^2}. \tag{61}$$

Înlocuind (60) în (59) rezultă

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega_{kj}^{(1)}}{\partial t} + 2j \frac{v_{0\theta}}{r} \Omega_{kj}^{(2)} + \mathrm{Re} \frac{2j}{r} \frac{\partial v_{0\theta}}{\partial t} \Psi_{kj}^{(2)} = \frac{1}{\mathrm{Re}} U_j(\Omega_{kj}^{(1)}) - g_{kj}^{(1)}) \\ &\frac{\partial \Omega_{kj}^{(2)}}{\partial t} - 2j \frac{v_{0\theta}}{r} \Omega_{kj}^{(1)} - \mathrm{Re} \frac{2j}{r} \frac{\partial v_{0\theta}}{\partial t} \Psi_{kj}^{(1)} = \frac{1}{\mathrm{Re}} U_j(\Omega_{kj}^{(2)}) - g_{kj}^{(2)}) \\ &U_j \Psi_{kj}^{(1)} = -\Omega_{kj}^{(1)}, \quad U_j \Psi_{kj}^{(2)} = -\Omega_{kj}^{(2)}, \quad j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{62}$$

Condiţiile la limită şi iniţiale rezultă din (27) şi (28)

$$\frac{\partial \Psi_{kj}^{(l)}}{\partial r} = \Psi_{kj}^{(l)} = 0 \text{ pentru } r = 1\,;\ r = \alpha\,;\ t = 0 \text{ şi} \tag{63}$$

$$\Omega_{kj}^{(l)} = 0 \text{ pentru } t = 0,\ l = 1,\ 2$$

Ecuaţiile (62) nu cuprind ecuaţiile pe care le satisfac funcţiile Ω_{k0} şi Ψ_{k0}. Nu determinăm direct aceste funcţii. Revenim la ecuaţiile (24), vectorul $\vec{N}_k$ fiind cunoscut din aproximaţiile de ordin mai mic decît k şi din (55). Presupunem

$$\vec{N}_k = \vec{N}_{k0} + \sum_{j=1}^{k} \vec{N}_{kj}^{(1)} \cos 2j\theta + \sum_{j=1}^{k} \vec{N}_{kj}^{(2)} \sin 2j\theta \tag{64}$$

şi căutăm soluţia sub forma

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{k0} + \sum_{j=1}^{k} \vec{v}_{kj}^{(1)} \cos 2j\theta + \sum_{j=1}^{k} \vec{v}_{kj}^{(2)} \sin 2j\theta, \tag{65}$$

$$P_k = P_{k0} + \sum_{j=1}^{k} P_{kj}^{(1)} \cos 2j\,\theta + \sum_{j=1}^{k} P_{kj}^{(2)} \sin 2j\,\theta,$$

Înlocuind în (24), folosind coordonatele polare, identificînd termenii liberi se obţine

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_{k0r}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{k0r} - \frac{2v_{0\theta}}{r} v_{k0\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} P_{k0} + \frac{1}{\mathrm{Re}} U_1(v_{k0r}) + N_{k0r} \tag{66}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{k0} + \left(\frac{\partial v_{0\theta}}{\partial r} + \frac{v_{0\theta}}{r}\right) v_{k0r} = \frac{1}{\mathrm{Re}} U_1(v_{k0\theta}) + N_{k0\theta}$$

Ţinînd seama de (64), condiţiile (27) şi (28) pentru $\vec{v}_k$, $k \geqslant 1$ se scriu

$$\vec{v}_{k0} = 0 \quad \vec{v}_{kj}^{(l)} = 0 \text{ pentru } r = 1\,;\ r = \alpha\,;\ t = 0,\ l = 1, 2,\ j = 1, \ldots, k. \tag{67}$$

Astfel se obţine

$$v_{k0r} = 0. \tag{68}$$

Presiunea P_{k0} se obţine din

$$\frac{\partial}{\partial r} P_{k0} = 2\,\frac{v_{0\theta}}{r}\, v_{k0\theta} + N_{k0r} \tag{69}$$

presupunînd $v_{k0\theta}$ cunoscut. Funcţia $v_{k0\theta}$ se determină din ecuaţia

$$\frac{\partial}{\partial t} v_{k0\theta} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) v_{k0\theta} + N_{k0\theta} \tag{70}$$

cu condiţilie ce rezultă din (67)

$$v_{k0\theta} = 0 \text{ pentru } r = 1\,;\ r = \alpha\,;\ t = 0. \tag{71}$$

Înmulţim ecuaţie (70), (71) cu $r T_1(r, \alpha, \xi_i)$, integrăm şi obţinem pentru coeficienţii $(v_{k0\theta})_i$ definiţi de (40) ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (v_{k0\theta})_i = - \frac{1}{\text{Re}} \xi_i^2 (v_{k0\theta})_i + (N_{k0\theta})_i \tag{72}$$

cu condiţia $(v_{k0\theta})_i|_{t=0} = 0$. Ecuaţia (72) are soluţia

$$(v_{k0\theta})_i = \int_0^t (N_{k0\theta})_i (\tau)\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi_i^2}{\text{Re}}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau \tag{73}$$

şi din (39)

$$v_{k0\theta}(r, t) = \sum \frac{2\xi_i^2 J_1^2(\xi_i)}{J_1^2(\alpha\xi_i) - J_1^2(\xi_i)} \cdot \int_0^t (N_{k0\theta})_i\, \mathrm{e}^{-\frac{\xi_i^2}{\text{Re}}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau\, T_1(r, \alpha, \xi_i). \tag{74}$$

Din (68) şi (74) se obţine uşor

$$\Omega_{k0}(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{k0\theta}),\ \ \Psi_{k0}(r, t) = - \int v_{k0\theta}\, \mathrm{d}r. \tag{75}$$

6. *Aproximaţia de ordinul întîi.* Ţinînd seama de (26), (12) şi (45) rezultă

$$F_1(r, \alpha, t) = \frac{\partial \chi_0}{\partial t} + \frac{\partial(\chi_0, \Psi_0)}{\partial(x, y)} = v_{0\theta}(r, t) \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta, \tag{76}$$

unde $v_{0\theta}(r, t)$ este dat de (43). Din (26), (76) şi (12) rezultă

$$G_1(r, \theta, t) = R_p \frac{\partial(\Delta\chi_1, \chi_0)}{\partial(x, y)} = R_p \frac{\partial(F_1, \chi_0)}{\partial(x, y)} = \tag{77}$$

$$= \frac{1}{2} R_p \left(A - \frac{B}{r^2} \right)^2 \left\{ \frac{\partial v_{0\theta}}{\partial r} + \frac{v_{0\theta}}{r} \left(1 + \frac{4B}{Ar^2 - B} \right) + \left(\frac{\partial v_{0\theta}}{\partial r} - \frac{v_{0\theta}}{r} \right) \cos 2\theta \right\}.$$

Deoarece F_1 verifică ipoteza (50) pentru $k = 1$, efectuînd calculele pe calea arătată, obţinem expresia funcţiei de forţă $\chi_1(r, \theta, t)$

$$(78)\quad \chi_1(P) = \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{2} \nu_{11}^{(l)} \oint_{C_l} \cos\theta_Q \frac{\partial}{\partial n_{iQ}}\left(\ln\frac{1}{r_{PQ}}\right) \mathrm{d}s_Q - \frac{1}{2\pi}\iint_D F_1\Big|_Q \ln\frac{1}{r_{PQ}}\,\mathrm{d}\sigma_Q =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\cos\theta \displaystyle\int_\alpha^1 v_{0\theta}(Ar^2 - B)\,\mathrm{d}r - (\nu_{11}^{(l)} + \alpha\,\nu_{11}^{(2)})\dfrac{1}{r}\cos\theta & \text{în } D_1 \\ -\dfrac{1}{2}\cos\theta\left\{r\displaystyle\int_r^1 v_{0\theta}\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\mathrm{d}r + \frac{1}{r}\int_\alpha^r v_{0\theta}(Ar^2 - B)\,\mathrm{d}r\right\} + \left(\nu_{11}^{(1)} r - \right. & \\ \qquad\qquad\qquad \left. - \dfrac{\alpha}{r}\,\nu_{11}^{(2)}\right)\cos\theta & \text{în } D \\ -\dfrac{1}{2}\cos\theta\displaystyle\int_\alpha^1 v_{0\theta}\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\mathrm{d}r + (\nu_{11}^{(1)} + \frac{1}{\alpha}\,\nu_{11}^{(2)})\,r\cos\theta & \text{în } D_2 \end{cases}$$

unde $\nu_{11}^{(l)}(t)$, $l = 1, 2$, verifică sistemul

$$\nu_{11}^{(1)} = \lambda_1\left\{-\alpha\nu_{11}^{(2)} - \frac{1}{2}\int_\alpha^1 v_{0\theta}(Ar^2 - B)\,\mathrm{d}r\right\}.$$

$$\nu_{11}^{(2)} = \lambda_2\left\{\alpha\,\nu_{11}^{(1)} - \frac{1}{2}\,\alpha\int_\alpha^1 v_{0\theta}\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\mathrm{d}r\right\}.$$

Funcţia $\chi_1(P)$ depinde liniar de funcţia $v_{0\theta}$. Aceasta asigură satisfacerea condiţiilor iniţiale (28) de către $\chi_1(P)$ deoarece $v_{0\theta}|_{t=0} = 0$. Cîmpul electric are expresia

$$(79)\qquad \vec{e}_1 = -\frac{\partial\chi_1}{\partial t}\vec{k}.$$

Funcţia G_1 este dată de (77) şi verifică ipoteza (58) pentru $k = 1$. Astfel pentru Ω_1 şi Ψ_1 considerăm dezvoltarea

$$(80)\quad \begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_{10} + \Omega_{11}^{(1)}\cos 2\theta + \Omega_{11}^{(2)}\sin 2\theta = \Omega_{10} + \varpi_1\cos 2\theta + \varpi_2\sin 2\theta, \\ \Psi_1 &= \Psi_{10} + \Psi_{11}^{(1)}\cos 2\theta + \Psi_{11}^{(2)}\sin 2\theta = \Psi_{10} + \psi_1\cos 2\theta + \psi_2\sin 2\theta. \end{aligned}$$

Funcţiile ϖ_1, ϖ_2, ψ_1, ψ_2 verifică ecuaţiile

$$\frac{\partial\varpi_1}{\partial t} + \frac{2v_{0\theta}}{r}\varpi_2 + \mathrm{Re}\frac{2}{r}\frac{\partial v_{0\theta}}{\partial t}\psi_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\varpi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varpi_1}{\partial r} - \frac{4\varpi_1}{r^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}R_p\left(A - \frac{B}{r^2}\right)\left(\frac{\partial v_{0\theta}}{\partial r} - \frac{v_{0\theta}}{r}\right)$$

$$(81)\quad \frac{\partial\varpi_2}{\partial t} - \frac{2v_{0\theta}}{r}\varpi_1 - \mathrm{Re}\frac{2}{r}\frac{\partial v_{0\theta}}{\partial t}\psi_1 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\varpi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varpi_2}{\partial r} - \frac{4\varpi_2}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{4\psi_1}{r^2} = -\varpi_1 \qquad \frac{\partial^2\psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \frac{4\psi_2}{r^2} = -\varpi_2$$

și condițiile

(82) $\psi_l = 0 \quad \frac{\partial \psi_l}{\partial r} = 0$ pentru $r = 1$; $r = \alpha$; $t = 0$ și $\varpi_l = 0$ pentru $t = 0$, $l = 1, 2$.

Rezolvînd sistemul (81) cu condițiile (82) se obține pentru Ω_1, ψ_1 expresii de forma (80).

Determinarea funcțiilor Ω_{10} și Ψ_{10} este posibilă deoarece cunoaștem pe χ_1 din (78). Folosind (12) și (78) pentru domeniul D, obținem pentru N_1 expresia

$$\vec{N}_1 = R_p\,[(\vec{h}_0 \operatorname{grad})\,\vec{h}_1 + (\vec{h}_1 \operatorname{grad})\,\vec{h}_0] \tag{83}$$

$$= R_p\,[N_{10}\,\vec{e}_\theta + N_{11}^{(1)} \cos 2\,\theta\,\vec{e}_\theta + N_{11}^{(2)} \sin 2\theta\,\vec{e}_r],$$

unde

$$\begin{cases} E = v_{0\theta}\left(A - \dfrac{B}{r^2}\right), \quad N_{10} = -\dfrac{1}{2}\,E\left(A - \dfrac{B}{r^2}\right), \quad N_{11}^{(1)} = N_{10} - N_{11}^{(2)} \\ N_{11}^{(2)} = -\dfrac{2}{r^3}\,(B\,\nu_{11}^{(1)} - \alpha A\,\nu_{11}^{(2)}) + \dfrac{B}{r^3}\displaystyle\int_r^1 E\,\mathrm{d}r - \dfrac{A}{r^3}\displaystyle\int_\alpha^r E r^2\,\mathrm{d}r. \end{cases}$$

Din (68) și (74) obținem

$$v_{10\theta}\,(r,\,t) = \tag{84}$$

$$= -\,R_p \sum \frac{\xi_i^2\,J_1^2\,(\xi_i)}{J_1^2\,(\alpha\xi_i) - J_1^2\,(\xi_i)} \int_0^t \left(v_{0\theta}\left(A - \frac{B}{r^2}\right)^2\right)_i \mathrm{e}^{-\frac{\xi_i^2}{\mathrm{Re}}\,(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\;T_1\,(r,\,\alpha,\,\xi_i)$$

și $v_{10r} = 0$. Funcțiile Ω_{10}, Ψ_{10} rezultă din (75) pentru $k = 1$

$$\Omega_{10} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r\,v_{10\theta}), \quad \Psi_{10} = -\int v_{10\theta}\,\mathrm{d}r. \tag{85}$$

Relațiile (76), (77), (83) arată că relațiile (50), (58), (64) sînt adevărate pentru $k = 1$. În acest fel și relațiile (55), (60) sînt adevărate pentru $k = 1$. Presupunînd relațiile (50), (58), (55) și (60) adevărate pentru $n < k$, se poate arăta prin inducție ținînd seama de (26), că relațiile (50), (58) deci (55), (60) sînt adevărate pentru $n = k$. Astfel prin dezvoltarea (21) sistemul de ecuații (19) cu condițiile (20) ne conduce la sistemele de ecuații (62) cu condițiile (63).

7. *Cazul mișcării permanente.* În cazul mișcării permanente, în aproximația de ordinul zero, se obține același cîmp magnetic și electric dat de (29), (30), dar pentru componenta $v_{0\theta}$ dată de :

$$v_{0\theta} = \frac{a_2}{V}\,\omega_2\,\frac{\alpha}{r}\,\frac{1 - r^2}{1 - \alpha^2} + \frac{a_1}{V}\,\omega_1\,\frac{1}{r}\,\frac{r^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} = \mathcal{A} r + \frac{\mathcal{B}}{r}, \tag{86}$$

unde

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(\frac{a_1}{V}\,\omega_1 - \frac{a_2}{V}\,\omega_2\,\alpha\right), \quad \mathcal{B} = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\left(\frac{a_2}{V}\,\omega_2 - \frac{a_1}{V}\,\omega_1\,\alpha\right).$$

În aproximaţia de ordinul întîi cîmpul magnetic este dat de (78) pentru $v_{0\theta}$ dat de (86). Componenta $v_{10\theta}\,(r)$ este egală cu valoarea asimptotică a expresiei (84) pentru $v_{0\theta}$ dat de (86), valoare care se poate calcula de altfel direct din (70) pentru $N_{10\theta}$ dat de (83).

Sistemele de ecuaţii (62) cu condiţiile (63) se reduc la :

$$(87) \qquad \begin{cases} 2j\left(\mathcal{A} + \dfrac{\mathcal{B}}{r^2}\right)\Omega_{kj}^{(2)} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\,U_j\,(\Omega_{kj}^{(1)}) - g_{kj}^{(1)} \\[2ex] -\,2j\left(\mathcal{A} + \dfrac{\mathcal{B}}{r^2}\right)\Omega_{kj}^{(1)} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\,U_j\,(\Omega_{kj}^{(2)}) - g_{kj}^{(2)} \\[2ex] U_j(\Psi_{kj}^{(1)}) = -\,\Omega_{kj}^{(1)},\ U_j\,(\Psi_{kj}^{(2)}) = -\,\Omega_{kj}^{(2)},\ j = 1, \ldots, k \end{cases}$$

cu condiţiile

$$(88) \qquad \frac{\mathrm{d}\Psi_{kj}^{(l)}}{\mathrm{d}r} = 0,\ \Psi_{kj}^{(l)} = 0 \ \text{ pentru } r = 1\,;\ r = \alpha,\ l = 1, 2.$$

Notăm

$$(89) \qquad \Omega_{kj} = \Omega_{kj}^{(1)} + i\,\Omega_{kj}^{(2)},\ \Psi_{kj} = \Psi_{kj}^{(1)} + i\Psi_{kj}^{(2)},\ g_{kj} = g_{kj}^{(1)} + i\,g_{kj}^{(2)}$$

şi obţinem

$$(90) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \dfrac{(2j)^2}{r^2}\right)\Omega_{kj} - (i)\,2\,\mathrm{Re}\cdot j\left(\mathcal{A} + \dfrac{\mathcal{B}}{r^2}\right)\Omega_{kj} = g_{kj}, \\[2ex] \left(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \dfrac{(2j)^2}{r^2}\right)\Psi_{kj} = -\,\Omega_{kj}\,. \end{cases}$$

Notăm

$$(91) \qquad c_j^2 = -\,(i)\,2\,\mathrm{Re}\cdot j\mathcal{A}\,,\ \nu_j^2 = (2j)^2 + (i)\,2\,\mathrm{Re}\cdot j\,\mathcal{B}$$

şi obţinem expresia soluţiei generale a primei ecuaţii din (90)

$$(92) \qquad \Omega_{kj} = J_{\nu_j}\,(c_j\,r)\left[d_1 + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Re}\int_r^1 g_{kj}\,(r)\,Y_{\nu_j}\,(c_j\,r)\,\mathrm{d}r\right] + \\ + Y_{\nu_j}\,(c_j\,r)\left[d_2 + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Re}\int_\alpha^r g_{kj}\,(r)\,J_{\nu_j}\,(c_j\,r)\,\mathrm{d}r\right].$$

Cea de-a doua ecuaţie din (90) are soluţia generală

$$\psi_{kj} = r^{2j}\left(b_1 + \frac{1}{4j}\int_r^1 \Omega_{kj}\,r^{-2j+1}\,\mathrm{d}r\right) + r^{-2j}\left(b_2 + \frac{1}{4j}\int_\alpha^r \Omega_{kj}\,r^{2j+1}\,\mathrm{d}r\right).$$

Impunînd condițiile (88), ținînd seama de (89), se obține un sistem liniar omogen pentru $b_1, b_2, \int_\alpha^1 \Omega_{kj}\, r^{-2j+1}\,\mathrm{d}r$ și $\int_\alpha^1 \Omega_{kj}\, r^{2j+1}\,\mathrm{d}r$ cu determinant nenul. Deci

$$\Psi_{kj} = \frac{r^{2j}}{4j}\int_r^1 \Omega_{kj}\, r^{-2j+1}\,\mathrm{d}r + \frac{r^{-2j}}{4j}\int_\alpha^r \Omega_{kj}\, r^{2j+1}\,\mathrm{d}r. \tag{93}$$

în care Ω_{kj} este dat de (92), constantele d_1, d_2 determinîndu-se din condițiile

$$\int_\alpha^1 \Omega_{kj}\, r^{\pm 2j+1}\,\mathrm{d}r = 0. \tag{94}$$

În particular, pentru aproximația de ordinul întîi, pentru sistemul (81) obținem

$$\psi = \frac{1}{4} r^2 \int_r^1 \varpi\, r^{-1}\mathrm{d}r + \frac{1}{4} r^{-2}\int_\alpha^r \varpi\, r^3\,\mathrm{d}r, \tag{95}$$

unde

$$\varpi = J_\nu(cr)\left[d_1 + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Re}\int_r^1 g(r)\,Y_\nu(cr)\,\mathrm{d}r\right] +$$
$$+ Y_\nu(cr)\left[d_2 + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Re}\int_\alpha^r g(r)\,J(cr)\,\mathrm{d}r\right]$$

constantele d_1, d_2 obținîndu-se din

$$\int_\alpha^1 \varpi\, r^{-1}\,\mathrm{d}r = 0 \qquad \int_\alpha^1 \varpi\, r^3\mathrm{d}r = 0$$

și unde

$$\psi = \psi_1 + i\,\psi_2, \quad \varpi = \varpi_1 + i\,\varpi_2, \quad c^2 = -2i\,\mathrm{Re}\,\mathcal{A}, \quad \nu^2 = 4 + 2i\,\mathrm{Re}\,\mathcal{B}$$

$$g = -R_p\left(A - \frac{B}{r^2}\right)^2 \frac{\mathcal{B}}{r^2}.$$

Cazul aceleiași permeabilități a fluidului și mediului exterior. În acest caz sistemul din (12) are soluția $A = D = 1$, $B = C = 0$. În prima aproximație funcția de forță χ are expresia

$$\chi = r\sin\theta + R_m \begin{cases} -\dfrac{1}{8}\dfrac{1-\alpha^2}{r}\left[\mathcal{A}(1+\alpha^2)+2\mathcal{B}\right]\cos\theta & \text{în } D_1 \\ +\dfrac{1}{8}\left\{\mathcal{A}\left[r(r^2-2)+\dfrac{\alpha^2}{r}\right]+4\mathcal{B}\left[r\cdot\ln r+\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{\alpha^2}{r}\right)\right]\right\}\cos\theta & \text{în } D \\ -\dfrac{1}{8}\,r\left[2\,\mathcal{A}(1-\alpha^2)-\mathcal{B}\ln\alpha\right]\cos\theta & \text{în } D_2 \end{cases} \tag{96}$$

iar componentele vitezei au expresiile :

$$v_\theta = \left(\mathcal{A} r + \frac{\mathcal{B}}{r}\right) + R_m \{ v_{10\theta} - \psi_1' \cos\theta - \psi_2' \sin\theta \}$$

$$v_r = \qquad R_m \frac{2}{r} (\psi_2 \cos\theta - \psi_1 \sin\theta)$$

unde $v_{10\theta} = \frac{1}{16} \operatorname{Re} R_p \left\{ \mathcal{A} \left[r(r^2 - 2) - \alpha^2 \left(r - \frac{1}{r} \right) \right] + 4\mathcal{B} \left[r \ln r + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \right. \right.$ $\left. \left. \ln \alpha \left(r - \frac{1}{r} \right) \right] \right\}$ iar $\psi = \psi_1 + i\,\psi_2$ este dat de (95) pentru $g = - R_p \frac{\mathcal{B}}{r^2}$.

Dacă sîntem în cazul unui singur cilindru, atunci $\mathcal{B} = 0$ și din (95) rezultă $\psi = 0$. Astfel se regăsesc expresiile obținute în [6] pentru prima aproximație.

Deoarece cunoaștem soluțiile sistemelor (87), soluții date de (93), rezultă că mișcarea permanentă a fluidului electroconductor situat în interiorul a doi cilindri coaxiali infiniți, mișcare care are loc într-un cîmp magnetic transversal, poate fi determinată din aproape în aproape pentru orice aproximație. Mărimile care nu intervin direct în sistemele (87) au fost determinate mai general pentru cazul mișcării nepermanente.

Primită la redacție la 7 iulie 1965

Facultatea de matematică și mecanică
Universitatea din București

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides.* Bucarest, Paris, 1959.
2. I. Sneddon, *Fourier Transforms.* New York-Toronto-London, 1951.
3. C. D. Ghildyal, *Unsteady Motion of a Viscous Liquid contained between Two Coaxial Cylinders r = a and r = b.* ZAMM, **39**, Heft 12 (1959).
4. Devi Singh and Syed Ali Tahir Rizvi, *Unsteady Motion of a Conducting Liquid between Two Infinite Coaxial Cylinders.* The Physics of Fluids, **7** (1964).
5. V. P. Sidlovski, *Unele probleme ale mișcării nepermanente a unui fluid vîscos electroconductibil.* St. cerc. mec. apl., *4*, 1009 (1964).
6. P. Smith, *The Rotation of a Conducting Liquid in a Uniform Transverse Magnetic Field.* ZAMM, **44**, Heft 10/11 (1964).
7. А. Г. Куликовский и Г. А. Любимов, *Магнитная гидродинамика,* Москва, 1962.
8. G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions.* Cambridge, 1922.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1983

1966 FEB 11

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 304 p. + 52 pl., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, Nr. 1, P. 1—180, BUCUREŞTI, 1966

I. P. „Informaţia" – c. 4214

43 831

Lei 12

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

TOMUL 18
1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

1383

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1283

TOM. 18, Nr. 2
1966

STUDII ŞI CERCETĂRI
MATEMATICE

SUMAR

Pag.

LEON LIVOVSCHI, Asigurarea funcţionării corecte a automatelor cu relee prin asignări speciale 183
FROIM MARCUS, Asupra sistemelor triple de curbe în spaţiul proiectiv 205
M. JURCHESCU şi A. LASCU, Morfisme stricte, categorii cantoriene, functori de completare 219
MIHAELA ŞABAC, Asupra corpului funcţiilor raţionale al unei varietăţi algebrice 235
DAN PASCALI, Reprezentarea polinomului areolar cuaternionic în spaţiul tridimensional 239
FLORICA BUCUR, Asupra unei clase de transformări interioare . 243
NICOLAE POPESCU, Elemente de teoria fasciculelor (I) . . 267
V. ISTRĂŢESCU, Asupra operatorilor cvasicompacţi. II . . . 297
ADELINA GEORGESCU, Corecţii de compresibilitate pentru profile von Mises 301
D. B. ION, Asupra unor proprietăţi ale rădăcinilor algebrelor Jordan de tip A 309
LIVIU TODOR, Distanţa euclidiană a unei matrici la mulţimea matricilor singulare 315
EFTIMIE I. GRECU, Cîmpuri de vectori paraleli în spaţii A_3 cu conexiune afină local euclidiene a căror conexiune proiectivă este constantă 321

RECENZII 337

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 2, P. 181–338, BUCUREŞTI, 1966

ASIGURAREA FUNCȚIONĂRII CORECTE A AUTOMATELOR CU RELEE PRIN ASIGNĂRI SPECIALE

DE

LEON LIVOVSCHI

Se studiază cîteva procedee de construire de automate cu relee a căror funcționare să satisfacă programul dat.

1. INTRODUCERE

După cum se știe, un automat cu butoane și relee nu funcționează uneori în conformitate cu programul impus, dacă sinteza lui se face în presupunerea că butoanele și releele au funcționare ideală. Această situație se datorește faptului că în pozițiile intermediare ale armăturii butoanelor și releelor, atît contactele de lucru cît și cele de repaus sînt desfăcute iar continuitatea circuitelor în care intră aceste contacte este întreruptă. Situația descrisă are loc în cazul cînd contactele butoanelor și releelor sînt ordinare, lucru pe care-l presupunem peste tot în cele ce urmează.

În cazul automatelor în doi timpi, adică a automatelor în care schimbarea stării comenzilor provoacă schimbarea cel mult a unui releu intermediar, metoda lui D. A. Huffman permite eliminarea discontinuitățior provocate de schimbarea de stare a releelor intermediare. Această metodă este ineficace în ceea ce privește discontinuitățile provocate de schimbarea de stare a butoanelor sau discontinuitățile care au loc în automatele autonome sau cu funcționare în mai mulți timpi.

În cele ce urmează expunem unele procedee de asigurare a funcționării corecte a automatelor prin utilizarea de relee intermediare suplimentare.

Pentru reprezentarea funcționării automatelor se utilizează grafurile [5]. Arcele grafurilor sînt notate în origine cu valorile lui Z (variabila care descrie *starea internă* a automatului, adică starea releelor intermediare) iar în extremitate cu K (variabila care descrie starea comenzilor). Valorile

ST. CERC. MAT. TOM 18. NR. 2. P. 183-204 BUCUREȘTI 1966.

lui Z şi K sînt luate în acelaşi interval de timp N, aşa încît arcele grafului reprezintă stările automatului, adică elementele produsului cartezian

$$(K \times Z)_N.$$

În extremitatea unui arc mai sînt notate valorile lui Z la momentul $N + 1$ şi a lui W (variabila care descrie starea elementelor executive) la momentul N (se neglijează întîrzierea cu care se schimbă starea elementelor executive). Se vede uşor (fig. 1) că arcele grafului reprezintă argumentele iar nodurile grafului valorile funcţiilor

$$(1) \qquad \begin{aligned} Z_{N+1} &= f\,(K_N,\ Z_N), \\ W_N &= g\,(K_N,\ Z_N). \end{aligned}$$

Dacă sub o comandă K_N starea internă a automatului şi starea ieşirilor lui nu se schimbă, se obţine un arc închis pe care-l vom reprezenta printr-un cerc (fig. 1 *b*).

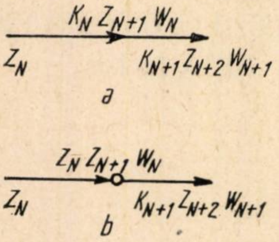


Fig. 1

Fie acum un automat A_r cu funcţionare reală. Vom numi stări ale automatului A_r atît elementele cît şi reuniunile de elemente ale produsului cartezian

$$(K \times Z)_N.$$

Două stări se zic *distincte* dacă intervalele de timp cît durează aceste stări nu sînt legate prin relaţia de incluziune iar intersecţia lor nu este vidă. Două stări sînt *diferite* dacă intervalele de timp cît durează aceste stări au intersecţie vidă.

Aceleaşi definiţii rămîn valabile pentru stările interne ale automatului A_r.

Fiecărei stări îi vom asocia o funcţie egală cu 0 în intervalele de timp în care starea studiată nu are loc şi egală cu 1 în intervalele de timp în care starea studiată are loc. Despre o stare vom zice că *se realizează sigur* dacă dipolul avînd ca formulă structurală funcţia care descrie starea studiată are *conductibilitatea 1* în intervalul de timp cît durează starea studiată şi *conductibilitatea 0* în afara acestui interval.

Fiind date două automate A_r şi A_i, primul cu funcţionare reală iar al doilea cu funcţionare ideală şi satisfăcînd un program P_i, vom zice că automatul A_r *satisface programul* P_i sau că *funcţionează corect în sens larg* dacă între stările automatului A_r care se realizează sigur şi stările automatului A_i se poate stabili o corespondenţă biunivocă care păstrează ordinea de succedare a stărilor corespondente. În cazul cînd corespondenţa de mai sus are loc între toate stările celor două automate vom zice că are loc *funcţionarea corectă în sens restrîns*. Dacă nu este posibilă o confuzie vom utiliza denumirea de *funcţionare corectă*.

Despre automatele A_r şi A_i vom zice că sînt *funcţional echivalente*.

Vom studia mai jos cîteva procedee de asigurare a funcţionării corecte adică procedee de construire de automate A_r funcţional echivalente cu automate A_i.

Peste tot în cele ce urmează presupunem că asignările cu relee a stărilor interne ale automatelor satisfac condiţia tehnică de bună funcţionare, adică la trecerea dintr-o stare internă în altă stare internă se schimbă starea unui singur releu.

2. ANALIZA FUNCŢIONĂRII NECORECTE

În cele ce urmează presupunem peste tot că alimentarea releelor se realizează prin montaje serie (dipolii de alimentare sînt montaţi în serie cu înfăşurările releelor). În aceste condiţii alimentarea înfăşurării unui releu A începe întotdeauna numai după ce un contact b este făcut şi prin urmare armătura releului sau butonului B are o poziţie extremă.

Dimpotrivă, întreruperea alimentării înfăşurării unui releu A începe imediat ce un contact b se desface, adică înainte ca armătura releului sau butonului B să fi ocupat o poziţie extremă. Cu alte cuvinte informaţia asupra schimbării de stare a armăturii lui B se transmite în circuitul de alimentare al releului A înainte ca armătura lui B să fi schimbat de stare. Funcţionarea necorectă este posibilă după cum se ştie datorită faptului că în poziţiile intermediare ale armăturii unui releu toate contactele lui sînt desfăcute şi alimentarea releelor în care apar aceste contacte poate fi întreruptă.

Am presupus mai sus că toate contactele de aceeaşi natură ale unui releu îşi schimbă starea simultan. Cazul cînd această condiţie nu este satisfăcută este discutat în încheierea lucrării.

Trecem acum la analiza situaţiilor în care are loc funcţionarea necorectă adică se realizează condiţii diferite de cele prevăzute în programul automatului (în presupunerea că elementele lui sînt ideale).

Reamintim că automatele în care o schimbare de comandă are ca efect menţinerea stării interne a automatului sau schimbarea stării cel mult a unui releu intermediar se numesc *automate în doi timpi*. Automatele fără elemente de comandă se numesc *autonome*. Noi vom numi autonome şi automatele avînd elemente de comandă care pun şi scot din funcţie automatul studiat. În sfîrşit, se numesc *automate în mai mulţi timpi*, automatele în care o schimbare de comandă are ca efect menţinerea stării interne, schimbarea stării unui releu intermediar sau realizarea unei evoluţii autonome. O evoluţie autonomă constă în general dintr-un lanţ de stări interne urmat de un ciclu de stări interne.

a) Fie un automat în doi timpi. Vom zice că el poate funcţiona necorect dacă există comenzi care pot provoca o evoluţie autonomă a automatului. O asemenea evoluţie este posibilă dacă plecînd de la o stare internă pentru care comanda este K^1 şi dînd apoi comenzile K^2, K^1 se realizează eliberarea unui releu X pentru comanda K^2 iar apoi eliberarea unui releu

Y pentru revenirea la comanda K^1. Într-adevăr, din tabloul 1 al curenților din înfășurările releelor X și Y rezultă că formulele structurale ale circuitelor de alimentare sînt de forma

Tabloul 1

		K^1	$K^2 \ldots K^3$
	11α	11	10
$xy\alpha$	10α	00	$10\ldots10$
	00α	00	
			XY

$$(2)\quad \begin{aligned} X^1 &= x^1\, y^1\, \alpha\, (K^1 + K^2) + x^1\, \alpha\, K^2 + x^1\, y^0\, \alpha\, (K^2 + K^3) + \ldots, \\ Y^1 &= x^1\, y^1\, \alpha\, K^1 + \ldots, \end{aligned}$$

unde termenii nescriși nu sînt esențiali pentru studiul evoluției autonome care ne interesează iar cu α s-a notat un grup de variabile asociate contactelor releelor intermediare care rămîn neschimbate în evoluția considerată.

Să convenim acum să notăm cu $K^{i \to j}$ starea intermediară dintre comenzile K^i și K^j. În această stare conductibilitatea contactelor unuia dintre butoanele de comandă este nulă iar alimentarea releelor care pentru K^i trebuie să fie operate iar pentru K^j eliberate, este întreruptă.

Revenind la evoluția de mai sus constatăm că pentru comanda $K^{1\to 2}$ releul Y este desalimentat și dacă nu se realizează destul de repede comanda

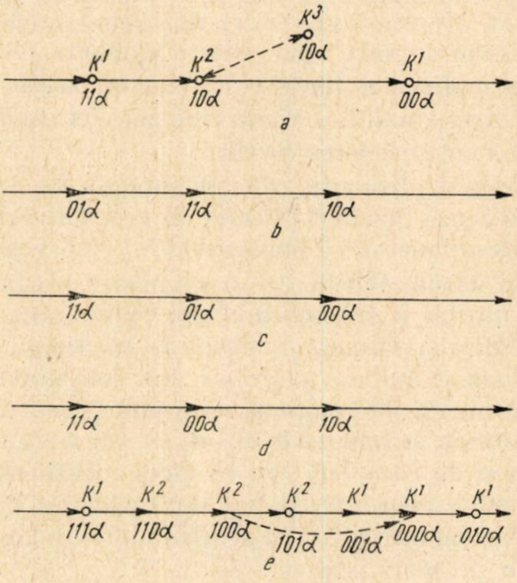


Fig. 2

K^2 automatul ajunge în starea internă 10 α, din care sub comanda $K^{2\to 1}$ (identică cu $K^{1\to 2}$) trece apoi în starea internă 00 α. Posibilitatea unei asemenea evoluții poate fi recunoscută pe graful automatului prin existența unui lanț de arce de forma din figura 2 *a*.

O situaţie asemănătoare are loc dacă pentru un şir oricît de lung de comenzi de forma K^1, K^2; K^1, K^2, ..., în programul automatului este prevăzută eliberarea succesivă a unui alt releu. Se poate întîmpla ca pentru prima comandă intermediară $K^{1\to 2}$ automatul să treacă într-o stare internă corespunzătoare oricăreia dintre comenzile următoare din şirul considerat.

Menţionăm că dacă pentru un şir de comenzi de forma K^1, K^2, K^1 are loc mai întîi eliberarea unui releu X iar apoi operarea unui releu Y, automatul funcţionează corect. Într-adevăr, pentru comanda intermediară $K^{1\to 2}$ (sau $K^{2\to 1}$) alimentarea releului Y nu este posibilă.

b) Fie acum un automat autonom. Vom zice că el poate funcţiona necorect fie dacă unele dintre stările lui nu se realizează fie dacă ordinea de realizare a stărilor automatului este inversată.

Înainte de a cerceta situaţiile în care evoluţiile necorecte sînt posibile vom observa că în condiţiile în care are loc acţionarea succesivă a unui alt releu, funcţionarea necorectă nu este posibilă (cu condiţia ca prima stare din şirul de stări studiat să se fi realizat). Mai rămîn atunci de cercetat evoluţiile reprezentate pe figurile 2*b*, *c*, *d*.

În cazul evoluţiei din figura 2 *b* este posibil ca starea 11 α să nu se realizeze. Într-adevăr să considerăm tabloul 2 al curenţilor din înfăşurările releelor X şi Y.

Tabloul 2

	xyα	XY
	01α	11
xyα	11α	10
	10α	

Pentru formulele structurale ale circuitelor avem

$$X^1 = y_1^1\,\alpha + \dots,\qquad (3)$$
$$Y^1 = x^0\,y_2^1\,\alpha + \dots,$$

unde termenii nescrişi nu sînt esenţiali pentru evoluţia studiată. Constatăm că imediat ce releul X şi-a desfăcut contactul de repaus x^0, este întreruptă alimentarea releului Y iar acesta prin contactul său de lucru y_1^1 poate întrerupe alimentarea releului X înainte ca el să fie operat şi prin urmare starea 11α nu se realizează. Am presupus mai sus că prima stare a şirului studiat se realizează. Situaţia cînd această stare poate să nu se realizeze este discutată mai jos.

În cazul evoluţiei din figura 2*c* se vede direct că dacă releul X are o întîrziere la eliberare mai mare decît a releului Y, în locul şirului de stări programat se realizează şirul 11α, 10α, 00α. În sfîrşit în cazul evoluţiei din figura 2*d* constatăm că pentru ca starea 10α să se realizeze nu este necesară realizarea stării 00α. Într-adevăr, din tabloul 3 al curenţilor din releele X şi Y, deducem

Tabloul 3

	xyα	XY
	01α	00
xyα	00α	10
	10α	1 – –

$$X^1 = y^0\,\alpha + \dots \qquad (4)$$

care confirmă afirmaţia de mai sus. Menţionăm că am presupus mai sus că după ce releul X a fost acţionat, el mai rămîne acţionat măcar într-o stare. În caz contrar se realizează şirul de stări 01α, 00α, 10α, 00α care se încheie cu ciclul 10α, 00α, evoluţie în care participă numai releul X. Formula structurală pentru circuitele lui X conţine atunci termenul

$$X^1 = x^0 y^0 \alpha + \ldots \tag{5}$$

şi se vede direct că starea 10α poate să nu se realizeze. Acest caz particular este studiat mai departe la exemplul 2.

După cum se vede în cazurile din figurile 2*c* şi *d* funcţionarea necorectă este posibilă datorită diferenţei mari în întîrzierile la eliberare ale releelor. Vom presupune că întîrzierile la eliberare ale releelor satisfac condiţia ca în evoluţiile ilustrate pe figura 2*c* şi *d* funcţionarea să fie corectă. Pentru aceasta este evident suficient (dar nu necesar) ca întîrzierile la eliberare ale releelor să fie egale (cu condiţia ca starea 11α să se fi realizat). În aceste condiţii automatele autonome vor funcţiona corect dacă se va asigura funcţionarea corectă în evoluţiile de tipul din figura 2 *b*.

c) În încheierea analizei funcţionării necorecte considerăm cazul automatelor în mai mulţi timpi. Pentru asemenea automate sînt posibile trei feluri de funcţionare necorectă.

În primul rînd vom cerceta evoluţia care are loc atunci cînd o nouă comandă provoacă o evoluţie autonomă care începe cu eliberarea unor relee. Dacă trecerea de la vechea la noua comandă are loc încet atunci unele relee ale automatului se vor elibera înainte ca noua comandă se se fi realizat. Dacă automatul este de tip Mealy, recunoaşterea stărilor lui nu va fi posibilă în intervalul de timp în care are loc schimbarea comenzii. Amintim cu această ocazie că prin stări ale unui automat Mealy se înţeleg elementele produsului cartezian

$$(K \times Z)_N.$$

În al doilea rînd, funcţionări necorecte pot avea loc în acele evoluţii autonome în care (după ce noua comandă s-a realizat) au loc şiruri de stări de forma din figurile 2 *b*, *c*, *d*.

În sfîrşit un automat în mai mulţi timpi mai poate funcţiona necorect dacă există un şir de comenzi de forma K^1, K^2, K^1 astfel încît comenzile succesive K^2 şi K^1 provoacă eliberarea unor relee şi dacă în cele două evoluţii care se realizează pentru comenzile $K^{1\to 2}$ şi $K^{2\to 1}$ există două stări interne vecine. În calitate de exemplu considerăm lanţul de stări din figura 2 *e*. Arcul punctat reprezintă evoluţia necorectă care poate avea loc. Menţionăm că situaţia ilustrată prin figura 2 *a* reprezintă un caz particular al celei din figura 2 *e*.

Analiza făcută mai sus permite deducerea unor procedee de construire de automate A_r funcţional echivalente cu un automat A_i dat. Totodată se poate studia şi problema inversă şi anume determinarea stărilor unui automat A_r care se realizează sigur în timpul evoluţiei automatului. Aceasta permite identificarea automatului A_i cu care automatul dat A_r este funcţional echivalent.

3. ASIGURAREA FUNCŢIONĂRII CORECTE PRIN UTILIZAREA DE RELEE SUPLIMENTARE

Dacă examinăm situaţiile în care are loc funcţionarea necorectă constatăm de fiecare dată existenţa unui buton sau releu a cărui schimbare de stare provoacă eliberarea prematură a unui releu. Putem încerca evitarea acestor situaţii prin construirea de automate A_r în care eliberării releului considerat mai sus să-i preceadă operarea unui releu suplimentar S. După cum vom vedea funcţionarea corectă poate fi asigurată cu un singur releu suplimentar S.

a) În cazul automatelor în doi timpi modul în care intervine releul suplimentar S este arătat în figura 3 *a*. Pentru curenţi, în presupunerea funcţionării ideale, obţinem tabloul 4. Formulele structurale ale circuitelor sînt

Tabloul 4

		K^1	K^2	
	$11\alpha,0$	11,0	11,1	
	$10\alpha,0$		10,0	
$xy\alpha,s$	$00\alpha,0$			
	$11\alpha,1$		10,1	$XY,\ S$
	$10\alpha,1$		10,0	

$$
\begin{aligned}
&X^1 = x^1\, y^1\, s^0\, \alpha\, (K^1 + K^2) + x^1\, \alpha\, K^2 + \dots ,\\
(6)\qquad &Y^1 = x^1\, y^1\, s^0\, \alpha\, (K^1 + K^2) + \dots ,\\
&S^1 = x^1\, y^1\, \alpha\, K^2 + \dots .
\end{aligned}
$$

Se vede uşor că oricît de încet s-ar da comanda K^2, releul X nu va fi eliberat deoarece automatul începe să evolueze numai după ce s-a realizat comanda K^2 şi alimentarea releului X este asigurată prin termenul $x^1\, \alpha\, K^2$.

Pe figura 3 *a* constatăm existenţa unor evoluţii autonome de forma din figurile 2*b* şi *c* şi prin urmare sînt posibile şi evoluţii necorecte. Aceste evoluţii pot fi urmărite pe figura 3*b*, unde cu $\frac{1}{2}$ s-au notat stările intermediare ale releelor. După cum se vede în toate cazurile şi independent de întîrzierile la eliberare ale releelor Y şi S se realizează starea internă finală $10\,\alpha,\ 0$.

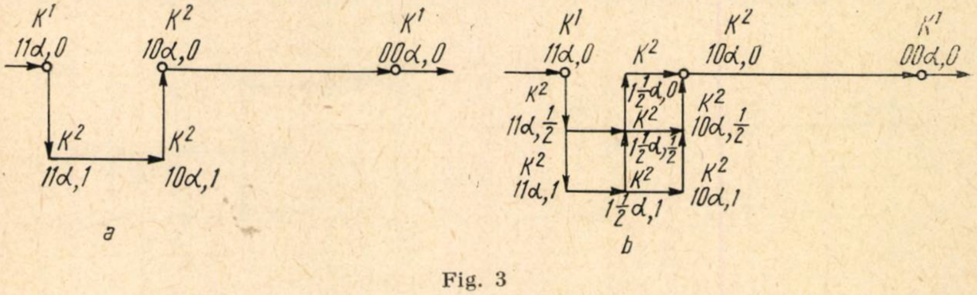


Fig. 3

Dacă în graful automatului studiat există un lanţ de comenzi de forma $K^1, K^2, K^1, \ldots$ care comandă eliberarea succesivă a unui alt releu, atunci releul S trebuie să intervină pentru fiecare nouă comandă în afară de ultima (deoarece comanda care mai urmează nu mai poate provoca o funcţionare necorectă).

b) În cazul automatelor autonome trebuie evitată evoluţia necorectă pentru evoluţiile de forma din figura 2*b*. După cum am văzut mai sus, în evoluţiile din figurile 2*c* şi *d* funcţionarea necorectă nu are loc dacă releele au întîrzieri la eliberare egale. Modul în care intervine releul S într-o evoluţie de forma din figura 2*b* este arătat pe figura 4*a*. Pentru curenţi, în presupunerea funcţionării ideale, obţinem tabloul 5.

Tabloul 5

$xy\ \alpha,s$	$XY,\ S$
$01\alpha,0$	$11\ ,0$
$11\alpha,0$	$11\ ,1$
$10\alpha,0$	
$11\alpha,1$	$10\ ,1$
$10\alpha,1$	$10\ ,0$

Formulele structurale ale circuitelor sînt

$$
\begin{aligned}
X^1 &= y^1\, s^0\, \alpha + x^1\, s^1\, \alpha + \ldots, \\
Y^1 &= y^1\, s^0\, \alpha + \ldots, \qquad (7)\\
S^1 &= x^1\, y^1\, \alpha + \ldots .
\end{aligned}
$$

Se constată că stările $xy\alpha = 11\alpha$, 10α se realizează sigur chiar dacă automatul funcţionează necorect. Evoluţiile necorecte care pot avea loc în acest caz sînt arătate pe figura 4 *b*.

c) În cazul automatelor în mai mulţi timpi funcţionarea corectă poate fi asigurată în felul următor.

În evoluţiile autonome care încep cu eliberarea unui releu se evită

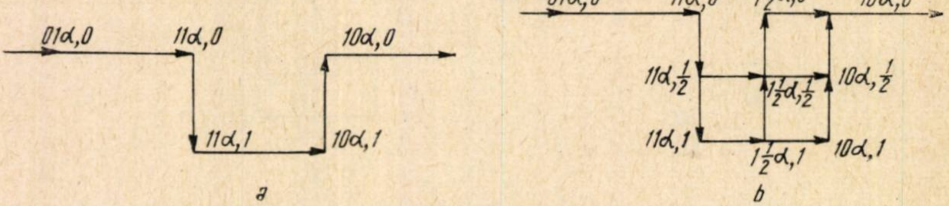


Fig. 4

funcţionarea necorectă dacă se pune condiţia ca evoluţia să înceapă cu operarea unui releu suplimentar S. Modul în care intervine acest releu este arătat pe figura 5*a*. Funcţionările necorecte posibile în acest caz pot fi urmărite pe figura 5*b*. După cum se vede, oricît de mare ar fi întîrzierea la eliberare a releului S se realizează succesiunea dorită a stărilor $K^2xy\alpha$. La fel ca și în cazul automatelor în doi timpi se poate arăta urmărind formulele structurale ale circuitelor că starea $K^2xy\alpha = K^2\,10\,\alpha$ se realizează în mod sigur. Acest lucru rezultă și direct din compararea figurilor 3 și 5.

După ce realizarea primei stări a unei evoluții autonome a fost asigurată în modul descris, se mai pot întîlni situații de felul din figura 2*b* pentru care se procedează în modul arătat mai înainte. În felul acesta va fi asigurată funcționarea corectă în toate evoluțiile autonome. Totodată va fi exclusă posibilitatea funcționării necorecte pentru evoluții de forma din figura 2*e* deoarece în toate situațiile de acest fel evoluțiile încep cu acționarea releului S adică după ce comenzile s-au schimbat.

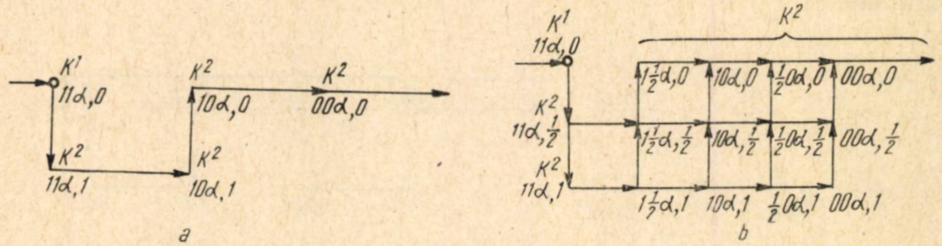


Fig. 5

Va mai rămîne de asigurat funcționarea corectă pentru situațiile ilustrate pe figura 2*a*, în care caz se procedează în modul descris mai înainte,

d) Vom arăta acum că pentru asigurarea funcționării corecte a unui automat este suficient un singur releu suplimentar.

Presupunem construit automatul A_i care satisface un program dat. Stările automatului A_i reprezentate de elementele produsului $(K \times Z)_N$ sînt distincte. Stările automatului A_r sînt : elementele produsului $(K \times Z \times$ $\times\, s)_N$ unde cu s am notat variabila bivalentă care descrie starea releului suplimentar utilizat pentru asigurarea funcționării corecte. Elementele acestui produs sînt de asemenea distincte. Se poate arăta că în automatul A_r nu există evoluții în care un element al produsului $(K \times Z \times s)_N$ să se repete. De aici rezultă că funcționarea corectă poate fi asigurată cu un singur releu suplimentar S.

Vom observa mai întîi că o stare a lui A_r se poate repeta numai dacă releul S trebuie să intervină de două ori la rînd. În acest caz se realizează un șir de stări de forma

$$\ldots,\ K^2Z^1s^1,\ K^2Z^1s^0,\ K^1Z^1s^1, \ldots \tag{8}$$

Dacă automatul este în doi timpi atunci avem $K^1 \neq K^2$ și stările nu se repetă. Evoluția descrisă este ilustrată pe figura 6 *a*.

Dacă evoluția studiată este autonomă avem $K^1 = K^2$ și starea $K^1Z^1s^1$ s-ar repeta dacă releul S ar trebui să intervină de două ori la rînd. Această situație nu poate avea însă loc. Într-adevăr se verifică ușor că cea mai mare frecvență de intervenție a lui S are loc într-una din următoarele situații :

— două evoluții succesive de forma din figura 2 *b*,

— o evoluție autonomă care începe cu eliberarea unui releu urmată de o evoluție de forma din figura 2*b*. După cum se vede din figurile 6*b* și *c* releul S intervine destul de rar astfel încît să nu existe stări ale lui A_r care să se repete.

Funcționarea corectă poate fi asigurată așadar cu un singur releu suplimentar.

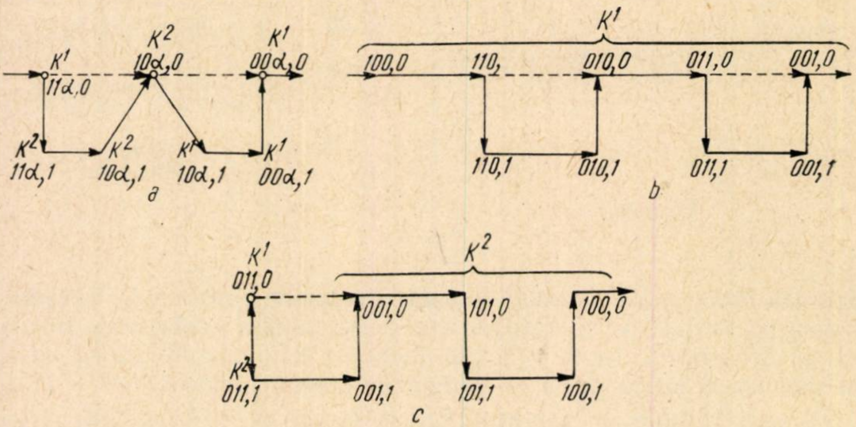


Fig. 6

4. ASIGURAREA FUNCȚIONĂRII CORECTE PRIN UTILIZAREA DE ASIGNĂRI TIP

Vom cerceta acum modul în care unele asignări tip pot fi folosite în vederea asigurării funcționării corecte.

a) În cazul cînd graful automatului este un lanț, funcționarea corectă are loc dacă se folosește o asignare în care la trecerea dintr-o stare internă Z^i în altă stare internă Z^i este operat un nou releu.

b) Dacă graful unui automat în doi timpi este un ciclu se poate utiliza o asignare în care pentru $n - 1$ stări interne succesive are loc operarea unui nou releu iar la revenirea în starea internă inițială toate releele sînt eliberate. Pentru asignare sînt necesare $n - 1$ relee.

Dacă graful unui automat autonom este un ciclu cu $2\,n$ stări interne se poate utiliza o asignare cu $n + 1$ relee în care releele sînt mai întîi operate succesiv iar apoi eliberate succesiv. Într-adevăr, presupunînd că $n = 3$ și că automatul funcționează ideal, vom obține ciclul de stări

(9) $$xyz = 000,\ 100,\ 110,\ 111,\ 011,\ 001.$$

Comparînd cu evoluția din figura 2 *b* deducem că este posibil ca releul Z să nu-și schimbe starea. Se va realiza deci în mod sigur ciclul de stări

(10) $$xy = 00,\ 10,\ 11,\ 01.$$

Așadar automatul A_r cu trei relee X, Y, Z acționate în conformitate cu ciclul (9) este funcțional echivalent cu un automat A_i cu două relee X, Y acționate în conformitate cu ciclul (10). Menționăm că releul Z poate fi aici interpretat ca jucînd rolul releului suplimentar utilizat mai sus la p. 3.

c) Dacă graful unui automat autonom sau în doi timpi este un lanț urmat de un ciclu se poate construi asignarea cu ajutorul a $n_1 + n_2$ relee în care primele n_1 relee intervin pentru stările lanțului (și rămîn operate pentru stările ciclului) iar ultimele n_2 relee intervin pentru stările ciclului.

d) Asigurarea funcționării corecte a automatelor în doi timpi avînd un graf oarecare poate fi realizată cu ajutorul unei asignări tip dată de D. A. Huffman. În această asignare se utilizează un număr de relee intermediare egal cu numărul n de stări interne distincte ale automatului A_i. Aceste stări interne se notează după cum urmează :

$$\begin{array}{ll}
1 & 1000 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\
2 & 0100 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
i & 0000 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
j & 0000 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 0 \\
\multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
n & 0000 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 1
\end{array}$$

Trecerea din starea i în starea j are loc prin intermediul stării nestabile.

$$0000 \ldots 1 \ldots 1 \ldots 0$$

care reprezintă suma modulo doi a numerelor cu care sînt notate stările i și j.

În timpul funcționării automatului se realizează sigur stările diferite din tabloul anterior. Stările nestabile pot să nu se realizeze deoarece la trecerea dintr-o stare stabilă în altă stare stabilă are loc o evoluție autonomă de forme din figura 2 *b*.

e) Dacă graful unui automat în doi timpi este un lanț sau un ciclu cu $2n$ stări dinstincte, se poate realiza o asignare care se deduce din cea precedentă dacă între stările din tablou introducem și stările intermediare (care acum sînt utilizate ca stări stabile). În acest caz automatele A_r și A_i sînt identice.

Observăm însă că pentru $n = 2$ o asemenea asignare nu poate fi construită.

f) O asignare analogă cu cea dată de D. A. Huffman se poate obține în felul următor.

Fie n numărul de relee intermediare. Stările în care p respectiv $p + 1$ relee intermediare sînt acționate sînt în număr de C_n^p respectiv C_n^{p+1}. Construim un graf în care nodurile sînt elementele lui C_n^p și C_n^{p+1} iar arcele unesc nodurile vecine, adică nodurile care diferă prin starea unui singur element intermediar. Vom nota acest graf $G(n, p, p+1)$.

Fie G_r graful redus al unui automat în doi timpi adică graful care se obține identificînd nodurile reprezentînd stările interne identice. Dacă graful redus G_r este un subgraf al grafului $G(n, p, p+1)$ atunci asignarea automatului studiat se obține identificînd stările lui interne cu stările corespunzătoare ale lui $G(n, p, p+1)$.

Drept exemplu să considerăm graful $G(4, 2, 3)$ din figura 7. Constatăm că el are în calitate de subgraf ciclul

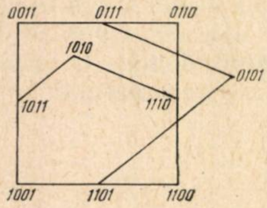


Fig. 7

0011, 0111, 0110, 1110, 1100, 1101, 1001, 1011.

care poate fi utilizat pentru asigurarea unui graf G_r reprezentînd un ciclu cu opt stări.

g) În încheiere vom cerceta modul în care asignările de la subpunctele *d* și *f* pot fi utilizate în cazul automatelor autonome. Considerăm cazul cînd graful este un ciclu (cazul cînd graful este un lanț se studiază în mod similar).

Deoarece în asignările menționate are loc operarea și eliberarea alternativă a altor relee deducem că automatele A_r corespunzătoare pot funcționa necorect și anume releele automatului nu-și schimbă în mod sigur starea. Este sigur numai că ele părăsesc succesiv starea de repaus. Rezultă de aici că intervalele de timp cît releele se află în stare de repaus se succed ca pe figura 8. În timpul funcționării automatului se realizează sigur șirurile de stări.

$$\begin{array}{l} x^0,\ y^0,\ z^0,\ v^0, \ldots \\ x^0y^0,\ y^0z^0,\ z^0v^0, \ldots \end{array} \tag{11}$$

Stările primului șir sînt distincte (dar nu diferite). Stările celui de-al doilea șir sînt distincte sau diferite după cum intervalele cît durează x^0 și z^0, y^0 și v^0 etc. au intersecție nevidă sau nu. Dacă numărul total de relee crește iar numărul de relee acționate concomitent scade se pot realiza și stări de forma $x^0y^0z^0$ etc. Numărul total de stări distincte (eventual diferite) care se realizează sigur este egal cu numărul de relee intermediare.

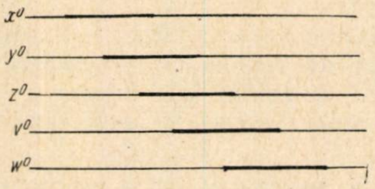


Fig. 8

5. ASIGURAREA FUNCȚIONĂRII CORECTE PRIN UTILIZAREA DE CONTACTE DE UN SINGUR TIP

Să presupunem că un buton are numai contacte de lucru. În acest caz la trecerea din starea de repaus în starea de lucru, butonul poate comanda acționarea unui releu, iar la trecerea din starea de lucru în starea de repaus butonul poate comanda dezacţionarea unui releu. Butonul nu va putea comanda dezacţionarea unui releu la trecerea din starea de repaus în cea de lucru şi nu va putea comanda acţionarea unui releu la trecerea din starea de lucru în starea de repaus.

Ţinînd seamă de cele spuse deducem că dacă un buton comandă acţionarea unui releu la trecerea din starea de repaus în cea de lucru atunci la trecerea din starea de lucru în cea de repaus, trebuie fie să menţină starea internă a automatului fie să comande dezacţionarea unui releu.

În ultimul caz dacă acelaşi buton, de exemplu B, acţionează şi dezacţionează întotdeauna acelaşi releu, de exemplu X_B, se obţine pentru X_B un automat cu comandă directă şi problema discontinuităţii se pune pentru releul X_B, care poate fi interpretat ca element de comandă. În felul acesta problema funcţionării reale se reduce la cazurile precedente.

Altă situaţie are loc dacă punem condiţia ca un acelaşi buton B să comande la trecerea din starea de repaus în cea de lucru un releu iar la trecerea din starea de lucru în cea de repaus un alt releu.

Se obţine atunci un automat în care apar numai contacte de lucru ale butonului B iar problema discontinuităţii circuitelor nu se pune. Nu cunoaştem o metodă generală de construire de asignări care să satisfacă condiţiile enumerate mai sus.

6. ASIGURAREA FUNCŢIONĂRII REALE PRIN UTILIZAREA DE AUTOMATE AUXILIARE

Avînd în vedere că funcţionarea necorectă se datoreşte faptului că la trecerea dintr-o poziţie în alta a unui buton sau releu are loc întreruperea continuităţii contactelor lui se poate pune problema construirii unui automat auxiliar care să evite discontinuităţile semnalate.

Fie pentru aceasta graful din figura 9 al unui automat comandat de butonul A şi avînd două relee executive X_A şi Y_A

Utilizînd pentru asignare chiar releele X_A şi Y_A obţinem pentru curenţi tabloul 6.

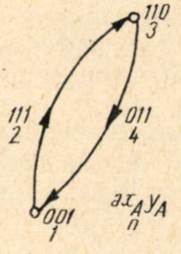


Fig. 9

Tabloul 6

		a		
		0	1	
	00			
	10	11,4	10,3	
$x_A\ y_A$	11	01,1	10,3	$X_A\ Y_A$, n
	01	01,1	11,2	

Formulele structurale ale circuitelor sînt

$$X_A^1 = a^1 + y^0, \quad Y_A^1 = a^0 + x^0.$$

Circuitele sînt arătate pe figura 10.

Analiza funcționării acestui automat arată că independent de întîrzierile la acționare a releelor X_A și Y_A potențialele ieșirilor e_1 și e_2 se schimbă „prin continuitate'' adică nu există momente în care ambele potențiale să fie nule. Automatul descris are o funcționare echivalentă cu a unui buton sau releu echipat cu contacte speciale.

Pentru asigurarea funcționării corecte a unui automat este suficient

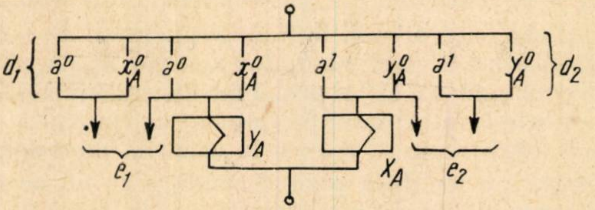


Fig. 10

să înlocuim contactele butoanelor și releelor din circuitele care prezintă discontinuități, prin dipoli d_1 sau d_2. Locul unde trebuie introduși dipolii d_1 și d_2 se determină în felul următor.

a) Fie o evoluție de forma din figura 2*a* a unui automat în doi timpi. Pentru asigurarea funcționării corecte este suficient de înlocuit prin dipolul corespunzător contactul acelui buton de comandă din circuitul de alimentare al releului Y (v. fig. 3*a* și tabloul 1) a cărui acționare sau dezacționare provoacă eliberarea lui Y. În felul acesta alimentarea releului Y va fi întreruptă numai după ce starea butonului s-a schimbat și alimentarea releului X este asigurată prin termenul $x^1 \alpha K^2$ din (2).

b) Fie acum o evoluție de forma din figura 2*b* a unui automat autonom. Funcționarea corectă se asigură înlocuind prin dipolul corespunzător contactul x^0 din circuitul de alimentare ale releului Y(v.fig. 3*b* și tabloul 2). În acest fel întreruperea alimentării releului Y are loc numai după ce releul X și-a schimbat starea.

c) Fie, în sfîrșit, un automat în mai mulți timpi. Considerăm mai întîi o evoluție autonomă care începe cu eliberarea unui releu (v.fig.5*a*). Pentru asigurarea funcționării corecte se procedează la fel ca la subpunctul *a*). Apoi se asigură la fel ca la subpunctul *b*) funcționarea corectă pentru evoluțiile autonome de forma din figura 2*b*. În sfîrșit mai rămîn (eventual) evoluții în doi timpi de forma din figura 2*a* pentru care se procedează ca la subpunctul *a*).

Utilizarea de automate auxiliare conduce evident la o creștere foarte mare a numărului de relee și de aceea nu prezintă interes decît pentru automatele cu număr mic de butoane de comandă și relee intermediare.

7. EXEMPLE

Considerăm mai jos cîteva exemple care ilustrează procedeele de asigurare a funcționării corecte expuse mai înainte. Pentru fiecare exemplu dăm deobicei graful automatului A_i, graful automatului A_r funcțional echivalent și circuitele automatului A_r. La deducerea formulelor structurale ale circuitelor am utilizat procedeul lui D.A.Huffman. Pentru simplificarea formulelor structurale ale circuitelor am folosit și stări ale automatelor A_r care nu se realizează în mod efectiv în timpul funcționării lor.

Exemplul 1

Pe figura 11 *a* este arătat graful unui automat A_i reprezentînd un contor în baza doi și echipat cu două relee intermediare X și Y. Circuitele sînt arătate pe figura 12 *a*. Funcționarea necorectă poate avea loc la trecerea automatului din starea internă 11 în starea internă 10.

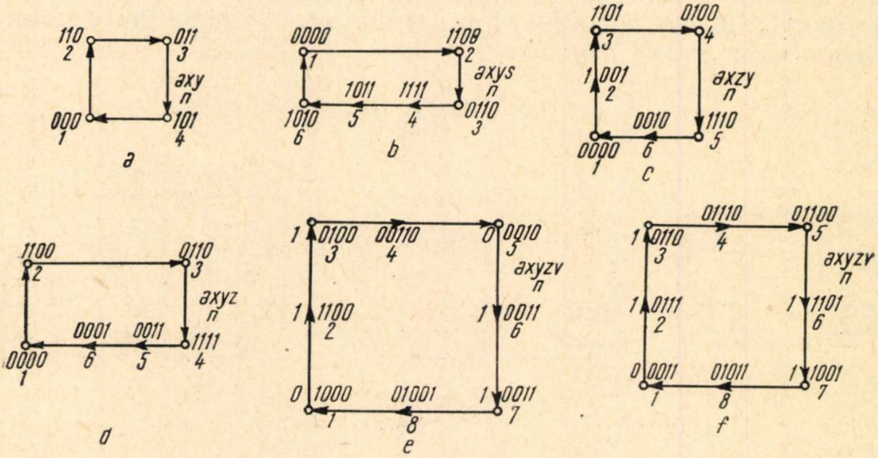

110
2
011
3
axy
n
000
1
101
4
a
0000
1
1100
2
axys
n
1011
1111
1010
6
5
4
0110
3
b
1101
3
0100
4
1
001
2
axzy
n
0010
1110
0000
1
6
5
c
1100
2
0110
3
axyz
n
0001
0011
1111
0000
1
6
5
4
d
1
0100
3
00110
4
0
0010
5
axyzv
n
1
1100
2
1
0011
6
0
1000
1
01001
8
1
0011
7
e
01110
01100
1
0110
3
4
5
axyzv
n
1
0111
2
1
1101
6
0
0011
1
01011
8
1
1001
7
f

Fig. 11

Dacă se utilizează un releu suplimentar S se obține un automat A_r avînd graful din figura 11 *b* și circuitele din figura 12 *b*. În timpul funcționării se realizează sigur patru stări diferite

$$xy = 00,\ 10,\ 11,\ 01.$$

Dacă se pune condiția ca în circuite să apară numai contactele de lucru ale butonului de comandă A se obține graful A_r din figura 11 *c* și circuitele din figura 12 *c*. În timpul funcționării se realizează sigur patru stări diferite

$$xyz = 000,\quad 101,\quad 100,\quad 110.$$

Utilizînd o asignare în care are loc mai întîi acționarea succesivă a trei relee iar apoi eliberarea lor se obține un automat A_r avînd graful din figura 11 *d* iar circuitele din figura 12 *d*. În timpul funcționării automatului se realizează sigur patru stări diferite

$$xyz = 000,\ 100,\ 110,\ 111.$$

Cu ajutorul a două asignări în care operarea şi eliberarea releelor alternează se obţin automatele A_r din figurile 11 *e* şi *f* şi avînd circuitele din figura 12 *e* şi *f*. În timpul funcţionării celor două automate se realizează sigur stările diferite

$$xyzv = 1000,\ 0100,\ 0010,\ 0001,\ 0001,$$

$$xyzv = 0011,\ 0110,\ 1100,\ 1001.$$

Dacă, în sfîrşit, se utilizează un automat auxiliar pentru butonul A se obţine un automat A_r avînd circuitele din figura 12 *g*. Menţionăm că pentru asigurarea funcţionării reale este necesar numai dipolul d_1. În locul dipolului d_2 s-ar putea folosi un contact a^1. În timpul funcţionării se realizează sigur stările diferite :

$$xy = 00,\ 10,\ 11,\ 01.$$

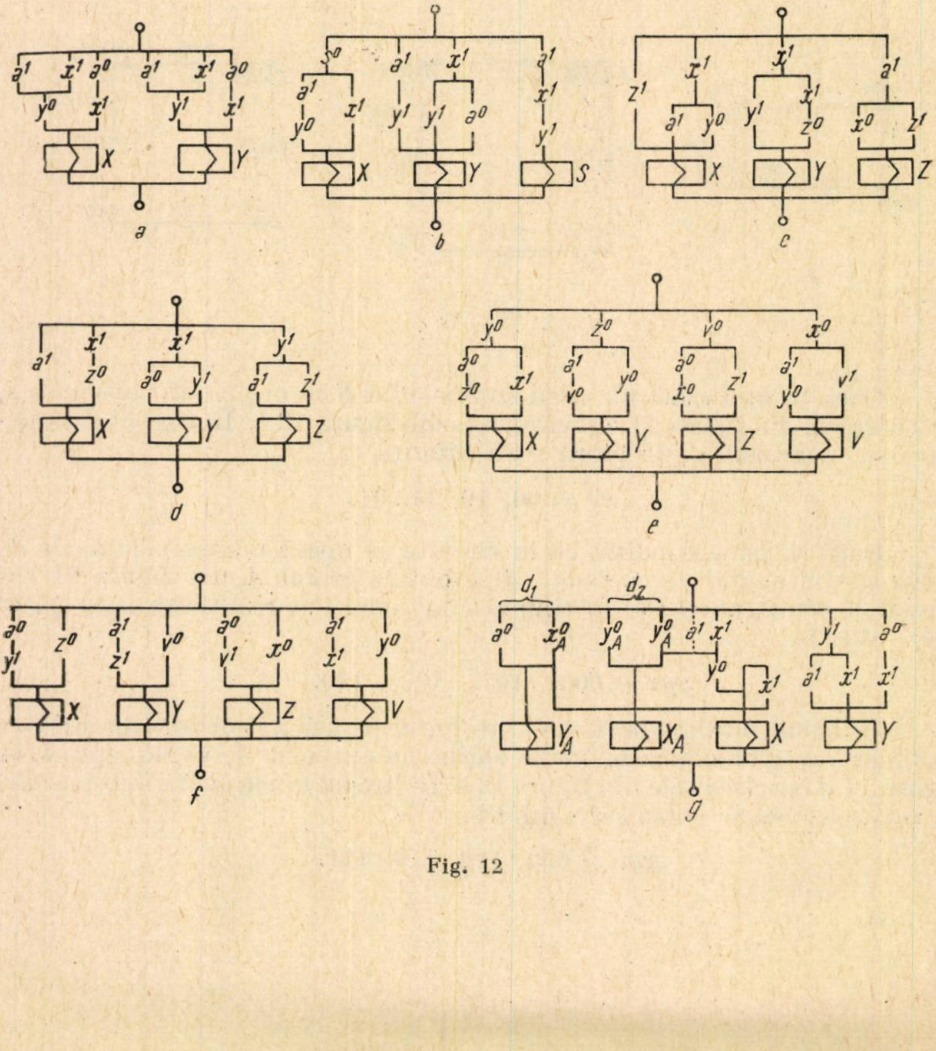

a^1 x^1 a^0 a^1 x^1 a^0
y^0 x^1 y^1 x^1
X
Y
a
a^0 a^1 x^1 a^1
a^1 x^1 y^0 y^1 y^1 a^0 x^1 y^1
X
Y
S
b
x^1 x^1 a^1
z^1 a^1 y^0 y^1 x^1 z^0 x^0 z^1
X
Y
Z
c
x^1 x^1 y^1
a^1 z^0 a^0 y^1 a^1 z^1
X
Y
Z
d
y^0 z^0 v^0 x^0
a^0 x^1 z^0 a^1 v^0 y^0 a^0 x^0 z^1 a^1 y^0 v^1
X
Y
Z
V
e
a^0 z^0 a^1 v^0 a^0 x^0 a^1 y^0
y^1 z^1 v^1 x^1
X
Y
Z
V
f
d_1
d_2
a^0 x^0_A y^0_A y^0_A a^1 x^1 y^1 a^0
y^0 x^1 a^1 x^1 x^1
Y_A
X_A
X
Y
g

Fig. 12

Exemplul 2

În cazul automatului A_i avînd graful din figura 13 *a* starea $x = 1$ poate să nu se realizeze după cum rezultă din analiza schemei din figura 14 *a*. Menţionăm că acest automat este soneria electrică.

Dacă se utilizează un releu suplimentar S se obţine un automat A_r avînd graful din figura 13 *b* şi circuitele din figura 14 *b*. În timpul funcţionării se realizează sigur stările diferite

$$x^\circ,\ x^1,$$

dacă releul X are o întîrziere la eliberare suficient de mică în comparaţie cu a lui S.

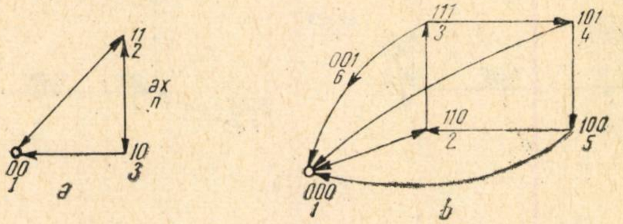


Fig. 13

Construind pentru releul X un automat auxiliar se obţine un automat A_r avînd circuitele din figura 14*c*.

În timpul funcţionării lui se realizează sigur stările diferite

$$x^\circ,\ x^1.$$

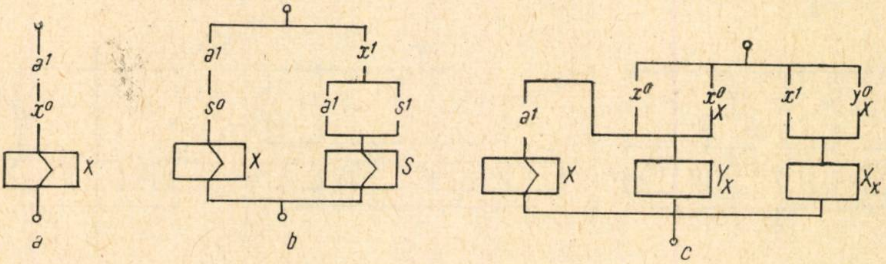


Fig. 14

Exemplul 3

Fie automatul A_i avînd graful din figura 15 *a* şi circuitele din figura 16 *a* în care starea $xy = 11$ poate să nu se realizeze.

Dacă se utilizează un releu suplimentar S se obţine un automat A_r avînd graful din figura 15 *b* şi circuitele din figura 16 *b*. În timpul funcţionării se realizează sigur stările diferite:

$$xy = 00,\ 10,\ 11,\ 01$$

Utilizînd două asignări în care are loc operarea și eliberare alternativă a unui alt releu se obțin două automate A_r avînd grafurile din figurile 15 *c* și *d* și circuitele din figurile 16 *c* și *d*. După cum rezultă din graficul

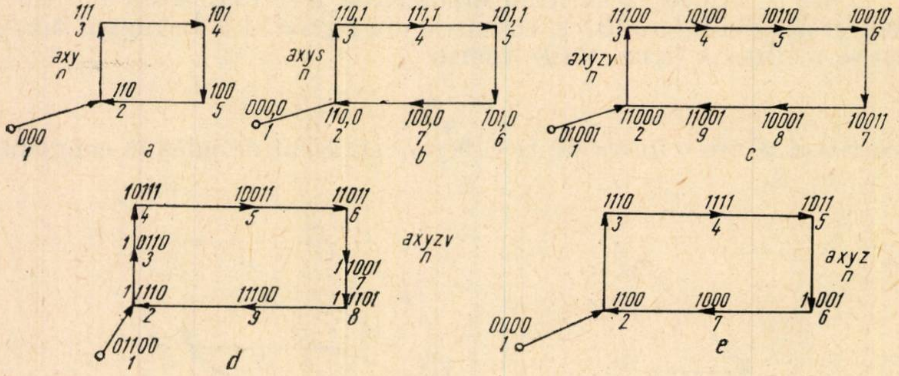

111
3
101
4
axy
n
110
2
100
5
000
1
a
110,1
3
111,1
4
101,1
5
axys
n
000,0
1
110,0
2
100,0
7
101,0
6
b
11100
3
10100
4
10110
5
10010
6
axyzv
n
01001
1
11000
2
11001
9
10001
8
10011
7
c
10111
4
10011
5
11011
6
1 0110
3
1 1110
2
11100
9
1 1001
7
1 1101
8
01100
1
d
axyzv
n
1110
3
1111
4
1011
5
axyz
n
0000
1
1100
2
1000
7
1 001
6
e

Fig. 15

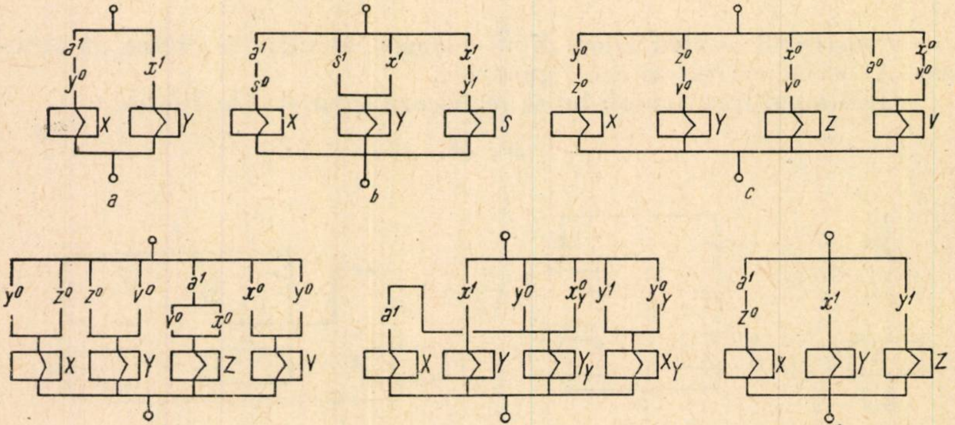

a¹
y⁰
x¹
X
Y
a
a¹
s⁰
s¹
x¹
x¹
y¹
X
Y
S
b
y⁰
z⁰
z⁰
v⁰
x⁰
v⁰
a⁰
x⁰
y⁰
X
Y
Z
V
c
y⁰
z⁰
z⁰
v⁰
a¹
v⁰
x⁰
x⁰
y⁰
X
Y
Z
V
d
a¹
x¹
y⁰
x⁰_Y
y¹
y⁰_Y
X
Y
Y_Y
X_Y
e
a¹
z⁰
x¹
y¹
X
Y
Z
f

Fig. 16

din figura 17 *a* în timpul funcționării primului automat se realizează sigur șirurile de stări distincte

$$y^\circ,\ z^\circ,\ v^\circ,\ x^\circ,\ \ldots$$

$$y^\circ z^\circ,\ z^\circ v^\circ,\ x^\circ v^\circ,\ x^\circ y^\circ,\ \ldots$$

și șirul de stări diferite:

$$y^\circ z^\circ v^\circ,\quad x^\circ z^\circ v^\circ,\quad x^\circ y^\circ v^\circ,\quad x^\circ y^\circ z^\circ,\quad \ldots$$

În timpul funcţionării celui de-al doilea automat din figura 17 rezultă că se realizează sigur şirul de stări distincte

$$z^\circ,\ v^\circ,\ x^\circ,\ y^\circ,\ \ldots$$

şi şirul de stări diferite

$$z^\circ v^\circ,\ x^\circ v^\circ,\ x^\circ y^\circ,\ y^\circ z^\circ,\ \ldots$$

Dacă se construieşte pentru releul Y un automat auxiliar se obţine

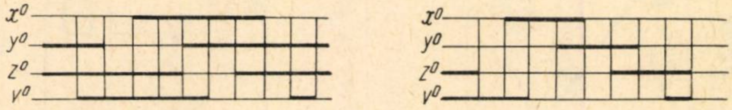


Fig. 17

un automat A_r avînd circuitele din figura 16 *e*. În timpul funcţionării se realizează sigur stările diferite

$$xy = 00,\ 10,\ 11,\ 01.$$

În sfîrşit dacă se utilizează o asignare în care sînt acţionate succesiv trei relee după care urmează eliberarea lor se obţine graful din figura 15 *e* şi circuitele din figura 16 *f*. În timpul funcţionării se realizează sigur stările diferite

$$xy = 00,\ 10,\ 11,\ 01.$$

Exemplul 4

În automatul A_i avînd graful din figura 18 *a*, circuitele automatului pot fi obţinute din cele din figura 19 *a* dacă se elimină ramura $y^1z^1s^\circ$ din circuitul lui Y şi circuitul releului S. Funcţionarea necorectă este posibilă datorită existenţei şirului de stări

$$abxyz = 01\,011,\ 00\,001,\ 01000.$$

Cu ajutorul unui releu suplimentar S se obţine un automat avînd graful din figura 18 *b* şi circuitele din figura 19*a*. În timpul funcţionării se realizează sigur stările diferite definite de variabilele x, y, z.

Dacă se utilizează asignarea lui D.A.Huffman se obţine graful din figura 18 *c* şi circuitele din figura 19*b*. În timpul funcţionării se realizează sigur stările stabile diferite definite de variabilele x, y, z, v.

Exemplul 5

Pentru automatele reprezentînd contori într-o bază $n \neq 2$ dacă se utilizează asignări de tip D.A.Huffman în care se folosesc şi stările intermediare se obţin automate A_i cu funcţionare corectă. În circuitele releelor apar numai contacte de acelaşi tip.

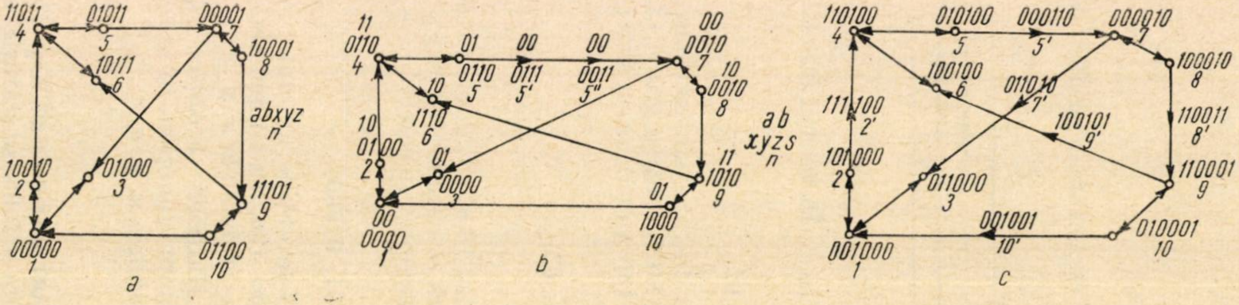

11011 4
01011 5
00001 7
10001 8
10111 6
abxyz n
10010 2
01000 3
11101 9
00000 1
01100 10
a
11 0110 4
01 0110 5
00 0111 5'
00 0011 5''
00 0010 7
10 0010 8
10 1110 6
10 0100 2
01 0000 3
00 0000 1
11 1010 9
01 1000 10
ab xyzs n
b
110100 4
010100 5
000110 5'
000010 7
100010 8
100100 6
011010 7'
111100 2'
100101 9'
110011 8'
101000 2
011000 3
110001 9
001001 10'
010001 10
001000 1
c

Fig. 18

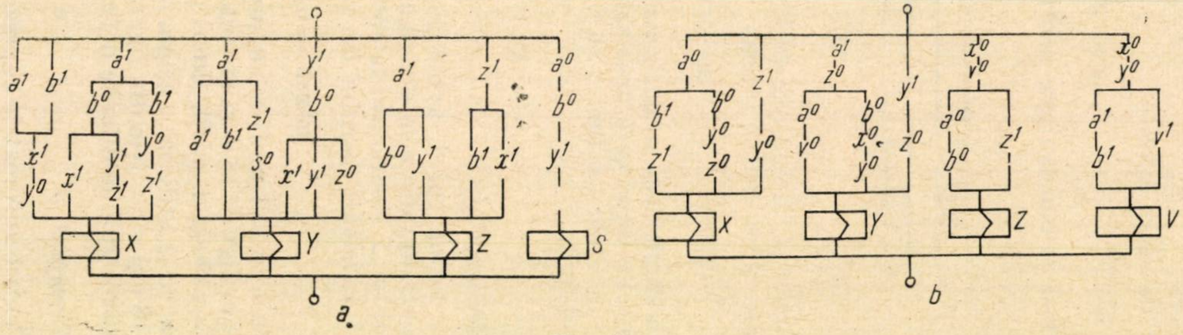
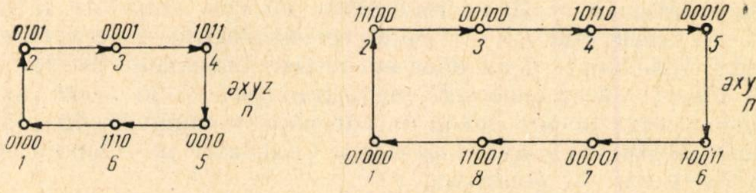

a
X
Y
Z
S
b
X
Y
Z
V

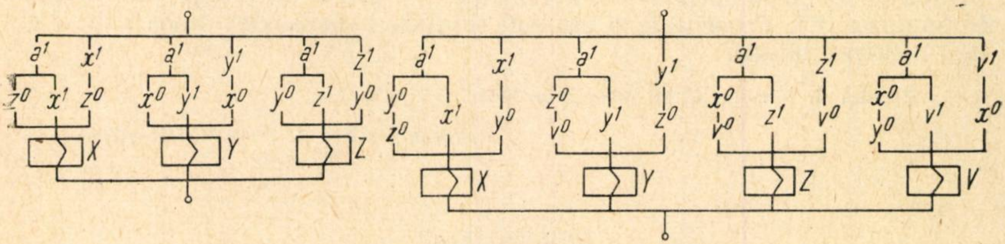
Fig. 19

Într-adevăr dacă butonul este acționat (eliberat) el comandă acționarea (eliberarea) unui releu iar dacă este eliberat (acționat) el comandă eliberarea (acționarea) unui releu, așa încît sînt satisfăcute condițiile enunțate la p. 6.

Pentru $n = 3$ și $n = 4$ se obțin automate $A_i = A_r$ ale căror grafuri sînt arătate pe figurile 20*a* și *b* iar circuitele pe figurile 21*a* și *b*. În timpul funcționării se realizează sigur toate stările acestor automate A_i.


0101
0001
1011
2
3
4
∂xyz
n
0100
1110
0010
1
6
5
11100
00100
10110
00010
2
3
4
5
∂xyzv
n
01000
11001
00001
10011
1
8
7
6

a Fig. 20 *b*


a¹
x¹
a¹
y¹
a¹
z¹
z⁰
x¹
z⁰
x⁰
y¹
x⁰
y⁰
z¹
y⁰
X
Y
Z
a¹
x¹
a¹
y¹
a¹
z¹
a¹
v¹
y⁰
z⁰
x¹
y⁰
z⁰
v⁰
y¹
z⁰
x⁰
v⁰
z¹
v⁰
x⁰
y⁰
v¹
x⁰
X
Y
Z
V

a Fig. 21 *b*

8. ÎNCHEIERE

Compararea diferitelor soluții din exemplele citate arată că în cazul automatelor cu număr mic de relee procedeele de asigurare a funcționării corecte descrise mai sus duc la circuite de complexitate inegală și în consecință alegerea soluției optime nu se poate face decît prin construirea tuturor soluțiilor. Eficacitatea procedeelor descrise pentru cazul unui număr mare de relee rămîne o problemă deschisă.

În tot cuprinsul acestei expuneri am presupus simultaneitatea schimbării de stare a contactelor de repaus sau de lucru ale unui acelaș releu sau buton. În realitate schimbările de stare ale contactelor nu sînt simultane. Să cercetăm în ce condiții această nesimultaneitate nu are efect asupra funcționării corecte a automatelor descrise. Fie pentru aceasta un releu R sau un buton B. La trecerea lui R sau B din starea de repaus în cea de lucru, contactele de repaus se deschid în intervalul (t_{01}, t_{02}) iar contactele de lucru se închid în intervalul (t_{11}, t_{12}). Releele și butoanele automatului fiind echipate cu contacte ordinare avem

$$t_{11} > t_{02}$$

Dacă $\Delta_1 = t_{02} - t_{01}$ este mai mic decît întîrzierea la eliberare a releelor comandate de R sau B atunci în momentul t_{02} configurația stărilor releelor automatului va fi aceeași ca și în cazul cînd toate contactele lui R sau B s-ar fi deschis simultan. În mod analog dacă $\Delta_2 = t_{12} - t_{11}$ este mai mic decît întîrzierea la operare a releelor comandate de R sau B atunci în momentul t_{12} configurația stărilor releelor automatului va fi aceeași ca și în cazul cînd toate contactele lui R sau B s-ar fi închis simultan.

Dacă releul R sau butonul B trece din starea de lucru în cea de repaus sînt valabile condiții asemănătoare cu cele enunțate mai sus. În cazul releelor aceste condiții sînt de obicei satisfăcute. În cazul butoanelor ele nu vor fi satisfăcute decît dacă acționarea butoanelor are loc suficient de rapid. Funcționarea necorectă poate fi evitată și în acest caz dacă se construiește pentru fiecare buton un automat cu comandă directă comandat de butonul studiat și avînd ca element executiv un releu cu un număr suficient de mare de contacte.

Menționăm că de problema asigurării funcționării corecte prin utilizarea de asignări speciale s-a ocupat pentru prima dată ing. Gh. Ioanin în lucrarea [6]. Procedeele și implicit soluțiile noastre sînt diferite de cele din lucrarea citată.

Primită la redacție la 15 octombrie 1965

Institutul de Petrol, Gaze și Geologie,
București

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Edit. tehnică, 1959.
2. S. A. CALDWELL, *Switching circuits and logical design.* John Willey and Son. inc., New York, 1958.
3. I. NASLIN, *Circuits à relais et automatismes à sèquences.* Paris, Dunod, 1958.
4. GR. C. MOISIL, GH. IOANIN, *Asupra funcționării schemelor cu butoni reali.* Bul. științific. Acad. R.P.R., Secția mat. și fiz., **VII**, *1* (1955).
5. L. LIVOVSCHI, *Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice.* Edit. Acad. R.P.R., București, 1963.
6. GH. IOANIN, *Contribuțiuni la studiul schemelor funcționînd cu contacte reale* (sub tipar). Comunicare făcută la Simpozionul de la Moscova, 1957.

ASUPRA SISTEMELOR TRIPLE DE CURBE ÎN SPAȚIUL PROIECTIV

DE

FROIM MARCUS

Se arată că unele rezultate din [5] se găsesc în [1]. Folosind considerațiile geometrice din cel de-al treilea paragraf din [1] se obțin noi rezultate asupra sistemelor triple de curbe. Fără a folosi conurile lui Malus și cuadrice locale se caracterizează sistemele triple considerate în [5].

1. Geometria proiectivă diferențială a ternelor de congruențe de curbe sau pe scurt *sisteme triple de curbe* a fost edificată de Fubini într-un memoriu din 1937 [1] și care culminează cu introducerea ca și în cazul teoriei suprafețelor și hipersuprafețelor, a *elementului liniar proiectiv al unui sistem triplu*. În [1] Fubini introduce simboluri cu 3 și 4 indici, arătînd că primele sînt analoge simbolurilor lui Christoffel de speța a doua, din geometria metrică, iar cele cu patru indici se reduc într-un caz particular la simbolurile cu patru indici ale lui Riemann.

În [2] E. Bortolotti arată că teoria lui Fubini se leagă de studiul conexiunilor proiective și al suprafețelor neolonome X_3^2 din S_3, atașînd în acest scop cuadrice și conuri locale. Ulterior A. Maxia s-a ocupat în [3] de un sistem triplu particular, folosind rezultatele lui Fubini. Recent Gh. Gheorghiev și I. Popa studiază în [4] unele varietăți în general neolonome din S_3 proiectiv, precum și unele cazuri particulare remarcabile de sisteme triple, iar T. Mihăilescu se ocupă exclusiv în [5] de sistemele triple.

În introducere T. Mihăilescu afirmă : „L'étude des systèmes triples non holonomes a été initiée au point de vue projectif par G. Fubini sous son aspect de réseau triple et a été continuée par E. Bortolotti qui a considéré les V_3^2 composantes et par A. Maxia dans un cas particulier. En reprenant l'étude différentielle projective de ces systèmes nous traiterons la question en appliquant d'une manière rigoureuse la méthode du repère

ST. CERC. MAT., TOM. 18 NR. 2, P. 205–218, BUCUREȘTI, 1966

mobile telle que nous l'avons présentée dans un traité récemment paru et en ajoutant de nombreux compléments aux résultats établis par nos prédecesseurs."

Unul din scopurile prezentei lucrări este acela de a arăta cum unele rezultate din [5] se găsesc în [1]. De asemenea, lucrarea va completa unele rezultate ale lui Fubini, şi va caracteriza sistemele triple considerate în [5], fără a folosi conurile lui Malus şi cuadrice locale. Pentru claritate, vom reproduce unele rezultate fundamentale din [1].

2. Fie x_0 un punct generic din S_3 proiectiv şi K_α trei congruenţe de curbe C_α ($\alpha = 1, 2, 3$) care formează un sistem triplu, adică astfel încît prin x_0 trece numai una din curbele fiecărei congruenţe K_α, iar tangentele lor, t_α, nu sînt coplanare.

Fie (x_0, x_1, x_2, x_3) reperul proiectiv ataşat în x_0 sistemului triplu, x_α fiind puncte luate pe t_α şi distincte de punctul x_0.

Cu ξ_β ($\beta = 1, 2, 3$) notăm planele tangente la curbele C_α ($\alpha \neq \beta$). Ecuaţiile

$$dx_i = \omega_{i0}x_0 + \omega_{i1}x_1 + \omega_{i2}x_2 + \omega_{i3}x_3, \quad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

(şi omoloagele în y, z, t) determină pfaffienii ω_{ij}. Punctul x_0 putîndu-se mişca liber în spaţiu, pfaffienii $\omega_{0\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) sînt liniar independenţi şi Fubini exprimă toţi ceilalţi pfaffieni cu simbolurile cu 3 indici după formula

$$\omega_{ij} = \sum_\alpha \begin{pmatrix} i\ j \\ \alpha \end{pmatrix} \omega_\alpha \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3). \tag{2.2}$$

Simbolurile

$$\begin{pmatrix} 0\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.3}$$

cu $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1$ sau 0, după cum $\alpha = \beta$ şi $\alpha \neq \beta$.

Aşa cum se arată în [1], simbolurile $\begin{pmatrix} i\ \alpha \\ j \end{pmatrix}$ determină congruenţele K_α dar nu şi viceversa (căci date fiind coordonatele x şi x' a două puncte P şi P', dreapta este determinată, dar dacă se dă punctul P de exemplu şi dreapta, coordonatele x, x' sînt nedeterminate). Pfaffienii ω_α şi simbolurile cu trei indici nu se pot alege în mod arbitrar, căci pfaffienii trebuie să fie liniar independenţi, trebuie să aibă loc condiţiile (2.3) şi trebuie să mai fie verificate condiţiile de integrabilitate ale sistemului (2.1).

Din studiul nedeterminărilor posibile, Fubini arată că expresiile

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \beta \end{pmatrix}, & \beta \neq \alpha; \quad \beta \neq \gamma \\ \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}, & \begin{array}{l} \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \end{array} \end{cases} \tag{2.4}$$

sînt *toţi invarianţi relativi ai unui sistem triplu şi care se transformă după formulele* :

$$\left\{\begin{aligned} &(2.5_1) && \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{bmatrix} = \binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\sigma_0\sigma_\beta}{\sigma_\alpha\sigma_\gamma} && \beta\neq\alpha;\ \beta\neq\gamma,\\ &(2.5_2) && \begin{bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \gamma\end{bmatrix} = \left[\binom{\alpha\beta}{\beta} - \binom{\alpha\gamma}{\gamma}\right]\frac{\sigma_0}{\sigma_\alpha} && \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha,\end{aligned}\right.$$

(σ_0, σ_α fiind nişte factori de normare arbitrari), în timp ce expresiile :

$$\binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{(\beta)}{\gamma(\beta)(\alpha)},\qquad \beta\neq\alpha;\ \beta\neq\gamma, \tag{2.6}$$

unde (α) *indică o permutare pară a indicilor 1, 2, 3 şi funcţiile lor sînt invarianţii absoluţi ai unui sistem triplu.*

Printre aceştia, Fubini indică ca importanţi invarianţii

$$\binom{\beta\beta}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\beta}^2;\ \binom{\gamma\gamma}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\gamma}^2 \qquad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha \tag{2.7}$$

şi invariantul

$$\frac{\binom{\gamma\gamma}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\beta\beta}{\gamma}}{\binom{\gamma\gamma}{\beta}\binom{\beta\beta}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\gamma}}, \tag{2.8}$$

numit de Fubini invariantul lui *Ceva-Menelao* şi care are numai două valori, una reciproca celeilalte, după cum permutarea indicilor α, β, γ, este pară sau impară.

În sfîrşit, Fubini introduce forme diferenţiale şi arată că

$$(2.9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\binom{\alpha\gamma}{\beta}\frac{\omega_\alpha\,\omega_\gamma}{\omega_\beta}, && \beta\neq\alpha;\ \beta\neq\gamma,\\ &\left[\binom{\alpha\beta}{\beta} - \binom{\alpha\gamma}{\gamma}\right]\omega_\alpha && \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha,\end{aligned}\right.$$

sînt *covarianţii absoluţi ai unui sistem triplu.*

Dintre aceştia se pun în evidenţă în [1] formele

$$\binom{\beta\beta}{\alpha}\omega_\beta^2 + \left[\binom{\beta\gamma}{\alpha} + \binom{\gamma\beta}{\alpha}\right]\omega_\gamma\omega_\beta + \binom{\gamma\gamma}{\alpha}\omega_\gamma^2, \tag{2.10}$$

$\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$, care anulate, definesc în planele ξ_α cîte două direcţii numite de Fubini *direcţiile asimptotice*, precum şi două forme cubice covariante absolut

$$\begin{gathered}\binom{\alpha\alpha}{\beta}^2\binom{\beta\beta}{\alpha}\omega_\alpha^3+\binom{\beta\beta}{\gamma}^2\binom{\gamma\gamma}{\beta}\omega_\beta^3+\binom{\gamma\gamma}{\alpha}^2\binom{\alpha\alpha}{\gamma}\omega_\gamma^3,\\ \binom{\alpha\alpha}{\gamma}^2\binom{\gamma\gamma}{\alpha}\omega_\alpha^3+\binom{\beta\beta}{\alpha}^2\binom{\alpha\alpha}{\beta}\omega_\beta^3+\binom{\gamma\gamma}{\beta}^2\binom{\beta\beta}{\gamma}\omega_\gamma^3,\end{gathered}\tag{2.11}$$

care formează împreună *elementul liniar proiectiv al unui sistem triplu*.

Vrem să mai notăm că planele osculatoare ale curbelor C_α trec respectiv prin punctele

$$\binom{\alpha\alpha}{\beta}x_\beta+\binom{\alpha\alpha}{\gamma}x_\gamma,\qquad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha.\tag{2.12}$$

CONDIŢIILE DE OLONOMIE

3. În al 7-lea paragraf din [5] se dau condiţiile pentru ca un sistem triplu să fie olonom. Or, este uşor de văzut că aceste condiţii au fost deja stabilite în [1]. În adevăr, după Fubini, un sistem triplu este elementar (olonom) dacă

$$\lambda_{\gamma\gamma}=0,\qquad (\gamma=1,2,3).\tag{3.1}$$

Dacă ţinem seama că din condiţiile (36) din [1], p. 9, rezultă

$$\lambda_{\gamma\gamma}=\binom{\beta\alpha}{\gamma}-\binom{\alpha\beta}{\gamma},\qquad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha\tag{3.2}$$

avem tocmai condiţiile date în [5].

INVARIANŢII

În [5], p. 251, se afirmă, că se pot lua ca invarianţi fundamentali ai unui sistem triplu, funcţiile notate respectiv cu h_i, f_i, F_i, f_{12}, f_{23} şi f_{31}, cu $i=1,2,3$.

Autorul introduce pentru aceasta expresiile

$$\beta_{ij}=a_{hii}-a_{hjj},\qquad \begin{gathered}i\neq h\neq j\neq i,\\ i,h,j=1,2,3,\end{gathered}\tag{3.3}$$

cu ajutorul cărora exprimă invarianţii F_i, f_{12}, f_{23}, f_{31}.

Se vede că expresiile β_{ij} nu sînt altceva decît invarianţii relativi ai lui Fubini [1].

Pe de altă parte, schimbînd de exemplu α cu γ rezultă din expresia invarianţilor relativi (2.5_1)

$$\begin{bmatrix}\gamma\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\frac{\sigma_0\sigma_\beta}{\sigma_\gamma\sigma_\alpha}, \tag{3.4}$$

Prin împărţire obţinem invarianţii absoluţi

$$\begin{pmatrix}\gamma\alpha\\ \beta\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

care *sînt tocmai invarianţii notaţi în* [5] *cu* h_i.

La fel pentru $\gamma=\alpha\neq\beta$ şi $\alpha\neq\gamma\neq\beta\neq\alpha$ avem din (2.5_1) respectiv

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\alpha\alpha\\ \beta\end{bmatrix}&=\begin{pmatrix}\alpha\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\frac{\sigma_0\sigma_\beta}{\sigma_\alpha^2}\\ \begin{bmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{bmatrix}&=\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{pmatrix}\frac{\sigma_0\sigma_\beta}{\sigma_\alpha\sigma_\gamma}\end{aligned} \tag{3.6}$$

de unde invarianţii absoluţi

$$\frac{\begin{pmatrix}\alpha\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\gamma\\ \beta\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\alpha\gamma\\ \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\alpha\\ \beta\end{pmatrix}},\qquad \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha \tag{3.7}$$

notaţi în [5] cu f_i.

În sfîrşit, din (2.5_1), pentru $\alpha=\gamma$ şi $\alpha\neq\gamma$ şi din (2.5_2) se obţin ceilalţi invarianţi notaţi în [5] cu f_{12}, f_{23}, f_{31} şi F_i.

În ceea ce priveşte invarianţii infinitezimali daţi în [5], p. 252, ei *sînt toţi conţinuţi în formulele* (38) *şi* (39) *din* [1], p. 10, *sau în* (2.9) *din prezenta lucrare.*

FIGURI ŞI CORESPONDENŢE LOCALE

În paragraful 12 din [5] se observă că conurile lui Malus şi polaritatea lui Pantazi permit să se obţină semnificaţii geometrice pentru toţi invarianţii consideraţi. Observăm că această polaritate este numită în [2] polaritatea lui Bompiani şi în [4] polaritatea lui Pantazi-Bompiani. *Ea a fost considerată de Fubini* în memoriul său împreună cu o altă corespondenţă numită de el *proiettività di coniugio*, aceasta din urmă nefiind considerată în [5], cu ajutorul căreia se pot da, aşa cum vom arăta, multe interpretări geometrice.

Vrem să arătăm ca exemplu cum putem interpreta invarianţii f_i şi h_i fără a se considera conurile lui Malus.

În adevăr, dacă punctul x_0 se deplasează pe dreapta x_0, $\rho x_2 + \sigma x_3$, dreapta ce unește pe x_0 cu $\mu x_2 + \nu x_3$, $\mu : \nu$ fiind dat de relația

$$\mu\left[\rho\binom{2\,2}{1} + \sigma\binom{2\,3}{1}\right] + \nu\left[\rho\binom{3\,2}{1} + \sigma\binom{3\,3}{1}\right] = 0, \tag{3.8}$$

ce definește *proiectivitatea de coniugio*, este dreapta caracteristică a planului ξ_1. În această proiectivitate, dreptei x_0, $\rho x_2 + \sigma x_3$ îi corespunde tangenta t_2 sau tangenta t_3 dacă avem respectiv

$$\rho\binom{2\,2}{1} + \sigma\binom{2\,3}{1} = 0, \tag{3.9}$$

sau

$$\rho\binom{3\,2}{1} + \sigma\binom{3\,3}{1} = 0. \tag{3.10}$$

Biraportul punctelor $x_2, x_3, -\binom{2\,3}{1}x_2 + \binom{2\,2}{1}x_3$ și $\binom{3\,3}{1}x_2 - \binom{3\,2}{1}x_3$ este dat de

$$\binom{2\,2}{1}\binom{3\,3}{1} : \binom{2\,3}{1}\binom{3\,2}{1}, \tag{3.11}$$

adică tocmai invariantul f_1.

De asemenea, în proiectivitatea definită de (3.8), dreptei x_0, $\rho x_2 + \sigma x_3$ îi corespunde dreapta t_2 dacă $\rho : \sigma$ satisfac (3.9). Dreptei t_2 îi corespunde în aceeași proiectivitate dreapta x_0, $\mu x_2 + \nu x_3$, dacă $\mu : \nu$ este o soluție a ecuației

$$\mu\binom{2\,2}{1} + \nu\binom{3\,2}{1} = 0. \tag{3.12}$$

Biraportul punctelor x_2, x_3, $\mu x_2 + \nu x_3$ și $\rho x_2 + \sigma x_3$ cu $\mu : \nu$ și $\rho : \sigma$ soluție ale ecuațiilor (3.9) și (3.12) este

$$\binom{2\,3}{1} : \binom{3\,2}{1}, \tag{3.13}$$

care este tocmai invariantul h_1, ceea ce trebuia arătat.

Nu este exclus ca și ceilalți invarianți să se poată interpreta fără a folosi conurile lui Malus sau cuadrice locale.

În același paragraf și în paragraful 17, T. Mihăilescu consideră punctele comune tangentelor t_α și dreptelor caracteristice ale planelor ξ_β $\beta \neq \alpha$ și pe care le notează cu M_{ij}.

Aceste puncte sînt numite de Fubini *primele puncte focale*. Ele sînt notate în [1] cu

$$F_{\alpha\beta} = x_\alpha - \binom{\alpha\,\beta}{\beta}x_0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \ \beta = 1, 2, 3. \tag{3.14}$$

În ceea ce privește invarianții numiți de T. Mihăilescu invarianții ciclici ai unui sistem triplu, menționăm că *toți aceștia se obțin direct din formulele* (2.5), *fără a se opera, așa cum se face în* [5] *cu invarianții infinitezimali. Cel mai important dintre aceștia este invariantul lui Ceva și Menelao pentru că, după Fubini, condiția necesară și suficientă pentru ca să existe o omografie care să ducă punctul* x_0, *dreptele* t_α *și planele osculatoare ale curbelor* C_α *ale unui sistem triplu într-un punct* x_0' *și în tangentele și planele osculatoare ale unui alt sistem triplu, este ca invarianții lui Ceva-Menelao corespunzători să fie egali.*

Acest rezultat important nu este menționat în [5].

SISTEME TRIPLE ALE LUI FUBINI

4. În [1] se arată că dacă invariantul lui Ceva-Menelao este egal cu ± 1, atunci cele trei plane osculatoare ale curbelor C_α trec prin aceeași dreaptă, respectiv dreptele de intersecție ale planelor osculatoare ale curbelor C_α cu planele $\xi_\beta (\alpha \neq \beta)$ sînt situate în același plan. Sistemele triple ai căror invarianți Ceva-Menelao [1]) sînt egali cu ± 1 sînt numiți de T. Mihăilescu *sisteme triple ale lui Fubini* sau *sisteme triple ale lui Bortolotti.*

Vom completa rezultatul de mai sus al lui Fubini dînd condiția necesară și suficientă pentru ca invariantul lui Ceva-Menelao să fie egal cu ± 1 și anume demonstrînd

TEOREMĂ. *Condiția necesară și suficientă pentru ca invariantul lui Ceva-Menelao să fie egal cu* ± 1 *este ca punctele* $\binom{\alpha\alpha}{\beta} x_\beta \mp \binom{\alpha\alpha}{\gamma} x_\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$ *să fie coliniare.*

În adevăr, dacă aceste puncte sînt coliniare, înseamnă că se pot găsi trei constante $A_\alpha \neq 0$, astfel încît să avem

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & A_1\left[\binom{\alpha\alpha}{\beta} x_\beta \mp \binom{\alpha\alpha}{\gamma} x_\gamma\right] + A_2\left[\binom{\beta\beta}{\gamma} x_\gamma \mp \binom{\beta\beta}{\alpha} \alpha_\alpha\right] + \\
& + A_3\left[\binom{\gamma\gamma}{\alpha} x_\alpha \mp \binom{\gamma\gamma}{\beta} x_\beta\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Dar punctele x nu sînt coliniare, deci

$$
(4.2)\qquad \begin{vmatrix} \binom{\alpha\alpha}{\beta} & 0 & \mp\binom{\gamma\gamma}{\gamma} \\ \mp\binom{\alpha\alpha}{\gamma} & \binom{\beta\beta}{\gamma} & 0 \\ 0 & \mp\binom{\beta\beta}{\alpha} & \binom{\gamma\gamma}{\alpha} \end{vmatrix} = 0,
$$

---

[1]) Acest invariant este numit de T. Mihăilescu invariantul lui Fubini.

de unde

$$\frac{\binom{\gamma\gamma}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\beta\beta}{\gamma}}{\binom{\gamma\gamma}{\beta}\binom{\beta\beta}{\alpha}\binom{\alpha\alpha}{\gamma}} = \pm 1. \tag{4.3}$$

Să presupunem acum că invariantul lui Ceva-Menelao este egal cu ± 1 şi să arătăm că în acest caz punctele $\binom{\alpha\alpha}{\beta} x_\beta \mp \binom{\alpha\alpha}{\gamma} x_\gamma$ sînt coliniare.

Pentru aceasta să considerăm de exemplu dreapta determinată de punctele $\binom{\alpha\alpha}{\beta} x_\beta \mp \binom{\alpha\alpha}{\gamma} x_\gamma$ şi $\binom{\beta\beta}{\gamma} x_\gamma \mp \binom{\beta\beta}{\alpha} x_\alpha$. Intersecţia acestei drepte cu dreapta $x_\alpha x_\beta$ este punctul

$$\binom{\beta\beta}{\gamma}\binom{\alpha\alpha}{\beta} x_\beta - \binom{\alpha\alpha}{\gamma}\binom{\beta\beta}{\alpha} x_\alpha, \tag{4.4}$$

care devine, dacă se ţine seama de (4.3), tocmai punctul

$$\binom{\gamma\gamma}{\alpha} x_\alpha \mp \binom{\gamma\gamma}{\beta} x_\beta, \tag{4.5}$$

ceea ce trebuia arătat.

ALTE PUNCTE FOCALE

5. În paragraful 18 din [5], autorul consideră între altele punctele F_i^∞ şi F_i^0 de pe tangentele t_α şi pe care le numeşte puncte focale. Se poate arăta că aceste puncte sînt *terţele puncte focale ale lui Fubini*.

În adevăr, dacă se consideră cu Fubini congruenţele formate de cele trei tangente t_1, t_2, t_3, cînd x_0 se deplasează respectiv în planele ξ_3, ξ_1 şi ξ_2, atunci rezultă că punctele focale ale acestor congruenţe sînt:

$$\left.\begin{array}{l}
\binom{\alpha\alpha}{\gamma} x_\alpha + \left[\binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\alpha\beta}{\gamma} - \binom{\alpha\alpha}{\gamma}\binom{\alpha\beta}{\beta}\right] x_0, \\
\binom{\alpha\alpha}{\beta} x_\alpha + \left[\binom{\alpha\alpha}{\gamma}\binom{\alpha\gamma}{\beta} - \binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\alpha\gamma}{\gamma}\right] x_0. \\
(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3).
\end{array}\right\} \tag{5.1}$$

Dacă ţinem seamă de (132), (135), (129) şi (131) din [5], p. 272—273, rezultă că perechile de puncte F_i^∞, F_i^0 $(i = 1, 2, 3)$ *sînt tocmai terţele puncte focale ale lui Fubini.*

În afară de aceste puncte focale, Fubini mai consideră şi alte două puncte focale pe fiecare din tangentele t_α şi pe care le numeşte *secundele* *puncte focale. În* [5] *nu se consideră aceste puncte. Vom numi congruenţe* H_α *congruenţele descrise de tangentele* t_α cînd *punctul* x_0 *se deplasează în planele* ξ_α, *şi vom nota cu*

$$(5.2) \qquad x_\alpha + r x_0$$

punctele focale ale congruenţelor H_α. Dacă r sînt soluţii ale ecuaţiilor

$$(5.3) \qquad r^2 + r\left[\binom{\alpha\beta}{\beta} + \binom{\alpha\gamma}{\gamma}\right] + \binom{\alpha\beta}{\beta}\binom{\alpha\gamma}{\gamma} - \binom{\alpha\beta}{\gamma}\binom{\alpha\gamma}{\beta} = 0,$$

atunci aceste puncte sînt *secundele punctele focale.*

Ecuaţiile

$$(5.4) \qquad \binom{\alpha\beta}{\gamma}\omega_\beta^2 + \omega_\beta\omega_\gamma\left[\binom{\alpha\gamma}{\gamma} - \binom{\alpha\beta}{\beta}\right] - \binom{\alpha\gamma}{\beta}\omega_\gamma^2 = 0,$$

determină deplasările punctului x_0 *care corespund desfăşurabilelor congruenţelor* H_α [1]. În sfîrşit planele focale ale acestor congruenţe sînt determinate de tangentele t_α şi punctele

$$(5.5) \qquad \omega_\beta x_\beta + \omega_\gamma x_\gamma,$$

cu $\omega_\beta : \omega_\gamma$ soluţii ale ecuaţiei (5.4).

CÎTEVA CONSECINŢE

6) Din (3.14), (5.1), (5.3) şi (5.4) se pot deduce unele rezultate de care ne vom folosi ulterior şi anume :

a) *Dacă planele focale ale congruenţelor* H_α *sînt armonic conjugate cu planele* ξ_β *cu* $\beta \neq \alpha$, *atunci primele puncte focale coincid şi reciproc.*

Acest rezultat se obţine din (5.5), (5.4) şi (3.14).

b) *Planele focale ale congruenţelor* H_α *coincid cu planele* $\xi_\beta \alpha \neq \beta$ *dacă şi numai dacă*

$$(6.1) \qquad \binom{\alpha\beta}{\gamma} = \binom{\alpha\gamma}{\beta} = 0.$$

Să dăm acum o interpretare a acestui rezultat. Pentru aceasta să ne întrebăm în care caz coincid între ele primele cu secundele puncte focale. Din (3.14) şi (5.2), dacă ţinem seama şi de (5.3), rezultă că aceasta are loc dacă şi numai dacă sînt satisfăcute condiţiile (6.1). Avem deci rezultatul :

c) *Dacă primele şi secundele puncte focale ale tangentelor* t_α *coincid, atunci planele focale ale congruenţelor* H_α *coincid cu planele* ξ_β $\beta \neq \alpha$ α *şi reciproc.*

O altă consecinţă a acestui rezultat se obţine din (5.1), căci dacă ţinem seama de (6.1), rezultă că *şi terţele puncte focale ale tangentelor* t_α *coincid cu primele şi secundele focale.* Mai mult, se poate demonstra şi următorul rezultat :

d) *Dacă primele puncte coincid cu secundele, sau într-o ordine convenabilă cu terţele puncte focale, atunci cele* 3 *perechi de puncte focale coincid toate.*

Observînd că planele focale ale congruențelor H_α sînt *nedeterminate*, dacă în afară de condițiile (6.1) mai avem și

$$\binom{\alpha\gamma}{\gamma}-\left[\begin{matrix}\alpha\beta\\ \beta\end{matrix}\right)=0 \tag{6.2}$$

și ținînd seamă și de (3.14), avem următorul rezultat:

e) *Dacă secundele puncte focale sau terțele puncte focale luate într-o anumită ordine, coincid cu primele puncte focale, și acestea coincid între ele, atunci planele focale ale congruențelor H_α sînt nedeterminate, adică tangentele t_α ale sistemului triplu corespunzător aparțin unor snopuri și reciproc.*

În sfîrșit vrem să mai demonstrăm următoarea

TEOREMĂ. *Planele osculatoare ale curbelor C_α ale unui sistem triplu și conjugatele lor în raport cu planele tangente ξ_β, cu $\beta \neq \alpha$, sînt planele focale ale congruențelor H_α dacă și numai dacă coincid între ele atît primele puncte focale cît și terțele puncte focale.*

În adevăr, dacă ținem seama de (2.12) și (5.14), rezultă că planele osculatoare ale curbelor C_α și conjugatele lor în raport cu planele ξ_β, $\beta \neq \alpha$, sînt planele focale ale congruențelor H_α dacă

$$\binom{\alpha\gamma}{\gamma}-\binom{\alpha\beta}{\beta}=0, \tag{6.3$_1$}$$

$$\binom{\alpha\alpha}{\beta}^2\binom{\alpha\beta}{\gamma}-\binom{\alpha\alpha}{\gamma}^2\binom{\alpha\gamma}{\beta}=0, \tag{6.3$_2$}$$

$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$.

Pe de altă parte, din (5.1) se deduce că terțele puncte focale coincid între ele dacă

$$\binom{\alpha\alpha}{\beta}^2\binom{\alpha\beta}{\gamma}-\binom{\alpha\alpha}{\gamma}\binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\alpha\beta}{\beta}=\binom{\alpha\alpha}{\gamma}^2\binom{\alpha\gamma}{\beta}-\binom{\alpha\alpha}{\beta}\binom{\alpha\alpha}{\gamma}\binom{\alpha\gamma}{\gamma}. \tag{6.4}$$

Așadar, condițiile (6.4) sînt o consecință a condițiilor (6.3).

Reciproc, să presupunem că condițiile (6.4) sînt satisfăcute. Cum primele puncte focale coincid între ele dacă sînt satisfăcute condițiile (6.3$_1$), rezultă că și condițiile (6.3$_2$) sînt satisfăcute, ceea ce trebuia arătat.

În toate aceste cazuri, invariantul lui Ceva-Menelao $R_{\alpha\beta}R_{\beta\gamma}R_{\gamma\alpha} = \pm 1$. *Deci sistemele triple corespunzătoare sînt sau de tip Fubini sau Bortolotti.*

CLASE DE SISTEME TRIPLE

În [5] se studiază sisteme triple particulare, se arată generalitatea lor și se dau diferite interpretări folosind și conurile lui Malus și unele cuadrice locale. Noi vom da interpretări geometrice ale acestor clase de sisteme triple folosind numai corespondenţele proiective considerate de Fubini.

Sisteme triunghiulare. Ele sînt caracterizate analitic în [5] prin condiţiile $\binom{\alpha\gamma}{\gamma} = \binom{\alpha\beta}{\beta}$. Dacă ţinem seamă de rezultatul nostru din § 6 rezultă :

Un sistem triplu este triunghiular numai şi numai dacă planele tangente ξ_α *ale curbelor sistemului sînt planele focale ale congruenţelor* H_β $(\beta \neq \alpha)$.

Sisteme triple polare. *Un sistem triplu este polar dacă există cel puţin trei drepte* (d_α) *necoplanare, astfel încît dreptele caracteristice ale planelor* ξ_α *coincid cu primele drepte focale ale lui Fubini cînd* x_0 *se deplasează pe dreptele* d_α.

În adevăr, cînd x_0 se deplasează pe dreapta d_1 ce-l uneşte cu punctul $\rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$, cu $\rho_1\rho_2\rho_3 \neq 0$, atunci dreapta caracteristică a planului ξ_1 este descrisă de punctul

$$\begin{aligned} x = \mu & \left[x_2 - x_0 \binom{2\,1}{1} - x_0 \left(\binom{2\,2}{1} \frac{\rho_2}{\rho_1} + \binom{2\,3}{1} \frac{\rho_3}{\rho_1} \right) \right] + \\ & + \nu \left[x_3 - x_0 \binom{3\,1}{1} - x_0 \left(\binom{3\,2}{1} \frac{\rho_2}{\rho_1} + \binom{3\,3}{1} \frac{\rho_3}{\rho_1} \right) \right]. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Această dreaptă va coincide cu prima dreaptă focală, dacă

$$\left. \begin{aligned} \binom{2\,2}{1} \frac{\rho_2}{\rho_1} + \binom{2\,3}{1} \frac{\rho_3}{\rho_1} = 0, \\ \binom{3\,2}{1} \frac{\rho_2}{\rho_1} + \binom{3\,3}{1} \frac{\rho_3}{\rho_1} = 0. \end{aligned} \right\} \tag{7.2}$$

Deci

$$\binom{2\,2}{1}\binom{3\,3}{1} - \binom{2\,3}{1}\binom{3\,2}{1} = 0 \tag{7.3}$$

şi dreapta d_1 uneşte pe x_0 cu punctul

$$x_1 + \lambda_1 \binom{2\,2}{1} x_3 - \lambda_1 \binom{3\,2}{1} x_2. \tag{7.4}$$

În acelaşi fel se poate arăta că pot exista două direcţii d_2 şi d_3 astfel încît dreptele caracteristice ale planelor ξ_2 şi ξ_3 să fie dreptele $F_{11}F_{32}$ şi $F_{13}F_{23}$ cînd x_0 se deplasează pe aceste direcţii dacă

$$\binom{1\,1}{2}\binom{3\,3}{2} - \binom{3\,1}{2}\binom{1\,3}{2} = \binom{1\,1}{3}\binom{2\,2}{3} - \binom{1\,2}{3}\binom{2\,1}{3} = 0; \tag{7.5}$$

dreptele d_2 şi d_3 sînt determinate de punctul x_0 şi de punctele

$$\left.\begin{aligned} &x_2 + \lambda_2\binom{3\,1}{2}x_3 - \lambda_2\binom{3\,3}{2}x_1, \\ &x_3 + \lambda_3\binom{1\,1}{3}x_2 - \lambda_3\binom{1\,2}{3}x_1. \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

Menţionăm că există un sistem triplu polar particular astfel încît cele trei plane descrise de dreptele d_α cînd λ_α variază, trec prin aceeaşi dreaptă. Dreapta aceasta este determinată în acest caz de punctul x_0 şi punctul

$$\binom{1\,2}{3}\binom{3\,3}{2}x_1 - \binom{1\,1}{3}\binom{3\,3}{2}x_2 - \binom{1\,2}{3}\binom{3\,1}{2}x_3, \tag{7.7}$$

invariantul absolut

$$\frac{\binom{1\,1}{3}\binom{3\,3}{2}\binom{2\,2}{1}}{\binom{1\,2}{3}\binom{2\,3}{1}\binom{3\,1}{2}} \tag{7.8}$$

fiind egal cu -1.

Sisteme riglate. *Un sistem este riglat dacă şi numai dacă în proiectivitatea de coniugio tangentele la curbele C_α ale sistemului se corespund cu ele însele.*

Observaţia făcută în [5] că dacă un sistem riglat este în acelaşi timp un sistem T, figurile formate de planele focale ale fiecărei varietăţi V_3^1 şi de cele două plane V_3^2 care trec prin dreapta comună a celor două plane, sînt figuri armonice, *se explică prin proprietatea pe care am dat-o sistemelor triple triunghiulare.*

Sisteme triple olonome. Cea mai simplă interpretare a unor astfel de sisteme este următoarea :

Un sistem triplu este olonom dacă şi numai dacă proiectivităţile de coniugio în fiecare din planele tangente ale sistemului sînt involuţii.

În adevăr, un sistem triplu este după Fubini elementar (olonom) dacă $\lambda_{\alpha\alpha} = 0 = \binom{\beta\,\alpha}{\gamma} - \binom{\alpha\,\beta}{\beta}$. Dar acestea sînt tocmai condiţiile ca proiectivitatea „di coniugio" să fie o involuţie [1].

T. Mihăilescu se ocupă de sisteme triple caracterizate de relaţiile

$$\binom{\alpha\,\beta}{\gamma} = 0, \qquad \begin{matrix} \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha \\ \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \end{matrix} \tag{7.9}$$

pe care le caracterizează prin proprietatea ca cele trei conuri ale lui Malus sînt circumscrise triedrului, şi numeşte astfel de sisteme ,,olonome'' şi conjugate.

Dacă ţinem seama de rezultatele stabilite de noi în § 6, putem să caracterizăm astfel de sisteme triple pe care le numim *sisteme triple ale lui Darboux, fără a folosi conurile lui Malus în felul următor* :

Un sistem triplu este un sistem triplu Darboux, dacă şi numai dacă planele tangente ξ_α *ale sistemului sînt planele focale ale congruenţelor* H_β, $\beta \neq \alpha$.

În sfîrşit sistemele lui Darboux care sînt în acelaşi timp şi sisteme T şi caracterizate în [5] prin

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \tag{7.10}$$

au o interpretare foarte simplă ce rezultă din rezultatul de la punctul e) şi anume :

Un sistem triplu olonom este triplu conjugat şi triunghiular dacă planele focale ale congruenţelor H_α *sînt nedeterminate.*

În acest caz nu numai că coincid între ele atît primele puncte focale, cît şi terţele puncte focale cum se afirmă în [5], dar coincid şi secundele puncte focale între ele, aşa cum rezultă din (5.3).

APLICABILITATEA PROIECTIVĂ A SISTEMELOR TRIPLE

8. T. Mihăilescu arată că o corespondenţă între două sisteme triple este o aplicabilitate proiectivă dacă invarianţii infinitezimali de tip Bompiani ai celor două sisteme coincid. Trebuie de arătat că aceste condiţii nu reprezintă decît cazul particular al condiţiilor stabilite de Fubini.

În adevăr, punînd în formulele (72) din [1] care dau condiţia de aplicabilitate proiectivă a unui sistem triplu $\sigma_\lambda = \sigma_\mu = 1$ ($\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu = 1, 2, 3$), se obţine

$$\begin{pmatrix} \lambda\lambda \\ \mu \end{pmatrix} \frac{\omega_\lambda^2}{\omega_\mu} = \begin{bmatrix} \lambda\lambda \\ \mu \end{bmatrix} \frac{\overline{\Omega}_2^\lambda}{\Omega_\mu} \tag{8.1}$$

$\begin{pmatrix} \lambda\lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, Ω fiind simbolii cu trei indici şi pfaffienii celui de al doilea sistem triplu care sînt tocmai condiţiile noi date în [5], p. 297.

Condiţiile lui Fubini demonstrează că *numai invarianţii finiţi* (2.7) *se păstrează în deformaţiile proiective ale unui sistem triplu de curbe, de unde condiţia lui Fubini ca cele două sisteme triple să aibă acelaşi element liniar proiectiv* (2.11).

Primită la redacţie la 11
noiembrie 1964.

Institutul Politehnic,
Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. G. Fubini, *Sulle terne de congruenze di curve nello spazio proiettivo*. Annali di Matematica (4) **16**, 1–39 (1937).
2. E. Bortolotti, *Geometria proiettiva differenziale dei 3 tessuti di curve spaziale*. Boll. dell' Unione Mat. Ital. (2), 409–421 (1939).
3. A. Maxia, *Geometria proiettiva differenziale dei 2 tessuti in S_3*. Rendiconti, Palermo, **63**, 93–110 (1941).
4. Gh. Gheorghiev, Ilie Popa, *Geometria proiettiva differenziale di alcune varietà equi-parametriche*. (III). An. şt. Univ. Iaşi, s. I, **VII**, 283–298 (1961).
5. T. Mihăilescu, *Systèmes triples de variétés non holonomes de l'espace projectif ordinaire*. Annali di Matematica, serie IV, 231–300 (1961).
6. T. Mihăilescu, *Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţelor*. Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1963.
7. G. Vrănceanu, *Sur les espaces non holonomes*. C. h, 1926, 183, p. 852 ; vezi de asemenea, *Lecţii de geometrie diferenţială*. Vol. II, cap. IV, Ed. didactică, Bucureşti, 1964.

MORFISME STRICTE, CATEGORII CANTORIENE, FUNCTORI DE COMPLETARE

DE

M. JURCHESCU şi A. LASCU

Lucrarea de faţă constituie o tentativă de extindere la categorii arbitrare a unor noţiuni uzuale pentru categoriile abeliene [1], [2] : imaginea unui morfism, noţiunea de subobiect şi noţiunile duale, noţiunea de categorie abeliană însăşi, noţiunea de localizare. Imaginea unui morfism, noţiunea de subobiect şi noţiunile duale se extind cu ajutorul noţiunii de morfism strict. Imaginea îşi păstrează caracterul functorial. Comparînd epimorfismele cu epimorfismele efective se obţin condiţii în care imaginile se explicitează cu ajutorul produselor fibrate şi ale conucleelor.

În baza teoremelor 3.1, 3.2, 4.1 şi a corolarului de la teorema 3.1, noţiunea de categorie cantoriană apare ca echivalent neaditiv al aceleia de categorie abeliană. Lucrarea se încheie cu noţiunea de functor de completare care corespunde, în abelian, noţiunii de localizare. Sînt date unele proprietăţi de permanenţă relativ la functorii de completare.

1. MORFISME STRICTE

DEFINIŢIE. *Dacă* $A \xrightarrow{u} B$ şi $A' \xrightarrow{u'} B'$ *sînt morfisme în categoria* $\mathcal{C}$, *un morfism* $(\lambda_0, \lambda_1) : u \to u'$ *se zice* omotop cu zero (*respectiv* coomotop cu zero) *dacă există* $h : B \to A'$ *astfel încît* $\lambda_0 = hu$ (*resp.* $\lambda_1 = u'h$) ; *dacă avem simultan* $\lambda_0 = hu$ *şi* $\lambda_1 = u'h$, λ *se zice* trivial.

De exemplu dacă u este epimorfism, orice morfism $\lambda : u \to u'$ omotop cu zero este trivial şi, în plus, h este unic. Tot astfel dacă u' este monomorfism, orice morfism $\lambda : u \to u'$ coomotop cu zero este trivial. Prin urmare dacă u este epimorfism, iar u' monomorfism, noţiunile omotop cu zero, coomotop cu zero şi trivial coincid pe morfismele $\lambda : u \to u'$.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 2, P. 219–234 BUCUREŞTI, 1966.

Se observă că $1_u : u \to u$ este omotop cu zero (respectiv coomotop cu zero) dacă și numai dacă u admite un invers la stînga (dreapta). În particular 1 este trivial dacă și numai dacă u este izomorfism.

DEFINIȚIE. *Un monomorfism* $A' \xrightarrow{i} A$ *în* $\mathcal{C}$ *se numește* monomorfism strict *dacă pentru orice epimorfism* $X' \xrightarrow{p} X$ *toate morfismele* $p \to i$ *sînt triviale.*

După cele precedente, este suficient să se ceară în această definiție ca toate morfismele $p \to i$ să fie omotope cu zero sau, de asemenea, toate morfismele $p \to i$ să fie coomotope cu zero.

Exemple. Orice nucleu de săgeată dublă este monomorfism strict. Orice morfism $u : A \to B$ cu invers la stînga este monomorfism strict deoarece $vu = 1$ implică $u = \mathrm{Ker}\ (B \overset{1}{\underset{uv}{\rightrightarrows}} B)$. Orice produs direct de monomorfisme stricte este monomorfism strict. Dacă $u : A \to B$ este monomorfism strict și $X \to B$ astfel încît $u' : X \times_B A \to X$ să existe, atunci u' este monomorfism strict.

TEOREMA 1.1. 1) *Izomorfismele coincid cu bijecțiile care sînt monomorfisme stricte.*

2) *Orice compus* vu *de monomorfisme stricte este monomorfism strict.*

3) *Dacă* vu *este monomorfism strict, atunci* u *este monomorfism strict.*

Demonstrație. 1) Evident orice izomorfism este monomorfism strict. Invers, dacă o bijecție u este monomorfism strict, atunci, în particular, 1_u este trivial, deci u este izomorfism.

2) Considerăm o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "\lambda_0"'] & & Y \arrow[d] \\
A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C
\end{tikzcd}$$

în care p este epimorfism, iar u și v monomorfisme stricte. Deoarece v este monomorfism strict $u\ \lambda_0 = h_1\ p$ cu $h_1 : Y \to B$ convenabil; apoi $\lambda_0 = h\ p$, deoarece u este monomorfism strict.

3) Fie o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "\lambda_0"'] & & Y \arrow[dl, "\lambda_1'"'] \arrow[d, "\lambda_1"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C
\end{tikzcd}$$

cu p epimorfism. Deoarece vu este monomorfism strict, există $h : Y \to A$ astfel încît $\lambda_0 = h p$.

Fie A un obiect fix în $\mathcal{C}$. Vom spune că două monomorfisme stricte de capăt A, $A_1 \xrightarrow{i_1} A$, $A_2 \xrightarrow{i_2} A$ sînt echivalente dacă există un izomorfism $\theta : A_1 \to A_2$ astfel încît $i_1 = i_2 \theta$. Evident axiomele unei relații de echivalență sînt îndeplinite. Deci monomorfismele stricte de capăt A se împart în clasa de echivalenţă. Din fiecare clasă astfel obţinută alegem un reprezentant. Pentru clasa lui 1_A vom alege ca reprezentant pe 1_A.

DEFINIŢIE. *Reprezentanţii aleşi pentru clasele de echivalenţă de monomorfisme stricte de capăt* A *se numesc* subobiecte *ale lui* A.

Astfel, un subobiect al lui A este un cuplu (A', i) cu $A' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ şi $i : A' \to A$ un monomorfism strict ales ca reprezentant al clasei sale de echivalenţă. Prin abuz vom spune că A' este subobiect al lui A şi că i este *monomorfismul canonic* sau *incluziunea* lui A'.

DEFINIŢIE. *Dacă* $A \xrightarrow{u} B$ *este un morfism în* $\mathcal{C}$, *se numeşte* imagine *a lui* u *orice monomorfism strict* $i : B' \to B$ *pentru care există un epimorfism* $p : A \to B'$ *astfel încît* $u = ip$.

PROPOZIŢIA 1.1. *Factorizarea* $u = ip$ *a unui morfism* u *cu* i *monomorfism strict şi* p *epimorfism* (*dacă există*) *este unică pînă la un izomorfism de diagrame.*

Demonstraţie. Fie o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "p"'] & I \arrow[d, "i'"] \\
I' \arrow[r, "i"'] & B
\end{tikzcd}$$

cu i şi i' monomorfisme stricte, iar p şi p' epimorfisme. În baza ipotezei relativ la i şi p' există $\theta : I \to I'$ astfel încît $p = \theta p'$ şi $i' = i\theta$. Prima egalitate arată că θ este epimorfism iar a doua că θ este monomorfism strict, deci θ este bijecţie strictă adică izomorfism.

Din propoziţia 1.1 rezultă că toate imaginile unui morfism u (dacă există) aparţin aceleiaşi clase de echivalenţă de monomorfisme stricte şi epuizează această clasă. Urmează că dacă u are imagini, atunci există şi este unic determinat un subobiect (B', i) al lui B, care este o imagine a lui u. (B', i) se numeşte *imaginea* lui u şi se notează $(B', i) = \mathrm{Im}\,u$. Prin abuz vom nota $B' = \mathrm{Im}\,u$ sau $i = \mathrm{Im}\,u$.

Fie $A \to B$ şi $A' \to B'$ două morfisme astfel încît $I = \mathrm{Im}\,u$ şi $I' = {}$ $= I\mathrm{m}\acute{u}$ există şi fie $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) : u \to u'$ un morfism. Există şi este unic un morfism $I \xrightarrow{h} I'$ care face comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\lambda_0"'] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "\lambda_1"] \\
A' \arrow[r, "p'"'] & I' \arrow[r, "i'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

în care i, i' sînt incluziunile imaginilor respective, iar p, p' epimorfismele canonice pentru care $u = ip$, $u' = i'p'$. Într-adevăr, aceasta rezultă din $(\lambda_1 i) p = (i' (p' \ \lambda_0)$ ţinînd cont că p este epimorfism, iar i' monomorfism strict.

Definind $h = \mathrm{Im}\ \lambda$ se obţine un functor Im cu valori în $\mathcal{C}$ definit pe subcategoria plină a lui $\mathrm{Fl}\,(\mathcal{C})$ formată din morfismele care au imagini.

Noţiunile duale cu acelea de monomorfism strict, subobiect, incluziune, imagine, functorul Im sînt : epimorfism *strict, obiect cît, coincluziune* sau *epimorfism canonic de obiect cît, coimagine.* Functorul coimagine se notează Coim.

DEFINIŢIE. *Un morfism* $u : A \to B$ *se zice* strict *dacă* $u = \beta\alpha$, *cu* β *monomorfism strict şi* α *epimorfism strict*

PROPOZIŢIA 1. 2. *Dacă* u *este un morfism strict, factorizarea* $u = \beta\alpha$ *cu* β *monomorfism şi* α *epimorfism este unică pînă la un izomorfism de diagrame.*

Demonstraţie. Prin ipoteză $u = \beta'\alpha'$ cu β' monomorfism strict şi α' epimorfism strict deci avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\alpha"'] & I' \arrow[d, "\beta'"] \\
I \arrow[r, "\beta"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ipoteza relativă la α şi β' implică $\alpha' = \theta\alpha$ şi $\beta = \beta'\theta$ cu $\theta : I \to I'$ convenabil. Prin urmare θ este epimorfism strict (după duala prop. 1.1) şi θ este monomorfism, deci θ este bijecţie strictă.

Observaţii. 1) Rezultă că β este monomorfism strict, iar α este epimorfism strict.

2) Din definiţie se vede că un monomorfism strict este morfism strict. Observaţia 1) arată că, invers, orice monomorfism care este şi morfism strict este monomorfism strict. Analog pentru epimorfisme stricte.

3) Dacă $u = \beta\alpha$ cu β monomorfism strict şi α epimorfism strict, atunci β este o imagine a lui u, iar α este o coimagine a lui u.

Fie $u : A \to B$ astfel încît Imu şi Coim$u$ există. Atunci avem o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Coim}\,u \arrow[d, "j"] \\
\mathrm{Im}\,u \arrow[r, "i"'] & B
\end{tikzcd}$$

în care i este incluziunea imaginii, p epimorfismul definit prin $u = ip$ şi analog pentru q, j. Rezultă că există şi este unic $\overline{u} : \mathrm{Coim}\,u \to \mathrm{Im}\,u$ satisfăcînd $p = \overline{u}q$, $j = i\overline{u}$; $\overline{u}$ este bijecţie şi avem $u = i\,\overline{u}\,q$.

$\overline{u}$ se numeşte *bijecţia canonică* de la Coim u în Im u iar egalitatea

$$u = i\,\overline{u}\,q\,,$$

care determină univoc pe $\overline{u}$, se numeşte factorizarea canonică a lui u.

PROPOZIŢIA 1.3. *Sînt echivalente următoarele proprietăţi ale unui morfism* $u : A \to B$:

i) u *este morfism strict* ;

ii) Im u *şi* Coim u *există şi* $\overline{u}$: Coim $u \to$ Im u *este izomorfism.*

Demonstrație i) $\Rightarrow$ ii) Dacă $u = \beta\alpha$ cu β monomorfism strict și α epimorfism strict, atunci β este o imagine și α este o coimagine, deci există factorizarea canonică $u = i\bar{u}q$. Din propoziția 2.2 rezultă că $i\bar{u}$ este monomorfism strict, deci $\bar{u}$ este monomorfism strict, după 3) de la teorema 1.1. Astfel $\bar{u}$ este bijecție strictă adică izomorfism. Implicația ii) $\Rightarrow$ i) este trivială ținînd cont de teorema 1.1 în factorizarea $u = i\bar{u}q$.

Exemple. Din exemplele precedente rezultă că într-o categorie abeliană orice morfism este strict. Fie A un inel comutativ cu element unitate, filtrat și $\mathscr{F}_A$ categoria A-modulelor filtrate : Un monomorfism $i : E \to F$ în $\mathscr{F}_A$ este strict dacă și numai dacă filtrarea lui F induce pe E filtrarea lui E ; similar pentru epimorfisme. Alte exemple se găsesc în categoria grupurilor abeliene topologice, în categoria grupurilor abeliene ordonate, în categoria spațiilor vectoriale topologice, în categoria varietăților abeliene peste un corp de caracteristică pozitivă, în categoria inelelor comutative cu element unitate.

Dacă într-o categorie $u = \beta\alpha$ cu β monomorfism și α epimorfism și dacă există v astfel încît vu să fie morfism strict, atunci u este morfism strict. Dacă $u = \beta\alpha$ cu α și β morfisme stricte și dacă α este epimorfism sau β monomorfism, atunci u este morfism strict.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse fibrate, în care orice morfism are imagine. Fie $u : A \to B$ un morfism din $\mathcal{C}$. Se pot atunci defini, procedînd în modul obișnuit, imaginile directe prin u ale subobiectelor lui A și imaginile inverse prin u ale subobiectelor lui B. Fie $A'i \to A$ un subobiect al lui A ; se pune $u(A') = \operatorname{Im} ui$, de exemplu $u(A) = \operatorname{Im} u$. De asemenea dacă $B' \to B$ este un subobiect al lui B se consideră produsul fibrat

$$\begin{tikzcd}
A \times_B B' \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & B' \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

în care i rezultă monomorfism strict. Se ia $u^{-1}(B') = \operatorname{Im} i$ adică $u^{-1}(B')$ este reprezentantul clasei de monomorfisme stricte determinată de i.

Fie $\underline{F}_u$ mulțimea subobiectelor lui A care sînt de forma $u^{-1}(B')$ cu B' subobiect al lui u. Fie $\underline{G}_u$ mulțimea subobiectelor lui B care sînt de forma $u(A')$ cu A' subobiect al lui A. Avem

TEOREMA 1.2. 1° *$u(A')$ crește cu A'* · 2° *$u^{-1}(u(A')) > A'$ și $u^{-1}(u(A')) = A' \Leftrightarrow A' \in \underline{F}_u$* · 3° *$u^{-1}(B')$ crește cu B'* · 4° *$u(u^{-1}(B')) \subset B'$ și $u(u^{-1}(B')) = B' \Leftrightarrow B' \in \underline{G}_u$* · 5° *Pentru orice $v : B \to C$, $(vu)(A') = v(u(A'))$ și $(vu)^{-1}(C') = u^{-1}(v^{-1}(C'))$.*

Demonstrația este simplă.

COROLAR. 1° *u induce un izomorfism de mulțimi ordonate $\underline{F}_u \to \underline{G}_u$.*

2° *Dacă A', $A'' \in \underline{F}_u$ sînt astfel încît $u(A') \cap u(A'') \in \underline{G}_u$, atunci $u(A' \cap A'') = u(A') \cap u(A'')$ și $A' \cap A'' \in \underline{F}_u$. Enunț similar pentru reuniune (dacă există).*

3° *Dacă B', $B'' \in \underline{G}_u$ sînt subobiecte ale lui B atunci $u^{-1}(B' \cap B'') = u^{-1}(B') \cap u^{-1}(B'')$. Enunț similar pentru reuniune.*

În considerațiile precedente subobiectele unui obiect A sînt ordonate prin relația obișnuită.

2. MORFISME EFECTIVE

DEFINIȚIE. (Grothendieck) *Se spune că un morfism* $u : A \to B$ *într-o categorie* $\mathcal{C}$ *este un* epimorfism efectiv *dacă produsul fibrat* $A \times_B A$ *există și diagrama*

$$A \times_B A \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A \to B$$

(*unde* p_1, p_2 *sînt proiecțiile canonice*) *este exactă*, i. e. *u este un conucleu al diagramei*

$$A \times_B A \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A$$

Se spune că u este epimorfism efectiv universal *dacă, pentru orice morfism* $B' \to B$, *produsul fibrat* $A \times_B B'$ *există și proiecția canonică* $A \times_B B' \to B'$ *este un epimorfism efectiv.*

Dual avem noțiunile de monomorfism efectiv, monomorfism efectiv universal.

Vom spune că u este morfism efectiv dacă $u = ip$ *cu i monomorfism efectiv și p epimorfism efectiv.*

Se vede ușor că orice epimorfism (monomorfism) efectiv este strict, deci orice morfism efectiv este morfism strict.

În general compusul a două epimorfisme (monomorfisme) efective nu este efectiv.

PROPOZIȚIA 2.1. *Într-o categorie* $\mathcal{C}$ *cu produse fibrate și conuclee condițiile următoare sînt echivalente* :

1) *Orice compus de două epimorfisme efective este epimorfism efectiv.*

2) *Orice epimorfism strict este efectiv.*

În plus, în condițiile echivalente 1) și 2), *orice morfism* $u : A \to B$ *are o coimagine și avem*

$$\text{Coim}\, u = \text{Coker}\left(A \times_B A \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A\right).$$

Demonstrație. 2) implică 1) fără nici o ipoteză asupra lui $\mathcal{C}$. Considerăm diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
A \times_B A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "u"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

Fie $p : A \to C$ un conucleu al diagramei

$$A \times_B A \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} A$$

Din $up_1 = up_2$ rezultă că există și este unic un morfism $i : C \to B$ astfel încît $u = ip$. Vom arăta că i este monomorfism.

Fie $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi fie $f, g \in \mathrm{Hom}\ (X, C)$ astfel încît $if = ig$. Fie $\varepsilon : C \to D$ un conucleu al diagramei

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} C$$

Din $if = ig$ rezultă că există $j : D \to B$ astfel încît $i = j\,\varepsilon$, deci $u = j\,\varepsilon\,p$. Din 1) rezultă că $\varepsilon\,p$ este un epimorfism efectiv. Apoi diagrama următoare este carteziană

$$\begin{tikzcd}
A \times_B A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "\varepsilon p"] \\
A \arrow[r, "\varepsilon p"'] & D
\end{tikzcd}$$

Într-adevăr $pp_1 = pp_2$, deci $\varepsilon pp_1 = \varepsilon pp_2$ etc.

Rezultă că εp este ca şi b un conucleu al diagramei

$$A \times_B A \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} A$$

de unde ε este izomorfism, deci $f = g$. Astfel i este monomorfism, deşi p este o coimagine a lui u.

Cînd u este epimorfism strict din $u = ip$, rezultă că i este epimorfism strict, deci bijecţie strictă, deci izomorfism, ceea ce arată că 1) implică 2).

Propoziţia următoare este cunoscută

PROPOZIŢIA 2. 2. *Orice compus de epimorfisme efective universale este epimorfism efectiv universal.*

Demonstraţie. Observăm mai întîi că este suficient să arătăm că orice compus de două epimorfisme efective universale este epimorfism efectiv.

Într-adevăr presupunînd această afirmaţie adevărată, fie u, v epimorfisme efective universale. În diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "v'"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C
\end{tikzcd}$$

morfismele u', v' sînt epimorfisme efective universale, deci $v'u' : A \times_C C' \to C'$ este epimorfism efectiv. Cum $C' \to C$ este arbitrar, vu rezultă epimorfism efectiv universal.

Rămîne să dovedim această afirmaţie.

Fie $A \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C})$. Considerăm categoria $\mathcal{C}//A$ a diagramelor din $\mathcal{C}$ de forma $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} A$ cu A fix. Mai precis considerăm categoria tip I: $0 \overset{0}{\underset{1}{\rightrightarrows}} 1$

cu două obiecte şi două morfisme (plus identităţile lui 0 şi 1). Un obiect din $\mathcal{C}//A$ este un functor $D : I \to \mathcal{C}$ cu $X = D(0)$, $A = D(1)$, $f = D(0)$, $g = D(1)$.

Vom întrebuinţa notaţia $D : X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} A$ pentru a indica o diagramă D din $\mathcal{C}//A$. Oricărui morfism $u : A' \to A$ din $\mathcal{C}$ îi corespunde în mod natural, prin compunere cu u un functor $u : \mathcal{C}//A' \to \mathcal{C}//A$. Vom numi functor de schimbare a bazei pentru săgeată dublă asociat lui u orice adjunct la dreapta al functorului u (definit în general pe o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}//A$, eventual vidă). Din teoria generală a functorilor adjuncţi rezultă că functorul de schimbare a bazei asociat lui u este definit în $D : X \overset{f}{\underset{gu'}{\rightrightarrows}} A$ dacă există o diagramă $D' : X' \overset{f'}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} A'$ şi un morfism $i(D') \to D$ în $\mathcal{C}//A$ cu următoarea proprietate de universalitate : pentru orice E' şi orice morfism $\lambda : i(E') \to D$, există $\theta : E' \to D'$ în $\mathcal{C}//A'$, unic determinat astfel încît $\lambda = u'i(\theta)$.

Se spune că $u : A' \to A$ este *quarabil* (pentru săgeata simplă) dacă pentru orice $X \to A$ produsul fibrat $A' \times_A X$ există, cu alte cuvinte dacă functorul de schimbare a bazei corespunzător lui u este definit pe întreaga categorie $\mathcal{C}/A$. Similar se obţine noţiunea de quarabil pentru săgeată dublă înlocuind pe $\mathcal{C}/A$ cu $\mathcal{C}//A$.

LEMA 1. *Dacă u este quarabil pentru săgeată simplă, atunci u este quarabil şi pentru săgeată dublă.*

Demonstraţie. Fie $D : X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} A$. Există prin ipoteză produsul fibrat T_i pentru diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & X \arrow[d, "f_i"] \\
A' \arrow[r, "u"'] & A
\end{tikzcd}$$

$(i = 1, 2)$. Rezultă că şi morfismele β_i sînt quarabile. Se consideră produsul fibrat

$$\begin{tikzcd}
X' = T_1 \times_X T_2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & T_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\
T_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

Cuplul format de diagrama $X' \overset{f_1'}{\underset{f_2'}{\rightrightarrows}} A'$, în care $f_i' = \alpha_i \gamma_i$ $(i = 1, 2)$ împreună cu morfismul $u' = \beta_1 \gamma_1$ $(= \beta_2 \gamma_2)$ are proprietatea de universalitate necesară.

LEMA 2. *Dacă $u : A' \to A$ este epimorfism efectiv universal, atunci functorul de schimbare a bazei $u^{-1} : \mathcal{C}//A \to \mathcal{C}//A'$ corespunzător lui u este definit pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}//A)$ şi morfismul canonic $u^{-1}(D) \xrightarrow{u'} D$ este epimorfism.*

Demonstrație. Cu notațiile demonstrației precedente, dacă u este epimorfism efectiv universal atunci la fel este β_1, deci și γ_1; deci $u' = \beta_1 \gamma_1$ este epimorfism.

LEMA 3. *Dacă v este epimorfism efectiv quarabil, iar u epimorfism efectiv universal atunci vu este epimorfism efectiv.*

Demonstrație. Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \times_C A \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "w"'] & A \arrow[r, "vu"] \arrow[d, "u"] & C \arrow[d] \\
B \times_C B \arrow[r, shift left, "q_1"] \arrow[r, shift right, "q_2"'] & B \arrow[r, "v"'] & C
\end{tikzcd}$$

în care p_i și q_i $(i = 1, 2)$ sînt proiecțiile canonice respective, iar w un morfism în $\mathcal{C}//B$ arbitrar (de exemplu $u \times_C u$). Se verifică imediat că $A \times_C A \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} A = u^{-1}\ (B \times_C B \overset{q_1}{\underset{q_2}{\rightrightarrows}} B)$, iar w este morfism canonic. Conform lemei 2, w este epimorfism. Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \times_C A \arrow[r, "w"] \arrow[d, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift left, "p_2"] & B \times_C B \arrow[d, shift right, "q_1"'] \arrow[d, shift left, "q_2"] \\
A \times_B A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "vu"'] & B \arrow[d, "v"] \\
 & C \arrow[r, "1"] & C
\end{tikzcd}$$

în care α este determinat de condițiile $p_1\alpha = r_1$ și $p_2\alpha = r_2$. Fie $f : A \to X$ un morfism astfel încît $fp_1 = fp_2$. Rezultă $fr_1 = fr_2$ deci $f = gu$ cu g convenabil. Rezultă apoi $gq_1 = gq_2$ deoarece $fp_1 = fp_2$ și w este epimorfism. Prin urmare $g = hv$, deci $f = f\ vu$. Cum vu este epimorfism, h este unic determinat de această condiție ceea ce dovedește că $vu =$ Coker $(A \times_B A \rightrightarrows A)$.

COROLAR. ***Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse fibrate și conuclee, în care toate epimorfismele efective sînt universale. Atunci orice $u : A \to B$ are coimagine și avem***

$$\text{Coim}\ u = \text{Coker}\ (A \times_B A \rightrightarrows A).$$

Demonstrație. Rezultă din demonstrația propoziției 2.1 și din propoziția 2.2.

3. CATEGORII CANTORIENE

DEFINIȚIE. *Vom numi* categorie cantoriană *orice categorie $\mathcal{C}$ care satisface axiomele următoare* :

C_1) *$\mathcal{C}$ are limite proiective finite și limite inductive finite.*

C_2) *Orice monomorfism (epimorfism) este monomorfism (epimorfism) efectiv universal.*

Observaţii. 1° Evident, noţiunea de categorie cantoriană este autoduală.

2°. Se vede uşor că $C_1)$ revine la a spune că $\mathcal{C}$ are obiect final, obiect iniţial, produse fibrate şi sume fibrate. Rezultă că pentru o categorie preaditivă $C_1)$ revine la Ab 1). Pentru categorii aditive cu Ab 1) axioma $C_2)$ este echivalentă cu Ab 2). Prin urmare o categorie preaditivă este cantoriană şi numai dacă este abeliană.

3°. Din $C_2)$ rezultă că într-o categorie cantoriană orice bijecţie este un izomorfism.

PROPOZIŢIA 3.1. *Dacă $\mathcal{C}$ este categorie cantoriană, orice morfism $A \xrightarrow{u} B$ are imagine şi coimagine, şi avem*

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} (B \rightrightarrows B +_A B),$$

$$\operatorname{Coim} u = \operatorname{Coker} (A \times_B A \rightrightarrows A).$$

Demonstraţie. Rezultă din $C_2)$ ţinînd seama de propoziţia 2.1 şi de propoziţia duală acesteia.

COROLAR. *Într-o categorie cantoriană orice morfism u se factorizează în $u = ip$ cu i monomorfism şi p epimorfism.*

Interesul noţiunii de categorie cantoriană rezidă în teoremele 3.1, 3.2 şi 4.1.

TEOREMA 3.1. *Dacă $\mathcal{C}$ este categorie cantoriană, atunci pentru orice categorie I, categoria $\mathcal{C}^I = \operatorname{Hom}(I, \mathcal{C})$ este cantoriană.*

Demonstraţie. Axioma $C_1)$ rezultă din faptul că limitele proiective şi inductive în $\mathcal{C}^I$ se calculează ,,pe componente'', adică în $\mathcal{C}$ unde axioma este satisfăcută. Acelaşi argument dovedeşte că un morfism $u : F \to G$ din Fl $(\mathcal{C}^I)$ este epimorfism efectiv (respectiv monomorfism efectiv), dacă şi numai dacă $u(i)$ este epimorfism efectiv (respectiv monomorfism efectiv) pentru orice $i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$.

Fie $u : F \to G$ un morfism $\mathcal{C}^I$. Pentru orice $i \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ fie $G'(i) \xrightarrow{\varepsilon(i)} G(i)$ imaginea lui $u(i)$ şi $p(i) : F(i) \to G'(i)$ epimorfismul canonic pentru care $u(i) = \varepsilon(i)\, p(i)$. Dacă $i \to j$ este un morfism în I, din definiţia imaginii rezultă că există un morfism unic $G'(i) \to G'(j)$ care face diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "p(i)"] \arrow[d] & G'(i) \arrow[r, "\varepsilon(i)"] \arrow[d] & G(i) \arrow[d] \\
F(j) \arrow[r, "p(j)"'] & G'(j) \arrow[r, "\varepsilon(j)"'] & G(j)
\end{tikzcd}$$

comutativă. Se obţine astfel un functor $G' : I \to \mathcal{C}$ şi morfismele functoriale $p : F \to G'$, $\varepsilon : G' \to G$.

Întrucît $\mathcal{C}$ este cantoriană, $\varepsilon(i)$ este monomorfism efectiv şi $p(i)$ este epimorfism efectiv pentru orice $i \in \operatorname{Ob}(I)$. După afirmaţia precedentă ε rezultă monomorfismul efectiv şi p epimorfism efectiv deci orice morfism din $\mathcal{C}^I$ este efectiv.

Fie pătratul

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & G' \arrow[d] \\ F \arrow[r, "u"'] & G \end{tikzcd}$$

cartezian în $\mathcal{C}^I$ cu u epimorfism. Rezultă u epimorfism efectiv deci $u(i)$ epimorfism (efectiv) pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$. Cum pătratul

$$\begin{tikzcd} F'(i) \arrow[r, "u'(i)"] \arrow[d] & G'(i) \arrow[d] \\ F(i) \arrow[r, "u(i)"'] & G(i) \end{tikzcd}$$

este cartezian, $u'(i)$ este epimorfism efectiv pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,(I)$ deci u' este epimorfism efectiv în $\mathcal{C}$. Prin urmare orice epimorfism din $\mathcal{C}^I$ este efectiv universal. Dual, orice monomorfism din $\mathcal{C}^I$ este monomorfism efectiv universal.

COROLAR. *Dacă $\mathcal{C}$ este categorie abeliană atunci pentru orice categorie I, $\mathcal{C}^I$ este categorie abeliană.*

Demonstrație. Adunarea morfismelor în $\mathcal{C}^I$ se face pe componente, deci este unic determinată. Restul rezultă din teorema 3.1 și observația 2°.

TEOREMA 3. 2. *Pentru orice categorie $\mathcal{C}$ există un functor „exact" deplin fidel într-o categorie cantoriană.*

Demonstrație. Categoria $\mathfrak{U}$-Ens este cantoriană. Din teorema 3.1 rezultă că și $(\mathfrak{U}\text{-Ens})^{\mathcal{C}^\circ} = \mathrm{Hom}\,(\mathcal{C}^\circ, \mathfrak{U}\text{-Ens})$ este cantoriană. Considerăm subcategoria plină S a lui $(\mathfrak{U}\text{-Ens})^{\mathcal{C}^\circ}$ formată din functorii „exacți la stînga"; prin definiție $F \in \mathrm{Ob}\,((\mathfrak{U}\text{-Ens})^{\mathcal{C}^\circ})$ este „exact la stînga" dacă pentru orice epimorfism efectiv universal $u : A \to B$ din $\mathcal{C}$, șirul $F(B) \to F(A) \rightrightarrows F(A \times_B A)$ este exact i.e. $F(u) = \mathrm{Ker}\,(F(A) \rightrightarrows F(A \times_B A))$.

Considerăm functorul $\mathcal{C} \to (\mathfrak{U}\text{-Ens})^{\mathcal{C}^\circ}$ care asociază lui $X \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C})$ pe h_X. Se verifică trivial că $h_X \in S$ astfel încît se obține un functor $h : \mathcal{C} \to S$. În baza unei teoreme cunoscute, h este deplin fidel.

h se bucură de următoarele proprietăți de exactitate:

1) h comută cu nucleele de săgeată dublă (în mod trivial) și

2) pentru orice epimorfism efectiv universal $u : A \to B$, șirul $h_A \times_B A \rightrightarrows h_A \to h_B$ este exact. Într-adevăr, trebuie să arătăm că șirul

$$\mathrm{Hom}\,(h_B, F) \to \mathrm{Hom}\,(h_A, F) \rightrightarrows \mathrm{Hom}\,(h_A \times_B A, F)$$

este exact în $\mathfrak{U}$-Ens pentru orice $F \in \mathrm{Ob}(S)$. Dar în baza izomorfismului functorial $\mathrm{Hom}\,(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X)$ diagrama precedentă este izomorfă cu diagrama $F(B) \to F(A) \rightrightarrows F(A \times_B A)$, care este exactă, deoarece $F \in \mathrm{Ob}(S)$.

S este o categorie cantoriană. Aceasta rezultă din teorema 4.1 observînd că există un functor de completare $T : (\mathfrak{U}\text{-Ens})^{\mathcal{C}^\circ} \to S$. Construcția lui T este analoagă cu cea din [3].

4. FUNCTORI DE COMPLETARE

Definiție. *Vom numi* functor de completare *orice functor* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *care admite un adjunct la dreapta* $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *astfel încît* $Ti = 1$. *Noțiunea duală* : functor de normalizare.

Exemple. 1° Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ astfel încît orice morfism de capăt B are imagine. Fie $\mathcal{C}/B$ categoria obiectelor deasupra lui B și $\mathcal{C}'$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}/B$, avînd ca obiecte subobiectele lui B. Asociind fiecărui $u \in \mathcal{C}/B$ pe $\mathrm{Im}\, u$ se obține o completare $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.

2° Fie k un corp comutativ și $\mathcal{E}(k)$ categoria extinderilor algebrice comutative ale lui k, avînd ca morfisme k-omomorfismele. Asociind fiecărei extinderi E/k cea mai mică extindere normală a sa se obține o completare $\mathcal{E}(k) \to \mathcal{N}(k)$, unde $\mathcal{N}(k)$ este subcategoria plină avînd ca obiecte extinderile normale. Analog trecerea la închiderea separabilă a lui k în E constituie o normalizare.

3° Completarea grupurilor abeliene topologice, a spațiilor vectoriale topologice peste un corp fix k, sînt completări în sensul adoptat aici. Analog trecerea la completatul separat în categoria modulelor filtrate(descrescător) peste inelul filtrat A.

În situația din definiție i induce un izomorfism între categoria $\mathcal{C}'$ și subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$, formată din obiectele de forma $i(X')$ cu $X' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$. Rezultă că se poate totdeauna presupune că $\mathcal{C}'$ este o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}$, iar i este functor de incluziune. Vom menține permanent această ipoteză. Prin urmare un functor de completare T este un adjunct la stînga al unui functor de incluziune $i : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ satisfăcînd $Ti = 1$. Fie $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și $\eta_A : A \to T(A) = iT(A)$ morfismul canonic determinat de izomorfismul functorial $f(A, B) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, i(B)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(A), B)$ i.e. astfel încît $f(A, T(A))(\eta_A) = 1_{TA}$. Morfismele η_A determină un morfism functorial $1 \to iT$ cu următoarea proprietate de universalitate : pentru orice obiect $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ și orice morfism $f : A \to X$ există un morfism unic determinat $g : T(A) \to X$ astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, swap, "f"] & T(A) \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

să fie comutativă. Dacă $u : A \to A'$ este un morfism în $\mathcal{C}$, atunci $T(u)$ este unicul morfism pentru care $T(u)\eta_A = \eta_{A'}\, u$.

În particular, dacă $X = A'$ și $u = f$, rezultă $g = T(f)$, deoarece $iT = 1$ implică $T(X) = X$ și $\eta_X = 1_X$.

Definiție. *Dacă* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *este un functor de completare, un obiect* A *din* $\mathcal{C}$ *se zice* complet *cînd* η_A *este izomorfism și* separat *cînd* η_A *este monomorfism strict.*

Dacă η_A are invers la stînga, atunci A este complet. Într-adevăr $f\eta_A = 1$ implică $(\eta_A f)\eta_A = \eta_A$, deci $\eta_A f = 1$. De asemenea, dacă A este izomorf cu un obiect din $\mathcal{C}'$, atunci A este complet. Într-adevăr, dacă, în diagrama precedentă, f este izomorfism, atunci $g = T(f)$ este izomorfism deci și η_A este izomorfism.

PROPOZIŢIA 4. 1. *Fie* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *functor de completare.*

1) *Dacă* $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ *este un functor pentru care* $\underset{\longrightarrow}{\lim} F$ *există atunci* $\underset{\longrightarrow}{\lim} TF$ *există şi avem*

$$i(\underset{\longrightarrow}{\lim}\ TF) = T(\underset{\longrightarrow}{\lim}\ F)$$

2) *Pentru orice* $F' : \mathcal{J} \to \mathcal{C}'$, $\underset{\longleftarrow}{\lim} F'$ *există dacă şi numai dacă* $\underset{\longleftarrow}{\lim} iF'$ *există şi atunci avem*

$$i(\underset{\longleftarrow}{\lim}\ F') = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ (iF').$$

Demonstraţie. Dintr-o proprietate generală a functorilor adjuncţi rezultă că T comută cu limita inductivă şi i comută cu limita proiectivă. Rămîne de arătat că dacă $A = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ iF'$ există, atunci $\underset{\longleftarrow}{\lim}\ F'$ există. Este suficient să arătăm că A este complet.

Dacă $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, vom nota cu C_X functorul constant $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$, definit prin $c_X\ (j) = X$ şi $c_X\ (u) = 1_X$ pentru orice $j \in \mathrm{Ob}(J)$ şi $u \in \mathrm{Fl}(J)$. Fie $A = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ i\ F'$ şi $\rho : C_A \to iF'$ morfismul canonic de componente $\rho_j : A \to iF'(j) = F'(j)$. Deoarece $F'(j) \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}')$, există un morfism unic $\overline{\rho}_j : T(A) \to F'(j)$ astfel încît $\rho_j = \overline{\rho}_j\, \eta_A$. Se vede imediat că $\overline{\rho}_j$ sînt componentele unui morfism functorial $\overline{\rho} : c_{T\,(A)} \to F'$. Prin urmare există un morfism $f : T(A) \to A$ unic determinat pentru care $\overline{\rho} j = \rho_j f$ oricare ar fi $j \in \mathrm{Ob}(J)$. Avem $\rho_j\ (f\eta_A) = \overline{\rho}_j\ \eta_A = \rho_j$ pentru orice $j \in \mathrm{Ob}(J)$, deci $f\eta_A = 1$ i.e. η_A are invers la stînga, prin urmare A este complet.

COROLARUL 1. *Dacă* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *este un functor de completare şi* J*-limitele proiective* (*inductive*) *există în* $\mathcal{C}$, *atunci* $\mathcal{J}$*-limitele proiective* (*inductive*) *există în* $\mathcal{C}'$.

Cînd F este functorul vid de capăt $\mathcal{C}$, $F' = TF$ este functorul vid de capăt $\mathcal{C}'$ şi $F = iF'$. Din propoziţia 4.1 rezultă că $e' = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ F'$ există dacă şi numai dacă $e = \underset{\longleftarrow}{\lim} F$ există şi în acest caz $i(e') = e$ deci $T(e) = e'$. Astfel este adevărat:

COROLARUL 2. *Dacă* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *este functor de completare,* e *este obiect final în* $\mathcal{C}$ *dacă şi numai dacă* $e' = T(e)$ *este obiect final în* $\mathcal{C}'$ *şi atunci* e *este complet.*

În particular orice functor de completare comută cu obiectul final. Rezultă că, atunci cînd $\mathcal{C}$ are limite proiective, un functor de completare $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ comută cu limitele proiective dacă şi numai dacă comută cu produsul fibrat.

TEOREMA 4. 1. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este o categorie cantoriană şi* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor de completare care comută cu produsul fibrat, atunci* $\mathcal{C}'$ *este categorie cantoriană.*

Demonstraţie. Permanenţa axiomei C_1) rezultă din corolarul 1 de mai sus.

T comută cu limitele inductive şi cu limitele proiective finite. În particular T transformă epimorfismele (monomorfismele) care sînt toate efective, în epimorfisme (monomorfisme) efective. Fie u un morfism în $\mathcal{C}'$. Avem $i(u) = \varepsilon p$ cu ε monomorfism și p epimorfism. Rezultă $u = Ti(u) = T(\varepsilon)\,T(p)$ cu $T(\varepsilon)$ monomorfism efectiv și $T(p)$ epimorfism efectiv. Astfel toate morfismele din $\mathcal{C}'$ sînt efective.

Fie acum u un epimorfism din $\mathcal{C}'$. $\mathcal{C}$ fiind cantoriană, avem $i(u) = \varepsilon p$ cu ε monomorfism și p epimorfism. Considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & C' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d] & i(B') \arrow[d] \\
i(A) \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r, "\varepsilon"'] & i(B)
\end{tikzcd}$$

în care pătratele adiacente sînt carteziene. Rezultă că p' este epimorfism și ε' monomorfism în $\mathcal{C}$. Din $u = T(\varepsilon)T(p)$ rezultă că $T(\varepsilon)$ este epimorfism ca și u. Cum $T(\varepsilon)$ este monomorfism, rezultă că $T(\varepsilon)$ este bijecție (efectivă), adică izomorfism. Ținînd seama de diagrama carteziană

$$\begin{tikzcd}
T(C') \arrow[r, "T(\varepsilon')"] \arrow[d] & i(B') \arrow[d] \\
T(C) \arrow[r, "T(\varepsilon)"'] & i(B)
\end{tikzcd}$$

rezultă că $T(\varepsilon')$ este izomorfism. Deci $T(\varepsilon')\ T(p')$ este epimorfism ca și $T(p')$. În sfîrșit, diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(D') \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\
A \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}$$

în care $u' = T(\varepsilon')\ T(p')$ este carteziană. Prin urmare u este epimorfism efectiv universal. Dual, orice monomorfism din $\mathcal{C}'$ este efectiv universal.

Corolarul 1. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor de completare care comută cu produsul fibrat, atunci $\mathcal{C}'$ este o categorie abeliană.*

Corolarul 2. *În condițiile teoremei 4.1, functorul T comută cu functorii* Im *și* Coim.

Propoziția 4. 2. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor de completare care comută cu limitele proiective finite. Fie J o categorie pentru care $\mathcal{C}$ are proprietatea că $\mathcal{J}$ — limitele inductive există și comută cu limitele proiective finite. Atunci $\mathcal{C}'$ are aceeași proprietate.*

Demonstrație. Existența J-limitelor inductive rezultă din corolarul 1 la propoziția 4.1.

Să demonstrăm de exemplu că $\underset{\mathcal{J}}{\varinjlim} : \mathcal{C}'^{\mathcal{J}} \to \mathcal{C}$ comută cu produsul fibrat . Fie

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[d] \\
F \arrow[r] & G
\end{tikzcd}$$

o diagramă carteziană în $\mathcal{C}'^{\mathcal{J}}$. Functorul T: * $\mathcal{C}'^{I} \to \mathcal{C}'^{I}$ pentru care $F \sim\to TF$, este adjunct la stînga cu functorul i^*: $\mathcal{C}'^{I} \to \mathcal{C}^{I}$ pentru care $F' \sim \to iF'$. Prin urmare diagrama

$$\begin{tikzcd}
iF' \arrow[r] \arrow[d] & iG' \arrow[d] \\
iF \arrow[r] & iG
\end{tikzcd}$$

este carteziană. Conform ipotezei, aplicînd acestei diagrame $\underset{\mathcal{J}}{\varinjlim}$, obținem o diagramă carteziană în $\mathcal{C}$. T transformă această diagramă într-o diagramă carteziană în $\mathcal{C}'$. Întrucît T comută cu $\underset{\mathcal{J}}{\varinjlim}$ și $T_i = 1$ rezultă că diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{J}}{\varinjlim} F' \arrow[r] \arrow[d] & \underset{\mathcal{J}}{\varinjlim} G' \arrow[d] \\
\underset{\mathcal{J}}{\varinjlim} F \arrow[r] & \underset{\mathcal{J}}{\varinjlim} G
\end{tikzcd}$$

este tot carteziană.

DEFINIȚIE. *Un obiect Q dintr-o categorie se numește* obiect injectiv *dacă pentru orice morfism $\alpha : A \to Q$ și orice monomorfism strict β: $A \to B$ din $\mathcal{C}$ există $\gamma : B \to Q$, în $\mathcal{C}$, astfel încît $\alpha = \gamma\beta$. Noțiunea duală* : obiect proiectiv.

Un morfism $A \xrightarrow{u} B$ se zice *morfism esențial* dacă $\alpha u = \beta$, cu α, $\beta \in \mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ și β monomorfism strict, implică α monomorfism strict.

Un obiect Q injectiv în $\mathcal{C}$ se numește *înfășurătoare injectivă* a lui $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, dacă există un monomorfism strict $A \to Q$ care este morfism esențial.

PROPOZIȚIA 4.3. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie și T : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor de completare care transformă monomorfismele stricte în monomorfisme stricte. Avem următoarele proprietăți* :

1) *i transformă injective în injective.*

2) *Pentru orice $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, η_A este morfism esențial.*

3) *Orice obiect Q injectiv în $\mathcal{C}$, care este și separat, este complet.*

4) *Dacă orice obiect din $\mathcal{C}$ are înfășurătoare injectivă, atunci $\mathcal{C}'$ se bucură de aceeași proprietate.*

Demonstrație. Se arată ușor fără ipoteze suplimentare asupra functorului de completare T că i transformă monomorfismele stricte în monomorfisme stricte. Prin urmare în cazul de față iT transformă monomorfismele stricte în monomorfisme stricte.

1) Fie Q' un obiect injectiv din $\mathcal{C}'$, $u : A \to B$ un monomorfism esențial în $\mathcal{C}$ iar $v : A \to iQ'$ un morfism arbitrar. $T(u)$ este monomorfism strict deci există f: $T(B) \to Q'$ astfel încît să avem $T(v) = fT(u)$. Deci $v = T(v)\eta_A = fT(u)\eta_A = (f\eta_B)u$.

2) Fie $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ și $\alpha : TA \to X$ un morfism din $\mathcal{C}$ astfel încît $\beta = \alpha\eta_A$ să fie monomorfism strict. Rezultă $T(\beta)$ monomorfism strict în $\mathcal{C}'$, deci și în $\mathcal{C}$. Din $T(\beta)\eta_A = \eta_X \ \beta = (\eta_X \ \alpha) \ \eta_A$ se deduce $T(\beta) = \eta_A \ \alpha$, de unde se vede că α este monomorfism strict.

3) Întrucît η_Q este monomorfism strict în $\mathcal{C}$ iar Q injectiv, există $f : TQ \to Q$ astfel încît $1 = f\eta_Q$, deci Q este complet.

4) Fie $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$, Q înfășurătoarea injectivă a lui iA în $\mathcal{C}$, iar $u : iA \to Q$ un monomorfism strict care este morfism esențial. Ținînd seama de ipoteza relativă la T, este destul să dovedim că Q este complet, ceea ce revine, după 3), la a arăta că Q este separat. Avem $\eta_Q u = T(u)$, întrucît $\eta_A = 1$. Cum $T(u)$ este monomorfism strict, $iT(u)$ este monomorfism strict, deci η_Q este monomorfism strict, u fiind morfism esențial.

Primită la redacție la 18 martie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. Mihai Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'Algèbre Homologique.* Tohoku Math. Journal, seria 2, **9**, 119–221 (1957).
2. P. Gabriel, *Des catégories Abéliennes.* Bull. Soc. Math. de France, **90**, *3*, 323–448 (1962).
3. M. Artin, *Grothendieck Topologies.* Mimeographed notes. Harward, 1962.

ASUPRA CORPULUI FUNCȚIILOR RAȚIONALE AL UNEI VARIETĂȚI ALGEBRICE

DE

MIHAELA ȘABAC

Se consideră inelul $I = \lim\limits_{\overrightarrow{k\subset K}} K[X]/pK[x]p[X]$ unde $K \subset \Omega$. Vom arăta mai jos că structura acestui inel este legată de structura k-varietății V. Mai precis, fie $p_i \subseteq L[X]$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ idealele prime corespunzătoare componentelor absolute V_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ ale lui V față de un corp de definiție comun L în sensul lui [3] și $S = I \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{r} p_i I$.

Vom arăta mai jos că $\Omega(V_i)$ este izomorf cu $I_S/p_i I_S$ iar în cazul în care I nu are elemente nilpotente, I_S este izomorf cu suma directă a corpurilor de funcții raționale asociate varietăților V_i.

Fie Ω un domeniu universal în sensul lui Weil [3], $V \subset \Omega^n$ o k-mulțime ireductibilă și p idealul asociat lui V peste k în inelul $k[X_1, \ldots X_n] = k[X]$.

La cursul său de geometrie algebrică, profesorul G. Galbură a observat că există un izomorfism între corpul funcțiilor raționale al unei varietăți algebrice (absolute) V și limita inductivă a corpurilor $k(x)$, unde k parcurge mulțimea corpurilor de definiție ale lui V iar x este punct generic în V peste k.

La sugestia profesorului Galbură, mi-am propus ca în această notă să studiez limita inductivă $\lim\limits_{\overrightarrow{k\subset K}} K[X]/pK[X]$ a inelelor de coordonate asociate unei k-varietăți oarecare.

PROPOZIȚIA 1. *Fie V o k-varietate și p idealul asociat lui V peste k. Inelul $I = \lim\limits_{\overrightarrow{k\subset K}} K[X]/pK[X]$ este izomorf cu inelul $\Omega[X]/p\Omega[X]$.*

ST. CERC. MAT., TOM 18, NR. 2, P. 235–238, BUCUREȘTI, 1966

Demonstrație. Familia corpurilor incluse în Ω și care conțin k este filtrantă la dreapta.

Deoarece $\Omega[X] = \bigcup\limits_{k\subset K} K[X]$ și $p\Omega[X] \cap K[X] = pK[X]$ deducem că inelul $K[X]/pK[X]$ este inclus izomorf în $\Omega[X]/p\Omega[X]$ și $\Omega[X]/p\Omega[X]$ este izomorf cu $\bigcup\limits_{k\subset K} K[X]/pK[X]$. Deci $\Omega[X]/p\Omega[X]$ este izomorf cu $\varinjlim\limits_{k\subset K} K[X]/pK[X]$.

Din propoziția 1 și din [2] rezultă

PROPOZIȚIA 2. *Fie V o k-mulțime ireductibilă, I inelul de mai sus și x un punct generic în V peste k. Atunci :*

(i) *I are numai divizori ai lui zero nilpotenți dacă și numai dacă V este varietate absolută.*

(ii) *I nu are elemente nilpotente dacă și numai dacă extinderea $k(x)/k$ este separabilă.*

(iii) *I este domeniu de integritate dacă și numai dacă extinderea $k(x)/k$ este regulată.*

Demonstrație. (i) Dacă idealul $p\Omega[X]$ este primar, $I_\Omega(V) = \sqrt{p\Omega[X]}$ este prim ; deci V este varietate absolută [2]. Dacă V este varietate absolută, atunci $k(V)/k$ este extindere primară, deci I are numai divizori ai lui zero nilpotenți [2]. (ii) Dacă I nu are elemente nilpotente, $p\Omega[X]$ este ideal radical ($p\Omega[X] = \sqrt{p\Omega[X]}$). Fie K, $k \subset K \subset \Omega$ o extindere algebric închisă a lui k și

$$k(x) \otimes_k K \approx = (k[X]/p)_{(0)} \otimes_k K \approx (K[X]/pK[X])_{(k]X]/p\setminus 0)} .$$

Inelul $K[X]/p\ K[X]$ fiind inclus în I nu are elemente nilpotente și prin urmare nici inelul $(K[X]/pK[X])_{(k[X]/p\setminus 0)}$ nu are elemente nilpotente. Conform cu [1] extinderea $k(x)/k$ rezultă separabilă.

Reciproc, dacă extinderea $k(x)/k$ este separabilă, atunci $p\Omega[X] = \sqrt{p\Omega[X]}$ [2].

(iii) Rezultă din (i) și (ii).

COROLAR. *Fie V o varietate afină absolută, p idealul asociat lui V și I inelul considerat la început.*

1. *Dacă I este domeniu de integritate, atunci $\Omega(V)$ este corpul fracțiilor lui I.*

2. *Dacă I are numai divizori ai lui zero nilpotenți, atunci $\Omega(V)$ este corpul fracțiilor lui $I/R(I)$, unde $R(I)$ este radicalul nilpotent al lui I.*

Demonstrație. 1. Se știe că $\Omega(V) = \varinjlim\limits_{k\subset K} K(V)$. Atunci afirmația rezultă din propoziția 1.

2. Fie $k \subset K \subset \Omega$; $K(V)$ este izomorf cu corpul fracțiilor lui $K[X]/pK[X]/R(K[X]/pK[X])$ sau cu notațiile din [2] cu corpul fracțiilor lui $K[V]/R(k[V])$. Putem scrie

$$\Omega(V) = \varinjlim_{k\subset K} (K[V]/R(K[V])_{(0)} = (\varinjlim_{k\subset K} K[V]/R(K[V])_{(0)}$$

deoarece $K[V]/R(K[V])$ este domeniu de integritate, $\varinjlim_{k\subset K} K[V]/R(K[V])$ este de asemenea domeniu de integritate şi fiecare din corpurile $(K[V]/R(K[V]))_{(0)}$ este inclus în corpul fracţiilor limitei inductive.

Deci $(\varinjlim_{k\subset K} K[V]/R(K[V]))_{(0)} = (I/R(I))_{(0)}$ şi propoziţia este complet demonstrată.

PROPOZIŢIA 3. *Fie V o k-varietate V_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ componentele absolute maximale ale lui V, p_i idealul prim asociat lui V_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ peste un corp comun de definiţie şi $S = I\setminus\bigcup_{i=1}^{r} p_i\, I$. Dacă I nu are elemente nilpotente, atunci componenta izolată $(0)_S$, a lui (0) în raport cu S coincide cu (0) şi I_S este izomorf cu $\bigoplus_{i=1}^{r} \Omega(V_i)$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $x\in(0)_S$, există $s\notin\bigcup_{i=1}^{r} p_i\, I$ astfel încît $xs = 0$ deci pentru orice i, $xs\in p_i\, I$. Dar $s\notin p_i\, I$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ şi cum $p_i\, I$ este prim, rezultă că $x\in\bigcap_{i=1}^{r} p_i\, I$. Deoarece I nu are elemente nilpotente, $\bigcap_{i=1}^{r} p_i\, I = (0)$ deci $(0)_S = (0)$. Inelul I_S este semilocal avînd ca ideale maximale idealele $p_i\, I_S$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ şi are radicalul nul.

Următoarele inele sînt izomorfe

$$I_S \approx I_S\Big/\bigcap_{i=1}^{r} p_i\, I_S \approx \bigoplus_{i=1}^{r} I_S/p_i\, I_S.$$

Cum $p_i\, I_S$ este maximal, $I_S/p_i I$ este corp $(1\leqslant i\leqslant r)$.

Pe de altă parte următoarele corpuri sînt izomorfe

$$\Omega(V_i) \approx (\Omega[X]/p_i\Omega[X])_{(0)} \approx$$

$$\approx [(\Omega[X]/p\,\Omega[X])/(p_i\,\Omega[X]/p\,\Omega[X])]_{(0)} \approx (I/p_i I)_{(0)} \approx I_S/p_i\, I_S.$$

Izomorfismul dintre $(I/p_i\, I)_{(0)}$ şi $I_S/p_i\, I_S$ este definit astfel $\Psi\left(\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(b)}\right) = \theta\left(\dfrac{a}{b}\right)$, unde $\varphi : I \to I/p_i\, I$ şi $\theta : I_S \to I_S/p_i\, I_S$.

Deci I_S este izomorf cu $\bigoplus_{i=1}^{r} \Omega(V_i)$ şi propoziţia este demonstrată.

PROPOZIŢIA 4. *Fie V o k-varietate, q_i idealele primare asociate idealelor prime minimale p_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ din descompunerea primară a lui (0) din I, $S=I\setminus\bigcup_{i=1}^{m} p_i\, I$ şi I_S inelul generalizat de fracţii în raport cu S. Atunci $I_S/\bigcap_{i=1}^{m} q_i\, I_S$ este izomorf cu $\bigoplus_{i=1}^{m} I_S/q_i\, I_S$ şi $\Omega(V_i)$ este izomorf cu $I_S/p_i I_S$.*

Demonstrație. Deoarece idealele $p_i\, I_S$ sînt maximale iar idealele $q_i\, I_S$ sînt comaximale ($1 \leqslant i \leqslant m$), vom avea izomorfismul

$$I_S/\bigcap_{i=1}^{m} q_i\, I_S \approx \bigoplus_{i=1}^{m} I_S/q_i\, I_S .$$

Inelul I_S/q_iI_S este inel primar. Corpul $(I_S/q_iI_S)/(p_iI_S/q_iI_S)$ este izomorf cu corpul I_S/p_iI_S.

Analog ca în demonstrația propoziției 3 se arată că $\Omega(V_i)$ este izomorf cu I_S/p_iI_S.

Primită la redacție la 17 iulie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. Mihai Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. H. Cartan, Cl. Chevalley, *Séminaire*, 8e *année. Géométrie algébrique.* Paris, Secretariat mathématique 1956. (Expunerea 13. P. Cartier).
2. Gh. Galbură, *Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice.* Ed. Acad. Republicii Socialiste România, București, 1961.
3. A. Weil, *Foundations of algebraic geometry.* Amer. Math. Soc., Coll. Publ., New York, 1946.

REPREZENTAREA POLINOMULUI AREOLAR CUATERNIONIC ÎN SPAȚIUL TRIDIMENSIONAL

DE

DAN PASCALI

Reprezentarea stabilită de autor în [6] pentru polinomul areolar în plan este extinsă la polinomul areolar în spațiul tridimensional.

Gr. C. Moisil și N. Teodorescu au extins la spațiul cu mai multe dimensiuni cîteva rezultate fundamentale din teoria funcțiilor de o variabilă complexă, folosind simbolismul matriceal [3], [8] sau numerele hipercomplexe [1], [2]. La baza acestor extensiuni se află operatorul **D**, care are același rol ca derivata areolară $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, în cazul planului complex. În cele ce urmează, la fel ca într-o lucrare precedentă [5], vom utiliza în cazul spațiului cu trei dimensiuni corpul cuaternionilor.

1. Fie operatorul

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

unde 1, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sînt unitățile cuaternionice.

Cuaternionul

$$\boldsymbol{\Phi}(P) = \Phi_0(P) + \Phi_1(P)\mathbf{e}_1 + \Phi_2(P)\mathbf{e}_2 + \Phi_3(P)\mathbf{e}_3, \qquad (P = P(x_1, x_2, x_3))$$

se numește *olomorf* într-un domeniu tridimensional V, dacă $\Phi_j(P) \in C^1(V)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ și

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\Phi} = 0.$$

Presupunem domeniul V mărginit de suprafața Liapunov închisă S. Fie

$$\mathrm{d}\sigma_Q = \mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathbf{e}_1 + \mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_1\mathbf{e}_2 + \mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathbf{e}_3,$$

unde $Q = Q(y_1, y_2, y_3)$ este un punct curent din V.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 2, P. 239-242, BUCUREȘTI, 1966

În [2] şi [3] se stabileşte pentru cuaternioni următoarea extensiune spaţială a formulei de reprezentare Pompeiu-Teodorescu

$$\Phi(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \rho(P,Q)\cdot d\sigma_Q\cdot\Phi(Q)-\frac{1}{4\pi}\iiint_V \rho(P,Q)\cdot \mathbf{D}\Phi(Q)dv_Q \tag{1}$$

în care

$$\rho(P,Q)=-\mathbf{D}\frac{1}{|PQ|}.$$

Dacă $\Phi(P)$ este un cuaternion olomorf în V, formula (1) devine

$$\Phi(P)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \rho(P,Q)\cdot d\sigma_Q\cdot\Phi(Q)$$

pe care o vom numi formula integrală a lui Cauchy, prin analogie cu cazul bidimensional.

În [8], se arată că integrala de volum

$$T\Psi(P)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V \rho(P,Q)\cdot\Psi(Q)\,dv_Q \tag{2}$$

cu $\Psi(P)\in C(V)$, este continuă în tot spaţiul, olomorfă în exteriorul lui V, nulă la infinit şi verifică în V ecuaţia $\mathbf{D}T\Psi(P)=\Psi(P)$.

TEOREMA 1. (Morera-Teodorescu). *Condiţia necesară şi suficientă ca un cuaternion $\Phi(P)$ continuu în V să fie olomorf este ca pentru orice suprafaţă Liapunov închisă Σ, interioară domeniului V,*

$$\iint_\Sigma d\sigma_Q\cdot\Phi(Q)=0.$$

2. Prin analogie cu definiţia corespunzătoare în cazul planului complex, dată de N. Teodorescu [7], vom numi *polinom areolar* (*cuaternionic*) *de ordinul n*, în domeniul tridimensional V, o soluţie regulată în V a ecuaţiei

$$\mathbf{D}^{n+1}\mathfrak{f}(P)=0. \tag{3}$$

Vom da, mai departe, o reprezentare a polinomului areolar în spaţiu, cu ajutorul iterării operatorului integral al lui Pompeiu extins (2).

Dacă notăm

$$\mathbf{K}(P,Q)=-\frac{1}{4\pi}\rho(P,Q)$$

putem scrie

$$T\Psi(P)=\iiint_V \mathbf{K}(P,Q)\cdot\Psi(Q)dv_Q \quad \text{şi} \quad \mathbf{D}T\Psi(P)=\Psi(P).$$

Să considerăm operatorii iterați

$$\mathbf{K}^n(P, Q) = \iiint_V \mathbf{K}(P, R) \cdot \mathbf{K}^{n-1}(R, Q)\mathrm{d}v_R, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

și

$$T^n \Psi(P) = \iiint_V \mathbf{K}^n(P, Q) \cdot \Psi(Q)\,\mathrm{d}v_Q .$$

Dar

$$T^n \Psi = \iiint_V \mathbf{K}(P, R)\,\mathrm{d}v_R \iiint_V \mathbf{K}^{n-1}(R, Q) \cdot \Psi(Q)\,\mathrm{d}v_Q = T(T^{n-1}\Psi),$$

de unde

$$\mathbf{D}T^n\Psi = T^{n-1}\Psi, \ldots, \mathbf{D}^n T^n \Psi = \Psi.$$

Dacă, în plus, cuaternionul $\Psi(P)$ este olomorf în V, atunci

$$\mathbf{D}^{n+1} T^n \Psi(P) = 0.$$

Din cele de mai sus și din formula (1) obținem pentru soluția ecuației (3) reprezentarea

$$\mathfrak{f}(P) = \Phi_0(P) + T\Phi_1(P) + T^2\Phi_2(P) + \cdots + T^n\Phi_n(P), \tag{4}$$

unde $\Phi_k(P)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sînt cuaternioni olomorfi în V.

Deoarece

$$\mathbf{D}^k \mathfrak{f}(P) = \Phi_k(P) + T(\Phi_{k+1}(P) + T\Phi_{k+2}(P) + \ldots + T^{n-k-1}\Phi_n(P)),$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

cuaternionii olomorfi $\Phi_k(P)$ sînt determinați de valorile derivatelor $\mathbf{D}^n \mathfrak{f}(P)$ (pentru simplitate notăm $\mathbf{D}^0 \mathfrak{f}(P) = \mathfrak{f}(P)$) pe frontiera S și anume

$$\Phi_k(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \rho(P, Q) \cdot \mathrm{d}\sigma_Q \cdot D^k \mathfrak{f}(Q), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

de unde rezultă :

TEOREMA. 2. *Polinomul areolar de ordinul n, în domeniul tridimensional V, se reprezintă sub forma* (4), *unde cuaternionii olomorfi $\Phi_k(P)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ sînt determinați prin relațiile* (5).

Ținînd seama că

$$D^2 = -\Delta_3 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$$

obținem :

TEOREMA 3. *Componentele polinomului areolar de ordinul n, în domeniul V, sînt funcții poliarmonice de ordinul m în V, unde m-1 este partea întreagă a lui $\frac{n}{2}$.*

Se observă ușor că

$$\Phi_k(P) = \mathbf{D}^k \mathfrak{f}(P) - T(\mathbf{D}^{k+1} \mathfrak{f}(P)), \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Pe baza teoremei 1, rezultă:

TEOREMA 4. *Condiția necesară și suficientă ca $(n+1)$ cuaternioni $\mathfrak{f}_k(P)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ continui în V să reprezinte un polinom areolar $\mathfrak{f}(P) = \mathfrak{f}_0(P)$ de ordinul n și derivatele sale areolare succesive $D^k \mathfrak{f}(P = \mathfrak{f}_k(P)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ în V este ca pentru orice suprafață Liapunov închisă Σ, inclusă în V,*

$$\iint_\Sigma d\sigma_Q \cdot [\mathfrak{f}_k(Q) - T\mathfrak{f}_{k+1}(Q)] = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

3. Soluția regulată în domeniul V a ecuației neomogene

$$D^{n+1} \mathfrak{f}(P) = \mathfrak{g}(P),$$

cu $\mathfrak{g}(P)$ cuaternion continuu în V, se reprezintă sub forma

$$\mathfrak{f}(P) = \Phi_0(P) + T\Phi_1(P) + T^2\Phi_2(P) + \cdots + T^n\Phi_n(P) + T^{n+1}\mathfrak{g}(P), \tag{6}$$

unde cuaternionii olomorfi $\Phi_k(P)$ sînt dați de relațiile (5). Reprezentarea (6) este o generalizare a reprezentării lui Pompeiu-Teodorescu (1).

În comparație cu reprezentarea dată de M. Nedelcu [4], cu ajutorul integralelor de suprafață și a simbolismului matricial, reprezentarea (4) este mai simplă și mai ușor de folosit în rezolvarea unor probleme la limită.

Primită la redacție la 14 iulie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. Mihai Eminescu nr. 47 București

BIBLIOGRAFIE

1. GR. C. MOISIL, *Sur les quaternions monogènes*. Bull. Sci. Math., 55, 168–174 (1931).
2. GR. C. MOISIL, *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique*. Göbl, Bucarest 1931.
3. GR. C. MOISIL, N. TÉODORESCU, *Fonctions holomorphes dans l'espace*. Mathematica, Cluj, 5, 142–159 (1930).
4. M. NEDELCU, *The theory of the areolar polynomials in the m-dimensional space : II. The n-order areolar polinomial*, Rev. de Math. pures et appliquées, 5, *1*, 121–168 (1960).
5. D. PASCALI, *Cuaternioni olomorfi*, St. cerc. mat. **XII**, *1*, 163–186 (1961).
6. D. PASCALI, *O nouă reprezentare a polinoamelor areolare în plan*. St. cerc. matem., **XV**, *2*, 249-251 (1964).
7. N. TEODORESCU, *La dérivée aréolaire et ses applications dans la physique mathématique*. (teză), Paris, Gauthier-Villars (1931).
8. N. TEODORESCU, *Sur l'emploi de conditions globales dans quelques problèmes physiques*. Annali di Mathematica, **11**, 325–362 (1933).

ASUPRA UNEI CLASE DE TRANSFORMĂRI INTERIOARE

DE

FLORICA BUCUR

Fie X o suprafaţă topologică şi S^2 sfera cu structura analitică obişnuită. În lucrarea de faţă se pune şi se rezolvă (în cazul suprafeţelor compacte) următoarea problemă: În ce condiţii o mulţime M de transformări interioare definite pe X cu valori în S^2 fiind dată, există o structură analitică pe X aşa încît toate transformările mulţimii M să devină funcţii analitice în raport cu această structură analitică?

Ca aplicaţie se obţin teoreme privind tipul topologic al suparafeţelor compacte.

CAPITOLUL I

1. NOŢIUNEA DE VARIETATE DIFERENŢIABILĂ ŞI DE VARIETATE ANALITICĂ

În tot ceea ce urmează vom nota cu E^n spaţiul euclidian cu n dimensiuni cu topologia sa uzuală.

Reamintim că o funcţie $\varphi : G \to R$, definită pe un domeniu G al spaţiului E^n cu valori reale, se zice că este de clasă C^v ($v =$ un număr întreg pozitiv), dacă ea posedă derivate parţiale continui pînă la ordinul v inclusiv în fiecare punct al domeniului G.

Dacă φ posedă derivate parţiale de orice ordin în fiecare punct al domeniului G, vom spune că funcţia φ este de clasă C^∞.

Reamintim de asemenea că se numeşte varietate n-dimensională un spaţiu topologic în care fiecare punct posedă o vecinătate omeomorfă cu o submulţime deschisă a spaţiului euclidian E^n.

În tot cursul lucrării vom considera exclusiv varietăţi conexe metrice şi separabile.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 2, P. 243–266, BUCUREŞTI, 1966

SISTEM DIFERENŢIABIL DE COORDONATE PE O VARIETATE N-DIMENSIONALĂ

DEFINIŢIE. *Un sistem diferenţiabil S de coordonate de clasă r pe varietatea n-dimensională X este constituit din:*

a) *o familie $(V_j)_{j\in J}$ de mulţimi deschise ale spaţiului X, care acoperă spaţiul X, cu alte cuvinte aşa încît $X = \bigcup_{j\in J} V_j$;*

b) *o familie $(\Psi_j : G_j \to V_j)_{j\in J}$ de omeomorfisme, în care mulţimile G_j sînt mulţimi deschise ale spaţiului euclidian E^n şi astfel încît următoarea condiţie să fie îndeplinită: oricare ar fi perechea de indici $i, j \in J$ aşa încît $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, aplicaţia*

$$a_{ji} : \Psi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \Psi_j^{-1}(V_i \cap V_j), \tag{1}$$

definită prin

$$a_{ji}(x) = \Psi_j^{-1}(\Psi_i(x)) \text{ pentru orice } x \in \Psi_i^{-1}(V_i \cap V_j),$$

este de clasă C^r.

(Trebuie remarcat că funcţiile a_{ji} sînt definite pe domenii ale spaţiului euclidian E^n şi au valorile în domenii ale spaţiului euclidian E^n.) Evident, dacă aplicaţiile a_{ji} sînt de clasă C^∞, cu alte cuvinte dacă sistemul S este diferenţiabil de orice clasă, vom spune că sistemul diferenţiabil de coordonate S este de clasă ∞.

Două sisteme diferenţiabile de coordonate

$$S = ((V_j)_j, \Psi_j : G_j \to V_j, j \in J)$$

şi

$$S' = ((V'_k)_{k\in K}, \Psi'_k : G'_k \to V'_k, k \in K),$$

definite pe aceeaşi varietate X şi avînd aceeaşi clasă r, se zic echivalente dacă familia de mulţimi deschise $(W_i)_{i\in J\cup K}$ şi de omeomorfisme $\varphi_i : H_i \to W_i$ cu $i \in J \cup K$, în care

$$W_i = V_i,$$
$$H_i = G_i,$$
$$\varphi_i = \Psi_i,$$

dacă $i \in J$, şi

$$W_i = V'_i,$$
$$H_i = G'_i,$$
$$\varphi_i = \Psi'_i,$$

dacă $i \in K$, formează un sistem diferenţiabil de coordonate de clasă r.

Este evident că relaţia de echivalenţă între sisteme de coordonate de aceeaşi clasă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

DEFINIŢIE. *Se numeşte varietate diferenţiabilă de clasă r, o varietate topologică n-dimensională X împreună cu o clasă de sisteme diferenţiabile de coordonate de clasă r, echivalente între ele.*

Dacă X este o varietate diferențiabilă, $S = ((V_j)_{j\in J},\ \Psi_j : G_j \to V_j)$ un sistem de coordonate din clasa care definește structura de varietate diferențiabilă a lui X și dacă $x \in V_j$, atunci vom spune că omeomorfismul $\Psi_j : G_j \to V_j$ constituie un sistem local de coordonate al punctului x. Evident, unui punct i se pot asocia mai multe sisteme locale de coordonate.

Problema enumerării tuturor structurilor diferențiabile ce se pot defini pe o varietate topologică n-dimensională dată, constituie una din problemele centrale ale topologiei diferențiabile.

Milnor a arătat că există varietăți topologice pe care nu se poate defini nici o structură diferențiabilă. De asemenea, tot Milnor a arătat că pe sferele S^{4k+1} $(k \geqslant 2)$ se pot defini structuri diferențiabile neechivalente între ele.

Exemplu. Fie E^n spațiul euclidian cu topologia obișnuită. E^n este varietate n-dimensională. Pe E^n se definește o structură de varietate diferențiabilă de clasă ∞, cu ajutorul sistemului de coordonate S definit în modul următor :

$$S = \{(V_j)_{j\in J},\ \Psi_j :\ G_j \to V_j\}$$

în care J are un singur element 1, $V_1 = G_1 = E^n$, iar $\Psi_1 = 1_{E^n}$ = aplicația identitate.

Ori de cîte ori vom vorbi de varietatea diferențiabilă E^n vom avea în vedere structura diferențiabilă definită în acest mod.

2. TRANSFORMĂRI DIFERENȚIABILE. DIFEOMORFISME

DEFINIȚIE. *Fie X și X' două varietăți diferențiabile de clasă $\geqslant r$, și $f : X \to X'$ o aplicație a varietății X în varietatea X'.*

Vom spune că aplicația f este diferențiabilă de clasă r în punctul $x \in X$, dacă există un sistem local de coordonate $\Psi_j : G_j \to V_j$ al punctului x și un sistem local de coordonate $\Psi'_k : G'_k \to V'_k$ al punctului $f(x)$ așa încît aplicația

$$f_{kj} : \Psi_j^{-1}(V_j \cap f^{-1}(V'_k)) \to G'_k)$$

definită prin $f_{kj}(y) = \Psi_k'^{-1} f(\Psi_j(y))$ pentru orice $y \in \Psi_v^{-1}(V_j \cap f^{-1}(V'_k))$ este diferențiabilă de clasă r în punctul $\Psi_j^{-1}(x)$.

Este clar că dacă condiția impusă este realizată pentru o pereche Ψ_j, Ψ'_k de sisteme de coordonate, atunci ea este îndeplinită pentru orice altă pereche de sisteme de coordonate Ψ_r, Ψ'_s ale punctelor x, $f(x)$.

Aplicația identitate 1_X a varietății diferențiabile X este evident diferențiabilă de clasă r în fiecare punct al varietății X.

Vom spune, pe scurt, că $f : X \to X'$ este o aplicație diferențiabilă de clasă r dacă aplicația f este diferențiabilă de clasă r în fiecare punct al varietății X.

Dacă $g : X' \to X''$ este diferențiabilă de clasă r, atunci evident $g \circ f : X \to X''$ este și ea diferențiabilă de clasă r.

DEFINIŢIE. *Fie din nou X şi X' două varietăţi diferenţiabile de clasă $\geqslant r$ şi $f : X \to X'$ o aplicaţie diferenţiabilă de clasă r.*

Vom spune că f este un difeomorfism de clasă r sau omeomorfism diferenţiabil de clasă r, dacă există $g : X' \to X$ diferenţiabilă de clasă r aşa încît să avem

$$g \circ f = 1_X, \; f \circ g = 1_x .$$

În cele ce urmează vom presupune pentru comoditate că varietăţile diferenţiabile considerate sînt de clasă ∞.

De fapt, graţie unui rezultat al lui H. Whitney, studiul varietăţilor de clasă r se reduce la studiul varietăţilor de clasă ∞.

În mod precis este vorba de următorul rezultat : Fie X o varietate diferenţiabilă de clasă r. Există atunci o varietate X' de clasă ∞ şi un difeomorfism $\varphi : X \to X'$.

PROPOZIŢIA 1. *Fie V o varietate diferenţiabilă şi G o submulţime deschisă a sa. G este o varietate n-dimensională. Se poate introduce atunci în mod natural pe G o structură de varietate diferenţiabilă.*

În adevăr, fie $S = ((V_j)_{j \in J}, \Psi_j : G_j \to V_j, \; j \in J)$ un sistem diferenţiabil de coordonate pe V, care defineşte structura diferenţiabilă considerată.

Vom defini un sistem de coordonate pe G punînd

$$S' = ((V'_r)_{r \in K}, \Psi'_r : G'_r \to V'_r, \; r \in K),$$

în care

$$K = \{r \in J / V_r \cap G \neq \emptyset\},$$

$$V'_r = V_r \cap G, \; G'_r = \Psi_r^{-1}(V'_r), \; \Psi'_r = \Psi_r / G'_r .$$

Structura diferenţiabilă astfel definită o vom numi structura diferenţiabilă indusă pe G. Este evident că incluziunea canonică a varietăţii diferenţiabile G în varietatea diferenţiabilă V este o aplicaţie diferenţiabilă.

Fie X o varietate diferenţiabilă şi x un punct al său. Vom considera mulţimea aplicaţiilor $\varphi : G \to E^1$ definite pe vecinătăţi G ale punctului x cu valori în dreapta reală (considerată ca varietate diferenţiabilă) şi care sînt diferenţiabile în punctul x.

(Această mulţime nu e vidă, conform exemplului dat la aplicaţiile diferenţiabile.)

În această mulţime vom introduce următoarea relaţie de echivalenţă :

Vom zice că $\varphi : G \to E^1$ este echivalentă cu $\varphi_1 : G_1 \to E_1$, dacă există o vecinătate H a punctului x aşa încît :

$$a) \; H \subset G \cap G_1,$$

$$b) \; \varphi / H = \varphi_1 / H,$$

Clasele de echivalenţă astfel obţinute le vom numi germeni de funcţii diferenţiabile în punctul x. Mulţimea tuturor germenilor de funcţii diferenţiabile în punctul x o vom nota $\mathfrak{D}_x$.

Este clar că $\mathfrak{D}_x$ are structura de inel dedusă din structura de inel a lui E^1.

PROPOZIȚIA 2. *Fie $f : X \to X'$ o aplicație diferențiabilă în punctul x. În aceste condiții ea generează un omomorfism $f_x^* : \mathfrak{D}_{f(x)} \to \mathfrak{D}_x$ al inelului $\mathfrak{D}_{f(x)}$ în inelul $\mathfrak{D}_x$.*

Definiția lui f_x^* este următoarea:

Fie $\mu \in \mathfrak{D}_{f(x)}$ definit printr-o clasă de reprezentant $u : G \to E^1$, în care G este o vecinătate a lui $f(x)$. Fie $H = f^{-1}(G)$. H este deschisă și conține punctul x. Funcția $v : H \to E^1$, definită prin:

$$v(y) = \mu[f(y)] \text{ pentru orice } y \in H$$

este diferențiabilă în x, întrucît f este diferențiabilă în x și μ în $f(x)$.

Ea definește un germene de funcție diferențiabilă în x pe care îl vom nota prin definiție $f_x^*(\mu)$.

Se poate demonstra că mulțimea tuturor inelelor $\mathfrak{D}_x$ pentru $x \in X$ caracterizează structura diferențiabilă a varietății X (definiția lui Chevaley a noțiunii de varietate diferențiabilă).

ORIENTABILITATE

Fie S un sistem de coordonate de clasă r pe varietatea n-dimensională X. Presupunem că S este definit prin familia de mulțimi deschise $(V_j)_{j \in J}$ și de domenii $(G_j)_{j \in J}$ ale spațiului euclidian E^n precum și prin omeomorfismele $\Psi_j : G_j \to V_j$.

Fie acum $x \in V_i \cap V_j$. Relațiile (1) definesc funcțiile

$$a_{ji} : \Psi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \Psi_j^{-1}(V_{ij} \cap V_j).$$

Pentru fiecare $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Psi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ avem deci:

$$a_{ji}(y) = (a_{ji}^1(y_1, y_2, \ldots, y_n), a_{ji}^2(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, a_{ji}^n(y_1, y_2, \ldots, y_n)).$$

Se poate atunci considera matricea iacobiană $A_{ji}(x) = \|\alpha_{rs}(x)\|$, în care elementele $\alpha_{rs}(x)$ se definesc în modul următor:

Fie $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) = \Psi_1^{-1}(x)$. Atunci prin definiție

$$\alpha_{rs}(x) = \frac{\partial a_{ji}^r(y^0)}{\partial y^s}.$$

Ținînd seama de regulile de diferențiere ale funcțiilor, se obține imediat relația

$$(2) \qquad A_{kj}(x) \cdot A_{ji}(x) = A_{ki}(x), \text{ pentru orice } x \in V_i \cap V_j \cap V_k.$$

Dacă în relația (2) se pune $k = i$, se obține faptul că matricea $A_{ji}(x)$ este inversibilă și că prin urmare determinantul său este diferit de zero.

DEFINIȚIE. *Sistemul de coordonate S se numește orientabil dacă* $\det A_{ji}(x) > 0$ *pentru orice $i, j \in J$, și pentru orice $x \in V_i \cap V_j$.*

Se demonstrează cu ușurință că dacă o varietate X posedă un sistem de coordonate orientabil, atunci ea este o varietate orientabilă în sensul obişnuit al topologiei algebrice.

Dacă pe o varietate diferenţiabilă X s-a ales un sistem de coordonate orientabil, se zice că s-a ales o orientare a varietăţii diferenţiabile X.

NOŢIUNEA DE VARIETATE ANALITICĂ

În cele ce urmează vom nota cu C^n spaţiul complex de dimensiune complexă n. Elementele sale sînt sisteme ordonate $(z_1, z_2, ..., z_n)$ de cîte n numere complexe. Există un omeomorfism $\varphi : C^n \rightarrow R^{2n}$ definit în modul următor :

$$\varphi\,[(z_1, z_2, ..., z_n)] = (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n),$$

în care $z_r = x_r + iy_r$ pentru $r = 1, 2, ..., n$.

Definiţie. *Vom spune că pe varietatea X s-a dat un sistem analitic S de coordonate, dacă s-au dat :*

a) *o familie $(V_j)_{j\in J}$ de mulţimi deschise ale spaţiului X care acoperă spaţiul X ;*

b) *o familie $(\Psi_j : G_j \rightarrow V_j)_{j\in J}$ de omeomorfisme în care mulţimile G_j sînt mulţimi deschise ale spaţiului C^n şi astfel încît următoarea condiţie să fie îndeplinită :*

oricare ar fi perechea de indici $i, j \in J$ aşa încît $V_i \cap V_j \neq 0$, aplicaţia

$$a_{ji} : \Psi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \rightarrow \Psi_j^{-1}(V_i \cap V_j) \tag{3}$$

definită prin

$$a_{ji}(x) = \Psi_j^{-1}(\Psi_i(x))$$

pentru orice $x \in \Psi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$, este o aplicaţie analitică. (Această cerere are sens întrucît mulţimile $\Psi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$, $\Psi_j^{-1}(V_i \cap V_j)$ sînt submulţimi deschise ale spaţiului C^n.)

După cum se vede, noţiunea de sistem analitic de coordonate este cu totul analoagă cu noţiunea de sistem diferenţiabil de coordonate. Ca şi pentru sistemele diferenţiabile, se defineşte, în mod absolut analog pentru sistemele analitice, noţiunea de echivalenţă.

Definiţie. *Se numeşte varietate analitică, o varietate topologică X împreună cu o clasă de sisteme analitice de coordonate echivalente între ele.*

Noţiunea de sistem local de coordonate se extinde la cazul analitic.

Propoziţie. *Oricărui sistem analitic de coordonate pe varietatea X i se poate asocia în mod natural un sistem diferenţiabil de coordonate pe X de clasă ∞. Această asociere conservă relaţia de echivalenţă. Mai mult, sistemul diferenţiabil asociat unui sistem analitic este totdeauna orientabil.*

Demonstraţie. Fie $S = ((V_j)_{j\in J}, \Psi_j : G_j \rightarrow V_j)_{j\in J})$ un sistem analitic de coordonate pe X.

Fie $H_j = \varphi(G_j)$, $\varphi_j : H_j \rightarrow V_j$ definite prin

$$\varphi_j(y) = \Psi_j(\varphi^{-1}(y)) \text{ pentru orice } y \in H_j.$$

Sistemul $S_r = ((V_j)_{j\in J}, (\varphi_j : H_j \rightarrow V_j)_{j\in J})$ este un sistem diferenţiabil de clasă ∞.

Este evident că dacă $S \sim T$, atunci $S_r \sim T_r$.

Vom proba acum că S_r este un sistem orientabil.

În adevăr, vom ţine cont de faptul că funcţiile $a^1_{ji}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ $a^2_{ji}(z_1, \dots z_n) \dots a^n_{ji}(z_1, \dots, z_n)$ sînt funcţii analitice. Punînd în evidenţă partea reală şi partea imaginară a acestor funcţii, obţinem funcţiile

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

$$\Psi_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \dots, \Psi_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n)$$

şi totul se reduce la a verifica că determinantul

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} \\
\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial y_n} \\
\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_n} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\Psi_2}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial\Psi_2}{\partial y_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial\Psi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_2} \dots & \frac{\partial\Psi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial\Psi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial\Psi_n}{\partial y_2} \dots & \frac{\partial\Psi_n}{\partial y_n}
\end{vmatrix}$$

este pozitiv. (Am văzut deja că acest determinant este diferit de zero.) Însă pe baza relaţiilor lui Cauchy, acest determinat se scrie

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} \\
-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} \dots & -\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
-\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} \dots & -\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix} .$$

Acest ultim determinant îl putem dezvolta ușor după regula lui Laplace și obținem că el este egal cu o sumă de patrate de determinanți.

Corolar. *Oricărei varietăți analitice i se asociază în mod natural o varietate diferențiabilă orientabilă cu aceeași varietate topologică subiacentă.*

Pentru ca pe o varietate topologică X de dimensiune n să se poată defini cel puțin o structură de varietate analitică, următoarele două condiții sînt necesare :

a) dimensiunea varietății X este pară

b) X este orientabilă.

Aceste condiții nu sînt în general și suficiente. De exemplu, pe sferele S^{4k} nu se poate defini nici o structură de varietate analitică. Este valabilă totuși, după cum se va vedea, următoarea propoziție :

Pentru ca suprafața X să se poată defini cel puțin o structură de varietate analitică este necesar și suficient ca X să fie orientabilă.

După cum vom vedea pe exemplele de mai jos se poate întîmpla ca două structuri analitice să genereze aceeași structură diferențiabilă.

Problema enumerării tuturor structurilor ce se pot defini pe o varietate dată constituie o problemă importantă a teoriei funcțiilor. Vom aduce cîteva contribuții la rezolvarea acestei probleme pentru cazul dimensiunii 2.

Întocmai ca pentru cazul varietăților diferențiabile se definește noțiunea de transformare analitică de la o varietate analitică X în varietatea analitică Y (se înlocuiește peste tot „diferențiabil de clasă r" cu „analitic").

În același mod se definesc noțiunile de izomorfism analitic și de germene de funcție analitică în punctul $x \in X$.

Un enunț analog cu acela al propoziției 2 are evident loc.

Demonstrația se transpune cuvînt cu cuvînt la cazul analitic.

EXEMPLE DE VARIETĂȚI ANALITICE

a) Fie C^n spațiul euclidian complex n-dimensional. C^n este o varietate topologică $2n$-dimensională. Pe C^n se poate defini o structură analitică cu ajutorul următorului sistem de coordonate :

$$\{V_1 = C^n, \ \Psi_1 : C^n \to C^n, \ \Psi_1(z) = z\}.$$

b) Considerăm mulțimea tuturor dreptelor complexe ce trec prin origine în spațiul C^{n+1}. Această mulțime poartă denumirea de spațiu proiectiv complex n-dimensional și o vom nota $P_n(C)$. $P_n(C)$ este evident o varietate topologică de dimensiune $2n$. El se identifică cu următoarea mulțime cît :

Considerăm submulțimea $C^{n+1} - 0$ a lui C^{n+1}, cu alte cuvinte totalitatea sistemelor ordonate de cîte $(n+1)$ numere complexe $(Z_0,$

$Z_1, \ldots, Z_n$) aşa încît cel puţin un $Z_i \neq 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. În această mulţime introducem următoarea relaţie de echivalenţă:

$(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n) \sim (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, dacă şi numai dacă există $k \in C$, $k \neq 0$ aşa încît

$$Z_i = k\zeta_i \quad \text{pentru } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Mulţimea cît astfel obţinută se identifică evident cu $P_n(C)$.

Folosind această identificare vom introduce acum pe $P_n(C)$ un sistem analitic

$$((V_i)_0 \leqslant i \leqslant n, \ \Psi_i : G_i \to V_i)$$

în modul următor:

$$V_i = \{\text{claselor de echivalenţă } \dot{\overline{(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)}} \text{ aşa încît } Z_i \neq 0\},$$

$$G_i = C^n,$$

$$\Psi_i (Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = \dot{\overline{(Z_0, Z_1, \ldots, Z_{i-1}, 1, Z_{i+1}, \ldots, Z_{n-1})}}.$$

c) Vom descrie acum un procedeu general de construcţie de varietăţi complexe.

Fie X o varietate complexă şi G un grup de izomorfisme analitice (automorfisme) ale lui X. Spaţiul orbitelor lui G îl vom nota X/G şi cu $\pi : X \to X/G$ aplicaţia canonică. Vom spune că G operează liber asupra lui X dacă pentru orice $x \in X$ există o vecinătate $U(x) \ni x$ aşa încît $U(x) \cap g(U(x)) = \emptyset$ pentru orice element g din grupul G diferit de identitate.

În acest caz este clar că restricţia lui π la $U(x)$ este un omeomorfism.

Să presupunem acum că X este o varietate complexă. Putem întotdeauna alege un sistem de coordonate

$$\{(V_i)_{i \in I}, \ \Psi_i : G_i \to V_i, \ i \in I\}$$

aşa încît restricţia lui π la V_i să fie o corespondenţă topologică. Vom defini acum pe X/G un sistem analitic de coordonate

$$\{(W_i)_{i \in I}, \ \varphi_i : G_i \to W_i, \ i \in I\}$$

în modul următor:

$$w_1 = \pi(V_i),$$

$$\varphi_i(x) = \pi(\Psi_i(x)).$$

Varietatea analitică astfel definită o vom numi varietate analitică cît. Este evident că $\pi : X \to X/G$ este în acest caz o aplicaţie analitică.

Vom explicita două cazuri particulare.

d) Fie C^n, ca mai sus, spaţiul euclidian complex şi $w_1, w_2, \ldots w_{2n}$, 2^n-vectori ai săi liniar independenţi în structura lui C^n de spaţiu vectorial real. Să considerăm grupul $G = Z \times Z \times \ldots \times Z$, în care sînt prezenţi

$2n$-factori identici cu grupul aditiv al întregilor Z. Grupul G poate fi considerat ca grup de automorfisme ale lui C^n în modul următor :

La fiecare sistem $(i_1, i_2, \ldots i_{2n})$ de numere întregi vom asocia automorfismul $C^n \to C^n$ definit prin corespondența :

$$(Z_1, Z_2, \ldots Z_n) \to (x_1 + i_1 w_1, x_2 + i_2 w_2, \ldots x_n + i_n w_n, y_1 + \\ + i_{n+1} w_{n+1}, \ldots, y_n + i_{2n} w_{2n}),$$

în care am notat $Z_j = x_j + i y_j$.

În acest mod G acționează liber asupra lui C^n. Varietatea cît obținută poartă denumirea de tor complex.

Oricare două toruri complexe sînt omeomorfe înte ele, însă varietățile analitice pot fi diferite. Ele depind de alegerea vectorilor $(w_1, w_2, \ldots w_{2n})$.

e) Să luăm din nou submulțimea $C^n - 0$ a lui C^n. Ea este evident o varietate analitică (cu structura indusă).

Fie mai departe $u : C^n \to C^n$ o aplicație liniară inversibilă așa încît toate valorile sale proprii sînt în modul strict mai mari decît 1. Vom nota cu G grupul liber cu un generator μ. G poate fi considerat ca grup de automorfisme al lui $C^n - 0$, asociind generatorului μ aplicația u. G acționează liber asupra lui $C^n - 0$.

Varietatea analitică $C^n - 0/G$ poartă denumirea de varietate a lui Hopf și este omeomorfă cu $S^{2n-1} \times S^1$.

Alegînd diverse aplicații μ se pot obține diverse varietăți analitice. Varietățile lor topologice subiacente sînt identice și anume omeomorfe cu $S^{2n-1} \times S^1$. Coincid de asemenea structurile diferențiale asociate.

f) Vom încheia semnalînd că produsul cartezian a două varietăți analitice este încă o varietate analitică.

CAPITOLUL II

CARACTERIZAREA TOPOLOGICĂ A FUNCȚIILOR ANALITICE. TRANSFORMĂRI INTERIOARE

În jurul anului 1934 S. Stoilow a pus și a rezolvat [8] problema caracterizării topologice a funcțiilor analitice.

Pentru a putea enunța atît problema cît și soluția dată de către S. Stoilow, avem nevoie de cîteva definiții și rezultate preliminarii pe care le vom expune în cele ce urmează.

Să notăm cu S^2 sfera euclidiană cu două dimensiuni. Pentru fiecare spațiu topologic X, vom însemna cu $C(X, S^2)$ mulțimea aplicațiilor continue definite pe X și cu valori în S^2. Fie X și Y două spații oarecari și $f : X \to Y$ o aplicație continuă definită pe spațiul X cu valori în spațiul Y. Aplicația f generează o aplicație $f^* : C(Y, S^2) \to C(X, S^2)$ în modul următor. Pentru fiecare $u \in C(Y, S^2)$ vom pune $f^*(u) = u \circ f$. Se verifică imediat că dacă $f : X \to Y$ și $g : Y \to Z$, atunci este îndeplinită următoarea condiție :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Aplicațiile $X \to C(X, S^2)$, $f \to f^*$ definesc un functor contravariant de la categoria spațiilor topologice la categoria mulțimilor.

Problema caracterizării topologice a funcțiilor analitice poate fi formulată acum în modul următor :

Este oare posibil să se definească pentru fiecare varietate orientabilă 2-dimensională V o submulțime $J(V, S^2)$ a lui $C(V, S^2)$ așa încît următoarele condiții să fie îndeplinite ?

a) Dacă $f : V \to W$ este un omeomorfism al varietății V pe varietatea W, atunci restricția lui f^* la $J(W, S^2)$ aplică mulțimea $J(W, S^2)$ pe $J(V, S^2)$.

b) Oricare ar fi $u \in J(V, S^2)$ există pe V cel puțin o structură de varietate analitică așa încît u considerată ca aplicație de la varietatea analitică V la varietatea analitică S^2 este o transformare analitică (în sensul definiției de la capitolul precedent).

c) Dacă V este varietate analitică și $v : V \to S^2$ este o aplicație analitică neconstantă, atunci $v \in J(V, S^2)$.

Răspunsul afirmativ la această problemă a fost dat de către S. Stoilow. Pentru enunțul său este necesar să introducem noțiunea de transformare interioară.

Fie pentru aceasta X și Y două spații topologice și $f : X \to Y$ o aplicație continuă a spațiului X în spațiul Y.

Se zice că f este o aplicație deschisă dacă imaginea oricărei mulțimi deschide a lui X prin f este o mulțime deschisă a lui Y.

De asemenea, se zice că f este o aplicație zero-dimensională, dacă pentru orice $y \in Y$ subspațiul $f^{-1}(y)$ al lui X este zero dimensional.

O aplicație $f : X \to Y$ se numește interioară dacă este în același timp continuă, deschisă și zero-dimensională. Vom nota cu $I(X, Y)$ mulțimea transformărilor interioare definite pe spațiul X cu valori în spațiul Y.

Se verifică cu ușurință că mulțimea $I(X, S^2)$ satisface condiției *a*) din enunțul precedent (invarianța topologică a punctelor interioare și a dimensiunii).

S. Stoilow a arătat că această mulțime satisface și condițiile *b*), *c*).

Soluția dată de S. Stoilow problemei caracterizării topologice a funcțiilor analitice ridică următoarea problemă legată de punctul *b*) și anume :

În ce condițiuni o mulțime de transformări interioare $M \subset I(V, S^2)$ fiind dată, există o structură analitică *unică* pe V așa fel încît în raport cu această structură analitică toate aplicațiile din M să devină funcții analitice ?

Exemplul următor ne arată că acest lucru este imposibil dacă $M = I(V, S^2)$.

Fie $V = E^2$ cu structura analitică obișnuită și fie aplicațiile interioare $f_1, f_2 : E^2 \to S^2$, astfel încît $f_1 + f_2$ nu este o constantă și $f_1 + f_2$ nu este interioară, definite în modul următor :

$f_1 : E^2 \to S^2$ este incluziunea canonică a lui E^2 în S^2,

$f_2 : E^2 \to S^2$,

$$f_2(x, y) = \begin{cases} (-x, \ -y) \text{ dacă } y \leqslant 0, \\ (-x, \ -2y) \text{ dacă } y \geqslant 0. \end{cases}$$

Această aplicație este de fapt un omeomorfism, deci este o transformare interioară. Însă $f_1 + f_2$ se anulează în tot semiplanul inferior și deci nu poate fi interioară.

Dacă ar exista pe E^2 o structură analitică τ așa încît toate transformările interioare definite pe E^2 să devină analitice în această structură, atunci în particular f_1 și f_2 ar fi analitice împreună cu $f_1 + f_2$. Rezultă că $f_1 + f_2$ e interioară, ceea ce nu este adevărat.

În lucrarea de față se va da un răspuns parțial la această problemă și se vor trage din el unele consecințe.

Tot punctul $b)$ ridică problema următoare, la care vom da de asemenea un răspuns parțial în lucrarea de față.

O transformare interioară $u : V \to S^2$ fiind dată, să se caracterizeze toate structurile analitice ale lui V care au proprietatea că în raport cu aceste structuri, u este o transformare analitică.

Soluția acestei probleme reclamă considerarea unei noțiuni foarte apropiate de aceea de spațiu Teichmüler asociat varietății V.

NOȚIUNEA DE SEMIINEL. PROPRIETĂȚI GENERALE

În rezolvarea problemei caracterizării topologice a funcțiilor analitice am văzut că joacă un rol decisiv mulțimea $I\ (V, S^2)$ a transformărilor interioare definite pe suprafața orientabilă V cu valori în sfera 2-dimensională S^2.

În cele ce urmează ne propunem să studiem o structură algebrică naturală care poate fi introdusă pe mulțimea $I\ (V, S^2)$.

Considerarea diverselor structuri algebrice ce se pot introduce pe mulțimea $I\ (V, S^2)$ va juca un rol important în rezolvarea problemelor propuse.

Vom introduce mai întîi următoarele definiții generale.

DEFINIȚIE. *Fie* A *o mulțime înzestrată cu două operații algebrice în general nu peste tot definite. Fie* $\sigma : S \to A$, $\pi : P \to A$ *aceste două operații algebrice.* S și P *sînt evident submulțimi ale produsului cartezian* $A \times A$. *Dacă* $(a, b) \in S$ *și dacă* $(c, d) \in P$, *atunci vom nota* $\sigma(a, b) = a + b$, *iar* $\pi(c, d) = c.d.$

În aceste condiții vom spune că mulțimea A *împreună cu cele două operații algebrice constituie un semiinel dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :*

I. dacă $(a, b) \in S$, *atunci și* $(b, a) \in S$ *și* $a + b = b + a$;

II. dacă $(a, b) \in S$, $(b, c) \in S$, $(a, b+c) \in S$, $(a+b, c) \in S$ *atunci avem*

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

III. există $0 \in A$ *așa încît* $(a, 0) \in S$ *oricare ar fi* $a \in S$ *și în plus avem*

$$a + 0 = 0 + a = a;$$

IV. *oricare ar fi* $a \in A$ *există* $- a \in A$ *așa încît* $(a, - a) \in S$ *și* $a + (- a) = 0$;

V. *dacă* $(a, b) \in P$, $(b, c) \in P$, $(a, b. c) \in P$, $(a.b, c) \in P$ *atunci avem*

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

VI. *dacă* $(b, c) \in S\, (a, b+c) \in P$, $(a, b) \in P$, $(a, c) \in P\, (a, b, a.c) \in S$, *atunci avem* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

VII. *dacă* $(a, b) \in S$, $(a, c) \in P$ $(b, c) \in P$, $(a+b, c) \in P$ $(a+c, b+c) \in \in S$ *atunci avem*

$$(a + b) \cdot c = ac + bc;$$

VIII. *există* $1 \in A$ *așa încît* $(a, 1) \in P, (1, a) \in P$ *oricare ar fi* $a \in A$ *și avem*

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Pe scurt se poate spune că A împreună cu cele două operații algebrice verifică axiomele inelului cu element unitate, cu condiția ca elementele care intervin în axiomele inelului cu element unitate să fie definite.

Exemple. *a*) Se înțelege că orice inel cu element unitate este, în particular, un semiinel.

b) Fie A un semiinel și X o mulțime oarecare. În aceaste condiții, mulțimea tuturor aplicațiilor lui X în A poate fi înzestrată în mod natural cu o structură de semiinel. În adevăr, fie $f_1, f_2 : X \to A$. Vom spune că $f_1 + f_2$ este definit dacă $f_1(x) + f_2(x)$ este definit pentru orice $x \in X$. În mod analog $f_1 \cdot f_2$ este definit dacă $f_1(x) \cdot f_2(x)$ este definit pentru orice $x \in X$. Mai mult, în cazul cînd $f_1 + f_2$ și $f_1 \cdot f_2$ sînt definite, vom pune

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

pentru orice $x \in X$.

c) S^2 este un semiinel. În adevăr se consideră S^2 obținut prin compactifierea (în sensul lui Alexandroff) a planului euclidian E^2. Pe de altă parte E^2 se identifică cu corpul numerelor complexe. Structura de semiinel a lui S^2 se obține pornind de la structura obișnuită de corp a lui E^2 și ținînd seama de convențiile obișnuite privitoare la adunarea și înmulțirea cu ∞.

De exemplu $0 + \infty = \infty$, $c \cdot \infty = \infty$ pentru orice $c \neq 0$ etc.

d) $I(V, S^2)$ este un semiinel pentru orice varietate bidimensională V. Structura de semiinel se definește pe baza exemplelor *b*) și *c*). În plus vom cere ca suma și produsul să fie, evident, tot transformări interioare.

Se înțelege că este necesar să introducem, contrar convențiilor obișnuite privind transformările interioare ca elemente ale mulțimii $I(V, S^2)$, și aplicațiile constante.

Pentru simplificarea limbajului vom numi transformări interioare și transformările constante. În mod explicit, suma și produsul a două transformări $f_1, f_2 : V \to S^2$ au sens dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

a) dacă notăm cu $V_1 = f_1^{-1}(\infty)$ și $V_2 = f_2^{-1}(\infty)$, atunci transformările $f_1 + f_2, f_1 \cdot f_2 : V - (V_1 \cup V_2) \to S_2$ (care au sens) sînt transformări interioare.

b) Transformările $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ se extind la V și rămîn interioare.

PROPRIETĂŢI GENERALE ALE SEMIINELELOR

Noţiunea de ideal. Fie A un semiinel şi $B \subset A$ o submulţime a sa. Vom spune că B este un ideal la stînga al semiinelului A dacă următoarele condiţii sînt îndeplinite :

I. $a, b \in B,\ (a, b) \in S \Rightarrow a + b \in B,$

II. $b \in B \Rightarrow -b \in B,$

III. $a \in A,\ b \in B,\ (a, b) \in P \Rightarrow ab \in B.$

Definiţia este analoagă pentru idealul la dreapta. Un ideal care este în acelaşi timp ideal la dreapta şi la stînga se numeşte bilater.

Noţiunea de A-modul. O mulţime M înzestrată cu o operaţie algebrică internă notată aditiv şi care poate să nu fie peste tot definită, împreună cu o operaţie algebrică externă $A \times M$, se numeşte A-modul la stînga dacă sînt îndeplinite condiţiile obişnuite ale A-modulului la stînga, cu condiţia ca elementele scrise să existe.

Vom cere în plus ca pentru orice $\lambda \in A$ să existe cel puţin un $m \in M$ aşa încît λm să fie definit. Rezultă de aici imediat că $\lambda \cdot 0$ este definit pentru orice $\lambda \in A$ şi avem $\lambda \cdot 0 = 0$.

Pentru exemplificarea noţiunilor introduse vom utiliza frecvent noţiunea de indice local al unei funcţii f definită într-o vecinătate a unui punct x pe o varietate 2-dimensională V cu valori în planul lui Gauss (planul euclidian compactificat cu un punct la infinit).

Pentru aceasta vom aminti cîteva noţiuni elementare din topologia planului.

Fie $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, cu alte cuvinte cercul unitate al planului euclidian. Dacă însemnăm ca de obicei cu Z grupul aditiv al întregilor, atunci este ştiut că grupul de coomologie $H^1(S^1, Z)$ cu coeficienţi întregi este izomorf cu Z. Fixînd o orientare a cercului S^1 căpătăm un izomorfism bine determinat $H^1(S^1, Z) \simeq Z$. Presupunînd că am ales o dată pentru totdeauna o astfel de orientare rezultă că putem să identificăm într-un mod canonic $H'(S', Z)$ cu Z.

Fie acum $f : S^1 \to S^1$ o aplicaţie continuă a cercului S^1 în el însuşi. Această aplicaţie generează un omomorfism $f^* : H^1(S^1, Z) \to H^1(S^1, Z)$.

Conform identificărilor făcute, rezultă de fapt un omomorfism $f^* : Z \to Z$. Dar un astfel de omomorfism este perfect caracterizat printr-un întreg, pozitiv, negativ sau zero, $\omega(f) = n$, definit prin relaţia

$$\omega(f) = f^*(1) = n.$$

Întregul n astfel definit poartă denumirea de gradul aplicaţiei f. El se bucură de următoarea proprietate remarcabilă :

PROPOZIŢIA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca aplicaţiile $f, g : S^1 \to S^1$ să fie omotope este ca $w(f) = w(g)$* [1]

---

[1] S. EILENBERG, *Aplicaţii pe circonferinţă,* Fundamenta math. sau Foundations of algebraic topology.

PROPOZIŢIA 2. *Fie* $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ *şi* $h : S^1 \rightarrow S^1$ *definite prin relaţia*

$$h(z) = f(z) \cdot g(z).$$

În aceste condiţii avem relaţia

$$w(h) = w(f) + w(g)$$

Demonstraţie. Întrucît $w(f) = n$, rezultă din propoziţia precedentă că f este omotopă cu aplicaţia $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$, definită prin relaţia :

$$f_1(\theta) = e^{in\theta}.$$

Aceasta întrucît $w(f_1) = n$, în mod evident. De asemenea rezultă că g este omotopă cu aplicaţia $g_1 : S^1 \rightarrow S^1$, definită prin relaţia

$$g_1(\theta) = e^{im\theta},$$

unde $m = w(g)$.

Dar este clar că $f \cdot g$ este omotopă cu $f_1 \cdot g_1$, de unde rezultă relaţia cerută.

Fie acum $x \in V$ şi $f : U \rightarrow S^2$ o aplicaţie continuă definită pe o vecinătate U a lui x cu valori în planul lui Gauss S^2.

Să presupunem că U este astfel încît $f \neq 0$ sau ∞ în $U - \{x\}$. Lucrul acesta se realizează totdeauna dacă f este o transformare interioară.

Fie $\Psi : G \rightarrow U$ un sistem local de coordonate al punctului x, aşa încît :

a) $S^1 \subset G$,

b) $\Psi(S^1) \not\ni x$.

Astfel de sisteme de coordonate există evident totdeauna.

Putem atunci să considerăm aplicaţia

$$\bar{f} : S^1 \rightarrow S^1,$$

definită în modul următor :

$$\bar{f}(z) = \frac{f[\Psi(z)]}{|f[\Psi(z)]|}.$$

$\bar{f}$ este o aplicaţie continuă. $w(\bar{f})$ nu depinde, pe baza propoziţiei 1, de sistemul de coordonate $\Psi : G \rightarrow U$ ales şi îl vom numi ordinul funcţiei continue f în punctul x. Îl vom nota de obicei $w(f, x)$.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă* $f(x) \neq 0$ *sau* ∞, *atunci* $w(f, x) = 0$.

În adevăr, este evident că în aceste cazuri $\bar{f}$ este omotopă cu o constantă şi deci gradul ei este zero.

PROPOZIŢIA 4. $w(f + g, x) \geqslant \min(w(f, x), w(g, x))$.

Întrucît propoziţia are caracter local, folosind teorema lui S. Stoilow, este suficient să o verificăm pentru cazul funcţiilor analitice, ceea ce rezultă imediat.

PROPOZIŢIA 5. *Fiecare punct* $x \in V$ *defineşte în mod natural o valoare a semiinelului* $I(V, S^2)$.

Demonstraţie. Pentru fiecare $f \in I(V, S^2) - \{0\}$ vom pune $v(f) = w(f, x)$.

Propoziţiile precedente ne conduc la rezultat.

Fie acum $P_1, P_2, \ldots P_r$ un şir finit de puncte ale varietăţii V. Să asociem la fiecare punct al acestui şir cîte un întreg n_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Avem

PROPOZIŢIA 6. *Mulţimea B a tuturor elementelor f din $I(V, S^2)$ care satisfac relaţiilor*

$$w(f, P_i) \geqslant 0$$

constituie un subsemiinel al lui $I(V, S^2)$. Mulţimea elementelor f pentru care $w(f, P_i) \geqslant n_i$, constituie un B-modul.

Demonstraţie. Fie $f, g \in B$ aşa încît $f + g$ este definit. Rezultă de aici că $w(f + g, P_i)$ este definit şi conform propoziţiei 4, avem

$$w(f + g, P_i) \geqslant \min (w(f, P_i), w(g, P_i)) \geqslant 0.$$

În continuare observăm că $f \sim -f$. În adevăr, există aplicaţia continuă $h : V \times I \to S^2$ astfel încît $h(x, 1) = f(x)$, $h(x, -1) = -f(x)$ şi anume $h(x, t) = tf(x)$.

Rezultă deci că dacă $f \in B$, atunci şi $-f \in B$.

Fie acum $f \in B$ şi $g \in I(V, S^2)$ aşa încît $f \cdot g$ este definit. Conform propoziţiei 2

$$w(f \cdot g, P_i) = w(f, P_i) + w(g, P_i) \geqslant 0.$$

Fie acum f, g aşa încît $w(f, P_i) \geqslant n_i$, $w(g, P_i) \geqslant n_i$.

Avem, ca mai sus

$$w(f + g, P_i) \geqslant \min (w(f, P_i), w(g, P_i)) \geqslant n_i.$$

Dacă $g \in B$ şi $w(f, P_i) \geqslant n_i$, pe baza propoziţiei 2

$$w(f \cdot g, P_i) = w(f, P_i) + w(g, P_i) \geqslant n_i.$$

CATEGORIA Λ-MODULELOR LA STÎNGA

Fie Λ un semiinel cu element unitate, M şi N două Λ-module.

Printr-un omomorfism al Λ-modulului M în Λ-modulul N vom înţelege o aplicaţie $f : M \to N$ satisfăcînd următoarele condiţii :

a) $f(a + b) = f(a) + f(b)$ ori de cîte ori $a + b$ şi $f(a) + f(b)$ sînt definiţi

b) $f(\lambda \cdot a) = \lambda f(a)$ ori de cîte ori $\lambda \cdot a$ şi $\lambda f(a)$ sînt definiţi.

Dacă asociem la fiecare pereche M, N de Λ-module mulţimea $\mathrm{Hom}_\Lambda (M, N)$ a tuturor omomorfismelor Λ-modulului M în Λ-modulul N, obţinem în acest mod o categorie pe care o vom nota ${}_\Lambda\mathcal{C}$.

PROPOZIŢIE. *Categoria ${}_\Lambda\mathcal{C}$ posedă suficient de multe obiecte proiective, cu alte cuvinte pentru orice Λ-modul M există cel puţin un Λ-modul proiectiv (chiar liber F_M) şi o surjecţie $u : F_M \to M$.*

Demonstraţia rezultă imediat ca şi în cazul inelelor, întrucît şi în acest caz putem construi un Λ modul liber avînd drept sistem de generatori elementele lui M. Acesta va fi F_M. Aplicaţia u va transforma fiecare generator în elementul corespunzător al lui M.

În categoria ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$, Λ semiinel cu element unitate, mulţimile $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, N)$ au structură de mulţimi marcate, în sensul că posedă fiecare cîte un element privilegiat şi anume omomorfismul nul, omomorfism care asociază la fiecare element al lui M elementul zero din N. Acest omomorfism posedă următoarele proprietăţi :

$$f + 0 = 0 + f,$$

pentru orice morfism $f: M \to N$.

Această împrejurare permite să ne punem problema existenţei nucleului sau a conucleului unui morfism oarecare $f: M \to N$.

Vom arăta că în categoria ${}_{\Lambda}\mathcal{C}$ fiecare morfism $u: M \to N$ posedă cel puţin un nucleu. Nucleul pe care îl vom descrie mai jos îl vom nota Kern.

PROPOZIŢIA 1. *Dacă $u: M \to N$ este un omomorfism al Λ-modulului M în Λ-modulul N, atunci mulţimea :*

$$u^{-1}(0) = \{x \in M / u(x) = 0\}$$

formează un submodul al lui M.

Demonstraţie Dacă x, $y \in u^{-1}(0)$ şi dacă $x + y$ este definit, atunci $u(x) + u(y)$ este evident definit şi avem

$$u(x + y) = u(x) + u(y) = 0$$

deci $x + y \in u^{-1}(0)$.

Fie acum $x \in u^{-1}(0)$ şi $\lambda \in \Lambda$ aşa încît λx este definit.

În aceste condiţii pretind că $\lambda u(x)$ este definit.

Fie pentru aceasta $y \in N$ aşa încît λy să fie definit.

Avem

$$- \lambda y = \lambda(- y)$$

şi deci

$$\lambda y + \lambda(- y) = \lambda(y - y) = \lambda \cdot 0 = \lambda u(x).$$

Cu alte cuvinte $\lambda u(x)$ este definit şi

$$u(\lambda x) = \lambda u(x) = 0,$$

adică

$$\lambda x \in u^{-1}(0).$$

PROPOZIŢIA 2. *$u^{-1}(0)$ împreună cu incluziunea sa canonică în M constituie un nucleu al morfismului $u: M \to N$.*

Demonstraţie. Fie X un Λ-modul oarecare şi $v: X \to M$ aşa încît $uv = 0$. Va trebui să arătăm că v se factorizează prin $u^{-1}(0)$, ceea ce este evident.

Vom arăta acum că orice morfism $u: M \to N$ posedă cel puţin un conucleu. Conucleul pe care îl vom descrie mai jos îl vom nota Cokern.

Vom începe cu următoarele propoziţii care reprezintă de fapt generalizări facile ale propoziţiilor corespunzătoare din teoria inelelor.

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $M_1 \subset M$ este un submodul al modulului M, M_1 defineşte pe M o relaţie de echivalenţă. Vom nota cu M/M_1 mulţimea* *cît astfel obținută. Pe această mulțime se poate introduce în mod natural o structură de Λ-modul (Λ-semiinel) astfel încît aplicația canonică $\varphi : M \to M/M_1$ să fie un omomorfism de Λ-module. φ este o surjecție iar $M/M_1 \neq 0$ dacă și numai dacă $M_1 \neq M$.*

Demonstrație. Vom spune că elementele x, $y \in M$ sînt echivalente modulo M_1, dacă și numai dacă există un șir de elemente $x_1 x_2, \ldots x_n$ ale lui M așa încît să avem

$$x - x_1 \in M_1, \quad x_1 - x_2 \in M_1, \ldots, \quad x_{n-1} - x_n \in M_1, \quad x_n - y \in M_1.$$

Este evident că această relație este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Fie acum $\dot{x} = x \bmod M_1$, $\dot{u} = u \bmod M_1$.

Vom spune că clasa $\dot{x}$ se poate aduna cu clasa $\dot{u}$ dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

a) există cel puțin un element $x_1 \in \dot{x}$ și cel puțin un element $u_1 \in \dot{u}$ așa încît $x_1 + u_1$ are sens în M ;

b) dacă perechile (x_1, u_1), (x_2, u_2) îndeplinesc condiția *a*), atunci elementele $x_1 + u_1$, $x_2 + u_2$, sînt echivalente modulo M_1.

Presupunem acum că aceste două condiții sînt îndeplinite și fie (x_1, u_1) elemente îndeplinind condiția *a*).

Vom pune prin definiție

$$\dot{x} + \dot{u} = \dot{\overline{x_1 + u_1}}.$$

În mod analog fie $\lambda \in \Lambda$ și $\dot{x} \in M/M_1$. Vom spune că elementul λ se poate înmulți cu clasa $\dot{x}$ dacă următoarele condiții sînt îndeplinite :

1) există cel puțin un $x_1 \in \dot{x}$ așa încît λx este definit în M ;

2) dacă x_1, x_2 satisfac condiției 1), atunci $\lambda x_1 = \lambda x_2 \bmod M_1$.

Presupunem acum că aceste două condiții sînt îndeplinite și fie $x_1 \in \dot{x}$ așa încît λx_1 să aibă sens în M. Vom pune prin definiție

$$\lambda \dot{x} = \dot{\overline{\lambda x_1}}.$$

În acest mod M/M_1 devine un Λ-modul și, cum se constată cu ușurință, sînt îndeplinite condițiile din enunțul propoziției.

PROPOZIȚIA 4. *Orice morfism $u : M \to N$ posedă cel puțin un conucleu.*

Demonstrație. $u(M) = N_1 \subset N$ este un submodul al lui N. Se verifică imediat folosind propoziția 3 că N/N_1 este un conucleu al lui u.

EXEMPLE DE Λ-MODULE

Exemplul 1. Fie Λ și Γ două semiinele cu element unitate și $\varphi : \Lambda \to \Gamma$ un omomorfism de semiinele.

Presupunem că imaginea elementului unitate din Λ prin φ coincide cu elementul unitate din Γ.

În aceste condiții se poate introduce pe Γ o structură de Λ-modul în modul următor :

Fie $\lambda \in \Lambda$, $\gamma \in \Gamma$. Vom spune că produsul $\lambda \cdot \gamma$ este definit, dacă și numai dacă $\varphi(\lambda) \cdot \gamma$ este definit în structura de semiinel considerată. În aceste condiții vom pune prin definiție

$$\lambda \cdot \gamma = \varphi(\lambda) \cdot \gamma.$$

În acest mod Γ capătă structura de Λ-modul. Γ împreună cu această structură de Λ-modul va fi notat $\Gamma\ ]\varphi]$. Aplicația $\varphi : \Lambda \rightarrow \Gamma\ [\varphi]$ este evident un omomorfism de Λ-module.

Exemplul 2. Fie V_1, V_2 două suprafețe și $u : V_1 \rightarrow V_2$ o transformare interioară de la suprafața V_1 la suprafața V_2. După cum am arătat, acestei transformări interioare i se asociază omomorfismul de semiinele

$$u^{\star} : I(V_2, S^2) \rightarrow I(V_1, S^2).$$

Rezultă că pe $I(V_1, S^2)$ se poate introduce o structură de $I(V_2, S^2)$ —modul și anume $[I(V_1, S^2)]_{[u^{\star}]}$.

În particular, oricărei suprafețe riemanniene i se poate asocia un $I(S^2, S^2)$-modul.

Răspundem la unele din problemele puse la începutul acestui capitol, demonstrînd o serie de teoreme :

TEOREMA 1. *Condiția necesară și suficientă ca să existe o structură analitică pe suprafața compactă V, așa încît toate transformările mulțimii M ($M \subset I\ (V, S^2)$) să devină analitice pe V, este ca să existe un corp $K \subset I(V, S^2)$ așa încît următoarele condiții să fie îndeplinite* :

1. *extinderea $K \supset C$ să aibă gradul de transcendență egal cu 1*;
2. $M \subseteq K$.

Demonstrație. Necesitatea. Dacă elementele din K sînt analitice pe V, atunci, V fiind compactă, ele sînt de fapt funcții raționale pe V. V este însă suprafața riemanniană a unei funcții algebrice

$$P(z, u) = 0, \quad P(z, u) \in C[z, u]. \tag{1}$$

Rezultă atunci că K este un subcorp al corpului tuturor funcțiilor raționale pe V, fie acesta $\mathcal{L}$. Însă $\mathcal{L}$ este obținut în modul următor :

Se consideră corpul fracțiilor raționale de o variabilă $C(Z)$ și se adjuncționează elementul algebric u, satisfăcînd la o ecuație de tipul (1).

Rezultă că $\mathcal{L} = (C(Z))(u)$. $\mathcal{L}$ are deci gradul de transcendență egal cu 1 în raport cu C. Rezultă că gradul de transcendență al lui K este cel mult 1.

Suficiența. Fie K de grad de transcendență $\leqslant 1$ în raport cu C. Rezultă că el poate fi considerat ca subcorp al unui corp de forma $(C(Z))(u)$, cu alte cuvinte adăugăm mai întîi transcendenta Z și apoi elementul algebric u peste $C(Z)$. Elementele din $C(Z)$ sînt de forma

$$\frac{P_1(Z)}{P_2(Z)},$$

cît de două polinoame cu coeficienți complecși, cu $P_2(Z) \neq 0$.

Pe baza teoremei lui S. Stoilow, există o structură complexă pe V, aşa încît funcţia Z să fie analitică.

Rezultă atunci că în această structură $P_1(Z)$, $P_2(Z)$ sînt analitice şi deci orice element al lui $C(Z)$.

Pe de altă parte, u satisfăcînd la o ecuaţie algebrică cu coeficienţi în $C(Z)$, rezultă că şi ea este analitică pe V, de unde rezultă că orice element din $(C(Z))(u)$ este analitic pe V.

Prin urmare, orice submulţime M a unui corp K satisfăcînd condiţiei (1) se bucură de proprietatea că toate elementele sale devin funcţii analitice într-o aceeaşi structură analitică.

Observaţie. Este evident că o structură analitică τ pe V fiind dată, mulţimea tuturor transformărilor analitice pe V cu valori în S^2 în structura τ, formează un corp $K(\tau)$ aşa încît gradul de transcendenţă al extinderii $K(\tau) \supset C$ este egal cu 1. Cu această observaţie teorema 1 poate fi completată în modul următor.

TEOREMA 2. *Pentru ca subcorpul* $K \subset I(V, S^2)$, $K \supset C$ *să coincidă cu un corp de forma* $K(\tau)$, *următoarele condiţii sînt necesare şi suficiente* :

1) *extensia* $K \supset C$ *are gradul de transcendenţă 1*;

2) *corpul* K *este algebric închis în* $I(V, S^2)$ *adică orice element din* $I(V, S^2)$ *algebric peste* K *aparţine lui* K.

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei 1) rezultă din faptul că orice corp de forma $K(\tau)$ are grad de transcendenţă 1 peste C.

Pentru a demonstra necesitatea condiţiei 2) fie $\xi \in I(V, S^2)$ algebric peste K. Prin ipoteză K este de forma $K(\tau)$ adică ξ este soluţie a unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi în $K = K(\tau)$, deci ξ este o funcţie algebrică ce satisface la o ecuaţie cu coeficienţi analitici pe varietatea complexă (V, τ).

Rezultă că ξ este ea însăşi o funcţie analitică în structura (V, τ) deci aparţine lui $K(\tau)$. Dar $K(\tau) = K$ prin ipoteză, deci $\xi \in K$.

Să demonstrăm acum suficienţa condiţiilor 1) şi 2).

Fie deci K un corp care satisface la condiţiile 1) şi 2). Vom arăta că există pe V o structură analitică τ, aşa încît $K = K(\tau)$.

În virtutea condiţiei 1) şi a teoremei 1, rezultă că există o structură complexă τ pe V aşa încît $K \subset K(\tau)$.

Rămîne să arătăm incluziunea $K(\tau) \subset K$.

Fie x un element al lui K, transcendent peste C şi y un element oarecare al lui $K(\tau)$. Vrem să arătăm că $y \in K$. Însă $K(\tau)$ are el însuşi grad de transcendenţă 1. Rezultă că x şi y sînt algebric dependente.

Deci y este algebric peste $K(y$ satisface la o ecuaţie cu coeficienţi funcţii de x şi $x \in K)$.

Dar atunci, conform condiţiei 2) $y \in K$.

Teorema de mai sus ne permite să demonstrăm

TEOREMA 3. *Fie* V_1 *şi* V_2 *două suprafeţe compacte. Condiţia necesară şi suficientă ca* V_1 *să fie omeomorfă cu* V_2 *este ca extensiile* $I(V_1S^2) \supset C$, $I(V_2, S^2) \supset C$ *să fie izomorfe (cu alte cuvinte să existe un izomorfism al lui* $I(V_1, S^2)$ *pe* $I(V_2, S^2)$ *care se reduce la identitate pe* C*).*

Demonstrație. Condiția este evident necesară.

Pentru a dovedi suficiența vom folosi următorul rezultat din teoria curbelor algebrice : Dacă două curbe algebrice sînt birațional echivalente, atunci suprafețele lor riemanniene sînt omeomorfe.

Fie $K_1 \subset I(V_1, S^2)$ un corp satisfăcînd condițiile 1), 2) ale teoremei 2. Există atunci o structură analitică pe V_1, fie aceea τ_1, așa încît $K_1 = K(\tau_1)$.

Prin ipoteză există un izomorfism

$$\varphi : I(V_1, S^2) \to I(V_2, S^2).$$

Fie $K_2 = \varphi(K_1)$. $K_2 \subset I(V_2, S^2)$ și satisface evident condițiile 1) și 2) ale teoremei 2. Rezultă din teorema 2 că există o structură complexă τ_2 pe V_2 așa încît $K_2 = K(\tau_2)$. Am obținut în acest mod curbele algebrice (V_1, τ_1), (V_2, τ_2). Ele au același corp de funcții raționale (mai precis corpurile funcțiilor lor raționale sînt izomorfe). În adevăr $K(\tau_2)$ este izomorf cu $K(\tau_1)$ prin construcție.

Rezultă că curbele algebrice (V_1, τ_1) și (V_2, τ_2) sînt birațional echivalente, deci suprafețele V_1, V_2 sînt omeomorfe.

TEOREMA 4. *Fie U și V două suprafețe compacte și* $f : U \to V$ *o aplicație continuă. Pentru orice* $u \in I(V, S^2)$ *vom pune prin definiție* $f^*(u) = u \circ f$.

Să presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiții :

1. *Dacă u este o transformare interioară, atunci și* $f^*(u)$ *este o transformare interioară.*

2. *Dacă* $u_1, u_2 \in I(V, S^2)$ *și dacă* $u_1 + u_2$ *are sens, atunci* $f^*(u_1) + f^*(u_2)$ *are sens și avem*

$$f^*(u_1 + u_2) = f^*(u_1) + f^*(u_2).$$

3. *Dacă* $u_1, u_2 \in I(V, S^2)$ *și dacă* $u_1 \cdot u_2$ *are sens, atunci* $f^*(u_1) f^*(u_2)$ *are sens și avem*

$$f^*(u_1 u_2) = f^*(u_1) f^*(u_2).$$

În aceste condiții f este o transformare interioară.

Mai mult, o structură analitică fiind dată pe V, există o structură analitică pe U, așa încît în raport cu aceste structuri f este o transformare analitică.

Demonstrație. Vom demonstra mai întîi că f este o transformare interioară. Admițînd prin absurd că ar exista un continuu $C \subset U$ așa fel încît $f(C)$ se reduce la un punct, rezultă că $u\,(f(c))$ se reduce la un punct pentru orice u, ceea ce contrazice faptul că $u \circ f$ este interioară.

Pentru a arăta că f este deschisă, să facem următoarea remarcă : pentru orice suprafață V și pentru orice punct al său p, există o transformare interioară $u : V \to S^2$ așa încît u este local topologică în punctul p.

Putem acum să demonstrăm că f este deschisă.

Va fi suficient să arătăm că pentru fiecare punct $x \in U$, există o vecinătate $W_x \ni x$ așa încît $f(W_x)$ este o mulțime deschisă a lui V. Fie $p = f(x)$ și $u : V \to S^2$ interioară și local topologică pe o vecinătate N a lui p. Putem lua $W_x = f^{-1}(N)$. Va fi suficient să arătăm că $f(W_x)$ este o mulţime deschisă a lui V. Însă $u(f(W_x))$ este o mulţime deschisă şi $f(W_x)$ este conţinută în N, unde u este topologică. Deci (teorema lui Brower) $f(W_x)$ este deschisă.

Fie (V, τ) o structură analitică oarecare pe V, $K(\tau)$ corpul funcţiilor analitice în această structură pe V:

$$K(\tau) \subset I(V, S^2).$$

Fie $f^*(K(\tau))$. Din ipoteză rezultă

1) $f^*(K(\tau)) \subset I(U, S^2)$;

2) $f^*(K(\tau))$ este un corp de grad de transcendenţă 1.

În aceste condiţii rezultă că există o structură analitică ρ' pe U, aşa încît toate transformările din $f^*(K(\tau))$ sînt analitice. Dar atunci rezultă că f este raţională, deci analitică, q.e.d.

Pentru verificarea analiticităţii observăm că putem considera pe V numai restricţii de funcţii raţionale definite pe întreaga varietate V.

Ne propunem acum să arătăm că proprietăţile semiinelului $I(V, S^2)$ sînt strîns legate de o noţiune foarte apropiată de aceea de spaţiu Teichmüller.

Fie pentru aceasta $T(V)$ mulţimea tuturor structurilor complexe care se pot defini pe varietatea V. (Nu este nevoie deocamdată să presupunem că V este suprafaţă compactă.)

Să însemnăm cu $\mathcal{C}(V)$ mulţimea tuturor subcorpurilor lui $I(V, S^2)$ care îndeplinesc condiţiile 1), 2) din enunţul teoremei 2 (De data aceasta V este compact.)

Există atunci o aplicaţie naturală

$$\Psi : T(V) \to \mathcal{C}(V),$$

definită în modul următor:

Fie A un obiect al mulţimii $T(V)$ cu alte cuvinte o structură complexă pe varietatea compactă V. V devine de fapt în această situaţie o varietate algebrică peste corpul numerelor complexe. Fiecare funcţie raţională definită pe această varietate algebrică este o transformare interioară a lui V în S^2 şi mulţimea tuturor acestor transformări interioare formează un corp de grad de transcendenţă 1 peste C. Obţinem în acest mod un element bine determinat K al lui $\mathcal{C}(V)$. Vom pune prin definiţie $\Psi(A) = K$.

Din teorema fundamentală a lui S. Stoilow asupra transformărilor interioare rezultă că Ψ este surjectivă. Dacă $\Psi(A) = \Psi(B)$ atunci structurile analitice (V, A) (V, B) sînt conform echivalente. În adevăr dacă A şi B sînt două elemente din $T(V)$ aşa încît varietăţile algebrice (V, A), (V, B) au exact aceleaşi corpuri de funcţii raţionale, atunci aceste varietăţi sînt conform echivalente. Acest fapt ne dă posibilitatea să obţinem interpretarea tuturor structurilor complexe pe V pentru care o transformare interioară $f : V \to S_2$ fiind dată, devine analitică. Este suficient pentru aceasta să considerăm toate corpurile cu proprietăţile 1), 2), din teorema 2 care conţin pe f şi apoi structurile complexe asociate lor.

Din rezultatele obţinute mai sus putem deduce un răspuns parţial la următoarea problemă :

În ce condiţii un semiinel Λ fiind dat există o suprafaţă V aşa încît $I(V) \simeq \Lambda$?

Teoremă. *Dacă $\Lambda \simeq I(V)$ unde V este o suprafaţă orientabilă şi compactă, atunci pentru oricare subcorpuri K_1, K_2 ale sale satisfăcînd condiţiile din teorema 2, există un izomorfism $\varphi : \Lambda \to \Lambda$ aşa încît $\varphi(K_1) \subset K_2$.*

CAZUL SUPRAFEŢELOR NEORIENTABILE

În cele de mai sus ne-am ocupat întotdeauna de cazul transformărilor interioare definite pe varietăţi orientabile şi avînd valorile tot în varietăţi orientabile.

Vom arăta acum că, folosind o observaţie a lui S. Stoilow, studiul transformărilor interioare definite pe varietăţi orientabile sau nu cu valori în varietăţi orientabile sau nu se reduce la acela al varietăţilor orientabile.

Pentru a formula observaţia semnalată de S. Stoilow, să reamintim următorul fapt : Dacă V este o varietate neorientabilă există o acoperire cu două foi a sa $(\widetilde{V}, V, p)$ aşa încît $\widetilde{V}$ este orientabilă.

Observaţia se poate acum formula în modul următor : Dacă V_1, V_2 sînt suprafeţe aşa încît V_1 este orientabilă iar V_2 neorientabilă şi dacă $f : V_1 \to V_2$ este o transformare interioară, există atunci o transformare interioară $\tilde{f} : V_1 \to \widetilde{V}_2$ aşa încît următoarea diagramă să fie comutativă :

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{V}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & V_2 \end{tikzcd}$$

$(\widetilde{V}_2, V_2, p_2)$ este acoperirea orientabilă cu două foi a suprafeţei neorientabile V_2.

Să presupunem acum că şi V_1 este neorientabilă şi că $f : V_1 \to V_2$ este o transformare interioară. Fie $(\widetilde{V}_1, V_1, p_1)$ acoperirea orientabilă cu două foi a lui V_1.

În aceste condiţii $f \circ p_1 : \widetilde{V}_1 \to V_2$ este interioară.

Sîntem acum în măsură să aplicăm observaţia lui S. Stoilow. Există deci $\tilde{f} : \widetilde{V}_1 \to \widetilde{V}_2$ interioară aşa încît următoarea diagramă să fie comutativă :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{V}_1 \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1"'] & \widetilde{V}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Primită la redacţie la 13 septembrie 1965

Institutul de construcţii, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandroff P., Hopf H., *Topologie* Bd. 1, Berlin, 1935.
2. Ahlfors L. V., *The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces*. Princeton, 1960, p. 45–66.
3. Bers L., *Quasiconformal Mappings and Teichmuller's Theorem Analytic functions*. Princeton 1960, p. 89–120.
4. Bers L., *Spaces of Riemann surfaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburg 1958, p. 349–361.
5. Kerékjartó B. V., *Vorlesungen über Topologie*, Berlin, 1923.
6. МАРКУШЕВИЧ А. И., *Теория аналитических функций*. Москва-Ленинград, 1948.
7. Seifert H., Threfall W., Topologie, 1938.
8. Stoilow S., *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des functions analytiques*, Paris, 1938.
9. ЧЕБОТАРЕВ Н. Г., *Теория алгебраических функций*, Москва-Ленинград, 1951.
10. Walker R. J., *Algebraic Curves*. Princeton, 1950.
11. Weyl H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*. 2 Auf., Leipzig, Berlin, 1923.
12. Zariski O., Samuel P., *Commutative Algebra*. Vol. I, II, New York, 1962.

ELEMENTE DE TEORIA FASCICULELOR (I)

DE

NICOLAE POPESCU

Lucrarea, o primă parte a unui şir de expuneri, prezintă functorii adjuncţi, condiţiile de existenţă şi proprietăţile acestora în cazul general şi în cazul categoriilor abeliene. Materialul este destinat ca punct de reper pentru capitolele următoare prezentînd însă şi o importanţă în sine.

CAPITOLUL I

FUNCTORI ADJUNCŢI ŞI APLICAŢII

INTRODUCERE

Expunerea de faţă este o primă parte a unei lucrări care constituie conţinutul — în mare măsură — al unui seminar ţinut în cadrul Institutului de matematică al Academiei Republicii Socialiste România în anul 1964—65. Scopul seminarului a fost de a pune la curent pe participanţi cu unele probleme actuale ale teoriei categoriilor şi algebrei omologice. Alături de rezultate remarcabile obţinute în ultimii ani de mulţi cercetători străini, în cadrul seminarului au fost expuse o serie de rezultate ale cercetătorilor români, din domeniul respectiv, mulţi dintre ei fiind membri ai seminarului în cadrul căruia au făcut expuneri deosebit de interesante.

Seminarul, în speţă expunerea de faţă, nu poate fi urmărită fără un bagaj prealabil de cunoştinţe din domeniul respectiv. De aceea cititorul trebuie să fie familiarizat în foarte mare măsură cu următoarele lucrări apărute :

(1) GROTHENDIECK A., *Sur quelques points d'algèbre homologique* (cap. I). Tohoku Math. Journal, *3* (1957) (tradusă în limba rusă în colecţia „Matematica" sub titlul *Necotorîe voprosî gomologhicescoi algebre*).

(2) KUROŞ A. G. şi colab., *Bazele teoriei categoriilor*. Analele româno-sovietice *4* (1961).

(3) Cartan H., Eilenberg S., *Homological algebra.* Princeton, 1956, cap. I, II, III, IV, V, VI (tradusă în limba rusă, 1960).

Toate noţiunile care apar în această expunere, precum şi în cele care urmează şi care nu vor fi definite, se găsesc în una cel puţin din cele trei lucrări de mai sus. De fiecare dată vom indica prin un număr în paranteză lucrarea respectivă.

Pentru a evita confuzii şi contradicţii de natură logică vom lucra cu mulţimi al căror cardinal face parte dintr-un univers (bine specificat dacă este cazul).

Propoziţiile şi definiţiile vor purta două numere : primul indică capitolul iar celălalt numărul de ordine. Numerotarea este în ordinea succesivă a propoziţiilor şi definiţiilor ; corolarele şi lemele vor purta doar un singur număr : acel al ordinii naturale. Orice capitol este împărţit pe paragrafe, fiecare avînd un titlu.

Primul capitol începe cu expunerea conceptului de univers. Urmează apoi cîteva cuvinte privind categoriile Ens, Ab, Gr, Ann şi altele. Un loc important în cadrul capitolului I îl joacă conceptul de functori reprezentabili şi functori adjuncţi, concepte care sînt expuse în mod sistematic. Ultima parte a lucrării conţine cîteva aplicaţii ale faptelor teoretice expuse.

Expunerea primului capitol în cadrul seminarului a fost făcută de Nicolae Popescu şi Constantin Năstăsescu.

§ 1. UNIVERSURI GROTHENDIECK

În definiţia ce urmează nu vom face distincţie între o mulţime şi cardinalul său.

Definiţia 1. 1. *Un ansamblu U de cardinale, este un univers dacă următoarele axiome sînt verificate:*

U_1. *Dacă $\{X_i\}_{i\in I}$ este o familie de cardinale din U şi dacă I este un element din U, atunci $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ este un cardinal din U.*

U_2. *Dacă $x \in U$, atunci ansamblul $\{x\}$ este un element al lui U.*

U_3. *Dacă $x \in X$, şi X aparţine lui U, atunci x aparţine lui U.*

U_4. *Dacă X este un ansamblu ce aparţine lui U, ansamblul $\mathcal{P}(X)$ al părţilor sale este un element din U.*

U_5. *Cuplul (x, y) este un element al lui U dacă şi numai dacă x şi y sînt elemente din U.*

Pentru a evita unele contradicţii, este convenabil de presupus, în raţionamentele ce se fac, că ansamblele cu care se lucrează sînt echipotente cu ansamblele dintr-un anumit univers ; vom specifica aceasta spunînd că o anumită mulţime are cardinalul într-un anumit univers, sau că aparţine acelui univers.

Exemplul de univers este dat de familia tuturor mulţimilor finite (două mulţimi finite echipotente nu sînt distincte). Mai mult, dacă ω este un ordinal limită, atunci familia mulţimilor al căror cardinal este mai mic decît ω este un univers (rămîne în vigoare convenţia de mai sus : două mulţimi echipotente nu sînt distincte).

Iată cîteva consecințe imediate ale axiomelor de mai sus.

— Dacă Y este conținută în X și dacă X este un element al lui U, atunci Y este un element al lui U (axiomele U_4 și U_3).

— Dacă X și Y sînt două ansamble ce aparțin lui U, atunci $X \cup Y$ și $X \times Y$ sînt elemente ale lui U (axiomele U_1 și U_5).

— Dacă x și y sînt două elemente din U, atunci ansamblul $\{x, y\}$ aparține lui U (axiomele U_2 și U_1).

— Dacă $(X_i)_{i \in I}$ este o familie de ansamble din U și dacă I aparține lui U, atunci produsul ΠX_i este un element din U (axiomele U_3 și U_1).

— Dacă X este un ansamblu ce aparține lui U, atunci cardinalul lui X este strict inferior cardinalului lui U (aceasta, deoarece cardinalul lui X este strict inferior cardinalului lui $\mathcal{P}(X)$).

§ 2. TERMINOLOGIE

Fie U un univers și $\mathcal{C}$ o categorie.

Definiția 1. 2. *Vom spune că $\mathcal{C}$ este o U-categorie dacă pentru orice două obiecte X, Y ale lui $\mathcal{C}$,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *este o mulțime al cărui cardinal este în U.*

U categoria $\mathcal{C}$ se zice U-categorie mică, sau element al lui U, sau încă, că aparține lui U, dacă clasa Ob $\mathcal{C}$ *a obiectelor lui $\mathcal{C}$ este o mulțime, element al lui U.*

Fie $\mathcal{C}$ o categorie, astfel că Ob $\mathcal{C}$ este o mulțime. Atunci există un univers U, astfel că $\mathcal{C}$ este o U-categorie mică și U se poate alege cel mai mic cu proprietatea aceasta; într-adevăr, dată fiind o mulțime $\{X_i\}_{i \in I}$ de mulțimi, există un univers care le conține ca elemente și cel mai mic cu proprietatea aceasta. El este intersecția tuturor universurilor care conțin simultan toate mulțimile date, ca elemente.

În cele ce urmează vom considera ca dat un univers U; toate categoriile care apar sînt prin definiție U-categorii sau elemente ale lui U, dacă contrariul nu va fi specificat.

§ 3. CÎTEVA CATEGORII UZUALE

Notăm cu Ens categoria mulțimilor elemente ale lui U, pentru care $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X, Y)$ este formată de toate funcțiile definite pe X cu valori în Y. Evident, deoarece pentru orice două obiecte X, Y ale lui Ens, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X, Y)$ este o submulțime în $\mathcal{P}(X \times Y)$, deducem că Ens este o U-categorie.

Iată cîteva chestiuni legate de categoria Ens. Un morfism $f\colon X \to Y$ din Ens este un *monomorfism* ((1), cap. I) dacă și numai dacă f este o injecție; f este *epimorfism* ((1), cap. I) dacă și numai dacă este o aplicație surjectivă. Un *bimorfism* din Ens este neapărat un izomorfism (prin bimorfism înțelegem un morfism simultan monomorfism și epimorfism). Ens este o *bicategorie*, adică orice morfism : $f\colon X \to Y$ se poate factoriza unic sub forma $X \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{i} Y$ cu p epimorfism și i monomorfism. În Ens există un obiect final : o mulțime formată doar dintr-un punct. Mulțimea vidă joacă rolul de obiect inițial : există o unică aplicație (aplicația vidă) de la mulțimea vidă într-o mulțime.

O altă categorie importantă este categoria Ab a grupurilor abeliene. Considerăm că cititorul este familiarizat cu această categorie de aceea nu intrăm în detalii. Ab este o *categorie perfectă* adică în care orice bimorfism este un izomorfism. De asemenea Ab este o bicategorie. Aceleași chestiuni se pot spune despre categoria Gr a grupurilor oarecare sau categoria Top a spațiilor topologice. Detalii asupra acestor categorii, precum și asupra altora vom da la momentul oportun.

Un caz special îl prezintă categoria Ann a inelelor[1]) cu element identitate nenul și în care morfismele sînt homomorfismele de inele ce păstrează elementul identitate. În A monomorfismele sînt homomorfismele de nucleu nul ; este o problemă deschisă caracterizarea epimorfismelor din categoria inelelor (sau numai în categoria inelelor comutative). Ann este o bicategorie, deoarece orice homomorfism surjectiv este un epimorfism în Ann. Nu este o categorie perfectă, deoarece homomorfismul canonic : $Z \to Q$ este un bimorfism fără a fi izomorfism. Pentru orice inel A există un unic morfism de inele $Z \to A$; deci Z este un obiect inițial pentru categoria Ann. Dacă admitem și inelul nul, adică pentru care unitatea este și element nul, atunci acest inel este un obiect final pentru A. Ulterior vom vedea unele chestiuni legate de categoria A.

O altă categorie importantă este categoria Cat a U-categoriilor mici, în care morfismele sînt functori covarianți. Cat este după cum se va putea deduce ușor, mai tîrziu, o bicategorie : de asemenea în Cat monomorfismele sînt functorii *fideli* (reținem că un functor covariant, spre exemplu T : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este fidel dacă pentru orice două obiecte X, Y din $\mathcal{C}$, aplicația canonică

$$T(X, Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T(X), T(Y))$$

este un monomorfism în Ens. T se zice deplin fidel dacă pentru orice $X, Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $T(X, Y)$ este un izomorfism în Ens. Ulterior vom vedea că în Cat un bimorfism nu este un izomorfism în general. Cat are un obiect final : o categorie F formată dintr-un obiect X și un singur morfism 1_X (1_X este morfismul identic al lui X).

§ 4. CATEGORIA PREFASCICULELOR

DEFINIȚIA 1. 3. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie. Un functor contravariant* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ *se zice prefascicul.*

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{C}^{\wedge}$ categoria ale cărui obiecte sînt prefasciculele definite pe $\mathcal{C}$ cu valori în Ens, iar morfismele sînt morfismele functoriale. Evident pentru a fi riguroși vom admite că obiectele lui $\mathcal{C}$ formează o mulțime care însă nu este neapărat element al lui U. Așadar $\mathcal{C}^{\wedge}$ nu este în general o U-categorie. Acest fapt este valabil dacă, spre exemplu, $\mathcal{C}$ este o U-categorie mică. În orice caz $\mathcal{C}^\wedge$ nu este un element al lui U, dacă $\mathcal{C}$ nu este o categorie ,,vidă''.

---

[1]) Se subînțelege, ca de altfel pentru toate categoriile concrete ((2), cap. I), că ansamblul subiacent al oricărui obiect din A este în U.

Fie $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$. Pentru orice $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ asocierea

$$Y \rightsquigarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

este, după cum se vede, un prefascicul notat h_X, deci un obiect din $\mathcal{C}^\wedge$. Asocierea

$$X \rightsquigarrow h_X$$

este un functor covariant de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}^\wedge$.

PROPOZIŢIA 1. 4. (Teorema Yoneda-Grothendieck). *Fie $\mathcal{C}$ o categorie $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^\wedge$ și $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$. Există un izomorfism functorial în X* şi *F*

$$i : F(X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_X, F).$$

Dacă F este de forma h_Y, $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, atunci aplicaţia i este cea canonică, dată de h:

$$h_{X,Y} : \operatorname{Hom}\ (X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_X, h_Y).$$

Functorul h este deplin fidel.

Demonstraţie. Iată cum este definită aplicaţia i : *fie* $x \in F(X)$. Definim un morfism functorial $\varphi^x : h_X \to F$ în felul următor : pentru orice $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, şi $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(YX)$, punem $\varphi^x_Y(f) = F(f)(x)$. Evident că $\varphi^x_X(1_X) = x$. Se dovedeşte imediat că φ^x este un morfism functorial.

O aplicaţie inversă a lui i, notată j, se construieşte astfel: pentru $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h_X, F)$ punem $j(\varphi) = \varphi_X(1_X)$. Se constată imediat că $i \circ j = 1$ şi $j \circ i = 1$; (prin 1 am notat, notaţie care va mai fi folosită fără specificare uneori, morfismul identic al obiectului în cauză).

Dacă $F = h_Y$, atunci $F(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$; dacă $x \in F(X)$, atunci, cu notaţiile de mai sus, $x \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ şi $i(x) = \varphi^x$ acţionează astfel : dacă $Z \in \operatorname{Ob}_{\mathcal{C}}$ şi $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, atunci $\varphi^x_Z(f) = h_Y(f)(x)$. Dar se vede imediat că $h_Y(f)(x) = x \circ f$ (compunerea fiind făcută în categoria $\mathcal{C}$). Aşadar, $i(x) = h(x)$. Propoziţia de mai sus este complet dovedită.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie, X un obiect al său $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^\wedge$ si $\varphi : h_X \to F$ un morfism în categoria $\mathcal{C}^\wedge$. Din cele de mai sus se deduce că φ este complet definit de elementul $\varphi_X(1_X) \in F(X)$.

DEFINIŢIA 1. 5. *Elementul $\varphi_X(1_X)$ se numește clasa fundamentală a morfismului φ.*

Evident că două morfisme $\varphi, \psi : h_X \to F$ coincid dacă şi numai dacă au aceeaşi clasă fundamentală.

Din propoziţia de mai sus rezultă că functorul h identifică pe $\mathcal{C}$ cu o subcategorie *plină* ((1), cap. I) a lui $\mathcal{C}^\wedge$. Această ,,scufundare'' a lui $\mathcal{C}$ în $\mathcal{C}^\wedge$ este extrem de importantă. În cadrul seminarului de faţă vom releva acest lucru cu prisosinţă.

PROPOZIŢIA 1. 6. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant deplin fidel. Un morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$ este un izomorfism dacă și numai dacă $T(f)$ este un izomorfism.*

Demonstraţie. Fie că $T(f)$ este izomorfism şi fie $g' : T(Y) \to T(X)$ un morfism din $\mathcal{C}'$ astfel că $g' \circ T(f) = 1$, $T(f) \circ g' = 1$. Dar $g' = T(g)$, cu $g : Y \to X$ un morfism din $\mathcal{C}$. Atunci $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g) = 1_{T(Y)}$. Deci $f \circ g = 1_Y$. Analog $g \circ f = 1_X$.

COROLAR. *Un morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$ este un izomorfism, dacă şi numai dacă $h(f) : h_X \to h_Y$ este un izomorfism din $\mathcal{C}$.*

Observaţie. Corolarul de mai sus spune că un morfism $f : X \to Y$ este un izomorfism dacă şi numai dacă pentru orice obiect Z a lui $\mathcal{C}$, f induce bijecţia

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y).$$

DEFINIŢIA 1.7. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Un obiect F al lui $\mathcal{C}^\wedge$ se zice reprezentabil dacă există un obiect X al lui $\mathcal{C}$ şi un izomorfism $\varphi : h_X \xrightarrow{\sim} F$.*

Din cele de mai sus se deduce că un obiect F al lui $\mathcal{C}^\wedge$ este reprezentabil dacă şi numai dacă există un obiect X al lui $\mathcal{C}$ şi un element $x \in F(X)$ astfel că pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, aplicaţia $f \to F(f)(x)$ de la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ la $F(Y)$ să fie o bijecţie.

Observaţie. Fie V un univers ce conţine universul U. Categoria U-Ens este o subcategorie plină în V-Ens (prin U-Ens am notat categoria mulţimilor, elemente ale lui U; analog V-Ens. Notăm cu $\mathcal{C}_U^\wedge$ categoria prefasciculelor de la $\mathcal{C}$ la U-Ens; analog V-Ens. Functorul incluziune (canonic) i: U-Ens $\to$ V-Ens induce un functor : $i^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_U^\wedge \to \mathcal{C}_V^\wedge$ care, după cum se vede uşor, este de asemenea deplin fidel. Rezultă de aici că un obiect $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_U^\wedge$ este reprezentabil dacă şi numai dacă $i(F)$ este reprezentabil. În general functorul $i^{\mathcal{C}}$ nu este echivalenţă de categorii.

§ 5. LIMITE PROIECTIVE ŞI INDUCTIVE

Fie I o categorie element al lui U. Notăm cu Fonct $(I, \mathcal{C})$ categoria functorilor covarianţi de la I la $\mathcal{C}$. Se constată imediat că Fonct $(I, \mathcal{C})$ este o U-categorie. Notăm cu $k : \mathcal{C} \to$ Fonct $(I, \mathcal{C})$ functorul care asociază oricărui obiect X al lui $\mathcal{C}$ functorul „constant'' k_X, astfel că pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\, I$, $h_X(i) = X$ şi pentru orice morfism $f : i \to j$ din I $h_X(i) = 1_X$, k este un functor fidel ; k este deplin fidel dacă şi numai dacă pentru orice două obiecte ale lui I, i, j, există un „lanţ'' de morfisme (ale căror sensuri nu contează) şi care le leagă.

Definim acum functorul $\underset{\leftsquigarrow}{\lim} :$ Fonct $(I, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^\wedge$ astfel : $\underset{\leftsquigarrow}{\lim} F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(k, F)$; $\mathcal{C}^I =$ Fonct (I, $\mathcal{C}$). Numim functorul $\underset{\leftsquigarrow}{\lim} F$ limita proiectivă a lui F. Dacă $\underset{\leftsquigarrow}{\lim} F$ este un functor reprezentabil atunci un reprezentant al său se notează cu $\underset{\leftsquigarrow}{\lim} F$. Evident, atunci există un izomorfism functorial : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, \underset{\leftsquigarrow}{\lim} F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^I}(k?, F)$. Faptele de mai sus se pot dualiza.

DEFINIŢIA 1.8. *Fie în general* $\mathcal{C}$ *şi* I *două categorii şi* $F : I \to \mathcal{C}$ *un functor. Vom conveni să spunem că limita proiectivă a lui* F *este reprezentabilă, dacă există un univers* U *astfel că :*

1) I *este un element al lui* U.
2) $\mathcal{C}$ *este o* U*-categorie.*
3) *Prefasciculul* $\underset{\leftsquigarrow}{\lim}\, F$ *este reprezentabil.*

Din observaţia de mai sus se deduce că dacă obiectul $\underset{\leftsquigarrow}{\lim}\, F$ este reprezentabil, atunci reprezentantul său nu depinde de universul U. Într-adevăr dacă U_1 şi U_2 sînt două universuri ce satisfac definiţia de mai sus, atunci fie U un univers care conţine simultan pe amîndouă. Atunci $\underset{\leftsquigarrow}{\lim}\, F$ este reprezentabil şi în raport cu U ; etc.

§ 6. FUNCTORI ADJUNCŢI

Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ două categorii ; notăm cu $\mathcal{C}\Pi\mathcal{C}'$ categoria ,,produs'' sau ceea ce este acelaşi lucru, categoria ale cărei obiecte sînt perechi (X, X') cu $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ şi în care morfismele se definesc în mod canonic. $\alpha : (X, X') \to (Y', Y)$ este un morfism din $\mathcal{C}\Pi\mathcal{C}'$ dacă $\alpha = (f, f')$ cu $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$ sînt morfisme respectiv din $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$. Definind pe componente compunerea morfismelor, se verifică imediat că $\mathcal{C}\Pi\mathcal{C}'$ este într-adevăr categorie.

Fie acum $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ şi $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ functori covarianţi. Notăm cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?)$ şi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$ functorii definiţi pe $\mathcal{C}^{\circ}\Pi\mathcal{C}'$[2] cu valori în Ens şi care acţionează pe obiecte, respectiv, astfel :

$$(X, Y) \rightsquigarrow\!\!\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, Y)$$

$$(X, Y) \rightsquigarrow\!\!\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SY)$$

şi în mod evident pentru morfisme.

Un morfism functorial :

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$$

defineşte pentru orice obiect (X, Y) din $\mathcal{C}^{\circ}\Pi\mathcal{C}'$ o aplicaţie $\psi(X, Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SY)$. În particular dacă $Y = TX$ atunci $\psi(X, TX)(1_{TX})$ este un morfism al lui X în STX pe care îl notăm cu Ψ_X.

PROPOZIŢIA 1. 9. *Morfismele* Ψ_X $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *definesc un morfism functorial* Ψ *de la* $Id\ \mathcal{C}$ *la* $S \circ T$. *Asocierea* $\psi \to \Psi$ *este o bijecţie între morfismele functoriale de la* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?)$ *la* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$ *şi morfismele functoriale de la* $Id\ \mathcal{C}$ *la* $S \circ T$.

---

[2] Conform uzajului general, cu $\mathcal{C}^{\circ}$ am notat duala lui $\mathcal{C}$.

Demonstrație. Fie $f \colon X \to X'$ un morfism din $\mathcal{C}$. Avem diagramele comutative :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, TX) \arrow[r, "\psi(X,\, TX)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX,\, Tf)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, STX) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\, STf)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, TX') \arrow[r, "\psi(X,\, TX')"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, STX')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX', TX') \arrow[r, "\psi(X',\, TX')"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Tf,\, TX')"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', STX') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\, STX')"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, TX') \arrow[r, "\psi(X,\, TX')"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, STX')
\end{tikzcd}$$

din care deducem respectiv

$$ST(f)\Psi_X = \psi(X, TX')(Tf),$$

$$\Psi_{X'} \circ f = \psi(X, TX')\,(Tf).$$

Dar aceste două egalități arată că diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_X"'] & X' \arrow[d, "\Psi_{X'}"] \\
STX \arrow[r, "STf"] & STX'
\end{tikzcd}$$

este comutativă, adică Ψ este un morfism functorial.

Fie acum $\Theta : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to ST$ un morfism functorial și $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Considerăm aplicația $\theta(X, Y) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SY)$ definită astfel : dacă $f : TX \to Y$, atunci $\theta(X, Y)(f) = S(f) \circ \Theta_X$. Se verifică imediat că aplicațiile $\theta(X, Y)$ definesc, cînd (X, Y) parcurge $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}^\circ \Pi \mathcal{C}')$, un morfism functorial de la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?)$ la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$ notat θ. Se constată de asemenea ușor că asocierile $\psi \to \Psi$, $\Theta \to \theta$ sînt aplicații una inverse celeilalte (se au în vedere mulțimile în cauză).

Fie acum $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?)$ un morfism functorial. Fie $\Phi_Y = \varphi(SY, Y)\,(1_{SY}) : TSY \to Y$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$.

PROPOZIȚIA 1.10. *Morfismele* Φ_Y, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ *definesc un morfism functorial* $\Phi : TS \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}'$. *Asocierea* $\varphi \to \Phi$ *este o bijecție dintre morfismele functoriale de la* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$ *la* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?)$ *și morfismele functoriale dela* TS *în* $\mathrm{Id}\,\mathcal{C}'$.

Demonstrația dualizează demonstrația propoziției precedente.

Cu notațiile precedente, fie date morfismele functoriale ψ, φ și fie Ψ, Φ morfismele functoriale asociate lor : $\Psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to ST$, $\Phi : TS \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}'$. Considerăm de asemenea morfismele functoriale $T\Psi : T \to TST$, $\Psi_S : S \to STS$, $S\Phi : STS \to S$ și $\Phi_T : T \to TST$ construite în mod evident.

PROPOZIȚIA 1. 11. Pentru ca morfismul functorial $\psi \circ \varphi$ să fie morfismul identic al functorului $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$ este necesar și suficient ca morfismul compus $S \xrightarrow{\Psi_S} STS \xrightarrow{S\Phi} S$ să fie morfismul identic al lui S. Analog pentru ca morfismul $\varphi \circ \psi$ să fie morfismul identic al lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?)$ este necesar și suficient ca morfismul compus : $T \xrightarrow{T\Psi} TST \xrightarrow{\Phi_T} T$ să fie morfismul identic al lui T.

Demonstrație. Este suficient să dovedim prima parte a propoziției. Fie deci că $\psi \circ \varphi = 1$. Avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX,TX) \arrow[r, "\psi(X,TX)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX,f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,STX) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Sf)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX,Y) \arrow[r, "\psi(X,Y)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,SY)
\end{tikzcd}$$

din care deducem

$$\psi(X,\ Y)(f) = S(f) \circ \Psi_X \tag{a}$$

unde $f : TX \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}'$. Cu totul analog avem

$$\varphi(X,\ Y)(g) = \Phi_Y \circ T(g) \tag{b}$$

unde $g : X \to SY$ este un morfism din $\mathcal{C}$.

Din cele de mai sus, faptul că $\psi \circ \varphi = 1$ se interpretează prin aceea că diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi_X"'] & SY \arrow[d, "S\phi_Y"] \\
STX \arrow[r, "STg"] & STSY
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Dacă luăm $X = SY$ și $f = 1_{SY}$ atunci obținem

$$S\Phi_Y \circ \Psi_{SY} = 1_{SY},$$

adică $S\Phi \circ \Psi_S = 1_S$.

Invers, fie că $S\Phi \circ \Psi_S = 1_S$. Pentru $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ şi $f : X \to SY$ morfism din $\mathcal{C}$ avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_X"'] & SY \arrow[d, "\psi_{SY}"] \\
STX \arrow[r, "STf"] & STSY
\end{tikzcd}$$

din care deducem $\Psi_{SY} \circ f = ST(f) \circ \Psi_X$. Compunem la stînga cu $S\Phi_Y$ şi obţinem

$$f = S\Phi_Y \circ \Psi_{SY} \circ f = S\Phi_Y \circ ST(f) \circ \Psi_X = (\psi(X, Y) \circ \varphi(X, Y))(f).$$

q. e. d.

DEFINIŢIA 1. 12. *Fie cu notaţiile de mai sus două morfisme functoriale* ψ, φ, *astfel că* $\psi \circ \varphi$ *şi* $\varphi \circ \psi$ *să fie morfismul identic; atunci vom spune că* T *este un adjunct la stînga pentru* S *şi* S *adjunct la dreapta pentru* T. *Morfismele* Ψ, Φ *asociate cu* ψ *şi* φ *se zic unul cvasiinvers celuilalt, sau săgeţi de adjuncţie cvasiinverse.*

Dacă S, S' sînt doi functori adjuncţi la dreapta pentru T, atunci există evident un izomorfism functorial al lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$ cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S')$ de unde concludem că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, functorii h_{SX} şi h_{SY} sînt izomorfi, dar atunci, conform corolarului propoziţiei 1.6, deducem că $SY \approx S'Y$. Mai mult, se deduce că $S \approx S'$. Un raţionament analog se poate face pentru T. În concluzie

PROPOZIŢIA 1.13. *Adjunctul unui functor (într-o parte sau alta) dacă există este definit în mod unic pînă la o echivalenţă.*

PROPOZIŢIA 1.14. *Fie* $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *un functor covariant; următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

a) Există un functor adjunct la stînga pentru S.

b) Pentru orice obiect X *din* $\mathcal{C}$ *functorul* $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SY)$ *este reprezentabil.*

c) Pentru orice obiect X *din* $\mathcal{C}$, *categoria* X/S *are un obiect iniţial.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b. Fie T un adjunct la stînga pentru S; atunci există izomorfismul functorial $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?)$. Dacă $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S, ?) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX, ?)$ de unde deducem că $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, S, ?) : \mathcal{C}' \to \mathrm{Ens}$ este un functor covariant reprezentabil.

b) $\Rightarrow$ c) Obiectele categoriei X/S sînt, prin definiţie, perechi (f, Y) unde $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ şi $f : X \to SY$ este un morfism din $\mathcal{C}$. Un morfism $\alpha : (f, Y) \to (f'Y')$ din X/S este, prin definiţie, un morfism $\alpha : Y \to Y'$ din $\mathcal{C}'$, astfel că $S(\alpha) \circ f = f'$. Verificarea că X/S este categorie, este mai mult decît trivială. Aşa fiind, fie că functorul $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SY)$ este reprezentabil şi fie Z un reprezentant al său, atunci avem izomorfismul functorial $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Z, Y) \approx \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SY)$ notat ψ. Fie $Y = Z$; atunci $\psi(Z)(1_Z) : X \to SZ$ este un morfism din $\mathcal{C}$. Dacă (f, Y) este un obiect din

X/S, atunci $f : X \to SY$; există deci un unic morfism $g : Z \to Y$ cu $\psi(Y)(g) = f$. Dar din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Z,Z) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Z,g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,SZ) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Sg)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Z,Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,SY)
\end{tikzcd}$$

deducem $Sg \circ \psi(Z)(1_z) = \psi(Y)(g) = f$.

Evident g este unic cu proprietatea respectivă.

c) $\Rightarrow$ a) Fie pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$ un obiect inițial (α_X, Z_X) pentru X/S. Atunci asocierea $X \rightsquigarrow Z_X$, $f \rightsquigarrow \bar{f}$, cu $f : X \to X'$ morfism din $\mathcal{C}$ și $\bar{f} : Z_X \to Z_X$, morfism din $\mathcal{C}'$ cu $S(f) \circ \alpha_X = \alpha_{X'} \circ f$ este un functor notat T, de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$, adjunct la stînga lui S. Verificarea este imediată.

q.e.d.

Propoziția 1.15. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor covariant și S un adjunct la dreapta al său. Fie $\Psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to ST$ un morfism de adjuncție și $\Phi : TS \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}'$ un cvasiinvers al său. Următoarele două afirmații sînt echivalente.*

a) *T este un functor fidel.*

b) *Ψ este un monomorfism (adică pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, Ψ_X este monomorfism).*

De asemenea sînt echivalente următoarele două afirmații :

i) *S este un functor deplin fidel.*

ii) *Φ este un izomorfism.*

(Afirmații duale sînt valabile schimbînd S cu T în mod corespunzător).

Demonstrație. Fie $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(T, ?) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, S)$ un izomorfism functorial, asociat cu Ψ și φ un invers al său. Atunci, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ și $f : X \to SY$, avem $\varphi(X, Y)(f) = \Phi_Y \circ T(f)$ ((b), propoziția 1.11). În particular, dacă $Y = TX$ și $u, v : X' \rightrightarrows X$ sînt două morfisme din $\mathcal{C}$ astfel că $\Psi_X \circ u = \Psi_X \circ v$, deducem că $\Phi_{TX} \circ T\Psi_X \circ Tu = \Phi_{TX} \circ T\Psi_X \circ Tv$, adică $Tu = Tv$, ceea ce arată că a) $\Rightarrow$ b).

Invers, dacă $Tu = Tv$, deducem că $\varphi(X, TX)(\Psi_X \circ u) = \varphi(X, TX)(\Psi_X \circ v)$, adică $\Psi_X \circ u = \Psi \circ v$, deci $u = v$. Așadar și b) $\Rightarrow$ a).

Pentru a dovedi echivalența i) $\Leftrightarrow$ ii) folosim diagrama comutativă $(Y,\ Z \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}')$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y,Z) \arrow[r, "S(Y,Z)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\Phi_Y,Z)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(SY,SZ) \arrow[d, "T(SY,SZ)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TSY,Z) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TSY,\Phi_Z)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TSY,TSZ)
\end{tikzcd}$$

Din formula (b) propoziția 1.11, se deduce că :

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TSY, \Phi_Z) \circ T(SY, SZ) = \varphi(SY, Z)$. Evident că $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Phi_Y, Z)$ este bijecție dacă și numai dacă $\varphi(SY, Z) \circ S(Y, Z)$ este, adică dacă și numai dacă $S(Y, Z)$ este bijecție.

q.e.d.

§ 7. EXEMPLE DE FUNCTORI ADJUNCŢI

a) Fie Top categoria spaţiilor topologice şi T : Ens $\to$ Top functorul care asociază oricărei mulţimi spaţiul topologic discret; un adjunct la dreapta pentru T este functorul S : Top $\to$ Ens, care asociază oricărui spaţiu topologic mulţimea subiacentă. O săgeată de adjuncţie Ψ : Id Ens $\to S \circ T$ este dată pentru orice mulţime de aplicaţia identică; o săgeată cvasiinversă lui Ψ este dată de aplicaţia identică de la spaţiul cu topologia discretă X la spaţiul X cu topologia respectivă.

b) Fie A un inel comutativ şi cu element identitate nenul ; notăm cu $\mathcal{C}_A$ categoria modulelor drepte unitare peste A ((3), cap. I)[3]). Notăm cu S : $\mathcal{C}_A \to$ Ens ,,functorul subiacenţă'', adică care asociază oricărui modul M mulţimea subiacentă. Un adjunct la stînga T pentru S este dat de asocierea $X \rightsquigarrow TX$, TX fiind modulul liber generat de X ((2), cap. I). O săgeată de adjuncţie Ψ a lui S cu T este dată de incluziunea canonică $X \to TX = STX$ şi o cvasiinversă a sa Φ este dată de epimorfismul canonic $TSM \to M$.

Observaţie. În cazul *a*), Ψ este bijectivă, deci T este deplin fidel; în cazul *b*) Ψ este injectivă şi deci T este fidel, de asemenea Φ este surjectivă şi deci S este fidel (în ambele cazuri).

c) Fie A un inel comutativ cu identitate nenulă şi $\mathcal{A}$ categoria algebrelor peste A. Dacă S : $\mathcal{A} \to$ Ens este functorul subiacenţă, atunci, ca mai sus, se arată că există un adjunct la stînga T pentru el : ,,algebra liberă'' generată de o mulţime.

d) Fie T : Gr $\to$ Ann functorul care oricărui grup G îi asociază algebra grupală în raport cu Z; elementele lui TG sînt sume formale de tipul $\sum\limits_i n_i g_i$ cu $n_i \in Z$, $g_i \in G$ între care se defineşte operaţia de adunare în mod evident şi de multiplicare în mod canonic : $(n_1 g_1)(n_2 g_2) = n_1 n_2 g_1 g_2$ şi extinsă prin liniaritate. Notăm de asemenea cu S : Ann $\to$ Gr functorul care oricărui inel A îi asociază grupul SA al unităţilor sale. Se constată imediat că S este adjunct la dreapta lui T. Propunem cititorului să construiască, ca un exerciţiu, săgeţile de adjuncţie Ψ : Id Gr $\to ST$ şi Φ : $TS \to$ Id Ann, corespunzătoare.

e)[4] Fie K categoria complexelor semisimpliciale. Notăm cu S : Top $\to K$ functorul care oricărui spaţiu topologic X îi asociază complexul semisimplicial singular. Un functor adjunct la stînga pentru S este functorul R : $K \to$ Top, care asociază oricărui complex semisimplicial realizarea sa geometrică. Acest exemplu va fi reluat în capitolele următoare.

f)[4] Fie A un inel comutativ cu unitatea şi X spectrul său topologizat cu topologia Zariski. Fie $\tilde{A}$ fasciculul asociat cu inelul A şi $(X, \tilde{A})$ spaţiul inelat respectiv. Notăm cu $\sim$: $\mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ functorul care oricărui A-modul M îi asociază $(X, \tilde{A})$-modul respectiv ($\mathcal{C}$ este categoria $(X, \tilde{A})$-modulelor). Functorul $\sim$ are un adjunct la dreapta notat Γ cu $\Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Γ este un functor deplin fidel.

---

[3] Vom avea grijă ca pentru orice obiect M din $\mathcal{C}_A$ mulţimea subiacentă să fie un element al lui U, fapt valabil şi pentru Top.

[4] Aceste exemple pot fi omise de cititor la o primă lectură.

Fie I o categorie element al lui U și $\mathcal{C}$ o categorie ; considerăm cam ai sus (v. § 5) functorul $k : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I = \text{Fonct}\,(I, \mathcal{C})$. Din propoziția 1.14 se deduce că dacă pentru orice $F \in \text{Ob}\mathcal{C}^I$, functorul $\text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(k, F)$ este reprezentabil, atunci k admite un adjunct la dreapta notat $\underleftarrow{\lim}$; dacă functorul $\text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(F, k)$ este reprezentabil, atunci k admite un adjunct la stînga notat $\underrightarrow{\lim}$.

Definiția 1.16. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie oarecare. Se zice că $\mathcal{C}$ este o categorie cu limite proiective (inductive), dacă există un univers U astfel că :*

1) *$\mathcal{C}$ este U-categorie.*

2) *Pentru orice categorie I element al lui U functorul $k : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$ are un adjunct la dreapta (la stînga).*

Observație. Vom spune că $\mathcal{C}$ este o categorie cu produse directe (sume directe) dacă există un univers U, astfel că $\mathcal{C}$ să fie U-categorie și pentru orice I categorie discretă (adică pentru care $\text{Hom}_I(i, j) = \delta_{ij}$. $\delta_{ij} = \emptyset$ dacă $i \neq j$ și $\delta_{ii} = 1_i$), element al lui U functorul k are un adjunct la dreapta (la stînga).

Fie I categoria cu două obiecte i, j și pentru care

$\text{Hom}_I(i, i) = \{1_i\}$ $\text{Hom}_I(i, j) = \{u, v\}$, $\text{Hom}_I(j, j) = \{1_j\}$ și $\text{Hom}_I(j, i) = \emptyset$ și în care compunerea se face canonic. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie, un obiect al lui $\mathcal{C}^I$ se numește cuplu de morfisme din $\mathcal{C}$ sau ,,săgeată dublă". Vom spune că $\mathcal{C}$ este o categorie cu nucleu de săgeată dublă dacă functorul k(I fiind categoria de mai sus) are un adjunct la dreapta. Dual avem conceptul de conucleu de săgeată dublă.

Fie acum I categoria cu trei obiecte i, j, k și astfel că există un unic morfism de la i la j și unul unic de la k la j ; altfel afară de morfismele identice nu mai există alte morfisme. Dacă functorul k are în acest caz un adjunct la dreapta, se zice că $\mathcal{C}$ este o categorie cu produse fibrate (dual cu sume fibrate).

Propoziția 1.17. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie; următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *$\mathcal{C}$ este o categorie cu limite proiective.*

b) *$\mathcal{C}$ este o categorie cu produse directe și produse fibrate.*

d) *$\mathcal{C}$ este o categorie cu produse directe și nucleu de săgeată dublă.*

Demonstrație. Evident că a) $\Rightarrow$ b) (bineînțeles, admitem că universul U diferă de universul vid).

b) $\Rightarrow$ c). Fie $A \rightrightarrows B$ un cuplu (u, v) de săgeți din $\mathcal{C}$. Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dr, "u"] & \\
q_1\, q_2 : (A\Pi_B A)\,\Pi_A\,(A\Pi_B A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & A\Pi_B A \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & B \\
 & & A \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

în care $A\Pi_B A$ este produsul fibrat al lui A cu A în raport cu B și u, v iar p_1, p_2 proiecțiile canonice ; de asemenea $(A\Pi_B A)\,\Pi_A\,(A\Pi_B A)$ este produsul fibrat al lui $A\Pi_B A$ cu $A\Pi_B A$ în raport cu A și $p_1 p_2$, iar q_1, q_2 proiecțiile canonice. Evident $up_1 = vp_2$; $p_1 q_1 = p_2 q_2$. Fie $i = p_1 q_1$ și $K = (A \Pi_B A) \Pi_A (A \Pi_B A)$. Cuplul (K, i) este, după cum se vede ușor, un nucleu al cuplului (u,v).

Observație. Tot timpul se are în vedere propoziția 1. 11.

$c) \Rightarrow a)$. Fie I o categorie element al lui U și $F : I \to \mathcal{C}$ un functor. Notăm cu F_0 obiectul $\prod_{i \in Ob I} F(i)$ și cu F_1 obiectul $\prod_{(i,\alpha)} F(i)_\alpha$, unde i este un obiect din I iar α un morfism din I de adresă i: $F(i)_\alpha = F(i)$.

Fie $p_i : F_0 \to F(i)$ și analog $p_{i,\alpha} : F_1 \to F(i)_\alpha$ proiecțiile canonice. $F(\alpha) \circ p_i$ definesc un morfism unic $\alpha : F_0 \to F_1$, cu $p_{i,\alpha} \circ d = F(\alpha) . \circ p_i$. Analog există un morfism unic $h : F_0 \to F_1$ cu $p_{i,\alpha} \circ h = p_i$ (pentru orice α morfism de adresă i). Fie (K, l) un nucleu al cuplului (d, h). Atunci $p_i \circ l : K \to F(i)$ definesc o limită proiectivă a lui F.

Observăm mai întîi că dacă $\alpha : i \to j$ este un morfism din I, atunci $F(\alpha) \circ p_i \circ l = p_{j,\alpha} \circ d \circ l = p_{j,\alpha} \circ h \circ l = p_j \circ l$. Fie acum $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și $n_i : A \to F(i)$ morfisme astfel că pentru orice $\alpha : i \to j$ morfism din I, $F(\alpha) \circ n_i = n_j$. Fie $n : A \to F_0$ un morfism unic, cu $p_i \circ n = n_i$. Atunci $p_{i\alpha} \circ h \circ n = p_i \circ n = n_i$; $p_{i,\alpha} \circ d \circ n = F(\alpha) \circ p_i \circ n = p_j \circ n = n_j$. Deducem deci că $h \circ n = d \circ n$. Există $m : A \to K$ un morfism unic din $\mathcal{C}$, cu $l \circ m = n$. Dar atunci $p_i \circ l \circ m = p_i \circ n = n_i$ ceea ce arată că $(K, p_i \circ l)$ este o limită proiectivă pentru F. q.e.d.

Observația 1. Propoziția de mai sus se poate dualiza în mod evident.

Observația 2. În cele ce urmează vom folosi uneori în loc de functor de la I la $\mathcal{C}$ cuvîntul diagramă de suport I. De asemenea în loc de limită proiectivă a unui functor vom spune con inițial pentru un functor (dual, con final).

Dacă F este o diagramă și K este un con inițial al său, atunci pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\, I$(I categorie suport a lui F) morfismele canonice : $f : K \to F(i)$ se numesc morfisme structurale ale conului inițial. Știm că conul inițial al unui functor și morfismele structurale sînt unic definite pînă la un izomorfism canonic ; vom considera de fiecare dată cînd vom vorbi de un con inițial (final) că acesta este fixat, odată pentru totdeauna, împreună cu morfismele structurale.

Din propoziția demonstrată rezultă imediat următoarele consecințe :

— Categoria $\mathcal{C}_A$ este cu limitele proiective și inductive.

Pentru aceasta este ușor să dovedim că în $\mathcal{C}_A$ există produse directe : produsul cartezian de module dotat în mod canonic cu structura de A-modul ; de asemenea în $\mathcal{C}_A$ există sume directe ((3), cap. I). Dacă $u, v : C \rightrightarrows B$ este un cuplu de morfisme din $\mathcal{C}_A$, atunci (Ker $(u-v)$, i) unde i : Ker $(u-v) \to C$ este monomorfismul canonic, este un nucleu al cuplului (u, v) ((3), cap.I). De asemenea (Coker $(u-v)$, P), cu $p : B \to$ Coker $(u-v)$ proiecția canonică, este un conucleu al cuplului (u, v).

— În categoria Ann a inelelor există limite proiective. În categoria Annc a inelelor comutative, există limite proiective și limite inductive.

Pentru a verifica cele de mai sus, observăm că în Ann produsul cartezian dotat canonic (pe componente) cu structură de inel este produsul direct. Mai mult, dacă $u, v : A \rightrightarrows B$ este un cuplu de morfisme din Ann, atunci submulțimea Ker (u, v) a lui A, formată din toate elementele $x \in A$, cu $u(x) = v(x)$ este un subinel al lui A și dacă $i :$Ker $(u, v) \to A$ este incluziunea canonică, atunci (Ker (u, v), i) este un nucleu al cuplului (u,v). Considerațiile precedente sînt valabile pentru categoria Annc. În plus dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o mulțime finită de obiecte din Annc, atunci grupul abelian $B = \otimes_Z A_i$ ((3), cap. II) are în mod canonic structură de inel. Dacă notăm cu $\alpha_i : A_i \to B$ homomorfismele de inel : $\alpha_i\ (a_i) = 1 \otimes_Z a_i$ (aici înseamnă un element al produsului tensorial în care toate componentele sînt egale cu 1 (1 elementul identitate al inelului în cauză... afară de componenta de indice i, egală cu a_i), se verifică imediat că B este o sumă directă a familiei $\{A_i\}_i$ iar α_i sînt morfismele structurale.

Observație. Propoziția precedentă se poate enunța foarte bine înlocuind cuvîntul limite proiective (produs direct) cu limite proiective finite (produs direct finit), înțelegînd prin aceasta că mulțimile care apar în definiția conceptelor respective sînt finite.

Pentru a justifica existența limitelor inductive finite din Annc observăm că dacă $u : A \to B$, $v : A \to C$ sînt două morfisme de sursă A, atunci obiectul $B \otimes_A C$, împreună cu morfismele canonice $B \to B \otimes_A C$, $C \to B \otimes_A C$ este o sumă fibrată a lui B cu C peste A în raport cu u și v.

Observație. În categoria Ann (Annc) există limita inductivă a unei familii de inele indexate de o mulțime filtrată. Acest fapt pune într-un fel în evidență natura interioară a acestei categorii. De asemenea o problemă neclară pentru Ann (Annc) este și cea a determinării epimorfismelor din aceste categorii. Iată o propoziție care uneori folosește la determinarea epimorfismelor într-o categorie. Pentru aceasta fie $\mathcal{C}$ o categorie cu sume fibrate și $f : A \to B$ un morfism din $\mathcal{C}$. Fie $u : B \to C_1$, $v : B \to C_2$ două morfisme din $\mathcal{C}$. Considerăm obiectele $C_1 \sqcup_A C_2$ și $C_1 \sqcup_B C_2$. Fie $p_i : C_i \to C_1 \sqcup_A C_2$, respectiv $q_i : C \to C_1 \sqcup_B C_2$ morfismele structurale. Există un morfism unic $h : C_1 \sqcup_A C_2 \to C_1 \sqcup_B C_2$ cu $h \circ p_i = q_i$, $i = 1, 2$.

PROPOZIȚIA 1. 18. *Următoarele afirmații sînt echivalente pentru f (folosim cele de mai sus).*

1) *f este epimorfism.*

2) *h este izomorfism.*

3) *$B \sqcup_A B$ construit cu ajutorul lui f este canonic izomorf cu B.* Lăsăm cititorului demonstrația (de altfel calculatorie).

— În categoria Gr a tuturor grupurilor există produse directe : produsul cartezian de grupuri dotat cu structura canonică de grup ; de asemenea pentru orice cuplu (u, v) de morfisme există nucleul. Așadar, în Gr există limite proiective oarecare. Relativ la limitele inductive din Gr avem următoarele : produsul liber al unei mulțimi finite de grupuri este suma lor directă în categoria Gr. De asemenea în Gr există sume fibrate : dacă $u : A \to B$, $v : A \to C$ sînt morfisme din Gr și atunci obiectul $B \sqcup C/(A)$, unde prin (A) am notat cel mai mic divizor normal din $B \sqcup C$

generat de elementele de forma $u(a)v(a)^{-1}$, $a \in A$, este o sumă fibrată a lui B cu C peste A în raport cu u şi v. Deci în categoria Gr există limite inductive finite. Ca şi în categoria Ann în categoria Gr există limite inductive indexate de mulţimi dirijate (filtrate). În fine, folosind proprietăţile produsului liber şi propoziţia de mai sus, se deduce că $f : A \to B$ este un epimorfism în Gr dacă şi numai dacă el este epimorfism în categoria mulţimilor.

Ca şi mai sus notăm cu Cat categoria tuturor U-categoriilor mici. Dacă $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ este o mulţime ($I \in U$) de obiecte din Cat, atunci categoria $\mathcal{C}$, ale cărei obiecte sînt familii $(X_i)_{i \in I}$, $X_i \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_i$, şi pentru care $\alpha : (X_i) \to (Y_i)$ este un morfism din $\mathcal{C}$ dacă $\alpha = (f_i)$ cu $f_i : X_i \to Y_i$, este un morfism din $\mathcal{C}_i$, $i \in I$. Dacă T_i sînt functori „proiecţie" de indice i, atunci $\mathcal{C}$ împreună cu morfismele T_i, definesc pe $\mathcal{C}$ ca un produs direct în Cat al familiei $\{ C_i \}_{i \in I}$. Dacă T, $S : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ este un cuplu de morfisme din Cat, atunci categoria $\mathcal{K}$ construită astfel : obiectele lui $\mathcal{K}$ sînt obiectele lui $\mathcal{C}$; dacă X, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ este submulţimea lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ formată din toate morfismele f cu $T(f) = Sf$. Dotată cu functorul incluziune $H : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ este un nucleu al cuplului (T, S). Aşadar în Cat există limite proiective oarecare. În Cat există şi sume directe : dacă $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ este o mulţime de categorii, atunci categoria $\mathcal{C}$ „reuniunea disjunctă" a acestor categorii canonic construită, este o sumă directă. Mai mult, fie $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ şi $S : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ doi functori. Considerăm categoria $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$ şi din ea construim categoria $\mathcal{D}$ în felul următor : identificăm obiectele TX, SX, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$. Pentru $B \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{B}$, $C \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, B) = \varnothing$ afară de cazurile 1) $B = TX$; în acest caz $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(TX, C)$ este mulţimea tuturor morfismelor de la SX la C. Evident că pentru orice $f : X \to Y$ morfism din $\mathcal{A}$, identificăm $T(f)$ cu $S(f)$. Aşadar $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(TX, SY)$ este o mulţime cît a lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(TX, TY) \cup \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(SX, SY)$. Analog se construieşte $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, SY)$ etc. Se verifică imediat că, astfel construită, $\mathcal{D}$ este un conucleu al cuplului (T, S). Aşadar în Cat există limite inductive oarecare.

Relativ la categoria Ens facem următoarele observaţii cu care cititorul poate fi uşor de acord : în Ens există produse directe (produsul cartezian) şi nucleu de săgeată dublă. De asemenea în Ens, rolul sumei directe este jucat de reuniunea disjunctvă. Fie u, $v : X \rightrightarrows Y$ un cuplu de morfisme din Ens. Considerăm în $Y \times Y$ submulţimea Z formată din perechile $(u(x), v(x))$, $x \in A$, şi cea mai mică relaţie de echivalenţă ce conţine submulţimea Z, notată R. Cîtul Y/R este un conucleu al cuplului (u, v). Ens conţine deci limita inductivă a oricărui functor $F : I \to$ Ens.

Alte proprietăţi ale categoriilor de mai sus se vor da la momentul potrivit.

Relativ la limitele inductive şi proiective facem încă observaţia că dacă I este o categorie element al lui U şi i (respectiv f) este un obiect iniţial (respectiv final) al său, atunci pentru orice categorie $\mathcal{C}$ şi orice $F : I \to \mathcal{C}$, $\underleftarrow{\lim}\, F$ (respectiv $\underrightarrow{\lim}\, F$) există şi este egală cu $F(i)$ (respectiv $F(f)$). Constatarea este imediată.

§ 8. PROPRIETĂȚILE FUNCTORILOR ADJUNCȚI

Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant și I o categorie element al lui U. Există un functor $\overline{T} = T^I : \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}'^I$ astfel că diagrama de categorii și functori (k, k' sînt functorii ce asociază oricărui obiect functorul „constant" respectiv) este comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^I \arrow[r, "\overline{T}"] \arrow[d, "k"'] & \mathcal{C}'^I \arrow[d, "k'"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "T"] & \mathcal{C}'
\end{tikzcd}$$

$\overline{T}$ se definește astfel : pentru orice $F \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}^I$, $\overline{T}(F)$ este functorul $T \circ F : I \to \mathcal{C}'$. Fie F, F' functori adjuncți la stînga pentru k și k' respectiv (adică există I limitele inductive în $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$).

DEFINIȚIA 1.19. *Se zice că functorul T este I-comutant la stînga dacă există izomorfismul functorial* : $T \circ F \approx F' \circ \overline{T}$. *Dacă $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt categorii cu limite inductive, atunci T se numește comutant la stînga, dacă el este I-comutant la stînga pentru orice I din Cat. Dual avem noțiunea de functor I comutant la dreapta și comutant la dreapta.*

Observație. Un functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ care este I comutant (comutant) la stînga se zice că comută cu I-limitele inductive (limitele inductive) ; dual se zice că comută cu I-limitele proiective (limitele proiective). Dacă T este un functor contravariant și dacă T transformă limitele proiective în inductive, atunci se zice comutant la dreapta. Dacă transformă limitele proiective în inductive se zice comutant la stînga. Altfel, terminologia este cea curentă.

PROPOZIȚIA 1.20. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. Atunci functorul $h_X : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ este comutant la dreapta. Functorul ${}_Xh$, cu ${}_Xh(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ este comutant la stînga.*

Demonstrație. Fie I o categorie, element al lui U și $F : I \to \mathcal{C}$ un functor, astfel că $\varinjlim F$[5]) există în $\mathcal{C}$. Fie $A = \varinjlim F$ și fie $F(i) \xrightarrow{f_i} A$ morfismele structurale ($i \in \mathrm{Ob}\ I$). Considerăm în Ens obiectul $h_X(A) = \overline{A}$ și morfismele $\overline{f}_i = h_X(f_i) : \overline{A} \to h_X(F(i)) = \overline{F}(i)$. Dacă $M \in \mathrm{Ob\ Ens}$ și $g_i : M \to \overline{F}(i)$ sînt morfisme din Ens astfel că pentru orice $\alpha : i \to j$ morfism din I, $g_i = \overline{F}(\alpha) \circ g_j$, atunci există un morfism unic $g : M \to \overline{A}$ cu $\overline{f}_i \circ g_i = g_i \circ g$ este definită astfel : fie $x \in M$. Atunci $g_i(x) \in \overline{F}(i) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$. Dacă $\alpha : i \to j$ este un morfism din I, atunci $g_i(x) = (\overline{F}(\alpha) \circ g_i)(x) = g_j(x) \circ \overline{F}(\alpha.)$. Așadar morfismele $g_i(x) : F(i) \to X$ definesc un unic morfism $g_x : A \to X$, cu $g_x \circ f_i = g_i(x)$. Punem prin definiție $f(x) = g_x$. Verificarea este imediată.

În mod cu totul analog se deduce că functorul ${}_Xh$, comută cu limitele proiective.

---

[5]) Conceptul de functor „comutant" are sens după cum se vede și pentru categorii pentru care nu există neapărat limita inductivă sau proiectivă pentru toți functorii.

Din propoziția de mai sus, rezultă corolariile :

COLORARUL 1. *Pentru orice categorie $\mathcal{C}$ functorul $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ comută cu limitele proiective.*

Demonstrație. Într-adevăr dacă $I \in \text{Ob Cat}$ și $F : I \to \mathcal{C}$ este un functor covariant astfel că $\underleftarrow{\lim} F$ există și $X \in \text{Ob}\, \mathcal{C}$ atunci

$$h_{\underleftarrow{\lim}}(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underleftarrow{\lim} F) = \underleftarrow{\lim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F_i) =$$

$$= \underleftarrow{\lim} h_{F_i}(X). \text{ Așadar } h_{\underleftarrow{\lim}} = \underleftarrow{\lim} h_{F_i}.$$

COROLARUL 2. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant și $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ un adjunct al său la dreapta. Atunci T comută cu limitele inductive și S cu limitele proiective.*

Demonstrația este imediată, folosind propoziția de mai sus.

Observație. Proprietatea unui functor ce admite un adjunct la stînga, de a comuta cu limitele proiective, este caracteristică într-un anumit sens. În cele ce urmează vom pune în evidență această caracteristică.

Observăm că proprietatea functorilor adjuncți de a comuta cu anumite limite ține mult de faptul că functorii h_X (respectiv ${}_Xh$) comută cu anumite limite. De asemenea în definiția functorilor adjuncți este de bază utilizarea functorilor h_X și ${}_Xh$. C. Bănică în [1] a obținut o definiție a functorilor adjuncți folosind alt functor decît functorul $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ (?) ; de asemenea în [1] se dovedește că multe proprietăți ale functorilor adjuncți rezidă în cele ale functorului în raport cu care se face adjuncția. Aceste fapte sînt foarte importante dacă avem în vedere lucrări ale unor matematicieni străini ca Saunders Mac Lane, John Kelly, Jean Bénobou etc. care consideră categorii în care morfismele : $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ nu formează o mulțime, ci este un obiect dintr-o anumită categorie.

Remarcăm de asemenea definiția, proprietățile și interesante aplicații în algebra omologică, ale functorilor adjuncți contravarianți dată de Lucian Bădescu [2]. Deoarece scopul lucrării este de a nu depăși prea mult materialul clasic nu intrăm în detalii asupra lucrărilor menționate.

§ 9. CRITERII DE REPREZENTABILITATE PENTRU FUNCTORI. APLICAȚII

Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $F : \mathcal{C} \to \text{Ens}$ un functor covariant. Notăm prin $\mathcal{P}_F$ sau prin $\mathcal{P}$ categoria ale cărei obiecte sînt perechi de forma (X, x) cu $X \in \text{Ob}\, \mathcal{C}$ și $x \in F(X)$. Un morfism $f : (X, x) \to (Y, y)$ din $\mathcal{P}$ este prin definiție un morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$, astfel că $F(f)(x) = y$. $\mathcal{P}$ se mai numește categoria obiectelor F-punctate sau categoria de etalare a lui F. Există un functor canonic $k = k_F : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ definit astfel $k(X, x) = X$, $k(f) = f$. k se numește functorul proiecție. Evident, dacă $\mathcal{C}$ este o U-categorie mică, atunci și $\mathcal{P}$ este U-categorie mică. Dacă $\mathcal{C}$ este U-categorie și $\mathcal{P}$ este la fel.

PROPOZIȚIA 1.21 [3]. *Fie* $\mathcal{C}$ *o* U*-categorie mică și* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ *un functor covariant. Următoarele afirmații sînt echivalente* :

a) F *este un functor covariant reprezentabil* (*adică izomorf cu un functor de tipul* h_X, $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$).

b) *Categoria* $\mathcal{P}$ *are un obiect inițial.*

c) *Functorul* k *are o limită proiectivă și* F *este compatibil cu această limită proiectivă* (*adică* $\varprojlim (F \circ k) = F\ (\varprojlim k)$).

Demonstrație. a) ⇒ b). Fie $F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, ?)$ și în categoria $\mathcal{P}$ obiectul $(X, 1_X)$. Se constată imediat că el este un obiect inițial.

b) ⇒ c) Dacă (X, x) este un obiect inițial al lui, atunci $k(X, x) = X$ este un con inițial al lui k (conform cu o observație anterioară).

c) ⇒ b) Fie X un con inițial pentru k. Atunci pentru orice $(Y, y) \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{P}$ există un morfism $f_{Y,y} : X \to Y$ satisfăcînd comutativitățile de rigoare ($f_{Y,y}$ sînt morfismele structurale). Considerăm mulțimea FX și aplicațiile : $F(f_{Y,y}) : FX \to F\ (Y)$; ele definesc pe FX ca o limită proiectivă a lui $F \circ k$. Fie M o mulțime formată din un singur punct și aplicațiile $g_{Y,y}$: $M \to F\ (Y)$ cu $g_{Y,y}\ (a) = y$. Evident există o aplicație unică $g : M \to FX$ cu $F(f_{Y,y}) \circ g = g_{Y,y}$. Fie $x = g(a)$. Obiectul (X, x) este un obiect inițial pentru $\mathcal{P}$ deoarece singurul morfism de la (X, x) la (Y, y) este $f_{Y,y}$. Implicația b) ⇒ a) este evidentă.

Observație. Construcția categoriei $\mathcal{P}$ nu face nici o ipoteză asupra categoriei $\mathcal{C}$. Vom admite tot timpul că $\mathcal{C}$ este *o* U-categorie

DEFINIȚIA 1.22. *Fie* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ *un functor covariant* ; *vom spune că* F *este* U*-mărginit dacă există o familie* $\{X_i\}_{i \in I}$ *de obiecte din* $\mathcal{C}$, I *un element al lui* U, *astfel că pentru orice* $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ *și orice* $x \in F\ (X)$ *există un* $i \in I$ *și un morfism* $f : X_i \to X$, *cu* $F(f)\ (x_i) = x$, $x_i \in F\ (X_i)$. Familia $\{X_i\}_{i \in I}$ se zice „de mărginire" pentru F.

Fie $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ un functor covariant mărginit ; fie $\{X_i\}_{i \in I}$ o familie de mărginire pentru F. Considerăm categoria $\mathcal{P}$ mai sus construită și subcategoria sa $\mathcal{P}'$ ale cărei obiecte sînt perechi (i, x_i), $i \in I$, $x_i \in F(X_i)$, iar morfismele sînt definite în mod canonic : $f : (i, x_i) \to (j, x_j)$ este un morfism din $\mathcal{P}'$ dacă $f : X_i \to X_j$, este un morfism din $\mathcal{C}$ și $f\ (x_i) = x_j$. Fie T : $\mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ functorul incluziune : $T\ (i, x_i) = (X_i, x_i)$.

PROPOZIȚIA 1. 23. *Fie* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ *un functor covariant*, U*-mărginit de familia* $\{X_i\}_{i \in I}$. *Admitem că* $\mathcal{C}$ *este o categorie cu produse fibrate și* F *comută cu produsele fibrate. Atunci pentru orice categorie* $\mathcal{C}'$ *și orice functor* $k' : \mathcal{P} \to \mathcal{C}'$, k' *are o limită proiectivă în* $\mathcal{C}$ *dacă și numai dacă* $k' \circ T$ *are o limită proiectivă în* $\mathcal{C}$ *și cele două limite sînt egale.*

Demonstrație. Pentru a fi corecți trebuie să admitem că $\mathcal{C}$ este o V-categorie mică, unde V este un univers ce conține U. Fie atunci $X' = \varprojlim k'$ și pentru orice $P = (X, x) \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{P}$, fie $f_{X,x} : X' \to k'(P)$ morfismele structurale. Dacă $P' = (X_i, x_i)$ este un morfism din $\mathcal{P}'$ atunci X' împreună cu morfismele f_{X_i,x_i} definesc pe X' ca limită proiectivă a lui $k' \circ T$. Pentru aceasta fie $Y' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}'$ și fie $g_{i,x_i} : Y' \to k(X_i, x_i) = (k \circ T)\ (i, x_i)$ morfisme astfel că dacă $f : (i, x_i) \to (j, x_j)$ este un morfism din $\mathcal{P}'$ atunci

$(k \circ T)\,(f) \circ g_{i,\,x_i} = g_{j,\,x_j}$. Vom defini un morfism de la Y' la k' în felul următor : fie $P = (X, x) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}$ și $P_i = (X_i,\, x_i)$, $i \in I$ $f : X_i \to X$, morfism din $\mathcal{C}$ astfel că $F\,(f)\,(x_j) = x$. Atunci punem : $g_{X,\,x} = k'\,(f) \circ g_{i,\,x_i}$. Fie $(X_j,\, x_i) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}$, $j \in I$, și $g : X_j \to X$ cu $F\,(g)\,(x_j) = x$. Atunci în $\mathcal{C}$ avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_i \Pi_X X_j \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & X_i \arrow[d, "f"] \\
X_j \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

Deoarece F comută cu produsele fibrate se deduce că există în $F\,(X_i\,\Pi_X X_j)$, un element a, cu $F(f \circ u)\;(a) = F(g \circ v)\;(a) = x$. Fie $(X_l,\, x_l)$, $l \in I$ și $h : X_l \to X_i\;\Pi_X\;X_j$ un morfism din $\mathcal{C}$ cu $F(h)\;(x_l) = a$. Atunci în $\mathcal{P}$ avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & & (X_i, x_i) \arrow[dr, "f"] & \\
(X_l, x_l) \arrow[r, "h"] & (X_i \Pi_X X_j, a) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & (X, x) \\
 & & (X_j, x_j) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

căreia, aplicîndu-i functorul k' obținem $k'\,(f) \circ g_{i,\,x_i} = k'(f) \circ k'(u \circ h) \circ g_{l,\,x_l} = k'\,(g) \circ k'\,(v \circ h) \circ g_{l,\,x_l} = k'\,(g) \circ g_{i,\,x_i}$. Așadar, definiția morfismului $g_{X,\,x}$ nu depinde de $(i,\, x)$. Există deci un morfism unic $g : Y' \to X'$ cu $f_{i,\,x_i} \circ g = g_{i,\,x_i}$. Cealaltă parte a propoziției se dovedește în o manieră analogă.

Propoziția dovedită are următoarele consecințe :

PROPOZIȚIA 1.24. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu limite proiective. Un functor $F : \mathcal{C} \to$ Ens (covariant) este reprezentabil dacă și numai dacă el este U-mărginit și comută cu limitele proiective.*

Demonstrație. Fie F reprezentabil ; el comută cu limitele proiective (propoziția 1.20) și dacă X este un reprezentant al său, atunci familia $\{X\}$ este o familie de mărginire pentru el.

Invers, admitem că F este U-mărginit și comută cu limitele proiective. Atunci din propoziția precedentă se deduce că functorul $k : \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ are o U-limită și F comută cu această limită. Așadar F este, conform propoziției 1.21, reprezentabil.

Observație. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie mică, cu limite proiective, atunci orice functor $F : \mathcal{C} \to$ Ens covariant, ce comută cu limitele proiective, este reprezentabil. La momentul oportun vom relua aceste considerații.

PROPOZIȚIA 1.25. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu limite proiective și $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor. S are un adjunct la stînga dacă și numai dacă el comută cu limitele proiective și pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$, functorul ${}_Dh \circ S$ este mărginit.*

Demonstrație. Într-adevăr, atunci conform propoziției 1.24 functorul ${}_Dh \circ S$ este pentru orice D reprezentabil și conform cu propoziția 11.1. S admite un adjunct la stînga.

Observaţie. În [3] Peter Frejd obţine următoarea propoziţie :

PROPOZIŢIA 1.26. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie bine ponderată (adică subobiectele unui obiect oarecare formează o mulțime) cu limite proiective. Fie $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor. Atunci S admite un adjunct la stînga dacă și numai dacă satisface condițiile :*

a) *Pentru orice $D \in \mathrm{Ob}$ există, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și un morfism $D \to SX$ în $\mathcal{D}$.*

b) *S comută cu limitele proiective.*

c) *Pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ există o mulțime $S_D \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ astfel că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și orice morfism $h : D \to TX$ din $\mathcal{D}$, există un obiect $X' \in S_D$ și morfismele $f : X' \to X$ din $\mathcal{C}$ și $g : D \to SX'$ din $\mathcal{D}$ astfel că $h = T(f) \circ g$.*

Demonstrație. Pentru a dovedi propoziţia este suficient să dovedim, conform cu propoziţia precedentă, că functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, S?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ este mărginit, fapt care rezultă imediat din condiţia c). Observăm că cerinţa lui Frejd ca $\mathcal{C}$ să fie bine ponderată este superfluă.

Propoziţia 1.25 se aplică spre exemplu functorilor „Subiacenţă" de la diverse categorii concrete în categoria Ens. Ulterior vom da unele aplicaţii ale acestor rezultate.

În încheierea acestui paragraf observăm că propoziţia 1.24 afirmă că a calcula limita proiectivă a unui functor ce comută cu limitele proiective şi mărginit se reduce la a calcula limita proiectivă a unui functor de la o categorie mică. În lucrarea [2] se dau mai multe condiţii necesare şi suficiente de mărginire a unor functori.

§ 10. ECHIVALENŢA CATEGORIILOR

Fie $\mathcal{C}$ o categorie oarecare ; dacă $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, notăm cu $\mathcal{C}_X$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele lui $\mathcal{C}$ izomorfe cu X. Subclasele $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_X$ dau o partiţie a lui $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. O subcategorie plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiecte alese cîte unul din clasele $\mathrm{Ob}\mathcal{C}_X$ (folosind indicele τ a lui Hilbert spre exemplu), se numeşte un schelet al lui $\mathcal{C}$. Evident, $\mathcal{C}$ este perfect determinată de mulţimile $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_X$ şi de un schelet al său. Pentru cele mai multe considerente din teoria categoriilor o categorie este determinată pînă la o echivalenţă, de un schelet al său, în felul următor.

DEFINIŢIA 1.27. *Functorul $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ se zice că definește un izomorfism al lui $\mathcal{C}$ cu $\mathcal{C}'$ dacă :*

a) *F este deplin fidel.*

b) *F stabilește o aplicație bijectivă de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ la $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$.

Se zice că F stabileşte o echivalenţă a lui $\mathcal{C}$ cu $\mathcal{C}'$, dacă F stabileşte un izomorfism de la un schelet al lui $\mathcal{C}$ cu un schelet al lui $\mathcal{C}'$. Aceasta revine la a spune că „imaginea" functorului F este un schelet al lui $\mathcal{C}'$.

Conceptul de echivalenţă a categoriilor se poate da în termeni de functori adjuncţi astfel :

PROPOZIŢIA 1.28. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ și $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ functori covarianți. Fie $\Psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to S \circ T$, $\Phi : T \circ S \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}'$ morfisme functoriale. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *T este o echivalență.*

b) *S este o echivalență.*

c) Φ și Ψ *sînt izomorfisme functoriale.*

Fiind vorba de o demonstrație calculatorie o lăsăm cititorului. Lăsăm de asemeni cititorului

PROPOZIȚIA 1.29. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor; următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *Există un functor $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ și izomorfismele functoriale $\Psi : \mathrm{Id}\ \mathcal{C} \to ST$, $\Phi : \mathrm{Id}\ \mathcal{C}' \to TS$.*

b) *T este deplin fidel și orice obiect din $\mathcal{C}'$ este izomorf cu un obiect de tipul TX cu $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$.*

Observație. Dacă $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este o echivalență și cele două categorii sînt aditive (abeliene) ((1), cap. I), atunci T este neapărat aditiv (exact).

Se zice că functorul contravariant $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este o antiechivalență dacă functorul $T = D \circ T$ ($D : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}'^0$ este functorul „dualitatea”) este o echivalență a lui $\mathcal{C}$ cu $\mathcal{C}'^0$.

§ 11. FUNCTORI ADJUNCȚI PENTRU CATEGORIILE ABELIENE

În vederea documentării asupra categoriilor abeliene, trimitem cititorul la (1, cap. I). O expunere frumoasă a acestor categorii se găsește, spre exemplu, în apendicele lui (3). Observăm că definiția categoriei abeliene se poate da în context de functori adjuncți. Tot la lucrările de mai sus trimitem cititorul pentru definiția și unele proprietăți ale categoriilor preaditive, aditive, și preabeliene. Toți functorii considerați sînt aditivi și covarianți pînă la specificarea contrarului.

PROPOZIȚIA 1.30. *Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ categorii aditive, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor, și S un adjunct al său la dreapta. Atunci T este exact la dreapta și S este exact la stînga* ((3), cap. II).

Demonstrație. Este suficient să aplicăm propoziția 1.20, cu observația că dacă ($*$) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p} C \to 0$ este un șir exact din $\mathcal{C}$, atunci (p, C) este un conucleu al cuplului $(f, 0)$ (0 fiind morfismul nul și un conucleu este o „limită inductivă”). Dual se petrec lucrurile cu S.

Observație. Deoarece într-o categorie aditivă nu orice morfism are un conucleu (nucleu), atunci propoziția de mai sus se aplică șirurilor exacte de tipul ($*$) existente din $\mathcal{C}$.

PROPOZIȚIA 1.31. *Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ două categorii abeliene, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor și S un adjunct al său la dreapta. Dacă functorul T este exact atunci S păstrează injectivele ((3), cap. I). Dacă S este exact atunci T păstrează proiectivele ((3), cap. I).*

Demonstrație. Fie T exact și $Q \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}'$ un obiect injectiv ; atunci SQ este un obiect injectiv din $\mathcal{C}$. Pentru demonstrație observăm că dacă $0 \to A' \xrightarrow{i} A \to A'' \to 0$ este un șir exact din $\mathcal{C}$, atunci în $\mathcal{C}$ există șirul exact

$$0 \to TA' \xrightarrow{Ti} TA \to TA'' \to 0$$

obţinut aplicînd T şirului exact precedent. Deoarece Q este injectiv în $\mathcal{C}'$, avem şirul exact canonic construit

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(TA'', Q) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(TA, Q) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(TA', Q) \to 0$$

Dar acest şir este izomorf cu şirul exact (canonic construit):

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A'', SQ) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, SQ) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(A', SQ) \to 0$$

din care rezultă că SQ este injectiv, deoarece orice morfism $f : A' \to SQ$ se factorizează prin $i : A' \to A$, adică $f = g \circ i$, cu $g : A \to SQ$.

Iată un rezultat, într-un fel reciproc celui dovedit [10].

PROPOZIŢIA 1. 32. *Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ categoria abeliene, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor şi S un adjunct al său la dreapta. Admitem că $\mathcal{C}'$ este o categorie cu scufundare injectivă ((1), cap. I). Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

a) *T este exact.*

b) *S păstrează injectivele.*

Dacă în plus $\mathcal{C}$ este o categorie ce are un generator U şi satisface. AB 5 ((1) cap. I) atunci cele două afirmaţii a), b) sînt echivalente cu:

c) *Pentru orice şir exact $0 \xrightarrow{i} A \to U$ din $\mathcal{C}$, avem în $\mathcal{C}'$ şirul exact: $0 \to TA \to TU$.*

Demonstraţie. Implicaţia a) $\Rightarrow$ b) este dovedită în propoziţia de mai sus.

b) $\Rightarrow$ a). Fie $0 \to A' \xrightarrow{i} A \to A'' \to 0$ un şir exact din $\mathcal{C}$. Atunci în $\mathcal{C}'$ avem şirul exact:

$$TA' \xrightarrow{Ti} TA \to TA'' \to 0$$

Fie $f : TA' \to Q$ un monomorfism, cu Q injectiv. Atunci avem şirul exact

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(TA'', Q) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(TA, Q) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(TA', Q) \to 0.$$

Rezultă, că există un morfism, $g : TA \to Q$, cu $g \circ Ti = f$. Aşadar Ti este monomorfism.

Implicaţia a) $\Rightarrow$ c) este evidentă. Pentru a dovedi că c) $\Rightarrow$ a), dovedim că c) $\Rightarrow$ b). Fie deci Q un injectiv din $\mathcal{C}'$, $0 \to A \xrightarrow{i} U$ un şir exact din $\mathcal{C}$ (U generatorul categoriei $\mathcal{C}$) şi $f : A \to SQ$ un morfism din $\mathcal{C}$. Atunci în $\mathcal{C}'$ avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & TA \arrow[r, "Ti"] \arrow[d, "Tf"'] & TU \arrow[d, "g"] \\
 & TSQ \arrow[r, "\phi_Q"] & Q
\end{tikzcd}$$

cu linia superioară exactă, $\Phi : TS \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}$ fiind o săgeată de adjuncţie a lui T cu S, iar g construit astfel că $g \circ Ti = \Phi_Q \circ Tf$. Din diagrama (1) găsim în $\mathcal{C}$ diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[rr, "\psi_U"] & & STU \arrow[dd, "Sg"] \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\psi_A"] \arrow[dd, "f"'] & & STA \arrow[ur, "STi"'] \arrow[dd, "STf"'] & \\
 & & & SQ \\
SQ \arrow[rr, "\psi_{SQ}"] & & STSQ \arrow[ur, "S\Phi_Q"] &
\end{tikzcd}$$

$\Psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to ST$ fiind un morfism de adjuncţie cvasiinvers cu Φ, i şi STi sînt monomorfisme şi toate diagramele care apar sînt comutative.

Atunci $Sg \circ \Psi_U \circ i = Sg \circ STi \circ \Psi_A = S\Phi_Q \circ STf \circ \Psi_A = S\Phi_Q \circ \Psi_{SQ} \circ f = f$, adică $Sg \circ \Psi_U : U \to SQ$ este un morfism care îl prelungeşte pe f. SQ este atunci injectiv (lema 1, §1, 10 (1) cap. I).

Observaţie. Rezultatele de mai sus se pot dualiza în mod evident. Propunem cititorului acest lucru.

COROLAR. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu scufundare injectivă. Dacă $\mathcal{C}$ satisface AB3, ea satisface şi AB4* ((1), cap. I).

Demonstraţie. Fie I o categorie discretă aparţinînd lui U. Este suficient să dovedim că dacă Q este un injectiv din $\mathcal{C}$, atunci kQ este un injectiv din $\mathcal{C}^I$ (folosim notaţiile din § 5).

§ 12. PROPRIETĂŢI DE EXACTITATE

DEFINIŢIA 1.33. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant. Vom spune că T este exact la stînga dacă comută cu limitele proiective finite reprezentabile din $\mathcal{C}$. Dual, exact la dreapta. Dacă T este exact la stînga şi la dreapta, atunci se zice exact.*

Observaţie. Revenind în cazul categoriilor abeliene, regăsim conceptul de functor exact la stînga, la dreapta şi exact. Observăm însă că un functor ce comută cu limitele inductive este exact la dreapta etc. Asemenea definiţii se pot da şi pentru functorii contravarianţi : un functor ce transformă limitele inductive în proiective (finite) se zice exact la stînga etc.

PROPOZIŢIA 1.34. *Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant. Admitem că $\mathcal{C}$ este o categorie cu limite proiective finite* (*dual*). *Următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

a) *T este exact la stînga.*

b) *T comută cu produsele directe finite şi cu produsele fibrate.*

c) *T comută cu produsele directe şi cu nucleele de săgeată dublă.*

Admitem că $\mathcal{C}$ are un obiect final F. Atunci,

b) *este echivalentă cu* :

d) *T comută cu produsele fibrate.*

Demonstraţie. Pentru a dovedi echivalenţa a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) este suficient să folosim propoziţia 1.17 în cazul limitelor proiective finite.

Fie că $\mathcal{C}$ are un obiect final F. Atunci se deduce ușor că produsul direct a două obiecte este de fapt produsul fibrat peste obiectul final, de unde echivalența b) $\Leftrightarrow$ d).

Observație. Un functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ covariant comută cu limitele proiective, dacă și numai dacă el satisface una din afirmațiile a), b), c) ale propoziției de mai sus, fără restricția că limitele proiective (produsele) sînt finite.

Iată o legătură între produsul fibrat și produsul direct. Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$; notăm cu $\mathcal{C}/X$ categoria ale cărui obiecte sînt perechi (f, Y), cu $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și $f : Y \to X$ un morfism din $\mathcal{C}$. Morfismele se definesc în mod evident. $\mathcal{C}/X$ se numește categoria obiectelor „peste X”, sau categoria morfismelor de adresă X. Dacă $g : X \to X'$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci g induce un functor covariant g_* $\mathcal{C}/X \to \mathcal{C}/X'$ anume dacă $(f, Y) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/X$, atunci $g_*(f, Y)$ este obiectul $(g \circ f, Y) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/X'$. Verificarea că g_* este functor este imediată.

Propoziția 1.35. *Cu notațiile de mai sus, următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *Categoria $\mathcal{C}/X'$ are produse directe finite.*

b) *Pentru orice două morfisme $u : X \to X'$, $v : Y \to X'$ există produsul fibrat $X \Pi_{X'}, Y$ în raport cu u și v.*

c) *Pentru orice $g : X \to X'$, functorul g are un adjunct la dreapta, notat g^*.*

Demonstrația este calculatorie și lăsată cititorului. Din propoziția de mai sus se deduce o strînsă legătură între produsul direct și produsul fibrat : acesta din urmă este un produs direct într-o anumită categorie. Faptele se pot dualiza.

În cele ce urmează vom studia exactitatea unor functori. Începem cu următoarea :

Definiția 1.36. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse fibrate reprezentabile. I o categorie mică, $G : I \to \mathcal{C}$ un functor covariant, $g : G \to X$ un morfism din $\mathcal{C}^I$ (cu X am notat obiectele kX al lui $\mathcal{C}^I$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ $k : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^I$, functorul canonic, § 5) și $m : Y \to X$ un morfism din $\mathcal{C}$. Prin $G \Pi_X Y : I \to \mathcal{C}$ notăm functorul : $i \rightsquigarrow G_i \Pi_X Y$, $i \in \mathrm{Ob}\, I$, adică produsul fibrat dintre G și Y peste X în categoria $\mathcal{C}^I$, relativ la g și m.*

Vom spune că limita inductivă a lui G este universală, dacă pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$, și orice morfism $g : G \to X$ și orice $m : Y \to X$ morfism din $\mathcal{C}$ avem :

a) *Limita inductiva a functorului $G\, \Pi_X\, Y$ este reprezentabilă.*

b) *Morfismul canonic : $\varinjlim\, (G \Pi_X Y) \to (\varinjlim G) \cdot \Pi_X\, Y$ este un izomorfism.*

Propoziția 1.37. *Limitele inductive din* Ens (*care sînt reprezentabile*) *sînt universale.*

Demonstrație. Vom da o demonstrație directă a acestei propoziții ; metoda utilizată (atomistică) se poate aplica cu succes la unele categorii.

Fie $\varphi_i : G_i \to \varinjlim G_i$ morfismele structurale, $i \in \mathrm{Ob}\, I$ și $g_i : G_i \in X$ componentele lui $g : G \to X$. Există un morfism unic $g' : \varinjlim G \to X$ cu

$g' \circ \varphi_i = g_i$. Fie şi $\psi_i : G_i \Pi_X Y \to G_i$ morfismele canonice. Morfismele $\varphi_i \circ \psi_i$ dau un morfism unic $\alpha : \varinjlim (G_i \Pi_X Y) \to \varinjlim G\Pi_X Y$. α este un izomorfism în Ens. Fie, pentru aceasta, diagrama

$$\begin{tikzcd}
& G_i\Pi_X Y \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\gamma_i"] \arrow[dd, "m_i"] & & G_i \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[dd, "g_i"] & \\
\varinjlim (G_i\Pi_X Y) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "h"'] & & \varinjlim G\Pi Y \arrow[rr, "u"] \arrow[dl, "v"] & & \varinjlim G \arrow[dl, "g'"] \\
& Y \arrow[rr, "m"] & & X &
\end{tikzcd}$$

ale cărei toate careuri sau triunghiuri sînt canonic construite şi deci comutative. Un element din $(\varinjlim G)\,\Pi_X\, Y$ este de forma (a, y) cu $a \in \varinjlim G$, $y \in Y$, astfel că $g'(a) = m(y)$. Dar $\varinjlim G$ este o mulţime cît (vezi duala propoziţiei 1.17 : construcţia limitei inductive) a lui $\coprod\limits_{i \in \mathrm{Ob}\, I} G_i$. Fie deci $i \in \mathrm{Ob}\, I$, astfel că $a' \in G_i$, cu $\varphi_i(a') = a$. Evident $g_i(a') = g' \circ \varphi_i(a) = g(a) = m(y)$. Deci perechea (a', y) este în $G_i \Pi Y$. Atunci $a = \varphi_i(a') = (\varphi_i \circ \psi)(a', y) = (u \circ \gamma_i)(a', y)$. Deoarece u este o proiecţie, se deduce că $\gamma_i(a', y) = (a, y)$ (deoarece şi $(m \circ m_i)(a', y) = y$). Aşadar $(\alpha \circ \alpha_i)(a', y) = \gamma_i(a', y) = (a, y)$, adică α este surjectivă.

Cu totul analog (calculul este simplu) se deduce că α este şi injectivă. Aşadar α este un izomorfism în Ens.

Se ştie că limitele inductive făcute după mulţimi filtrate (sau dirijate) se bucură de proprietăţi remarcabile. Noţiunea de limită inductivă „filtrată'' se poate generaliza în mod corespunzător astfel :

DEFINIŢIA 1.38. *O categorie I se numeşte pseudo-filtrată dacă ea are următoarele proprietăţi* :

(P.S.1) : *Orice diagramă de forma* :

$$\begin{tikzcd}
& j \\
i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& j'
\end{tikzcd}$$

se poate insera într-o diagramă comutativă

$$\begin{tikzcd}
& j \arrow[dr] & \\
i \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\
& j' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(P.S.2) *Orice diagramă de tipul $u, v : i \rightrightarrows j$ se poate insera in diagrama $i \rightrightarrows j \xrightarrow{w} k$ cu $w \circ u = w \circ v$.*

O categorie I se numeşte pseudo-filtrată conexă dacă ea este pseudo-filtrată şi conexă (adică, orice două obiecte ale sale se pot uni printr-un lanţ de săgeţi, orientarea cărora nu are importanţă).

PROPOZIȚIA 1.39. *Limitele pseudo-filtrate și conexe* în Ens *comută cu limitele proiective finite.*

Demonstrație. Limitele proiective în Ens se calculează din aproape în aproape. Este interesant cazul cînd într-un vîrf al schemei vin două săgeți ; altfel e vorba de o trivialitate. Altfel în U-Ens există un obiect final (mulțimea formată dintr-un punct). Atunci produsul direct a două obiecte este un produs fibrat peste obiectul final. Mai știm că nucleul de săgeată dublă se obține tot din produsul fibrat. Este deci suficient să dovedim că limitele inductive pseudo-filtrate conexe comută cu produsul fibrat.

Fie deci I o U-categorie mică conexă și pseudo-filtrată și functorii $G, F, H : I \to$ Ens. Fie și diagrama

$$\begin{tikzcd} & G \\ F \arrow[r, "\beta"] & H \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd} \qquad (*)$$

cu α, β morfisme functoriale. Din $(*)$ se deduce diagrama

$$\begin{tikzcd} F\Pi_H G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ F \arrow[r] & H \end{tikzcd} \qquad (**)$$

cu $(F\Pi_H\, G)\,(i) = F\,(i)\Pi_{H(i)}\, G\,(i)$, $i \in \mathrm{Ob}\, I$. Din $(**)$ obținem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} \varinjlim (F\Pi_H G) \arrow[r, "\beta_1'"] \arrow[d] & \varinjlim G \arrow[d, "\alpha_1"] \\ \varinjlim F \arrow[r, "\beta_1"] & \varinjlim H. \end{tikzcd}$$

Dar avem și diagrama construită în mod canonic

$$\begin{tikzcd} \varinjlim (F\Pi_H G) \arrow[rr, "\beta_1'"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd] & & \varinjlim G \arrow[dd, "\alpha_1"] \\ & (\varinjlim F)\Pi_{\varinjlim H}(\varinjlim G) \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dl, "\alpha_2"'] & \\ \varinjlim F \arrow[rr, "\beta_1"] & & \varinjlim H \end{tikzcd}$$

A dovedi că limitele inductive comută cu produsul fibrat revine la a dovedi că γ este un izomorfism.

Într-adevăr γ este epimorfism. Fie $(x, y) \in (\varinjlim F) \prod_{\varinjlim H} (\varinjlim G)$.

Cu $x \in \varinjlim G$, $y \in \varinjlim G$ şi $\beta_1(x) = \alpha_1(y)$. Fie $i, j \in \mathrm{Ob}\, I$ cu $\varphi_i(x_i) = x$, $\Psi_j(y_j) = y$ ($\varphi_i : G_i \to \varinjlim G$, $\varphi_j : F_j \to \varinjlim F$ morfismele canonice). Există, din conexitatea lui I două săgeţi care pornesc din i, j respectiv şi se termină în k (sau pornesc dintr-un k şi se termină în i, j respectiv); oricum există două morfisme $f_{ik} : i \to k$, $f_{jk} : j \to k$. Atunci $\varphi_k \circ G(f_{ik})(x_i) = \varphi_i(x_i)$; $\Psi_k \circ F(f_{jk})(y_j) = \Psi_j(y_j)$. Dar notînd $\delta_j : H_j \to \varinjlim H$, avem $(\delta_k \circ \alpha_k)(x_i') = (\delta_k \circ \beta_\beta)(y_j')$, cu $x_i' = G(f_{ik})(x_i)$, $y_j' = F(f_{jk})(y_j)$.

Există deci r şi $f_{kr} : k \to r$ cu $(H(f_{kr}) \circ \alpha_k)(x_i') = (H(f_{kr}) \circ \beta_k)(y_j')$.

Deci $(\alpha_r \circ G(f_{kr})(x_i') = (\beta_r \circ F(f_{kr}))(y_j')$.

Deci $z = (G(f_{kr}))(x_i'), F(f_{kr})(y_j')) \in G_r \Pi_{H_r} F_r$, şi dacă $u_r : G_r \Pi_{H_r} F_r \to \varinjlim (G \Pi_H F)$ sînt morfismele canonice, atunci $u_r(z) = (x, y)$. Pentru a dovedi că γ este şi monomorfism se procedează cu totul analog.

Încheiem acest capitol cu următoarea propoziţie importantă în aplicaţii.

Propoziţia 1.40. *Fie I şi $\mathscr{C}$ două categorii, V un univers. Admitem că V-limitele proiective din $\mathscr{C}$ sînt reprezentabile şi că există în I o familie de obiecte $(i_\alpha)_{\alpha \in A}$, unde A este un element al lui V, astfel că*

1) *Produsele $i_\alpha \times i_\beta$ sînt reprezentabile pentru orice cuplu*

$$(\alpha, \beta) \in A \times A.$$

2) *Pentru orice obiect i al lui I, există cel puţin o săgeată $i \to i_\alpha$, cu $\alpha \in A$.*

Atunci pentru orice functor contravariant $F : I \to \mathscr{C}$, limita proiectivă a lui F există şi există un izomorfism functorial în F:

$$\varprojlim F \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\left(\prod_{\alpha \in A} F(i_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta) \in A \times A} F(i_\alpha \times i_\beta)\right),$$

cele două săgeţi fiind definite de proiecţiile produsului $i_\alpha \times i_\beta$ pe cei doi factori.

Demonstraţie. Fie U un univers, astfel că $\mathrm{Ob}\, I$ să fie un element al lui U. Pentru orice $i \in \mathrm{Ob} I$, fie $\varphi_i^\alpha : i \to i_\alpha$. Atunci avem în $\mathscr{C}$ diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(u,v) \arrow[r] & \prod\limits_{\alpha} F(i_\alpha) \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[d] \arrow[dr, "u_\alpha"] & \prod\limits_{\alpha,\beta} F(i_\alpha \times i_\beta) \\
& F(i) & F(i_\alpha) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

în care u şi v fac comutative diagramele :

$$\begin{tikzcd}
 & F(i_\alpha) \arrow[r] & F(i_\alpha \times \iota_\beta) \\
\operatorname{Ker}(u,v) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_i"'] & \prod\limits_{\alpha} F(i_\alpha \arrow[u, "u_\alpha"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[dl] \arrow[d, "u_\beta"] & \prod\limits_{(\alpha,\beta)\in A\times A} F(i_\alpha \times i_\beta) \arrow[u, "u_\beta^\alpha"'] \arrow[d, "u_\beta^\alpha"] \\
F(i) & F(i_\beta) \arrow[r, "F(\gamma_\beta^\alpha)"] & F(i_\alpha \times i_\beta)
\end{tikzcd}$$

Fie $\delta_i = F(\varphi_i^\alpha) \circ u_\alpha \circ h : \operatorname{Ker}(u, v) \to F(i)$

Dacă $g : i \to j$, atunci $F(g) \circ \delta_j = \delta_i$.

Într-adevăr, $F(j) \circ \delta_j = F(j) \circ F(\varphi_j^\beta) \circ u_\beta \circ h \circ (\varphi_j : j \to i_\beta)$. Avem şi diagrama

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[r, "\varphi_i^\alpha"] \arrow[rrd, "r"] \arrow[dd, "g"'] & i_\alpha & \\
 & & i_\alpha \times i_\beta \arrow[ul] \arrow[dl, "\gamma_\beta^\alpha"] \\
j \arrow[r, "\varphi_j^\beta"] & i_\beta &
\end{tikzcd}$$

cu cele două părţi comutative.

Din aceasta deducem diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(i) & F(i_\alpha) \arrow[l] \arrow[dr, "F(\gamma_\alpha^\beta)"] & \\
 & & F(i_\alpha \Pi i_\beta) \arrow[ull, leftrightarrow, "F(r)"'] \\
F(j) \arrow[uu, "F(g)"] & F(i_\beta) \arrow[l, "F(\varphi_j^\beta)"'] \arrow[ur, "F(\gamma_\beta^\alpha)"'] &
\end{tikzcd}$$

de asemenea cu cele două părţi comutative. Adică

$$F(g) \circ F(\varphi_j^\beta) = F(r) \circ F(\gamma_\beta^\alpha)$$

şi

$$F(r) \circ F(\gamma_\alpha^\beta) = F(\varphi_i^\alpha).$$

Deci

$$F(g) \circ F(\varphi_j^\beta) \circ u_\beta \circ h = F(r) \circ F(\gamma_\beta^\alpha) \circ u_\beta \circ h =$$

$$= F(r) \circ u_\beta^\alpha \circ v \circ h = F(r) \circ u \circ h = F(r) \circ F(\gamma_\alpha^\beta) \circ u_\alpha \circ h = F(\varphi_i^\alpha) \circ u_\alpha h = \delta_i.$$

În concluzie am demonstrat că morfismele sînt ,,naturale''.

Evident, dacă A este un obiect din $\mathcal{C}$ şi dacă $t_i : A \to F(i)$ sînt morfismele ,,naturale'', atunci în particular $t_i : A \to F(i)$ şi deci există un morfism unic $t : A \to \prod\limits_{\alpha\in A} F(i_\alpha)$.

Din faptul că t_i sînt naturale, rezultă că $ut = vt$ (fapt lesne de verificat). Deci există un $t' : A \to \text{Ker}\,(u, v)$ care este cel căutat şi unic. Aşadar $(\text{Ker}\,(u, v), \delta_i)$ este un con inițial pentru diagrama dată de F.

Primită la redacție la 3 iunie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47 Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Bănică Constantin, *Adjunction par rapport au deux foncteurs*. Revue Roumaine de Math. (1965).
2. Bădescu Lucian, *Foncteurs adjoints contravariants*. Revue Roumaine de Math. Pures et appliquées (1965).
3. Bénabou Jean, *Critères de representabilité des foncteurs*. C. R. Acad. Sci. Paris, **90**, 752—755 (1965).
4. Frejd Peter, *Abelian Categories*. Harper and Row, New York, 1964.
5. Gabriel Pierre, *Des catégories abelinnes*. Bul. de la Soc. Math. de France, **90**, *3* (1962).
6. Gabriel Pierre, Zismann Michel, *Les fondaments de la topologie simpliciale*. Strasbourg, 1964.
7. Gronthetieck Alexander, *Éléments de Géométrie algébrique*. Cap. I. Presses Universitaire de France, Paris, 1960.
8. Grothendieck Alexander, *Tehniques de construction en géometrie analitique* IV : *Formalisme general des foncteurs représentables*. Seminaire Henri Cartan, 1960—1961, nr. 11.
9. Kan Daniel, *Adjoint Functors*. Trans. Amer. Math. Soc., *2* (1958).
10. Popescu Nicolae, Bănică Constantin, *Sur l'exactité des foncteurs*. Bull. de la Soc. Mathematique, *1* (1963).
11. Verdier Jean Louis, *Topologies et faisceaux*, exposé I, 1964, J. E. H. S., Paris.

ASUPRA OPERATORILOR CVASICOMPACŢI. II

DE

V. ISTRĂŢESCU

Se precizează rezultatele în cazul spaţiilor Hilbert presupunînd în plus că $S-T$ este un operator autoadjunct.

1. Fie B un spaţiu Banach şi T un operator liniar şi mărginit $T \in \mathcal{L}(B)$. Se spune că operatorul T este cvasicompact dacă există un operator compact $S \in \mathcal{L}(B)$ astfel încît

$$\| T^m - S \| < 1$$

unde m este un întreg, $m \geqslant 1$ [1]. În [2] au fost date unele rezultate privind operatorii cvasicompacţi pentru care $m = 1$ în relaţia de mai sus.

În cele ce urmează introducem o clasă de operatori care generalizează clasa operatorilor cvasicompacţi şi vom da cîteva teoreme analoge celor din [2].

Proprietăţile pe care le obţinem intervin (în cazul spaţiilor Hilbert) în teoria modelului triunghiular al unui astfel de operator şi, legat de aceasta, în problema existenţei subspaţiilor proprii invariante [3], [4].

2. Fie α un număr complex şi T un operator liniar şi continuu definit pe B. Vom spune că operatorul T este α-cvasicompact dacă există un operator compact C astfel ca

$$\| T^m - (C + \alpha I) \| < 1 \qquad m \geqslant 1$$

iar I este operatorul identitate.

Observaţii. Clasa operatorilor O-cvasicompacţi coincide evident cu clasa operatorilor cvasicompacţi.

Vom presupune în cele ce urmează că $m = 1$.

Teorema 1. *Dacă*

$$f_n = (T - (1 + \alpha) I) g_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

este un şir convergent iar $\{g_n\}$ *este mărginit, atunci* $\{g_n\}$ *admite un subşir convergent.*

Demonstraţie. Cum avem identitatea

$$f_n = (T - C - \alpha I - I)g_n + Cg_n$$

şi

$$\| T - (C + \alpha I) \| < 1,$$

rezultă că

$$g_n = (T - (- \alpha I - I))^{-1} f_n - Cg_n$$

şi din faptul că $\{f_n\}$ este convergent iar C compact, rezultă afirmaţia făcută.

TEOREMA 2. *Spaţiul*

$$B_\alpha = (T - (1 + \alpha) I) B$$

este închis.

Demonstraţie. Să luăm elementul $f \in B_\alpha$ şi fie Bf mulţimea elementelor care au proprietatea că

$$Tg - (1 + \alpha) g = f.$$

Este evident că B_f este o mulţime închisă şi convexă. Mulţimea Bf are cel puţin un element de normă minimă.

În adevăr, dacă

$$\rho = \inf \| g \|, \quad g \in Bf$$

vom considera două cazuri

$$a)\ \rho = 0 \qquad b)\ \rho \neq 0.$$

Există $\{g_n\}$ cu proprietatea că $\| g_n \| \to 0$. Dar, conform teoremei 1, $\{g_n\}$ admite un subşir convergent, care trebuie să conveargă către zero, ceea ce nu se poate, pentru că

$$T(\lim g_{n_k}) - (1 + \alpha) \lim g_{n_k} = f.$$

Dacă $\rho > 0$ atunci teorema 1 permite extragerea unui subşir $g_{n_k} \to g_0$ care satisface condiţiile

1) $$\| g_0 \| = \rho,$$
2) $$Tg_0 - (1 + \alpha) g_0 = f.$$

Pentru orice element de normă minimă, avem relaţia

$$\|f'\| \leqslant M \|f\|,$$

unde M este o constantă independentă de f.

Să presupunem că nu ar fi aşa. Rezultă că există un şir $\{f'_n\}$ astfel ca

$$\|f'_n\| > n \|f_n\|.$$

Cum însă

$$[T-(1+\alpha)]\frac{f'_n}{\|f'_n\|}=\frac{f_n}{\|f'_n\|}\to 0$$

din teorema 1 rezultă că putem extrage un subşir convergent

$$\lim \frac{f'_{nk}}{\|f'_{nk}\|}=f_0$$

şi evident avem relaţia

$$[T-(1+\alpha)]f_0=0$$

şi deci

$$[T-(1+\alpha)][f'_n-f_0\|f'_n\|]=f_n.$$

Cum f'_n sînt elemente de normă minimă, rezultă

$$\|f'_n-f_0\|f'_n\|\|\geqslant\|f'_n\|$$

sau

$$\left\|\frac{f'_n}{\|f'_n\|}-f_0\right\|\geqslant 1,$$

ceea ce nu se poate. De aici rezultă că spaţiul B_α este închis. În adevăr, dacă $f_n\to f_0$, atunci şi $\{f'_n\}$ este un şir mărginit şi din teoremă rezultă $f_0\in B_\alpha$.

În cazul spaţiilor Hilbert putem obţine rezultate mai precise.

Să presupunem că avem un şir ortonormal $\{l_i\}$ şi $Tl_k=\sum\limits_{j=1}^{k-1}\alpha_{kj}\,l_j+$ $+\lambda_k l_k$ şi $T-C=S$, unde S este un operator autoadjunct.

În acest caz are loc următoarea

TEOREMĂ. *Avem*

$$\lim_{k\to\infty}(\operatorname{Im}\lambda_k)=0.$$

Demonstraţia se face ca şi în [2]. Evident dacă $T-C=\mathrm{i}\,S$, unde S este autoadjunct, are loc teorema de mai sus pentru $\operatorname{Re}\lambda_k$.

Se pot da şi teoreme analoge celor stabilite în [2], demonstraţia făcîndu-se la fel.

Primită la redacţie la 7 iunie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. Mihai Eminescu nr. 47
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. O. Onicescu, Gh. Mihoc, C. T. Ionescu Tulcea, *Calculul probabilităţilor*. Bucureşti, 1956.
2. V. I. Istrăţescu, *Asupra operatorilor cvasicompacţi*. I., St. cerc. mat., **17**, *9* (1965).
3. M. S. Brodski, M. S. Livşit, *Spectralnîi analiz nesamosopreajennih operatorov*. U.M.N., **XIII**, *1* (*79*) (1958).
4. N. Aronszajn, K. T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. Math., **60** (1954).

COREcȚII DE COMPRESIBILITATE PENTRU PROFILE VON MISES

DE

ADELINA GEORGESCU

În această lucrare se determină cea de-a doua aproximaţie pentru viteza unui fluid compresibil, nevîscos, care are o mişcare subsonică în jurul unui profil von Mises, folosindu-se metoda directă de aproximaţie I. Imai - E. Lamla - C. Iacob.

1. INTRODUCERE

Cazul general al profilelor ce se obţin ca imagini ale unui cerc printr-o transformare conformă cu derivată raţională a fost tratat de către C. Iacob în [1] şi [2] prin metoda I. Imai — E. Lamla — C. Iacob. Drept cazuri particulare importante ale acestor profile sînt profilele Jukowski simetrice, caz studiat de către C. Iacob în [3], profilele Jukowski nesimetrice şi profilele von Mises care le generalizează pe primele două. În cele ce urmează vom trata cu aceeaşi metodă cazul profilelor von Mises cele mai generale obţinîndu-se drept caz particular formulele din [3]. Notaţiile sînt cele din lucrările citate.

Fie deci, în planul (z), un profil von Mises care se obţine din cercul $\Gamma : |\zeta_1 - \zeta_{1m}| = R$, printr-o transformare conformă pentru care

$$\frac{dz}{d\zeta_1} = \frac{(\zeta_1 - \zeta_{10}) \prod_{i=1}^{n} (\zeta_1 - \mu_i)}{\zeta_1^{n+1}} = \left(1 - \frac{\zeta_{10}}{\zeta_1}\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\mu_i}{\zeta_1}\right), \tag{1.1}$$

unde ζ_{10} este imaginea pe cercul Γ a vîrfului profilului şi deci avem

$$|\zeta_{10} - \zeta_{1m}| = R, \tag{1.2}$$

iar μ_i sînt puncte interioare cercului astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i + \zeta_{10} = 0. \tag{1.3}$$

Vom deosebi două cazuri, după cum ζ_{1m} este sau nu diferit de zero.

ST. CERC. MAT., TOM 18, NR. 2, P. 301–308, BUCUREŞTI, 1966

2. CAZUL PROFILELOR VON MISES PENTRU CARE $\zeta_{1m} \neq 0$

Acest caz este cel mai important în practică deoarece de posibilitatea alegerii poziției cercului depind calitățile de stabilitate ale aripii de avion și adaptarea ei pentru diferite situații de zbor [4], [5]. Fie translația

$$\zeta = \zeta_1 - \zeta_{1m}, \tag{2.1}$$

care aduce cercul $|\zeta_1 - \zeta_{1m}| = R$ în cercul $|\zeta| = R$ și pentru care (1.1) devine

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}_\zeta} = \frac{(\zeta - \zeta_0) \prod_{i=1}^{n} (\zeta - \zeta_i')}{(\zeta - \zeta_1'')^{n+1}} = (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta), \tag{2.2}$$

unde $\zeta_0 = \zeta_{10} - \zeta_{1m}$; $\zeta_i' = \mu_i - \zeta_{1m}$, $\zeta_1'' = -\zeta_{1m}$ și

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta_i' + \zeta_0 = (n+1)\, \zeta_1''. \tag{2.3}$$

În acest mod, am redus problema la cea studiată în [2] pentru cazul particular $p = n$, $q = 1$, $m_j = 1$, $n_1 = n + 1$. Deoarece raționamentele generale rămîn aceleași și aici, vom transcrie, pentru unitatea expunerii, formulele care se pretează la particularizarea directă amintită; în plus vom da expresiile tuturor coeficienților în funcție de datele presupuse cunoscute și vom deduce expresia simplificată a vitezei în funcție de aceleași date, aducînd astfel problema la un pas de evaluarea numerică.

Să notăm prin $f(z, \bar{z})$ potențialul complex în mișcarea fluidului compresibil și prin $f_0(z)$ pe cel din mișcarea incompresibilă în jurul aceluiași profil și cu aceeași viteză la infinit. Avem

$$f(\zeta) = f_0(\zeta) + \frac{M_0^2}{4}\left[\frac{1}{V_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\, N(\zeta) + H_1(\zeta) + F_1(\zeta)\right], \tag{2.4}$$

$$N(\zeta) = \overline{\int_{\zeta_0}^{\zeta} \left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} - 2\, \overline{W}_\infty\, [f_0(\zeta) + G(\zeta)], \tag{2.5}$$

problema reducîndu-se la o problemă Dirichlet regulată pentru $H_1(\zeta)$. În cazul nostru

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} = \frac{W_\infty\, (\zeta - \zeta_1)\, (\zeta - \zeta_1'')^{n+1}}{\zeta^2 \prod_{i=1}^{n} (\zeta - \zeta_i')}, \tag{2.6}$$

$$\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} = \lambda \left(3a_0\, \zeta^2 + 2a_1\, \zeta + a_2 + \frac{b_0}{\zeta^2} + \frac{b_1}{\zeta} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - \xi_j}\right) \mathrm{d}\zeta, \tag{2.7}$$

$$\lambda = -\, W_\infty^2\, \zeta_0 \prod_{j=1}^{n} \xi_j\, \overline{\zeta}_1''^{\,n+1}\, R^{-2n-4}. \tag{2.8}$$

Efectuînd descompunerile în fracţii simple indicate de (2.7) găsim

$$a_0 = \frac{1}{3}, \tag{2.9}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\left[C_{n+1}^1\, \eta_1 + 2\zeta_1 + \zeta_0 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right], \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} a_2 = {} & C_{n+1}^2\, \eta_1^2 + (2\zeta_1 + \zeta_0)\, \eta_1\, C_{n+1}^1 + \zeta_1^2 + 2\zeta_0\, \zeta_1 - \\ & - \sum_{i,\,j} \xi_i\, \xi_j + 2a_1 \sum_{j=1}^{n} \xi_j, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$b_0 = \zeta_0\, \zeta_1^2\, \eta_1^{n+1} \prod_{i=1}^{n} \overline{\zeta}_i'\, R^{-2n} = -\lambda^{-1}\, \overline{W}_\infty^2\, R^2, \tag{2.12}$$

$$c_i = \frac{(\xi_i - \zeta_0)\,(\xi_i - \zeta_1)^2\,(\xi_i - \eta_1)^{n+1}}{\xi_i^2 \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\xi_i - \xi_j)} \tag{2.13}$$

În consideraţiile de mai sus am folosit notaţiile:

$$\xi_i = \frac{R^2}{\overline{\zeta}_i'}, \quad \eta_1 = \frac{R^2}{\overline{\zeta}_1''}, \quad \zeta_1 = -R\mathrm{e}^{i(2\alpha-\beta)}. \tag{2.14}$$

Expresia lui b_1 se determină folosind relaţia conjugată lui (2.3) şi găsim

$$b_1 = -2\, \zeta_1\, \eta_1^{n+1}\, (\zeta_1 + \zeta_0) \prod_{i=1}^{n} \overline{\zeta}_i'\, R^{-2n}. \tag{2.15}$$

Folosind expresiile (2.8), (2.15) şi relaţia

$$k_0 = -2\pi i\, W_\infty\, (\zeta_1 + \zeta_0), \tag{2.16}$$

găsim că $b_1 = -i\, \overline{W}_\infty\, k_0\, \lambda^{-1}\, \pi^{-1}$. Alegînd

$$f_0(\zeta) = W_0\,(\zeta - \zeta_0) + R^2\, W_\infty \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0}\right) + \frac{k_0}{2\pi i} \log \frac{\zeta}{\zeta_0}, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} G(\zeta) = \frac{1}{2\overline{W}_\infty} \Big\{ & [\lambda a_2 - 2\, V_\infty^2]\,(\zeta - \zeta_0) - [\lambda\,(b_0 + b_0') + \\ & + 2\, R^2\, \overline{W}_\infty^2] \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0}\right) \Big\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

şi determinînd b_0' din condiţia $G'(\zeta_0) = 0$ găsim

$$G(\zeta) = \frac{(\lambda a_2 - 2V_\infty^2)\,(\zeta - \zeta_0)^2}{2\,\zeta\,\overline{W}_\infty}, \tag{2.19}$$

$$\lambda b_0' = -\zeta_0^2\,(\lambda a_2 - 2V_\infty^2) - \mathrm{R}^2\overline{W}_\infty^2. \tag{2.20}$$

Depărtîndu-ne puțin de [2] alegem

$$N_1(\zeta) = \lambda\left[a_0\,\zeta^3 + a_1\,\zeta^2 + \sum_{j=1}^{n} c_j \log\left(1 - \frac{\zeta}{\xi_j}\right)\right], \tag{2.21}$$

$$N_2(\zeta) = \lambda\, b_0'\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta_0}\right) - N_1(\zeta_0), \tag{2.22}$$

$$M(\zeta) = \frac{1}{V_\infty^2}\,\overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left(\frac{R^2}{\overline{\zeta}}\right) N_1\left(\frac{R^2}{\overline{\zeta}}\right)}, \tag{2.23}$$

$$M(\zeta) = \frac{\lambda\overline{\lambda}\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{V_\infty^3}\cdot\frac{(\zeta-\zeta_1)\,(\zeta-\eta_1)^{n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\zeta-\xi_i)}\left[\overline{a}_0\,\frac{R^6}{\zeta^3} + \overline{a}_1\,\frac{R^4}{\zeta^2} + \sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j \log\left(1 - \frac{\zeta_j'}{\zeta}\right)\right], \tag{2.23'}$$

$$M(\zeta) = C_0\,\zeta + \sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{\zeta-\xi_j} + M_1(\zeta). \tag{2.23''}$$

Efectuînd descompunerea în fracții simple în (2.23″) obținem

$$C_0 = -\,\frac{\lambda\overline{\lambda}\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{V_\infty^3}\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j\,\zeta_j', \tag{2.24}$$

$$D_i = \frac{\lambda\overline{\lambda}\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{V_\infty^3}\left\{\overline{a}_0\,\overline{\zeta}_i'^{\,3} + \overline{a}_1\,\overline{\zeta}_i'^{\,2} + \sum_{j=1}^{n} c_j \log\left(1 - \frac{\zeta_j'}{\xi_i}\right)\right\}\frac{c_i\,\xi_i^2}{(\xi_i-\zeta_0)(\xi_i-\zeta_1)}. \tag{2.25}$$

Să notăm cu $S(\zeta)$ partea principală a lui $M(\zeta)$ relativ la polurile din $|\zeta| > R$

$$S(\zeta) = C_0\,\zeta + \sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{\zeta-\xi_j}. \tag{2.26}$$

În aceasta, condiția $H_1(\zeta)$ devine

$$H_1(\zeta) = -\,\frac{1}{V_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,N_2(\zeta) + M(\zeta) - S(\zeta) - \overline{S\left(\frac{R^2}{\overline{\zeta}}\right)}. \tag{2.27}$$

Luînd în formulele de mai sus $\zeta_0 = a$, $\zeta_1' = -\,aq$, $\zeta_1'' = pa$, $\zeta_1 = ae^{2i\alpha}$, $n = 1$, $\beta = 0$, $\xi_1 = -\,aq^{-1}$, $\eta_1 = ap^{-1}$, $p = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $q = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $a = R(1+\varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$ și scriind ξ_2 în loc de ξ_1 și ξ_1 în loc de η_1, obținem tocmai cazul profilelor Jukowski simetrice tratat de C. Iacob în [3]. Deoarece ne va nteresa viteza pe profil este util să observăm că pentru orice funcție (ζ) pe cercul $|\zeta| = R$ avem relațiile

$$f(\zeta) = f\left(\frac{R^2}{\overline{\zeta}}\right),\quad \frac{\mathrm{d}\overline{f}\left(\frac{R^2}{\overline{\zeta}}\right)}{\mathrm{d}\zeta} - \frac{R^2}{\zeta^2}\,\overline{\frac{\mathrm{d}f(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}} \tag{2.28}$$

și pentru orice funcții $f(\zeta, \overline{\zeta})$, pe același cerc

$$\frac{\partial\overline{f}}{\partial\zeta} = \overline{\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}};\quad \frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{\zeta}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial\zeta}}. \tag{2.28'}$$

Ţinînd seama de (2.8) şi de relaţia uşor de dedus

$$(2.29)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n+1}{\zeta-\zeta_1''}-\frac{2}{\zeta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right],$$

expresia lui $\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta}$ pe cerc va fi

$$(2.30)\qquad \frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta}=-\frac{1}{V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_2(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n+1}{\zeta-\zeta_1''}-\frac{2}{\zeta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right)+\frac{\mathrm{d}N_2(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right]-$$
$$-\frac{R^2}{\zeta^2V_\infty^2}\overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_1(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n+1}{\zeta-\zeta_1''}-\frac{2}{\zeta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right)+\frac{\mathrm{d}N_1(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right]}-$$
$$-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\zeta}+\frac{R^2}{\zeta^2}\frac{\overline{\mathrm{d}S}}{\mathrm{d}\zeta}.$$

Calculînd $\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta}$ pentru $\zeta=\zeta_0$ şi observînd că $N_2(\zeta_0)=-N_1(\zeta_0)$, k_1 se scrie

$$(2.31)\qquad k_1=-2\,i\,R\,\mathrm{Im}\,\{h_{-1}\,\mathrm{e}^{i\beta}\}-\mathrm{e}^{i\beta}\,R\left(\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_0},$$

$$(2.32)\qquad h_{-1}=\frac{\lambda\,a_2-V_\infty^2}{\overline{W}_\infty}.$$

În general, expresia vitezei complexe pe cerc este

$$(2.33)\qquad u-iv=\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}+\frac{M_0^2}{4}\left[\frac{1}{V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}^2f_0}{\mathrm{d}z^2}N(\zeta)+\frac{1}{V_\infty^2}\frac{\mathrm{d}\overline{f}_0}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{2\overline{W}_\infty}{V_\infty^2}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}z}\right].$$

Înlocuind în (2.33) expresiile lui N, f_0, G, H_1, F_1, obţinem

$$(2.34)\qquad (u-iv)|_{|\zeta|=R}=\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\frac{M_0^2}{4V_\infty^2}\left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_1(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n+1}{\zeta-\zeta_1''}-\frac{2}{\zeta}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right)-2\overline{W}_\infty\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\zeta}-\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}\zeta}\right]-$$
$$-\frac{R^2}{\zeta^2}\overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_1(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n+1}{\zeta-\zeta_1''}-\frac{2}{\zeta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right)\right]}-V_\infty^2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\zeta}+$$
$$\left.+V_\infty^2\frac{R^2}{\zeta^2}\frac{\overline{\mathrm{d}S}}{\mathrm{d}\zeta}+V_\infty^2\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}\zeta}\right\}+\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\frac{M_0^2}{4\mathrm{V}_\infty^2}\left[\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\cdot\overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}}-2\overline{W}_\infty\right].$$

Deoarece $\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}$ este viteza în jurul aceluiaşi profil cu aceeaşi viteză la infinit pentru fluidul incompresibil, rezultă că termenii în M_0^2 dau corecţia de compresibilitate căutată. De observat că în (2.34), datorită cantităţilor complex conjugate calculele se reduc aproape la jumătate.

3. CAZUL PROFILELOR VON MISES PENTRU CARE $\zeta_{1m}=0$

Acest caz nu poate fi obţinut direct din cazul general tratat mai sus deoarece înlocuind direct $\zeta_{1m} = 0$ şi deci $\zeta_1'' = 0$ şi $\eta_1 = \infty$, obţinem unele expresii egale cu zero altele egale cu infinit, încît urmărind îndeaproape raţionamentele din [2] şi înlăturînd nedeterminările ivite, vom face calcule şi observaţiile ce se impun. Deci, fie un profil obţinut ca imagine a cercului $|\zeta| = R$ printr-o transformare conformă pentru care

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right) \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\zeta_i'}{\zeta}\right) = (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta). \tag{3.1}$$

În aceste condiţii noi, vom avea

$$\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z} = \frac{W_\infty (\zeta - \zeta_1)\, \xi^{n-1}}{\prod_{j=1}^{n} (\zeta - \zeta_j')}, \tag{3.2}$$

$$\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2 \mathrm{d}z} = \frac{\lambda (\zeta - \zeta_0)(\zeta - \zeta_1)}{\zeta^2 \prod_{j=1}^{n} (\zeta - \xi_j)}\, \mathrm{d}\zeta = \lambda \left(\frac{b_0}{\zeta^2} + \frac{b_1}{\zeta} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - \xi_j}\right), \tag{3.3}$$

unde făcînd calcule analoage cu cele din paragraful 2 obţinem

$$\lambda = (-1)^n\, \overline{W}_\infty^2\, e^{i(\beta - 4\alpha)} \prod_{i=1}^{n} \xi_i\, R^{-1}, \tag{3.4}$$

$$b_0 = (-1)^{n+1} \frac{\zeta_0 \cdot \zeta_1^2}{\prod_{j=1}^{n} \xi_j}, \tag{3.5}$$

$$b_1 = (-1)^n \frac{2\, \zeta_1 (\zeta_1 + \zeta_0)}{\prod_{j=1}^{n} \xi_j} = -\, i\, \overline{W}_\infty\, k_0\, \pi^{-1} \lambda^{-1}, \tag{3.6}$$

$$c_j = \frac{(\xi_j - \zeta_0)(\xi_j - \zeta_1)^2}{\xi_j^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (\xi_j - \xi_i)}. \tag{3.7}$$

a_2 este termenul liber din $\overline{\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)^2}\,\mathrm{d}z$, care aici este nul şi deci

$$G(\zeta) = -\frac{W_\infty(\zeta-\zeta_0)^2}{\zeta}, \tag{3.8}$$

$$\lambda b_0' = 2\,V_\infty^2\,\zeta_0^2 - R^2\,\overline{W}_\infty^2, \tag{3.9}$$

$$N_1(\zeta) = \lambda\left[\sum_{j=1}^{n} c_j \log\left(1-\frac{\zeta}{\xi_j}\right)\right], \tag{3.10}$$

$$N_2(\zeta) = \lambda\, b_0'\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta_0}\right) - N_1(\zeta_0). \tag{3.11}$$

Introducînd acestea în $M(\zeta)$ vom avea

$$M(\zeta) = \frac{\lambda\bar{\lambda}}{V_\infty^3}\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{\zeta-\zeta_1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\zeta-\xi_j)}\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_j\log\left(1-\frac{\zeta_j'}{\zeta}\right), \tag{3.12}$$

$$M(\zeta) = \sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{\zeta-\xi_j} + M_1(\zeta), \tag{3.12$'$}$$

unde $M_1(\zeta)$ este o funcţie olomorfă în $|\zeta| > R$ şi D_j cu expresiile

$$D_j = \frac{\lambda\bar{\lambda}\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{V_\infty^3}\,\frac{\xi_j-\zeta_1}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(\xi_j-\xi_i)}\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i\log\left(1-\frac{\zeta_i'}{\xi_j}\right), \tag{3.13}$$

$$H_1(\zeta) = -\frac{1}{V_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,N_2(\zeta) + M_1(\zeta) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\bar{D}_j}{R^2-\zeta^{-1}-\bar{\xi}_j}, \tag{3.14}$$

$$S(\zeta) = \sum_{j=1}^{n}\frac{D_j}{\zeta-\xi_j}. \tag{3.15}$$

În acest caz expresia lui k_1 în funcţie de $\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta}$ nu-şi schimbă forma dar h_{-1} şi $\left(\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{|\zeta|=R}$ devin respectiv

$$h_{-1} = -W_\infty, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}\zeta} = &-\frac{1}{V_\infty^2}\,\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_2(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n-1}{\zeta}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_j'}\right)+\frac{\mathrm{d}N_2(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right]-\\ &-\frac{R^2}{\zeta^2V_\infty^2}\,\overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_1(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n-1}{\zeta}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_j'}+\frac{\mathrm{d}N_1(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\right)\right]}-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\zeta}+\frac{R^2}{\zeta^2}\,\overline{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\zeta}}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

În calculul expresiei (3.17) am folosit și relația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n-1}{\zeta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right]. \tag{3.18}$$

Cu acestea viteza complexă pe cerc va fi

$$\begin{aligned}(u-iv)\big|_{|\zeta|=R}={}&\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\,\frac{M_0^2}{4\,V_\infty^2}\left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_1(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n-1}{\zeta}-\right.\right.\right.\\ &\left.\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right)-2\overline{W}_\infty\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\zeta}-\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}\zeta}\right]-\\ &-\overline{\frac{R^2}{\zeta^2}\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\left[N_1(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_1}+\frac{n-1}{\zeta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\zeta-\zeta_i'}\right)\right]}-V_\infty^2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\zeta}+\\ &\left.+V_\infty^2\frac{R^2}{\zeta^2}\frac{\overline{\mathrm{d}S}}{\mathrm{d}\zeta}+V_\infty^2\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}\zeta}\right\}+\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,\frac{M_0^2}{4V_\infty^2}\left[\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,\overline{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}}-2\,\overline{W}_\infty\right].\end{aligned} \tag{3.19}$$

Din expresia (3.19) se vede că efectul compresibilității se manifestă prin apariția termenilor în M_0^2.

Comparînd expresiile din acest paragraf cu cele din paragraful 2 se observă că expresia vitezei pe profil poate fi obținută din (2.34) substituind acolo $\zeta_1'' = 0$, în ceea ce privește funcțiile $N_1(\zeta)$, $N_2(\zeta)$, $G(\zeta)$, $S(\zeta)$, ele sînt date aici de relațiile : (3.10), (3.11), (3.8), (3.15).

Primită la redacție la 5 iulie 1965

Facultatea de matematică
şi mecanică a Universităţii
din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. JACOB, *Introduction mathématique à la Mécanique des Fluides.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, — Gauthier-Villars, Paris, 1959.
2. C. JACOB, *Determination de la seconde approximation de l'écoulement compressible subsonique autour d'un profil donné.* Archivum Mehaniki, **16**, *2*, 273—284 (1964).
3. C. IACOB, *Determinarea celei de a doua aproximaţii în mişcarea compresibilă subsonică în prezenţa unui profil Jukovski simetric.* Comunicările Academiei R.P.R., **11**, 901—907 (1961).
4. RICHARD VON MISES, *Theory of the Flight.* Mc. Graw. Hill, New York, 1945.
5. W. F. DURAND, *Aerodynamic Theory, vol. III,* Springer Verlag, 1935.

ASUPRA UNOR PROPRIETĂŢI ALE RĂDĂCINILOR ALGEBRELOR JORDAN DE TIP A

DE

D. B. ION

În această lucrare se stabilesc următoarele proprietăţi ale rădăcinilor algebrei Jordan de tip A :

(i) $$\bar{\alpha}\,(E_{\alpha}) = \bar{\alpha}\,(E_{-\alpha})$$

(ii) $$\frac{2\,\vec{\bar{\alpha}}\,\vec{\tilde{\bar{\beta}}}}{\vec{\bar{\alpha}}\,\vec{\tilde{\bar{\alpha}}}} = g.$$

unde $\overset{\rightleftarrows}{\alpha}$ şi $\vec{\tilde{\bar{\beta}}}$ sînt rădăcini, g-număr întreg.

Fie A o algebră asociativă peste un corp comutativ F. Pe elementele acestei algebre definim cu ajutorul comutatorului respectiv anticomutatorului algebrele Lie $L\,(A)$ şi Jordan $J(A)$ [1].

În lucrarea [2] am stabilit că dacă bazele algebrelor $J(A)$ şi $L(A)$ le alegem în aşa fel să coincidă iar elementele acestor baze să satisfacă relaţiile

$$(1)\qquad \begin{aligned} &[\mathcal{A},\ H_i] = 0 \qquad (\mathcal{A} \Rightarrow \text{un operator})\\ &[\mathcal{A},\ E_{\alpha}] = \alpha\, E_{\alpha} \end{aligned}$$

atunci, pe lîngă relaţiile lui Killing din algebra Lie $L(A)$, obţinem şi următoarele relaţii :

$$(2)\qquad \begin{array}{ll} [H_i,\ H_j]_+ = \bar{\gamma}_{ij}^{k}\, H_k & \bar{\gamma}_{ij}^{k} \neq 0 \\ [H_i,\ E_{\alpha}]_+ = \bar{\alpha}_i\, E_{\alpha} & \bar{\gamma}_{i\alpha}^{\alpha} = \bar{\alpha}_i \\ [E_{\alpha},\ E_{\beta}]_+ = \bar{N}_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta}\, E_{\alpha+\beta} & \alpha + \beta \text{ rădăcină a problemei (1)} \\ [E_{\alpha},\ E_{-\alpha}]_+ = \tilde{\alpha}^{i}\, H_i & \bar{\gamma}_{\alpha,-\alpha}^{i} = \bar{\tilde{\alpha}}^{i} \\ [E_{\alpha},\ E_{\beta}]_+ = 0 & \alpha + \beta \text{ nu e rădăcină a problemei (1)} \end{array}$$

ST. CERC. MAT. TOM. 18, NR. 2, P. 309–313 BUCUREŞTI, 1966

pentru algebra Jordan $J(A)$. Definiţiile şi notaţiile din referinţa [2] sînt păstrate şi în această lucrare.

În această lucrare ne propunem să stabilim cîteva proprietăţi ale rădăcinilor algebrei Jordan $J(A)$.

TEOREMA I. *Dacă* $\bar{\alpha}\,(E_\alpha)$ şi $\bar{\alpha}\,(E_{-\alpha})$ *sînt rădăcini ale algebrei Jordan de tip* A *atunci* :

$$\bar{\alpha}\,(E_\alpha) = \bar{\alpha}\,(E_{-\alpha}). \tag{3}$$

Demonstraţie. Scriem identitatea (I.8) din [2] pentru elementele $(E_{-\alpha}, H_i, E_\alpha)$

$$[E_{-\alpha}, [H_i, E_\alpha]_+]_+ = [[E_{-\alpha}, H_i]_+, E_\alpha]_+ - \frac{1}{4}\,[H_i, [E_{-\alpha}, E_\alpha]].$$

Relaţiile lui Killing ne conduc la

$$[H_i, [E_{-\alpha}, E_\alpha]] = 0$$

şi prin urmare

$$[E_{-\alpha}, [H_i, E_\alpha]_+]_+ = [[E_{-\alpha}, H_i]_+, E_\alpha]_+. \tag{3.1}$$

Utilizînd relaţiile (2) în (3.1) obţinem relaţia

$$\bar{\gamma}^{\alpha}_{i\alpha}\,\bar{\gamma}^{j}_{-\alpha,\alpha}\,H_j = \bar{\gamma}^{-\alpha}_{-\alpha,i}\,\bar{\gamma}^{j}_{-\alpha,\alpha}\,H_j$$

care ne conduce la

$$\bar{\gamma}^{\alpha}_{i\alpha}\,\bar{\gamma}^{j}_{-\alpha,\alpha} = \bar{\gamma}^{-\alpha}_{-\alpha,i}\,\bar{\gamma}^{j}_{-\alpha,\alpha} \tag{3.2}$$

dar

$$\bar{\gamma}^{\alpha}_{i\alpha} = \bar{\gamma}^{\alpha}_{\alpha i} = \bar{\alpha}_i\,(E_\alpha)$$

$$\bar{\gamma}^{-\alpha}_{-\alpha,i} = \bar{\gamma}^{-\alpha}_{i,-\alpha} = \bar{\alpha}_i\,(E_{-\alpha})$$

şi (3.2) demonstrează (3).

TEOREMA II. *Dacă* $\vec{\bar{\alpha}}$ şi $\vec{\bar{\tilde{\beta}}}$ *sînt două rădăcini ale algebrei Jordan* $J(A)$, *atunci* :

$$\frac{2\vec{\bar{\alpha}}\,\vec{\bar{\tilde{\beta}}}}{\vec{\bar{\alpha}}\,\vec{\bar{\tilde{\alpha}}}} = g \qquad (g \text{ număr întreg}) \tag{4}$$

$$\text{şi}\;\; \vec{\bar{\alpha}}\,\vec{\bar{\tilde{\beta}}} = \bar{\alpha}_i\,\tilde{\beta}^i$$

Demonstraţie.

Formăm şirul de relaţii

$$\begin{aligned} [E_{-\alpha}, E_\gamma]_+ &= \bar{N}^{\gamma-\alpha}_{-\alpha,\gamma}\,E_{\gamma-\alpha} \\ [E_{-\alpha}, E_{\gamma-\alpha}]_+ &= \bar{N}^{\gamma-2\alpha}_{-\alpha,\gamma-\alpha}\,E_{\gamma-2\alpha} \\ &\;\vdots \\ [E_{-\alpha}, E_{\gamma-j\alpha}]_+ &= \bar{N}^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}\,E_{\gamma-j\alpha}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se ia $\beta = \gamma$ în aşa feî încît $(\alpha + \gamma)$ să nu fie rădăcină a problemei de funcţii şi valori proprii (I.14) din [2].

Fiindcă există un număr finit de E_β-uri acest proces trebuie să se întrerupă după g paşi.

Astfel vom avea

$$[E_{-\alpha},\ E_{\gamma-g\alpha}]_+ = \overline{N}^{\gamma-(g+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-g\alpha}\, E_{\gamma-(g+1)\alpha} = 0. \tag{4.2}$$

Considerăm şi

$$[E_\alpha,\ E_{\gamma-(j+1)\alpha}]_+ = \overline{N}^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha}\, E_{\gamma-j\alpha}. \tag{4.3}$$

Dacă introducem ultima relaţie din (4.1) în (4.3) după ce în prealabil aceasta din urmă a fost înmulţită cu $\overline{N}^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}$ obţinem

$$[E_\alpha,\ [E_{-\alpha},\ E_{\gamma-j\alpha}]_+ = \overline{N}^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}\, \overline{N}^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha}\, E_{\gamma-j\alpha}. \tag{4.4}$$

Identitatea (I.8) din [2] ne conduce la

$$[E_\alpha,\ [E_{-\alpha}, E_{\gamma-j\alpha}]_+]_+ = [E_{\gamma-j\alpha},\ [E_\alpha,\ E_{-\alpha}]_+]_+ - \frac{1}{4}\, [E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_{\gamma-j\alpha}]. \tag{4.5}$$

Ţinînd seama în identitatea (4.5) atît de relaţiile (2) cît şi de relaţiile lui Killing se obţine

$$4\overline{N}^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha}\, \overline{N}^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha} + N^{\gamma-(j-1)\alpha}_{\alpha,\gamma-j\alpha}\, N^{\gamma-j\alpha}_{-\alpha,\gamma-(j-1)\alpha} = 4\, \vec{\tilde{\alpha}}\ \vec{\delta}, \tag{4.6}$$

unde $\vec{\delta}$ este rădăcina corespunzătoare lui $E_{\gamma-j\alpha}$ iar $N^{\gamma-(j-1)\alpha}_{\alpha,\gamma-j\alpha}\ N^{\gamma-j\alpha}_{-\alpha,\gamma-(j-1)\alpha}$ provin din membrul drept al relaţiei (4.5) din ultimul termen după ce s-au luat în considerare relaţiile lui Killing.

Pornim de la acelaşi şir — şi în cazul comutatorului —

$$\begin{aligned} &[E_{-\alpha},\ E_\gamma] &&= N^{\gamma-\alpha}_{-\alpha,\gamma}\ E_{\gamma-\alpha} \\ &[E_{-\alpha},\ E_{\gamma-\alpha}] &&= N^{\gamma-2\alpha}_{-\alpha,\gamma-\alpha}\ E_{\gamma-2\alpha} \\ &\ \vdots && \ \vdots \\ &[E_{-\alpha},\ E_{\gamma-j\alpha}] &&= N^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}\ E_{\gamma-(j+1)\alpha} \end{aligned} \qquad \begin{gathered}\gamma + \alpha \text{ nu este} \\ \text{rădăcină.}\end{gathered} \tag{4.7}$$

Fiindcă există acelaşi număr de E_β-uri şirul trebuie să se întrerupă după acelaşi număr g-de paşi.

Astfel va trebui să avem

$$[E_{-\alpha},\ E_{\gamma-g\alpha}] = N^{\gamma-(g+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-g\alpha}\ E_{\gamma-(g+1)\alpha} = 0. \tag{4.8}$$

Considerăm de asemenea şi

$$[E_\alpha,\ E_{\gamma-(j+1)\alpha}] = N^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha}\, E_{\gamma-j\alpha} \tag{4.9}$$

Din (4.7) ultima relaţie, şi (4.9), după ce în prealabil am înmulţit pe aceasta din urmă cu $N^{\gamma-(j+1)\alpha}_{\alpha,\gamma-j\alpha}$, obţinem

$$[E_\alpha,\ [E_{-\alpha},\ E_{\gamma-j\alpha}]] = N^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}\ N^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha}\, E_{\gamma-j\alpha}. \tag{4.10}$$

Dar conform identității lui Jacobi vom avea

$$(4.11)\qquad N^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}\ N^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha} = N^{\gamma-(j-1)\alpha}_{\alpha,\gamma-j\alpha}\ N^{\gamma-j\alpha}_{-\alpha,\gamma-(j-1)\alpha} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} - j\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}$$

unde $\vec{\alpha}$ și $\vec{\gamma}$ sînt rădăcinile algebrei Lie $L(A)$ corespunzătoare.

Vom face notațiile

$$(4.12)\qquad \begin{aligned} \mu_{j+1} &= N^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}\ N^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha} \\ \overline{\mu}_{j+1} &= \overline{N}^{\gamma-(j+1)\alpha}_{-\alpha,\gamma-j\alpha}\ \overline{N}^{\gamma-j\alpha}_{\alpha,\gamma-(j+1)\alpha} \end{aligned}$$

Cu aceste notații relațiile (4.6) și (4.11) devin

$$(4.13)\qquad \begin{aligned} 4\overline{\mu}_{j+1} + \mu_j &= 4\vec{\overline{\tilde{\alpha}}}\,\vec{\overline{\delta}}. \\ \mu_{j+1} - \mu_j &= \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} - j\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Din condițiile (4.2) și (4.8) rezultă că trebuie să avem

$$(4.14)\qquad \begin{aligned} \overline{\mu}_{g+1} &= 0, \\ \mu_{g+1} &= 0. \end{aligned}$$

Din (4.13) scoatem relația

$$(4.15)\qquad 4\overline{\mu}_{j+1} + \mu_{j+1} = 4\vec{\overline{\tilde{\alpha}}}\,\vec{\overline{\delta}} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} - j\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}$$

În (4.15) ținem seama de (4.14) și obținem

$$(4.16)\qquad 4\vec{\overline{\tilde{\alpha}}}\,\vec{\overline{\delta}} = g\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha} - \vec{\alpha}\,\vec{\gamma}.$$

Dar în algebra Lie $\dfrac{2\vec{\alpha}\,\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}} = g$ (întreg) de unde

$$(4.17)\qquad \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} = \frac{g}{2}\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}$$

care înlocuit în (4.16) conduce la

$$(4.18)\qquad 4\vec{\overline{\tilde{\alpha}}}\,\vec{\overline{\delta}} = \frac{g}{2}\,\vec{\alpha}\,\vec{\alpha}.$$

Relația (4.18) este fundamentală, ea stabilind o legătură între produsul scalar a două rădăcini ale algebrei Jordan $J(A)$ și modulul pătrat al unei rădăcini a algebrei Lie.

Identitatea (I.8) din lucrarea citată scrisă pentru $E_{-\alpha}$, E_{α}, E_{α} ne conduce la

$$(4.19)\qquad [E_{-\alpha}, [E_{\alpha}, E_{\alpha}]_+]_+ = [E_{\alpha}, [E_{-\alpha}, E_{\alpha}]_+]_+ - \frac{1}{4}[E_{\alpha}, [E_{-\alpha}, E_{\alpha}]]$$

sau la

$$(4.20)\qquad 4\overline{N}^{2\alpha}_{\alpha,\alpha}\ \overline{N}^{\alpha}_{2\alpha,-\alpha} = 4\vec{\overline{\tilde{\alpha}}}\,\vec{\overline{\alpha}} - \vec{\alpha}\,\vec{\alpha}.$$

Dar $\overline{N}^{2\alpha}_{\alpha,\alpha} = 0$ căci 2α nu este rădăcină a problemei de funcţii şi valori proprii (I.14) din [2] şi prin urmare (4.20) devine

$$4\overset{\rightrightarrows}{\overline{\sigma}}\,\overset{\rightarrow}{\overline{\alpha}} = \vec{\alpha}\,\vec{\alpha}. \tag{4.21}$$

Acum (4.21) introdus în (3.18) demonstrează teorema II adică relaţia (4).

În încheiere ţin să mulţumesc dr. Eleonora Mihul şi dr. Teleman pentru discuţiile şi îndrumările acordate.

Primită la redacţie la 24 iulie 1965

Institutul de fizică atomică Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

A. Albert, Trans. Amer. Soc., **59**, 524–555 (1964).
D. B. Ion, St. cerc. mat., **17**, 301–310 (1965).

DISTANȚA EUCLIDIANĂ A UNEI MATRICI LA MULȚIMEA MATRICILOR SINGULARE

DE

LIVIU TODOR

Se consideră problema distanței minime de la o matrice pătratică dată A la mulțimea V a matricilor singulare B. Distanța dintre două matrici pătratice se ia de forma (1). Condiția de singularitate a lui B este (3). Distanța minimă de la o matrice dată A la mulțimea matricilor singulare se obține extremînd $\Psi(B) = \rho^2(A, B)$ cu condiția (3). Se obține sistemul (4). În timp ce în [1] se rezolvă sistemul (4) aproximativ, în lucrarea de față se dă soluția exactă a acestui sistem. Rezultatul este dat de (31), unde λ_n este cea mai mică valoare proprie a matricii AA' (A' este matricea transpusă lui A). Rezultatul are legătură pentru problema condiționării matricilor. În cazul cînd matricea A este afectată de erori, pe baza rezultatului obținut se pot enunța condiții suficiente pentru ca problema $Ax = b$ să aibă sens.

În lucrarea [1] Rigal Jean Louis se ocupă de evaluarea distanței minime de la o matrice A pătratică oarecare, la mulțimea matricilor singulare. Evaluarea respectivă se obține prin dezvoltarea în serie a membrului din stînga al egalității corespunzătoare lui (4) după puterile lui λ, reținîndu-se apoi numai primii doi termeni ai dezvoltării. În consecință evaluarea respectivă este aproximativă. În articolul de față dăm o evaluare exactă a aceleiași distanțe, obținută pe o cale mai simplă. Observăm că această problemă are o legătură strînsă cu problema condiționării sistemelor liniare. Pe baza rezultatului găsit se pot obține condiții suficiente pentru ca un sistem liniar de ecuații să aibă sens în cazul cînd matricea sistemului este afectată de erori.

1. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică, și V varietatea matricilor singulare $B = (b_{ij})$ din spațiul n^2 dimensional al componentelor ma-

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 2, P. 315–319. BUCUREŞTI, 1966

tricilor pătratice $n \times n$. Distanţa euclidiană a matricii A la o matrice B va fi

$$(1) \qquad \rho(A, B) = \|A - B\|_s = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij})^2} = \sqrt{\operatorname{Sp}(B - A)'(B - A)}$$

unde notaţiile sînt cele obişnuite : A' este matricea transpusă a lui A, $\operatorname{Sp} A$ înseamnă urma matricii A, iar $\|A\|_s$ este norma sferică (euclidiană) a matricii A. Distanţa matricii A la varietatea V a matricilor singulare B va fi

$$(2) \qquad \rho(A) = \inf_{B \in V} \rho(A, B).$$

Condiţia ca $B \in V$ se va scrie

$$(3) \qquad \varphi(B) = \det B = 0.$$

Notînd cu $\psi(B) = \rho^2(A, B)$ pentru o matrice A fixată, problema determinării lui $\rho(A)$ se rezolvă căutînd extremele lui $\psi(B)$ cu legătura (3). Aplicînd metoda multiplicatorilor se obţin condiţiile

$$(4) \qquad b_{ij} - a_{ij} + \lambda B_{ij} = 0,$$

unde B_{ij} sînt complemenţii algebrici ai elementelor b_{ij} din matricea B, iar λ un multiplicator ce va trebui determinat. Notînd cu $\mathfrak{B}$ matricea complemenţilor algebrici B_{ij}, sistemul de ecuaţii (4) se va scrie

$$(5) \qquad B - A + \lambda\mathfrak{B} = 0.$$

Ţinînd seama de relaţiile banale

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} b_{ik} B_{ij} = 0 \text{ etc.}$$

care se mai pot scrie şi sub formele

$$(7) \qquad B'\mathfrak{B} = \mathfrak{B}B' = B\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'B = 0$$

şi înmulţind ecuaţia (5) la dreapta, şi apoi la stînga, cu B' şi cu $\mathfrak{B}'$ se obţin relaţiile

$$(8) \qquad B'B = B'A = A'B,$$

$$(9) \qquad BB' = AB' = BA',$$

$$(10) \qquad \lambda\mathfrak{B}'\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'A = A'\mathfrak{B},$$

$$(11) \qquad \lambda\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = A\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}A',$$

unde a doua parte a egalităţilor decurge din simetria matricilor BB', $B'B$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}$. Înmulţind (9) la dreapta cu matricea AA' şi ţinînd seama de (8) şi (9) obţinem

$$(12) \qquad BB'AA' = AB'AA' = AA'BA' = AA'BB'$$

şi analog din (10) şi (11)

$$\mathcal{B}\mathcal{B}'AA' = AA'\mathcal{B}\mathcal{B}'. \tag{13}$$

Relaţiile (12) şi (13) arată că matricile BB' respectiv $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ comută cu AA'. Fie T transformarea ortogonală (deci nesingulară) care reduce matricea simetrică şi pozitiv definită AA' (care este definită deoarece putem presupune $\det A \neq 0$, altfel $\rho(A) = 0$) la matricea diagonală D. Vom putea scrie

$$AA' = TDT'. \tag{14}$$

Înlocuind în (12)

$$BB'TDT' = TDT'BB'$$

şi înmulţind la stînga şi la dreapta cu T', respectiv cu T, vom obţine

$$T'BB'TDT'T = T'BB'TD = T'TDT'BB'T = DT'BB'T. \tag{15}$$

Notînd

$$T'BB'T = C \tag{16}$$

din (15) rezultă

$$CD = DC. \tag{17}$$

Pe o cale analogă, notînd

$$T'\mathcal{B}\mathcal{B}'T = \mathcal{C} \tag{18}$$

obţinem

$$\mathcal{C}D = D\mathcal{C}. \tag{19}$$

Elementele de pe diagonala lui D (celelalte sînt nule) sînt $d_{ii} = \lambda_i$, unde λ_i sînt valorile proprii ($\lambda_i > 0$) ale matricii AA'. Din (17) rezultă

$$c_{ij}\lambda_j = \lambda_i c_{ji} = \lambda_i c_{ij} \tag{20}$$

matricea $C = (c_{ij})$ fiind simetrică ca transformata unei matrici simetrice printr-o transformare ortogonală. Deci

$$c_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0. \tag{21}$$

Un rezultat analog are loc şi pentru matricea $\mathcal{C} = (C_{ij})$:

$$C_{ij}\,(\lambda_i - \lambda_j) = 0. \tag{22}$$

Relaţiile (21) şi (22) arată că matricile C şi $\mathcal{C}$ au o structură celulară diagonală, fiecare dintre celulele de pe diagonală corespunzînd unei valori proprii λ_i distincte a lui AA'. În cazul cînd toate valorile proprii ale matricii AA' sînt distincte, matricile C, respectiv $\mathcal{C}$ sînt diagonale.

Din (16), respectiv (18), rezultă

$$BB' = TCT' \tag{23}$$

şi

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = T\mathfrak{C}T'. \tag{24}$$

Să înmulţim acum ecuaţia (5) cu A' la dreapta şi să ţinem seama de (9), respectiv (11). Vom avea

$$BA' - AA' + \lambda\mathfrak{B}A' = BB' - AA' + \lambda\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = 0, \tag{25}$$

care transformată prin T ne dă

$$C - D + \lambda\mathfrak{C} = 0. \tag{26}$$

Scriind componentele lui (26) situate pe diagonală obţinem

$$c_{ii} - \lambda_i + \lambda C_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{27}$$

Să ne ocupăm întîi de cazul cînd toate valorile proprii λ_i ale lui φ sînt distincte. În acest caz celelalte relaţii ce se mai pot scoate, pe lîngă (27), din (26) sînt automat satisfăcute. Observăm pe de altă parte că λ nu poate fi nul, căci altfel din (27) rezultă $c_{ii} = \lambda_i$ şi apoi $\det^2 B = \det C = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det^2 A \neq 0$, ceea ce contrazice ipoteza (3). Pe de altă parte, cum C_{ii} sînt complemenţii algebrici ai lui c_{ii}, înmulţind (27) cu c_{ii} obţinem :

$$c_{ii}(c_{ii} - \lambda_i) + c_{ii}C_{ii} = c_{ii}(c_{ii} - \lambda_i) = 0, \tag{28}$$

de unde rezultă

$$c_{ii} = \begin{cases} 0 \\ \lambda_i \end{cases} \tag{29}$$

Observăm că cel puţin unul dintre c_{ii} trebuie să fie nul, căci altfel $\det B \neq 0$. Dar nu se poate ca doi dintre ei să fie nuli. Fie într-adevăr $c_{11} = c_{22} = 0$. Atunci

$$c_{11} - \lambda_1 + C_{11} = c_{11} - \lambda_1 + \lambda c_{22}c_{33} \cdots c_{nn} = -\lambda_1 = 0,$$

ceea ce nu se poate, deoarece valorile proprii ale lui AA' sînt pozitive. Prin urmare numai unul singur dintre c_{ii} este nul, ceilalţi fiind egali cu λ_i.

Întorcîndu-ne la (1) observăm că

$$\rho(A, B) = \sqrt{\mathrm{Sp}\,[(B - A)'(B - A)]} = \sqrt{\mathrm{Sp}\,[(B - A)(B - A)']} = \\ = \sqrt{\mathrm{Sp}\,(BB' - BA' - AB' + AA')}.$$

Dacă matricea B este o matrice singulară ce extremează această distanţă, atunci sînt satisfăcute condiţiile (8) şi (9) şi deci

$$\mathrm{Extr}\,\rho(A, B) = \sqrt{\mathrm{Sp}\,(AA' - BA')} = \sqrt{\mathrm{Sp}(AA' - BB')} = \\ = \sqrt{\mathrm{Sp}\,(AA') - \mathrm{Sp}\,(BB')} = \sqrt{\lambda_i}, \tag{30}$$

unde λ_i este una din valorile proprii ale matricii AA'. Pentru ca din (30) să obţinem distanţa matricii A la varietatea V trebuie să alegem λ_i cel mai mic. Numerotînd valorile proprii ale lui AA' în ordine descrescătoare obţinem

$$\rho(A) = \min_i \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda_n}, \tag{31}$$

care este soluţia problemei puse.

Rezultatul (31) a fost obţinut în ipoteza că toate valorile proprii ale matricii AA' sînt simple, dar el rămîne în vigoare şi în cazul cînd printre valorile proprii ale lui AA' există unele multiple. Această extindere se poate obţine fie prin calcul direct, fie raţionînd prin continuitate.

Primită la redacţie la 6 august 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Rigal Jean Louis, *Evaluation de la plus courte distance d'une matrice carée au lieu des matrices singulières*. C. R. Paris, **252**, *4*, 506–508 (1961).

CÎMPURI DE VECTORI PARALELI ÎN SPAȚII A_3 CU CONEXIUNE AFINĂ LOCAL EUCLIDIENE A CĂROR CONEXIUNE PROIECTIVĂ ESTE CONSTANTĂ

DE

EFTIMIE I. GRECU

Utilizînd o teoremă demonstrată de M. Stoka cu privire la reducerea la o formă canonică a conexiunii spațiilor A_3 cu conexiune afină local euclidiene a căror conexiune proiectivă este constantă, se determină cîmpurile de vectori paraleli potențiali ale acestor spații.

Se știe că fiind dat un spațiu cu conexiune afină A_n, se poate asocia acestui spațiu sistemul de ecuații diferențiale :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t},$$

sistem ce definește curbele autoparalele ale spațiului A_n. În mod analog, se poate asocia, în mod invariant, spațiului A_n sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$A_{jk}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^j\, \partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0. \tag{1}$$

Să considerăm pentru acesta o transformare de variabile

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

și o tranformare liniară a funcției z

$$z' = az + b \tag{2}$$

unde a și b sînt constante.

Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{1}{a}\frac{\partial z'}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^r}{\partial x^i}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 2, P. 321–335, BUCUREȘTI, 1966

şi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \frac{\partial z'}{\partial x'^r}\frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^j \partial x^k}\right).$$

Rezultă

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r}\right)\frac{\partial z'}{\partial x'^i}\right],$$

de unde obţinem în definitv formulele

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a} A'_{rs}(z')\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k},$$

dacă ţinem seama de legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs}\frac{\partial x'^r}{\partial x^j}\frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk}\frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Deci sistemul (1) se schimbă în sistemul

$$A'_{jk}(z') = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^j \partial x'^k} + \Gamma'^i_{jk}\frac{\partial z'}{\partial x'^i} = 0.$$

Sistemul cu derivate parţiale (1) este deci un sistem invariant asociat spaţiului A_n, cu condiţia ca funcţia z să fie considerată ca un invariant sau ca o funcţie care suferă chiar o transformare liniară (2). Sistemul (1) se poate deduce din ecuaţiile transportului paralel al unui vector covariant V_j, ce derivă dintr-un potenţial z, deci $V_j = \frac{\partial z}{\partial x^j}\cdot$ Într-adevăr, ecuaţiile transportului paralel al unui vector covariant V_j sînt

$$\mathrm{d}V_j + \Gamma^i_{jk} V_i \,\mathrm{d}x^k = 0,$$

de unde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0.$$

Rezultă deci că a găsi o soluţie a sistemului (1) revine a găsi un vector covariant derivînd dintr-un potenţial şi care se transportă în A_n prin paralelism. În general, dacă spaţiul A_n este oarecare, asemenea vectori nu există, deoarece condiţiile de integrabilitate ale ecuaţilor (1), care se scriu

$$(3) \qquad T^i_{jk}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0,\ \Gamma^i_{jkl}\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0,$$

unde T^i_{jk}, Γ^i_{jkl} sînt tensorii de torsiune şi de curbură ai spaţiului A_n, n-au altă soluţie decît soluţia banală $z = \text{const}$.

Dacă spaţiul A_n este local euclidian, deci $T^i_{jk} = 0$ şi $\Gamma^i_{jkl} = 0$, atunci condiţiile (3) de integrabilitate sînt identic satisfăcute şi sistemul (1) admite soluţii diferite de cea banală.

În cele ce urmează ne propunem să determinăm cîmpurile de vectori paraleli covarianţi potenţiali ale spaţiilor A_3 cu conexiune afină local euclidiene a căror conexiune proiectivă este constantă.

În lucrarea [4], M. Stoka a demonstrat următoarea

TEOREMĂ. *Există unsprezece tipuri distincte de spaţii A_3 cu conexiune afină constantă local euclidiene şi două tipuri de spaţii A_3 cu conexiune afină variabilă local euclidiene a căror conexiune proiectivă este constantă.*

Vom utiliza aceste rezultate pentru a determina cîmpurile de vectori paraleli covarianţi potenţiali ale spaţiilor A_3 cu conexiune afină local euclidiene, a căror conexiune proiectivă este constantă.

Avem de considerat deci următoarele treisprezece cazuri :

[I] $\Gamma^1_{22} = 1$;

[II] $\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = 1$;

[III] $\Gamma^1_{23} = 1$;

[IV] $\Gamma^1_{11} = -4$;

[V] $\Gamma^1_{23} = \Gamma^3_{22} = 1$;

[VI] $\Gamma^1_{23} = 1, \ \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{32} = -2$;

[VII] $\Gamma^1_{22} = 1, \ \Gamma^3_{33} = -4$;

[VIII] $\Gamma^1_{11} = \Gamma^3_{33} = -4$;

[IX] $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{33} = -4$;

[X] $\Gamma^1_{22} = 1, \ \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -2, \ \Gamma^3_{33} = -4$;

[XI] $\Gamma^1_{22} = -\Gamma^1_{11} = -\Gamma^2_{21} = 1$;

[XII] $\Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{12} = 1, \ \Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = -\operatorname{tg} x^2, \ \Gamma^2_{22} = -2\operatorname{tg} x^2$;

[XIII] $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{32} = -\Gamma^2_{33} = -1, \ \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = -\operatorname{tg} x^1, \ \Gamma^1_{11} =$
$= -2 \operatorname{tg} x^1$;

componentele nescrise fiind nule.

Să observăm mai întîi că dacă punem $V_j = \dfrac{\partial z}{\partial x^j}$, atunci sistemul (1) devine :

$$\frac{\partial V_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V_i = 0.$$

Rezultă că componentele $V_1(x^1, x^2, x^3)$, $V_2(x^1, x^2, x^3)$, $V_3(x^1, x^2, x^3)$ sînt soluţii ale sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi, liniare și omogene, cu coeficienți constanți pentru cazurile [I], [II], . . ., [XI] și cu coeficienți variabili pentru cazurile [XII] și [XIII] :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \Gamma^1_{11} V_1 + \Gamma^2_{11} V_2 + \Gamma^3_{11} V_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V_1}{\partial x_2} + \Gamma^1_{12} V_1 + \Gamma^2_{12} V_2 + \Gamma^3_{12} V_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V_1}{\partial x^3} + \Gamma^1_{13} V_1 + \Gamma^2_{13} V_2 + \Gamma^3_{13} V_3 = 0, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_2}{\partial x^1} + \Gamma^1_{21} V_1 + \Gamma^2_{21} V_2 + \Gamma^3_{21} V_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V_2}{\partial x^2} + \Gamma^1_{22} V_1 + \Gamma^2_{22} V_2 + \Gamma^3_{22} V_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V_2}{\partial x^3} + \Gamma^1_{23} V_1 + \Gamma^2_{23} V_2 + \Gamma^3_{23} V_3 = 0, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_3}{\partial x^1} + \Gamma^1_{31} V_1 + \Gamma^2_{31} V_2 + \Gamma^3_{31} V_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V_3}{\partial x^2} + \Gamma^1_{32} V_1 + \Gamma^2_{32} V_2 + \Gamma^3_{32} V_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial V_3}{\partial x^3} + \Gamma^1_{33} V_1 + \Gamma^2_{33} V_2 + \Gamma^3_{33} V_3 = 0. \end{cases}$$

O dată determinate componentele V_1, V_2, V_3, pentru a determina potențialul z, din care derivă acest vector, vom integra sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x^1} = V_1(x^1,\ x^2,\ x^3), \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x^2} = V_2(x^1,\ x^2,\ x^3), \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial x^3} = V_3(x^1,\ x^2,\ x^3). \end{cases}$$

Fiecare din sistemele (4), (5), (6) și (7) este complet integrabil, deoarece am presupus că spațiile A_3 sînt local euclidiene, deci $T^i_{jk}=0$ și $\Gamma^i_{jkl}=0$. Se observă ușor că integrabilitatea completă a sistemului (7) este o consecință a condițiilor $T^i_{jk}=0$, iar integrabilitatea completă a fiecăruia dintre sistemele (4), (5), (6) este o consecință a condițiilor $\Gamma^i_{jkl}=0$.

Pentru integrarea sistemului (7), vom proceda întotdeauna astfel: observăm că membrul al doilea al ecuaţiei

$$\mathrm{d}z = V_1\,\mathrm{d}x^1 + V_2\,\mathrm{d}x^2 + V_3\,\mathrm{d}x^3, \tag{8}$$

care este echivalentă cu (7), este o diferenţială totală exactă, deoarece avem

$$\frac{\partial V_i}{\partial x^k} - \frac{\partial V_k}{\partial x^i} = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

şi atunci, pentru a determina pe $z(x^1, x^2, x^3)$ este suficient să calculăm integrala curbilinie din membrul doi al ecuaţiei (8) între două puncte $A_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$şi $A(x^1, x^2, x^3)$, unde A_0 este un punct fix, integrarea făcîndu-se pe un drum format din segmente paralele cu axele de coordonate şi care uneşte cele două puncte, aşa încît z este dat de expresia

$$z = \int_{x_0^1}^{x^1} V_1(x^1,\ x_0^2,\ x_0^3)\,\mathrm{d}x^1 + \int_{x_0^2}^{x^2} V_2(x^1,\ x^2,\ x_0^3)\,\mathrm{d}x^2 + \int_{x_0^3}^{x^3} V_3(x^1,\ x^2,\ x^3)\,\mathrm{d}x^3.$$

Vom considera acum, pe rînd, fiecare din cele treisprezece tipuri distincte de spaţii $A_3(x^1, x^2, x^3)$ cu conexiune afină local euclidiene a căror conexiune proiectivă este constantă şi vom determina, în fiecare caz în parte, cîmpul de vectori covarianţi paraleli precum şi potenţialul z din care derivă aceşti vectori.

Cazul [I]

$$\Gamma^1_{22} = 1,$$

celelalte componente ale conexiunii fiind nule.

Înlocuind în ecuaţiile (4), (5) şi (6), acestea devin

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + V_1 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = \frac{\partial V_3}{\partial x^3} = 0.$$

Acest sistem se integrează imediat şi obţinem

$$V_1 = C_1,\ V_2 = -C_1 x^2 + C_2,\ V_3 = C_3.$$

Sistemul de ecuaţii (7) se scrie

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1,\ \frac{\partial z}{\partial x^2} = -C_1 x^2 + C_2,\ \frac{\partial z}{\partial x^3} = C_3,$$

care ne dă prin integrare

$$z = C_1\left[x^1 - \frac{1}{2}(x^2)^2\right] + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4$$

unde C_i sînt constante de integrare ($i = 1, 2, 3, 4$).

Cazul [II]

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = 1.$$

Sistemul ce determină pe V_i ($i = 1, 2, 3$) este

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + V_1 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x^3} + V_1 = 0,$$

de unde rezultă

$$V_1 = C_1, \quad V_2 = -C_1 x^2 + C_2, \quad V_3 = -C_1 x^3 + C_3.$$

Avem apoi ecuațiile

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = -C_1 x^2 + C_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x^3} = -C_1 x^3 + C_3,$$

care integrate ne dau

$$z = C_1\left[x^1 - \frac{(x^2)^2 + (x^3)^2}{2}\right] + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4.$$

Cazul [III]

$$\Gamma^1_{23} = 1.$$

Obținem sistemul

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^3} + V_1 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x^2} + V_1 = 0,$$

a cărui soluţie este

$$V_1 = C_1, \quad V_2 = -C_1 x^3 + C_2, \quad V_3 = -C_1 x^2 + C_3.$$

Funcţia $z(x^1, x^2, x^3)$ verifică atunci ecuaţiile

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = -C_1 x^3 + C_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x^3} = -C_1 x^2 + C_3,$$

de unde rezultă :

$$z = C_1 (x^1 - x^2 x^3) + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4.$$

Cazul [IV]

$$\Gamma^1_{11} = -4.$$

Componentele V_1, V_2, V_3 satisfac sistemul

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - 4V_1 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = \frac{\partial V_3}{\partial x^3} = 0,$$

de unde rezultă imediat

$$V_1 = C_1 e^{4x^1}, \quad V_2 = C_2, \quad V_3 = C_3.$$

Sistemul (7) se scrie

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1 e^{4x^1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = C_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x^3} = C_3,$$

de unde scoatem

$$z = \frac{1}{4} C_1 e^{4x^1} + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4.$$

Cazul [V]

$$\Gamma^1_{23} = \Gamma^3_{22} = 1.$$

Obţinem sistemul

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + V_3 = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^3} + V_1 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x^2} + V_1 = 0,$$

care ne dă prin integrare

$$V_1 = C_1, \; V_2 = C_1\left[\frac{1}{2}(x^2)^2 - x^3\right] - C_3 x^2 + C_2, \; V_3 = - C_1 x^2 + C_3.$$

Ecuațiile (7) devin atunci

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1, \; \frac{\partial z}{\partial x^2} = C_1\left[\frac{1}{2}(x^2)^2 - x^3\right] - C_3 x^2 + C_2, \; \frac{\partial z}{\partial x^3} = - C_1 x^2 + C_3,$$

care ne dau

$$z = C_1\left[x^1 - x^2 x^3 + \frac{1}{6}(x^2)^3\right] + C_2 x^2 + C_3\left[x^3 - \frac{1}{2}(x^2)^2\right] + C_4.$$

Cazul [VI]

$$\Gamma^1_{23} = 1, \; \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{32} = -2.$$

Ecuațiile (4), (5), (6) se scriu

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = 0, \; \frac{\partial V_2}{\partial x^2} - 2V_2 = 0, \; \frac{\partial V_2}{\partial x^3} + V_1 - 2V_3 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^3} = 0, \; \frac{\partial V_3}{\partial x^2} + V_1 - 2V_3 = 0$$

și au soluția

$$V_1 = C_1, \; V_2 = (C_2 + 2C_3 x^3)\, e^{2x^2}, \; V_3 = -\frac{1}{2} C_1 + C_3 e^{2x^2}.$$

Avem apoi

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1, \; \frac{\partial z}{\partial x^2} = (C_2 + 2\, C_3 x^3) e^{2x^2}, \; \frac{\partial z}{\partial x^3} = -\frac{1}{2} C_1 + C_3 e^{2x^2},$$

de unde obținem

$$z = C_1\left(x^1 - \frac{1}{2} x^3\right) + \frac{1}{2} C_2 e^{2x^2} + C_3 x^3 e^{2x^2} + C_4.$$

Cazul [VII]

$$\Gamma^1_{22} = 1, \ \Gamma^3_{33} = -4.$$

Obţinem sistemul

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0, \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + V_1 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial V_3}{\partial x^3} - 4\, V_3 = 0,$$

care are soluţia

$$V_1 = C_1, \ V_2 = -C_1\, x^2 + C_2, \ V_3 = C_3\, e^{4x^3}.$$

Sistemul (7) se scrie

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1, \ \frac{\partial z}{\partial x^2} = -C_1\, x^2 + C_2, \ \frac{\partial z}{\partial x^3} = C_3\, e^{4x^3}$$

şi rezultă

$$z = C_1 \left[x^1 - \frac{1}{2} (x^2)^2 \right] + C_2\, x^2 + \frac{1}{4}\, C_3\, e^{4x^3} + C_4.$$

Cazul [VIII]

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^3_{33} = -4.$$

Rezultă ecuaţiile

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - 4 V_1 = 0, \ \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial V_3}{\partial x^3} - 4 V_3 = 0,$$

care ne dau

$$V_1 = C_1\, e^{4x^1}, \ V_2 = C_2, \ V_3 = C_3\, e^{4x^3}.$$

Ecuaţiile (7) se scriu

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1 e^{4x^1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = C_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x^3} = C_3 e^{4x^3},$$

care au soluţia

$$z = \frac{1}{4} C_1 e^{4x^1} + C_2 x^2 + \frac{1}{4} C_3 e^{4x^3} + C_4.$$

Cazul [IX]

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{33} = -4.$$

Înlocuind în (4), (5), (6), obţinem sistemul

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - 4V_1 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^2} - 4V_2 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x^3} - 4V_3 = 0,$$

care are soluţia

$$V_1 = C_1 e^{4x^1}, \quad V_2 = C_2 e^{4x^2}, \quad V_3 = C_3 e^{4x^3}.$$

Sistemul (7) devine

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1 e^{4x^1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = C_2 e^{4x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x^3} = C_3 e^{4x^3},$$

de unde rezultă

$$z = \frac{1}{4} C_1 e^{4x^1} + \frac{1}{4} C_2 e^{4x^2} + \frac{1}{4} C_3 e^{4x^3} + C_4.$$

Cazul [X]

$$\Gamma^1_{22} = 1, \quad \Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = -2, \quad \Gamma^3_{33} = -4.$$

Ecuaţiile (4), (5), (6) se scriu

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - 2V_1 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^2} - 2V_2 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} - 2V_2 = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + V_1 = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x^3} - 4V_3 = 0.$$

Integrînd, obţinem soluţia

$$V_1 = e^{2x^1}(C_1 \cos \sqrt{2}\, x^2 + C_2 \sin \sqrt{2}\, x^2),\ V_2 = \frac{V\sqrt{2}}{2} e^{2x^1}(-C_1 \sin \sqrt{2}\, x^2 + + C_2 \cos \sqrt{2}\, x^2),\ V_3 = C_3 e^{4x^3}.$$

Rezultă că funcţia z satisface ecuaţiile

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = e^{2x^1}(C_1 \cos \sqrt{2}\, x^2 + C_2 \sin \sqrt{2}\, x^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{2x^1}(-C_1 \sin \sqrt{2}\, x^2 + C_2 \cos \sqrt{2}\, x^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^3} = C_3 e^{4x^3},$$

de unde rezultă

$$z = \frac{1}{2} e^{2x^1}(C_1 \cos \sqrt{2}\, x^2 + C_2 \sin \sqrt{2}\, x^2) + \frac{1}{4} C_3 e^{4x^3} + C_4.$$

Cazul [XI]

$$\Gamma^1_{22} = -\Gamma^1_{11} = -\Gamma^2_{21} = 1$$

Integrînd sistemul

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - V_1 = 0,\ \frac{\partial V_1}{\partial x^2} - V_2 = 0,\ \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} - V_2 = 0,\ \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + V_1 = 0,\ \frac{\partial V_2}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^2} = \frac{\partial V_3}{\partial x^3} = 0,$$

se obţine soluţia

$$V_1 = e^{x^1}(C_1 \cos x^2 + C_2 \sin x^2),\ V_2 = e^{x^1}(-C_1 \sin x^2 + C_2 \cos x^2),\ V_3 = C_3.$$

Ecuaţiile (7) se scriu

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = e^{x^1}(C_1 \cos x^2 + C_2 \sin x^2),\ \frac{\partial z}{\partial x^2} = e^{x^1}(-C_1 \sin x^2 + + C_2 \cos x^2),\ \frac{\partial z}{\partial x^3} = C_3,$$

a căror soluţie generală este

$$z = e^{x^1}(C_1 \cos x^2 + C_2 \sin x^2) + C_3 x^3 + C_4.$$

Cazul [XII]

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{12} = 1,\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{32} = -\operatorname{tg} x^2,\ \Gamma^2_{22} = -2\operatorname{tg}\ x^2.$$

Componentele V_i sînt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial V_1}{\partial x^2} - \operatorname{tg} x^2.\ V_1 - V_3 = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} - \operatorname{tg} x^2.\ V_1 - V_3 = 0,\ \frac{\partial V_2}{\partial x^2} - 2\operatorname{tg} x^2.\ V_2 = 0, \frac{\partial V_2}{\partial x^3} + V_1 - \operatorname{tg} x^2.\ V_3 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = \frac{\partial V_3}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial V_3}{\partial x^2} + V_1 - \operatorname{tg} x^2.\ V_3 = 0$$

a cărui soluţie se scrie

$$V_1 = C_1 \operatorname{tg} x^2 + C_3,\ V_2 = (1 + \operatorname{tg}^2 x^2)(C_1 x^1 - C_3 x^3 + C_2),\ V_3 + C_1 -$$
$$- C_3 \operatorname{tg} x^2.$$

Pentru z se obţine sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1 \operatorname{tg} x^2 + C_3,\ \frac{\partial z}{\partial x^2} = (1 + \operatorname{tg}^2 x^2)(C_1 x^1 - C_3 x^3 + C_2),\ \frac{\partial z}{\partial x^3} =$$
$$= C_1 - C_3\ \operatorname{tg} x^2,$$

de unde rezultă

$$z = C_1 (x^1 \operatorname{tg} x^2 + x^3) + C_2 \operatorname{tg} x^2 + C_3 (x^1 - x^3 \operatorname{tg} x^2) = C_4.$$

Cazul [XIII]

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{32} = -\Gamma^2_{33} = -1,\ \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{31} = -\operatorname{tg} x^1,\ \Gamma^1_{11} = -2\operatorname{tg} x^1.$$

În acest caz obţinem sistemul

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - 2\operatorname{tg} x^1 \cdot V_1 - V_2 = 0,\ \frac{\partial V_1}{\partial x^2} - \operatorname{tg} x^1 \cdot V_2 = 0,\ \frac{\partial V_1}{\partial x^3} - \operatorname{tg} x^1 \cdot V_3 = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} - \operatorname{tg} x^1 \cdot V_2 = 0,\ \frac{\partial V_2}{\partial x^2} - V_2 = 0,\ \frac{\partial V_2}{\partial x^3} - V_3 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} - \operatorname{tg} x^1 \cdot V_3 = 0,\ \frac{\partial V_3}{\partial x^2} - V_3 = 0,\ \frac{\partial V_3}{\partial x^3} + V_2 = 0,$$

care prin integrare ne dă

$$V_1 = \frac{\sin x^1 \cdot e^{x^2} (C_2 \cos x^3 + C_3 \sin x^3) + C_1}{\cos^2 x^1},$$

$$V_2 = e^{x^2} \cdot \frac{C_2 \cos x^3 + C_3 \sin x^3}{\cos x^1},$$

$$V_3 = e^{x^2} \cdot \frac{- C_2 \sin x^3 + C_3 \cos x^3}{\cos x^1}.$$

Integrînd apoi sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = \frac{\sin x^1 e^{x^2} (C_2 \cos x^3 + C_3 \sin x^3) + C_1}{\cos^2 x^1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^2} = e^{x^2} \cdot \frac{C_2 \cos x^3 + C_3 \sin x^3}{\cos x^1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^3} = e^{x^2} \frac{- C_2 \sin x^3 + C_3 \cos x^3}{\cos x^1}.$$

obţinem

$$z = C_1 \operatorname{tg} x^1 + C_2 e^{x^2} \cdot \frac{\cos x^3}{\cos x^1} + C_3 e^{x^2} \cdot \frac{\sin x^3}{\cos x^1} + C_4.$$

Putem enunţa următoarele teoreme:

TEOREMA 1. *Fiecare din cele treisprezece tipuri distincte de spaţii A_3 cu conexiune afină local euclidiene, a căror conexiune proiectivă este constantă, posedă un cîmp de vectori covarianţi paraleli derivînd din potenţiali, ale căror componente au respectiv expresiile*

$$[\mathrm{I}_1] \quad V_1 = C_1, \; V_2 = - C_1 x^2 + C_2, \; V_3 = C_3;$$

$$[\mathrm{II}_1] \quad V_1 = C_1, \; V_2 = - C_1 x^2 + C_2, \; V_3 = - C_1 x^3 + C_3;$$

$$[\mathrm{III}_1] \quad V_1 = C_1, \; V_2 = - C_1 x^3 + C_2, \; V_3 = - C_1 x^2 + C_3;$$

$$[\mathrm{IV}_1] \quad V_1 = C_1 e^{4x^1}, \; V_2 = C_2, \; V_3 = C_3;$$

$$[\mathrm{V}_1] \quad V_1 = C_1, \; V_2 = C_1 \left[\frac{1}{2} (x^2)^2 - x^3\right] - C_3 x^2 + C_2,$$

$$V_3 = - C_1 x^2 + C_3;$$

$$[\mathrm{VI}_1] \quad V_1 = C_1, \quad V_2 = (C_2 + 2 C_3 x^3) e^{2x^2}, \quad V_3 = - \frac{1}{2} C_1 + C_3 e^{2x^2};$$

$$[\mathrm{VII}_1] \quad V_1 = C_1, \; V_2 = - C_1 x^2 + C_2, \; V_3 = C_3 e^{4x^3};$$

$$[\mathrm{VIII}_1] \quad V_1 = C_1 e^{4x^1}, \; V_2 = C_2, \; V_3 = C_3 e^{4x^3};$$

$$[\mathrm{IX}_1]\ V_1 = C_1\, e^{4x^1},\ V_2 = C_2\, e^{4x^2},\ V_3 = C_3\, e^{4x^3};$$

$$[\mathrm{X}_1]\ V_1 = e^{2x^1}(C_1 \cos \sqrt{2}\, x^2 + C_2 \sin \sqrt{2}\, x^2),\ V_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{2x^1}(-C_1 \sin \sqrt{2}\, x^2 + C_2 \cos \sqrt{2}\, x^2),\ V_3 = C_3\, e^{4x^3};$$

$$[\mathrm{XI}_1]\ V_1 = e^{x^1}(C_1 \cos x^2 + C_2 \sin x^2),\ V_2 = e^{x^1}(-C_1 \sin x^2 +$$

$$+ C_2 \cos x^2),\ V_3 = C_3;$$

$$[\mathrm{XII}_1]\ V_1 = C_1 \operatorname{tg} x^2 + C_3,\ V_2 = (1 + \operatorname{tg}^2 x^2)(C_1 x^1 - C_3\, x^3 +$$

$$+ C_2),\ V_3 = C_1 - C_3 \operatorname{tg} x^2;$$

$$[\mathrm{XIII}_1]\ V_1 = \frac{\sin x^1\, e^{x^2}(C_2 \cos x^3 + C_3 \sin x^3) + C_1}{\cos^2 x^1},\ V_2 =$$

$$= e^{x^2} \cdot \frac{C_2 \cos x^3 + C_3 \sin x^3}{\cos x^1},\ V_3 = e^{x^2} \cdot \frac{-C_1 \sin x^3 + C_3 \cos x^3}{\cos x^1}.$$

TEOREMA 2. *Potențialul z, din care derivă acești vectori, are respectiv expresia*

$$[\mathrm{I}_2]\ z = C_1\left[x^1 - \frac{1}{2}(x^2)^2\right] + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4;$$

$$[\mathrm{II}_2]\ z = C_1\left[x^1 - \frac{(x^2)^2 + (x^3)^2}{2}\right] + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4;$$

$$[\mathrm{III}_2]\ z = C_1(x^1 - x^2 x^3) + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4;$$

$$[\mathrm{IV}_2]\ z = \frac{1}{4} C_1\, e^{4x^1} + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4;$$

$$[\mathrm{V}_2]\ z = C_1\left[x^1 - x^2 x^3 + \frac{1}{6}(x^2)^2\right] + C_2 x^2 + C_3\left[x^3 - \frac{1}{2}(x^2)^2\right] + C_4;$$

$$[\mathrm{VI}_2]\ z = C_1\left(x^1 - \frac{1}{2} x^3\right) + \frac{1}{2} C_2\, e^{2x^2} + C_3\, x^3\, e^{2x^2} + C_4;$$

$$[\mathrm{VII}_2]\ z = C_1\left[x^1 - \frac{1}{2}(x^2)^2\right] + C_2\, x^2 + \frac{1}{4} C_3\, e^{4x^3} + C_4;$$

$$[\mathrm{VIII}_2]\ z = \frac{1}{4} C_1\, e^{4x^1} + C_2\, x^2 + \frac{1}{4} C_3\, e^{4x^3} + C_4;$$

$$[\mathrm{IX}_2]\ z = \frac{1}{4} C_1\, e^{4x^1} + \frac{1}{4} C_2\, e^{4x^2} + \frac{1}{4} C_3\, e^{4x^3} + C_4;$$

$$[X_2]\ z = \frac{1}{2} e^{2x^1} (C_1 \cos \sqrt{2}\, x^2 + C_2 \sin \sqrt{2} x^2) + \frac{1}{4} C_3 e^{4x^3} + C_4;$$

$$[XI_2]\ z = e^{x^1} (C_1 \cos x^2 + C_2 \sin x^2) + C_3 x^3 + C_4;$$

$$[XII_2]\ z = C_1 (x^1 \operatorname{tg} x^2 + x^3) + C_2 \operatorname{tg} x^2 + C_3 (x^1 - x^3 \operatorname{tg} x^2) + C_4;$$

$$[XIII_2]\ z = C_1 \operatorname{tg} x^1 + C_2 e^{x^2} \frac{\cos x^3}{\cos x^1} + C_3 e^{x^2} \frac{\sin x^3}{\cos x^1} + C_4.$$

Se observă că dacă vectorul de conexiune

$$\Gamma_k = \Gamma^i_{ik} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3)$$

este nul, ceea ce are loc pentru tipurile [I], [II], [III] și [V], atunci componentele V_i ale vectorului, cît și potențialul respectiv z, din care derivă acest vector, sînt funcții polinomiale în x^i.

Dacă însă vectorul contractat Γ_k are cel puțin o componentă diferită de zero, atunci apar în V_i cît și în z combinații de exponențiale, sinusuri și cosinusuri ale unor expresii liniare în x^i. Este vorba de tipurile rămase [IV], [VI], [VII] [VIII], [IX], [X], [XI], [XII] și [XIII].

Primită la redacție la 28 iunie 1965

Institutul politehnic
„Gh. Gheorghiu-Dej" — București

BIBLIOGRAFIE

1. F. Abramovici, *Champs parallèles dans les espaces projectifs euclidiens*, Lucrările consfătuirii de geometrie diferențială, Timișoara, 1955, p. 263—267.
2. V. și J. Levine, *Fields of Parallel Vectors in Projectively Flat Spaces*. Duke Mathematical Journal, **16**, 23—32 (1949).
3. P. Eisenhart, *Non Riemannian Geometry*, p. 31.
4. M. Stoka, *Corrispondenze tra spazi proiettivi a connessione costante*, Boll. U.M.I. (3), **17**, 40—47.
5. M. Stoka, *O neosobih sootvetstviah mejdu proektivnîmi prostranstvami a postoiannoi proiectivnoi sviaziu*, Revue de Mathématiques pures et appliquées, **VII**, *1* (1962).
6. M. Stoka, *About special correspondences between projective spaces*. Revue de mathématiques pures et appliquées, **VI**, *3* (1951)
7. Gh. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*. Vol. I, Edit. didactică și pedagogică, București, 1962, p. 214—217.
8. Gh. Vrănceanu, *Sur les espaces à connexion projective*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, **242**, 61—63 (1955).
9. Young Chow-Wong, *A note on Levine Paper*. Duke Mathématical Journal, **20**, 119—125 (1953).

RECENZII

GEORGE CICU, MARIUS IOSIFESCU şi RADU THEODORESCU, *Teoria jocurilor*. Editura tehnică, Bucureşti, 1965

Teoria jocurilor este unul din domeniile recente ale matematicii, care s-a dezvoltat în ultimele decenii şi are numeroase aplicaţii în cele mai variate direcţii. În comparaţie cu alte ramuri ale matematicii moderne, elementele de bază ale teoriei jocurilor nu necesită un aparat matematic complicat şi de aceea pot fi înţelese de un număr mare de cititori. Lucrarea „Teoria jocurilor" îşi propune tocmai să facă cunoscut unui cerc cît mai larg de cititori acest nou domeniu al matematicii, aflat în plină dezvoltare.

Primul capitol „Elemente de algebră liniară şi de teoria probabilităţilor" conţine o serie de noţiuni de matematici superioare care fac cartea accesibilă şi celor ce posedă cunoştinţe matematice ce nu depăşesc programa şcolii medii. În capitolul doi se expun unele rezultate (metoda simplex, problema transporturilor) din domeniul programării liniare, o altă ramură modernă a matematicii, care are o strînsă legătură cu teoria jocurilor.

Capitolul 3 este consacrat descrierii conceptului matematic de joc, iar capitolul următor jocurilor finite. În acest capitol, care este şi cel mai dezvoltat, se dă teorema de minimax, se demonstrează legătura dintre un joc şi o problemă de programare liniară şi se dau cîteva metode de rezolvare a jocurilor.

În capitolul 5 se expun jocurile continui, iar în capitolul 6, „Jocuri statistice", sînt redate o parte din rezultatele originale obţinute de ultimii doi autori în acest domeniu. Ultimul capitol este consacrat jocurilor cu n parteneri.

Demonstraţiile care se dau sînt amănunţite şi uşor de urmărit. Volumul este ilustrat cu numeroase exemple, care fac expunerea mai atrăgătoare.

Credem că această carte va fi de un real folos celor care doresc să ia un prim contact cu teoria jocurilor.

C. Bergthaller

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

1966 MAR 23

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcțiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spații local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă. Teoria corespondenței**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systémes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

N. RANCU și L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 1963, 898 p + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 2, P. 181—338, BUCUREȘTI, 1966

I. P. „Informația" — c. 4688

43831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

3

TOMUL 18

1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

1883

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
GH. MARINESCU — membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

F 762

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

TOM. 18, Nr. 3
1966

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

MARCEL N. ROȘCULEȚ, Asupra analiticității funcțiilor de mai multe variabile 341

N. DINCULEANU, Reprezentarea integrală a operațiilor liniare (I) 349

R. THEODORESCU, Asupra modelării Monte-Carlo a modelelor pentru învățare de tip Bush-Mosteller 387

MARIUS I. STOKA, Determinarea subgrupurilor grupului $X_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + 2x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^3}$, $(\alpha = 1, 2)$, $X_3 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}$, $X_4 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$ 397

NICOLAE POPESCU, Elemente de teoria fasciculelor (II) . . . 407

ION I. CRISTEA și VICTORIA CRISTEA, Mișcări cu vîrtej constant pentru fluide incompresibile vîscoase 457

EFTIMIE GRECU, Asupra spațiilor lui Riemann V_3 cu conexiune constantă de genul doi 471

ST. CERC. MAT., TOM. 18, Nr. 3 P. 339–480, BUCUREȘTI, 1966

ASUPRA ANALITICITĂȚII FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Se dă o expresie nouă formulei lui Taylor pentru funcțiile de mai multe variabile, observîndu-se că operatorul $(x_1 - a_1)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - a_n)\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ se poate scrie cu ajutorul derivatei după o direcție astfel $\| x - a \| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l(a, \alpha)}$. Folosind acest rezultat se extind două criterii de analiticitate datorite lui S. Bernstein și A. Pringsheim (pentru funcțiile de o variabilă) la funcțiile de mai multe variabile.

1. Fie $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ două puncte din R^n. Dreapta care trece prin punctele a, b o vom nota $l(a, b)$, $l(a, \alpha)$ sau $l(\alpha, b)$, unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ iar

$$\alpha_i = \frac{b_i - a_i}{\| b - a \|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

și

$$\| b - a \| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}.$$

Dacă $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, vom spune pentru orice $x \in l(a, \alpha)$ că $x > a$ dacă

$$\frac{x_i - a_i}{\| x - a \|} = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

și $x < a$ dacă

$$\frac{a_i - x_i}{\| x - a \|} = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2. Fie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o funcţie reală definită în sfera de centru a şi rază r, $S(a, r) \subset R^n$, derivabilă de $p+1$ ori în $S(a, r)$. Avem, aplicînd formula lui Taylor,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m!}\left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(m)} f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \mathcal{R}_p;$$

să observăm că

$$(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n} =$$

$$= \|x - a\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l(a, \alpha)}$$

şi

$$\left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(m)} =$$

$$= \|x - a\|^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}l^m(a, \alpha)},$$

unde $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l(a, \alpha)}$ este operatorul de derivare după direcţia $l(a, \alpha)$, iar $\dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}l^m(a, \alpha)}$ operatorul de derivare de ordinul m după direcţia $l(a, \alpha)$. Cu această notaţie restul $\mathcal{R}_p$ se scrie

$$\mathcal{R}_p = \frac{\|x - a\|^{p+1}}{(p+1)!} \frac{\mathrm{d}^{p+1} f(\xi)}{\mathrm{d}l^{p+1}(a, \alpha)}, \quad \xi \in (a, x), \quad \xi \in l(a, x), \tag{2.1}$$

încît formula lui Taylor are următoarea expresie :

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^{p} \frac{\|x - a\|^m}{m!} \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}l^m(a, \alpha)} + \frac{\|x - a\|^{p+1}}{(p+1)!} \frac{\mathrm{d}^{p+1} f(\xi)}{\mathrm{d}l^{p+1}(a, \alpha)} \tag{2.2}$$

valabilă pentru orice $x \in S(a, r)$, $x \in l(a, \alpha)$.

În formula (2.1) direcţia $l(a, \alpha)$ este variabilă şi este definită de punctul fix a şi de un punct oarecare b, situat pe $\|y - a\| = r$. Punctul x este oarecare în $S(a, r)$ însă se află permanent pe segmentul $[a, b]$.

TEOREMA 2.1. *Fie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o funcţie reală definită în $D \subset R^n$. Dacă f este derivabilă în punctul $a \in D$ şi dacă*

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} > 0, \ \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} > 0, \ \dots, \ \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} > 0,$$

atunci există o vecinătate V *a punctului* a *astfel încît în* $D \cap \triangle(a) \cap V$, f *este crescătoare. Am notat* $\triangle(a) = \{x \mid x_i - a_i = \alpha_i t,\ \alpha_i > 0,\ t \in R,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Demonstraţie. Din formula (2.1), rezultă că pentru x suficient de aproape de a, $x \in V$, semnul diferenţei

$$f(x) - f(a)$$

este dat de $\frac{\|x - a\|}{1!} \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}l(a, \alpha)}$; însă în $\triangle(a) \cap D$, $\alpha > 0$, prin urmare, dacă toate derivatele parţiale de ordinul întîi sînt pozitive, pentru $x \in l(a, \alpha)$, $x > a$, $x \in V \cap \triangle(a) \cap D$, avem

$$\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}l(a, \alpha)} > 0,$$

de unde rezultă $f(x) - f(a) > 0$. Teorema este demonstrată.

Funcţia $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots \ldots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, este crescătoare, deoarece

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \alpha \left[\frac{1}{x_k^{1-\alpha}} - \frac{x_k}{[x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2]^{\frac{2-\alpha}{2}}} \right] > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Din demonstraţia teoremei 2.1 se deduce următorul rezultat mai general

TEOREMA 2.2. *Fie* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *o funcţie reală definită în* $D \subset R^n$.

Dacă f *este derivabilă în punctul* $a \in \operatorname{int} D$ *şi dacă*

$$\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}l(a, \alpha)} > 0$$

pentru $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathfrak{D}(\alpha) \subset R_+^n$, $\|\alpha\| = 1$, *atunci există o vecinătate* V *a punctului* a *astfel încît în* $D \cap W(a) \cap V$ (*unde* $W(a)$ *este domeniul stelat definit de* $l(a, \alpha)$, $\alpha \in \mathfrak{D}(\alpha)$) *funcţia* f *este crescătoare.*

3. Folosind rezultatele obţinute mai sus putem demonstra

TEOREMA 3.1. *Fie* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *o funcţie reală definită în* $D \subset R^n$. *Dacă* f *este indefinit derivabilă în sfera* $S \subset D$, *dacă*

$$\frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}l^m(a, \alpha)} > 0,\ m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3}$$

pentru orice $a \in \operatorname{int} S$, $\alpha \in \mathfrak{D}(\alpha) \subset R_+^n$, $\|\alpha\| = 1$, *atunci* f *admite o desfăşurare în serie*

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|x - a\|^m}{m!} \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}l^m(a, \alpha)}$$

convergentă pentru orice x *aparținînd domeniului stelat* $D' = S(a) \cap W(a)$, *unde* $S(a)$ *este sfera de centru* a, *situată în întregime în* S, *iar* $W(a)$ *este domeniul stelat definit de* $l(a, \alpha)$ *cu* $\alpha \in \mathfrak{D}(\alpha)$.

Demonstrație. Fie $l(a, \alpha)$ o dreaptă cu $\alpha \in \mathfrak{D}(a, \alpha)$ și $a + h$, $a + R \in l(a, \alpha)$; $a + h$, $a + R \in S$; $a < a + h < a + R$; h, $R \in R^n_+$; avem

$$f(a + R) = f(a + h) + \frac{\|R - h\|}{1!} \frac{\mathrm{d}f(a + h)}{\mathrm{d}l(a, \alpha)} + \ldots$$

$$+ \frac{\|R - h\|^p}{p!} \frac{\mathrm{d}^p f(a + h)}{\mathrm{d}\, l^p(a, \alpha)} + \mathfrak{R}_p$$

în virtutea relației (2.3) îndeplinită pentru orice m, ținînd seamă de forma restului dată de (2.1), urmează că

$$f(a + R) > \frac{\|R - h\|^{p+1}}{(p + 1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{p+1} f(\xi)}{\mathrm{d}\, l^{p+1}(a, \alpha)} > \frac{\|R - h\|^{p+1}}{(p + 1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{p+1} f(a + h)}{\mathrm{d}\, l^{p+1}(a, \alpha)}, \tag{2.4}$$

deoarece $\xi \in l(a, \alpha)$ și $a + h < \xi < a + R$. Avem

$$\frac{\mathrm{d}^{p+1} f(a + h)}{\mathrm{d}\, l^{p+1}(a, \alpha)} > 0,$$

deoarece $a + h \in S$. Însă

$$f(x + R) \leqslant M,$$

de unde rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}^{p+1} f(a + h)}{\mathrm{d}\, l^{p+1}(a, \alpha)} < \frac{M(p + 1)!}{\|R - h\|^{p+1}}$$

deci pentru $h \to 0$, $h \in l(a, \alpha)$

$$\frac{\mathrm{d}^{p+1} f(a)}{\mathrm{d}\, l^{p+1}(a, \alpha)} < \frac{M(p + 1)!}{\|R\|^{p+1}}$$

prin urmare seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x - a\|^m}{m!} \cdot \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}\, l^m(a, \alpha)}$$

este uniform convergentă în orice compact D' definit de

$$D' = S(a, R - \varepsilon) \cap W(a),\ D' \subset S \subset D,$$

unde $S(a, R - \varepsilon)$ este sfera închisă de centru a și rază $\|R - \varepsilon\|$ cu $\varepsilon \in R^n_+$. Întrucît avem pentru $x \in D'$

$$\|\mathfrak{R}_p(x)\| < \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\frac{\|R - \varepsilon\|}{\|R\|}\right)^k = \frac{\|R\|}{\|R\| - \|R - \varepsilon\|} \cdot \left(\frac{\|R - \varepsilon\|}{\|R\|}\right)^{p+1},$$

pentru x oarecare din D', avem

$$\lim_{p \to \infty} \mathcal{R}_p(x) = 0$$

de unde rezultă că putem scrie pentru orice $x \in D'$, $x \in l(a, \alpha)$

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|x - a\|^m}{m!} \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}\, l^m(a, \alpha)}$$

Teorema este demonstrată.

Particularizînd mulţimea $W(a)$ obţinem

TEOREMA 3.2. *Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie reală definită în sfera $S \subset R^n$.*

Dacă f este indefinit derivabilă în $S \subset R^n$ şi dacă

$$\frac{\partial^p f(a)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} > 0, \; p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p = 0,1,\, 2, \ldots,$$

pentru orice $a \in S$, atunci f admite o desfăşurare în serie după puterile lui $\|x - a\|$ pentru orice $x \in S(a) \cap \triangle(a)$.

Această teoremă poate fi considerată o extindere la fucţiile de mai multe variabile, a unei teoreme a lui S. Bernstein privind analiticitatea funcţiilor de o variabilă [1], [2].

TEOREMA 3.3. *Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie reală definită în $D \subset R^n$.*

Dacă f este indefinit derivabilă în sfera $S \subset D$ şi dacă există două numere β şi ρ astfel încît

$$\left| \frac{\mathrm{d}^p f(a)}{\mathrm{d}\, l^p(a, \alpha)} \right| \leqslant \beta p!\, \rho^p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

pentru orice $a \in S$, $\alpha \in \mathcal{D}(\alpha) \subset R^n_+$, $\|\alpha\| = 1$, atunci f admite o desfăşurare în serie

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|x - a\|^m}{m!} \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}\, l^m(a, \alpha)} \tag{3.3}$$

convergentă pentru orice $x \in D' = S\left(a, \frac{1}{\rho}\right) \cap W(a) \cap S$, unde $S(a)$ este sfera de centru a şi rază $\frac{1}{\rho}$, iar $W(a)$ este domeniul stelat definit de $l(a, \alpha)$ cu $\alpha \in \mathcal{D}(\alpha)$.

Demonstraţie. Folosind dezvoltarea (2.2), avem

$$|\mathcal{R}_p(\xi)| = \frac{\|x - a\|^{p+1}}{(p+1)!} \left| \frac{\mathrm{d}^{p+1}(\xi)}{\mathrm{d}\, l^{p+1}(a, \alpha)} \right| \leqslant \beta \rho^{p+1} \|x - a\|^{p+1}$$

şi dacă luăm pe $x \in S(a) \cap W(a)$ astfel încît

$$\|x - a\| < \frac{1}{\rho}$$

urmează că în $\left(a-\frac{1}{\rho},\ a+\frac{1}{\rho}\right)$, $\mathfrak{R}_p$ converge uniform către zero. Teorema este demonstrată.

Să observăm că dacă

$$\left|\frac{\partial^p f(a)}{\partial x^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}\ldots\,\partial x_n^{p_n}}\right| < M,$$

atunci

$$\left|\frac{\mathrm{d}^p f(a)}{\mathrm{d}\,l^p(a,\ \alpha)}\right| \leqslant M\,(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|)^p \leqslant M\,n^{\frac{p}{2}},\ \|\alpha\|=1, \tag{3.4}$$

încît putem enunţa următoarea

TEOREMA 3.4. *Fie* $f(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$ *o funcţie indefinit derivabilă în sfera* S. *Dacă există două numere pozitive* β *şi* ρ *astfel încît să avem pentru orice* $a \in S$

$$\left|\frac{\partial^p f(a)}{\partial\,x_1^{p_1}\ldots\,\partial\,x_n^{p_n}}\right| \leqslant \frac{\beta\,p\,!\;\rho^p}{n^{\frac{p}{2}}},\ p_1+p_2+\ldots+p_n=p=0,\ 1,\ 2,\ldots,$$

atunci f *admite o desfăşurare în serie*

$$f(x)=f(a)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\|x-a\|^m}{m\,!}\ \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}\,l^m(a,\ \alpha)}$$

convergentă pentru orice $x \in S\left(a,\ \frac{1}{\rho}\right) \cap S \cap \triangle\,(a)$.

Demonstraţie. Avem

$$\left|\frac{\mathrm{d}^p f(a)}{\mathrm{d}\,l^p(a,\ \alpha)}\right| \leqslant \frac{\beta\,p\,!\;\rho^p}{n^{\frac{p}{2}}}\cdot n^{\frac{p}{2}} = \beta\,p\,!\cdot\rho^p,$$

conform neegalităţii (3.4). Demonstraţia continuă apoi ca la teorema 3.3.

4. Teoremele 3.3 şi 3.4 sînt valabile şi pentru f cu valori într-un spaţiu normat A cu norma N_A.

TEOREMA 4.1. *Fie* f *o funcţie indefinit derivabilă în sfera* $S \subset R^n$ *cu valori într-un spaţiu normat* A *cu norma* N_A; dacă *există două numere pozitive* β, ρ *astfel încît*

$$N_A\left(\frac{\mathrm{d}^p f(a)}{\mathrm{d}\,l^p(a,\ \alpha)}\right) \leqslant \beta\,p\,!\cdot\rho^p$$

pentru orice $a \in S$, $\alpha \in \mathfrak{D}(\alpha) \subset R^n_+$, $\|\alpha\|=1$, *atunci* f *admite o desfăşurare în serie*

$$f(x)=f\ (a)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\|x-a\|^m}{m\,!}\ \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}\,l^m(a,\ \alpha)},$$

pentru orice $x \in D' = S\left(a, \frac{1}{\rho}\right) \dot{\cap}\, W(a) \cap S$, *unde* $S\left(a, \frac{1}{\rho}\right)$ *este sfera de centru* a *și rază* $\frac{1}{\rho}$, *iar* $W(a)$ *este domeniul stelat definit de* $l(a, \alpha)$ *cu* $\alpha \in \mathfrak{D}(\alpha)$.

TEOREMA 4.2. *Fie* f *o funcție indefinit derivabilă în sfera* $S \subset R^n$, *cu valori într-un spațiu normat* A *cu norma* N_A; *dacă există două numere pozitive* β, ρ *astfel încît*

$$N_A\left(\frac{\partial^p f(a)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}\right) \leqslant \frac{\beta\, p!\, \rho^p}{n^{\frac{p}{2}}}, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n =$$

$$= p = 0, 1, 2, \dots$$

pentru orice $a \in S$, *atunci* f *admite o desfășurare în serie*

$$f(x) = f(a) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|x - a\|^m}{m!} \frac{\mathrm{d}^m f(a)}{\mathrm{d}\, l^m(a, \alpha)}$$

pentru orice $x \in S\left(a, \frac{1}{\rho}\right) \cap S \cap \triangle(a)$.

Teoremele 3.3, 3.4, 4.1, 4.2 sînt extinderi la funcții de mai multe variabile ale unei teoreme a lui A. Pringsheim [1], [3].

Primită la redacție la 22 iulie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. MIRON NICOLESCU, *Analiza matematică*, Vol. II, Edit. tehnică, București, 1958.
2. S. BERNSTEIN, *Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réele.* Mathematische Annalen, **75** (1914).
3. A. PRINGSHEIM, *Über die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor-schen Lehrsatzes für Functionen einer reellen Variablen.* Mathematische Annalen, **44** (1894).

REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERAȚIILOR LINIARE (I)

DE

N. DINCULEANU

Aceasta este prima parte a unei lucrări în două părți, destinată reprezentării ca integrală a operațiilor liniare pe diferite spații de cîmpuri de vectori.

În această primă parte se studiază cîmpurile total măsurabile, măsurile vectoriale, integrarea cîmpurilor total măsurabile în raport cu astfel de măsuri și reprezentarea ca integrală a operatorilor liniari definiți pe spațiile de cîmpuri total măsurabile. Bibliografia se află la sfîrșitul părții a doua.

INTRODUCERE

Fie T o mulțime, $\mathscr{C}$ un clan de părți ale lui T și μ o măsură pozitivă. Să considerăm spațiul $\mathscr{L}^p(\mu)$ cu $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1) Este cunoscut că funcționalele liniare continue pe $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ se pot reprezenta sub forma

$$U(f) = \int f \, \mathrm{d}m, \tag{1}$$

unde m este o măsură aditivă reală cu variație finită și absolut continuă în raport cu μ, și

$$\| U \| = | m | (T) \tag{1'}$$

unde $| m |$ este variația lui m (v. Dunford și Schwartz [1]).

2) Este cunoscut de asemenea că funcționalele liniare continue U pe $\mathscr{L}^p(\mu)$ cu $1 \leqslant p < \infty$ se pot reprezenta sub forma

$$U(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu, \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18 NR. 3, P. 349–385, BUCUREȘTI, 1966

unde g este o anumită funcție din $\mathcal{L}^q(\mu)$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ și

$$(2') \qquad \| U \| = \| g \|_q .$$

În fapt, și în cazul $1 \leqslant p < \infty$ funcționalele U admit o reprezentare de forma (1), cu $m = g\mu$, iar egalitatea (2′) devine

$$(2'') \qquad \| U \| = | m |_q (T),$$

unde $| m |_q$ este q-variația măsurii m. În cazul $1 \leqslant p < \infty$, măsura m din formula (1) este totdeauna numărabil aditivă și cu variație finită.

3) Reprezentarea integrală (1) rămîne valabilă și în cazul cînd T este un spațiu local compact iar U este o funcțională continuă pe spațiul $\mathcal{K}(T)$ al funcțiilor continue pe T și cu suport compact. În acest caz măsura m este numărabil aditivă și regulată (Riesz [1] și Kakutani [2]).

Diverși autori au dat diferite extensiuni ale acestor rezultate, fie înlocuind spațiile $\mathcal{L}^p(\mu)$ sau $\mathcal{K}(T)$ de funcții scalare cu spații $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ sau $\mathcal{K}_E(T)$ de funcții vectoriale $f : T \to E$, unde E este un spațiu Banach, fie înlocuind funcționalele prin operații cu valori într-un spațiu Banach, fie considerînd operații cu valori în F definite pe spațiile $\mathcal{L}^p_E(\mu)$ sau $\mathcal{K}_E(F)$.

Extensiunile de forma (1) au fost posibile, în general, fără a impune condiții speciale spațiilor E și F, în timp ce extensiunile de forma (2) folosesc extensiuni corespunzătoare ale teoremei lui Lebesgue-Nikodym, extensiuni care au impus condiții de numărabilitate asupra spațiilor E și F și chiar condiția ca F să fie un dual de spațiu Banach.

Trebuie remarcat însă că în cazul spațiului $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, extensiunea de forma (1) la spațiul $\mathcal{L}^\infty_E(\mu)$ de funcții vectoriale nu mai este în general posibilă. Din punctul de vedere al reprezentărilor integrale se impune în mod natural spațiul $\mathcal{M}_E(T)$ de funcții total măsurabile (limite uniforme de funcții etajate), care în cazul funcțiilor reale coincide cu $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Reprezentările de forma (1) și (2) au fost extinse chiar pentru spații $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$, $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ de cîmpuri de vectori, spațiul E fiind înlocuit cu o familie fundamentală $\mathcal{A}$ de cîmpuri de vectori.

Astfel :

1) Reprezentări de forma (1) au fost date de M. Gowurin [1] pentru operații pe spațiul $\mathcal{M}_E(\mathcal{C})$, N. Dunford și J. Schwartz [1] pentru funcționale pe $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ și de I. Singer [2] pentru funcționale pe spațiul $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$, în cazul cînd T este compact (v. de asemenea K. Swong [1]).

În această lucrare (cap. II), se dau reprezentări de forma (1), în cazul unei mulțimi abstracte T, pentru operații $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ cu $\| U_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ (unde U_A este restricția lui U la spațiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(T, A)$ al cîmpurilor nule în afara lui A). Se studiază apoi corespondența dintre proprietățile lui U și ale lui m :

a) $\| U_A \| = \widetilde{m}(A)$, unde $\widetilde{m}$ este semivariația lui m;

b) $||| U_A ||| = \overline{m}(A)$, unde $\overline{m}$ este variația lui m;

c) U este majorată dacă și numai dacă m are variație finită;

d) m este numărabil aditivă dacă și numai dacă $U(\varphi_n) \to 0$ pentru orice șir descrescător $\varphi_n \to 0$.

e) m este absolut continuă în raport cu μ dacă și numai dacă U este continuă pentru seminorma $N_\infty(x, \mu)$.

Se studiază de asemenea corespondența $U \to U'$ între operațiile liniare $U : \mathscr{M}_{\mathscr{A}}(T) \to F$ și operațiile $U' : \mathscr{M}(\mathscr{C}) \to \mathscr{L}(\mathscr{A}, F)$ prin formula

$$(3) \qquad U(\varphi x) = U'(\varphi)\, x, \quad \text{pentru} \quad \varphi \in \mathscr{M}(\mathscr{C}) \quad \text{și} \quad x \in \mathscr{A}.$$

Această corespondență păstrează măsura m din reprezentarea (1) și norma $|||U_A|||$ dar avem $\|U'_A\| \leqslant |||U_A|||$.

În încheiere se dă o caracterizare a operațiilor pe $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ care admit o reprezentare de forma (2). Această caracterizare este nouă chiar în cazul funcționalelor pe $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ (în acest caz N. Bourbaki [3] a dat de asemenea o caracterizare). Rezultatele din Cap. II au fost publicate de autor în lucrarea [9].

2) Reprezentări de forma (1) au fost date de I. Singer pentru funcționale pe $\mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}(\mu)$ [2], II (în cazul cînd T este local compact) și pentru operații pe $\mathscr{L}^p_E(\mu)$ [5] (de asemenea în cazul cînd T este local compact).

În această lucrare (cap. IV) se dau reprezentări de forma (1) în cazul unei mulțimi abstracte T, pentru operații $U : \mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}(\mu) \to F$ cu $\|U_A\|_p < \infty$ pentru $A \in \mathscr{T}(\mathscr{C})$ (unde $\mathscr{T}(\mathscr{C})$ este tribul generat de $\mathscr{C}$, iar U_A restricția lui U la spațiul $\mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}(\mu, A)$ al cîmpurilor nule în afara lui A). Se arată că avem :

a) $\|U_A\|_p = \widetilde{m}_q(A)$, unde $\widetilde{m}_q$ este q-semivariația lui m, $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$,

și

b) $|||U_A|||_p = m_q(A)$, unde $\overline{m}_q$ este q - variația lui m.

Se studiază de asemenea corespondența de forma (3) care reduce studiul operațiilor pe $\mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}(\mu)$ la studiul operațiilor pe $\mathscr{L}^p(\mu)$.

În încheierea § 4 se dă o reprezentare de forma (2) pentru operații $U : \mathscr{L}^p_{\mathscr{A}} \to F$, în ipoteza că teorema lui Lebesgue-Nikodym are loc.

Teorema lui Lebesgue-Nikodym are loc în următoarele cazuri

(i) $\mathscr{A} = E$ și F egal cu un dual de spațiu Banach, fără nici o ipoteză de numărabilitate asupra lui E și F;

(ii) T local compact, $\mathscr{A}$ de tip numărabil și F dual de spațiu Banach (dar nu neapărat de tip numărabil);

(iii) T local compact, F dual de spațiu Banach, fără ipoteze de numărabilitate asupra lui $\mathscr{A}$ și F, dar cu condiția ca să existe o ridicare tare a spațiului $\mathscr{L}^\infty(\mu)$.

Reprezentări de forma (2) au mai fost date, printre alți autori, de J. Dieudonné [5] pentru funcționale pe $\mathscr{L}^p_E(\mu)$ în condiții de numărabilitate pentru E, de A. și C. Ionescu Tulcea pentru operații pe $\mathscr{L}^p_{\mathscr{A}}(\mu)$ [1], în condiții de numărabilitate pentru $\mathscr{A}$ și F, și de A. și C. Ionescu Tulcea [3] pentru operații pe $\mathscr{L}^p_E(\mu)$ fără nici o condiție de numărabilitate asupra lui E și F.

3) Reprezentări de forma (1) au fost date de I. Singer [2] pentru funcţionale pe $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$. Autorul acestei lucrări a caracterizat operaţiile pe $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ care admit reprezentări de forma (1) — operaţiile majorate [4], care verifică relaţii de forma

$$|U(x)| \leqslant \int |x| \, d\mu$$

pentru anumite măsuri pozitive regulate μ.

În această lucrare (cap. V) se dă şi o caracterizare intrinsecă a operaţiilor liniare majorate, anume, condiţia ca $|||U_k||| < \infty$ pentru orice mulţime compactă K.

Se dă de asemenea o reprezentare de forma (1) a operaţiilor liniare continue pe $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ în raport cu măsuri aditive cu semivariaţie finite şi o reprezentare de forma (3). Rezultatele din cap. V au fost publicate de autor în lucrarea [10].

În încheiere se dă o reprezentare de forma (2) pentru operaţiile majorate, în ipoteza că are loc teorema lui Lebesgue-Nikodym.

Capitolele I şi III sînt destinate integrării în raport cu măsuri vectoriale, finit aditive sau numărabil aditive, şi studiului variaţiei şi semivariaţiei de diferite ordine. Deoarece măsurile au valori în $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ iar $\mathcal{A}$ nu este un spaţiu Banach, în general, a fost necesar să se definească separat integrarea funcţiilor scalare.

În capitolele II, III şi V, destinate reprezentării integrale a operaţiilor definite respectiv pe spaţiul $\mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu)$, $\mathcal{L}^{p}_{\mathcal{A}}(\mu)$ şi $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ se observă trăsături comune :

α) posibilitatea de a reprezenta sub forma (1) operaţiile U cu $\|U\| < \infty$, în raport cu măsuri cu semivariaţie finită ;

β) posibilitatea de a reprezenta sub forma (1) operaţiile U cu $|||U||| < \infty$, în raport cu măsuri cu variaţie finită ;

γ) posibilitatea de a reprezenta sub forma (2) operaţiile U cu $|||U||| < \infty$ în raport cu măsura pozitivă μ, în ipoteza că teorema Lebesgue-Nikodym are loc ;

δ) posibilitatea de a reduce prin formula (3) studiul operaţiilor definite pe spaţii de cîmpuri de vectori la studiul operaţiilor definite pe spaţii de funcţii reale.

CAPITOLUL I

INTEGRAREA CÎMPURILOR DE VECTORI TOTAL MĂSURABILE

§ 1. FUNCŢII REALE TOTAL MĂSURABILE

În acest capitol vom considera : o mulţime T şi un *clan* $\mathcal{C}$ de părţi ale lui T. Nu se presupune că $T \in \mathcal{C}$. Vom nota cu $\mathcal{C}_{\lambda}$ clanul părţilor $E \subset T$ care au proprietatea că $E \cap A \in \mathcal{C}$ pentru orice $A \in \mathcal{C}$. Clanul $\mathcal{C}_{\lambda}$ conţine clanul $\mathcal{C}$ şi spaţiul întreg T. Dacă $\mathcal{C}$ este un trib, atunci şi $\mathcal{C}_\lambda$ este un trib.

Vom nota cu $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ spaţiul funcţiilor reale simple (etajate) de forma

$$\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i \text{ (sumă finită) cu } A_i \in \mathcal{C} \text{ şi } \alpha_i \in R.$$

Pentru fiecare mulţime $A \subset T$, notăm cu $\mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ subspaţiul funcţiilor din $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ nule pe $T - A$.

1. Definiţie. *Spunem că o funcţie reală* $\varphi : T \to R$ *este total măsurabilă în raport cu clanul* $\mathcal{C}$, *sau total* $\mathcal{C}$ *- măsurabilă, dacă se anulează în afara unei mulţimi din* $\mathcal{C}$ *şi dacă există un şir* (φ_n) *de funcţii etajate din* $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ *uniform convergent către* φ.

Spaţiul funcţiilor total $\mathcal{C}$ - măsurabile $\varphi : T \to R$ va fi notat cu $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Orice funcţie din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ este mărginită. Dacă $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(C)$, atunci $\sup(\varphi, \psi) \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ şi $\inf(\varphi, \psi) \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Pentru orice mulţime $A \subset T$ notăm cu $\mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$ spaţiul funcţiilor din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ nule în afara lui A. Dacă $A \in \mathcal{C}_\lambda$, atunci spaţiul $\mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ este dens în $\mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$ pentru topologia convergenţei uniforme definită de norma

$$\|\varphi\| = \sup_{t \in T} |\varphi(t)|.$$

Se observă că dacă $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ şi $A \in \mathcal{C}_\lambda$, atunci $\varphi\varphi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Observaţie. Dacă $\mathcal{C}$ este *trib* şi dacă $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, atunci $\varphi^{-1}(0) \in \mathcal{C}$. Deducem că în acest caz $\mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ este dens în $\mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$ pentru orice mulţime $A \subset T$.

§ 2. CÎMPURI DE VECTORI TOTAL MĂSURABILE

În continuare vom considera o familie $\mathcal{E} = (E(t))_{t \in T}$ de spaţii Banach. Norma unui element x aparţinînd unuia din spaţiile $E(t)$ va fi notată cu $|x|$.

Fie $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ mulţimea cîmpurilor de vectori x definite pe T, astfel încît $x(t) \in E(t)$ pentru orice $t \in T$. Dacă $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, vom nota cu $|x|$ funcţia pozitivă $t \to |x(t)|$. Pentru orice cîmp $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ şi orice mulţime $A \subset T$ vom nota

$$\|x\|_A = \sup_{t \in A} |x(t)| \leqslant \infty$$

şi $\|x\| = \|x\|_T$. Atunci $\|x\|_A = \|x\|\varphi_A$.

Vom presupune că există un spaţiu vectorial $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ de cîmpuri de vectori, care verifică următoarele axiome :

1) $|x|\, \varphi_A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, *pentru orice* $x \in \mathcal{A}$ *şi orice* $A \in \mathcal{C}$;

2) *mulţimea* $\{x(t);\ x \in \mathcal{A}\}$ *este densă în* $E(t)$ *pentru orice* $t \in T$.

Un astfel de spaţiu vectorial se numeşte *familie fundamentală* de cîmpuri de vectori.

Vom presupune de asemenea că $\mathcal{A}$ verifică axioma următoare :

3) *pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{A}$, *orice mulţimi* $A, B \in \mathcal{C}$ *cu* $A \subset B$ *şi orice* $\varepsilon > 0$, *există un cîmp* $y \in \mathcal{A}$ *astfel încît* $\varphi_A x = \varphi_A y$ *şi* $\|y\|_B \leqslant \|x\|_A + \varepsilon$.

Vom nota cu $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ spaţiul cîmpurilor de vectori simple (etajate) de forma

$$x = \sum \varphi_{A_i} x_i \text{ (sumă finită) cu } A_i \in \mathcal{C} \text{ şi } x_i \in \mathcal{A}.$$

Orice cîmp $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ poate fi scris sub forma precedentă cu mulţimile A_i *disjuncte*.

2. DEFINIŢIE. *Spunem că un cîmp de vectori $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ este total $\mathcal{C}$ - măsurabil dacă se anulează în afara unei mulţimi din $\mathcal{C}$ şi dacă există un şir (x_n) de cîmpuri de vectori etajate din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ uniform convergent către x.*

Spaţiul cîmpurilor de vectori total $\mathcal{C}$ - măsurabile va fi notat cu $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$. Avem, evident, $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$. Dacă $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$, atunci $|x| \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Dacă $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ şi $A \in \mathcal{C}_\lambda$, atunci $x\varphi_A \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$.

Pentru orice mulţime $A \subset T$ notăm cu $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ spaţiul cîmpurilor din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ nule în afara lui A şi cu $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ spaţiul cîmpurilor din $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ nule în afara lui A. Pe fiecare din aceste spaţii considerăm topologia convergenţei uniforme, definită de norma $\|x\|$. Pentru această topologie spaţiul $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ este dens în $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ pentru fiecare $A \in \mathcal{C}_\lambda$ (sau pentru fiecare $A \subset T$ dacă $\mathcal{C}$ este trib). Pentru $A \in \mathcal{C}$, spaţiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ este un spaţiu Banach.

Observaţii. Să considerăm cazul $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, unde E este un spaţiu Banach. Atunci un cîmp de vectori x este o funcţie obişnuită $x : T \to E$. În acest caz vom lua $\mathcal{A}$ spaţiul aplicaţiilor constante ale lui T în E şi vom identifica $\mathcal{A}$ cu E. Atunci $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ este spaţiul $\mathcal{S}_E(\mathcal{C})$ al funcţiilor etajate $x : T \to E$ de forma $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ cu $A_i \in \mathcal{C}$ şi $x_i \in E$, şi $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ este spaţiul $\mathcal{M}_E(\mathcal{C})$ al funcţiilor total $\mathcal{C}$-măsurabile, care se anulează în afara unei mulţimi din $\mathcal{C}$ şi sînt limite uniforme de funcţii etajate din $\mathcal{S}_E(\mathcal{C})$.

În particular, dacă $E = R$, avem $\mathcal{S}_R(\mathcal{C}) = \mathcal{S}(\mathcal{C})$ şi $\mathcal{M}_R(\mathcal{C}) = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

§ 3. CÎMPURI DE VECTORI APROAPE TOTAL MĂSURABILE

Fie μ o *măsură aditivă pozitivă* (finită sau infinită) definită pe $\mathcal{C}$. În particular, μ poate fi variaţia unei măsuri aditive vectoriale.

Vom nota cu $\mathcal{N}(\mu)$ clanul ereditar generat de mulţimile $A \in \mathcal{C}_\lambda$ care au proprietatea că $\mu(B) = 0$ pentru orice mulţime $B \in \mathcal{C}$ cu $B \subset A$. Dacă $\mathcal{C}$ este trib şi dacă μ este numărabil aditivă, atunci $\mathcal{N}(\mu)$ este un trib.

Mulţimile din $\mathcal{N}(\mu)$ vor fi numite mulţimi *μ-neglijabile*. Spunem că un cîmp $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ este μ-neglijabil dacă $x(t) = 0$ μ -aproape peste tot (adică în afara unei mulţimi μ-neglijabile).

Pentru orice cîmp $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ vom nota cu $N_\infty(x, \mu)$ sau cu $\|x\|_\infty$, marginea inferioară a numerelor $\alpha \leqslant +\infty$ pentru care $|x(t)| \leqslant \alpha$, μ-aproape peste tot. Se deduc uşor următoarele proprietăţi :

1° $0 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \infty$;

2° $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \, \|x\|_\infty$;

3° $\|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$;

4° $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|$;

5° pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$|x(t)| \leqslant \|x\|_\infty + \varepsilon, \ \mu\text{- aproape peste tot};$$

dacă $\mathcal{N}(\mu)$ este trib, atunci avem

$$|x(t)| \leqslant \|x\|_\infty, \ \mu\text{-aproape peste tot.}$$

6° Dacă $x(t) = y(t)$, μ-aproape peste tot, atunci $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty$. În particular, dacă $x(t) = 0$ μ-aproape peste tot, atunci $\|x\|_\infty = 0$; reciproc, dacă $\mathcal{N}(\mu)$ este trib şi dacă $\|x\|_\infty = 0$, atunci $x(t) = 0$ μ-aproape peste tot.

Vom însemna cu $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$ spaţiul cîmpurilor de vectori care sînt egale μ - aproape peste tot cu cîmpuri din $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$; pentru fiecare mulţime $A \subset T$ vom nota cu $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu, A)$ subspaţiul cîmpurilor din $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$ care se anulează μ-aproape peste tot în afara lui A. Cîmpurile din $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$ vor fi numite *cîmpuri aproape total μ-măsurabile.*

Se verifică uşor că $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$ este un spaţiu vectorial şi că $\|x\|_\infty$ este o seminormă pe $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$. Pentru fiecare mulţime $A \in \mathcal{C}_\lambda$, spaţiul $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ este dens în $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu, A)$ pentru seminorma $\|x\|_\infty$.

Dacă $\mathcal{N}(\mu)$ este trib, atunci $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu, A)$ este complet.

Dacă μ este numărabil aditivă, dacă $\mathcal{C}$ este un trib care conţine pe T şi dacă $E(t) = R$ pentru orice $t \in T$, atunci $\mathcal{M}^\infty_R(\mu) = \mathcal{L}^\infty_R(\mu)$.

Dacă μ este variaţia unei măsuri aditive vectoriale m, vom scrie $\mathcal{N}(m)$ şi $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(m)$ în loc de $\mathcal{N}(\mu)$ şi $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$ şi vom spune ,,m-neglijabil sau m-aproape peste tot'' în loc de ,,μ-neglijabil sau μ -aproape peste tot''.

§ 4. FUNCŢII DE MULŢIME

Pentru fiecare mulţime $A \in \mathcal{C}$, aplicaţia $x \to \|x\|_A$ este o seminormă pe $\mathcal{A}$. Dacă $A \subset B$, atunci $\|x\|_A \leqslant \|x\|_B$.

Vom nota cu $\mathcal{A}_A$ spaţiul $\mathcal{A}$ dotat cu topologia convergenţei uniforme pe A, definită de seminorma $\|x\|_A$.

Fie F un spaţiu Banach. Pentru fiecare mulţime $A \in \mathcal{C}$ vom nota $\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_A, F)$ spaţiul Banach al aplicaţiilor liniare şi continue $U : \mathcal{A}_A \to F$ dotat cu norma

$$| U |_A = \sup_{\|x\|_A \leqslant 1} | Ux |$$

Dacă $A \subset B$, atunci $\mathcal{L}\,(\mathcal{A}_A, F) \subset \mathcal{L}\,(\mathcal{A}_B, F)$ şi $| U |_A \geqslant | U |_B$. Cînd vom scrie $\mathcal{A}$, vom înţelege că $\mathcal{A}$ este dotat cu topologia de spaţiu local convex definită de familia de seminorme $(\| x \|_A)_{A \in \mathcal{C}}$. Atunci $\mathcal{L}\,(\mathcal{A}, F)$ este spaţiul aplicaţiilor liniare şi continue $U : \mathcal{A} \to F$. Avem $\mathcal{L}\,(\mathcal{A}, F) = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} \mathcal{L}\,(\mathcal{A}_A, F)$

În cazul cînd $E\,(t) = E$ pentru orice $t \in T$, toate normele $| U |_A$ sînt egale.

3. Definiţie. *O aplicaţie* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}\,(\mathcal{A}, F)$ *va fi numită funcţie de mulţime dacă* $m\,(\emptyset) = 0$ *şi dacă verifică axioma următoare*

(i) $m\,(A)\,x = m\,(A)\,y$, *pentru orice* $A \in \mathcal{C}$ *şi orice* $x, y \in \mathcal{A}$ *cu* $\varphi_A\, x = \varphi_A\, y$.

În particular, $m\,(A)\,x = 0$ dacă $\varphi_A\, x = 0$.

Dacă $E\,(t) = E$ pentru orice $t \in T$, axioma (i) este verificată de orice funcţie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}\,(E, F)$.

4. Propoziţie. *Fie* $U \in \mathcal{L}\,(\mathcal{A}, F)$ *şi fie* $A \in \mathcal{C}$ *astfel încît să avem :*

(i) $Ux = Uy$, *pentru orice* $x, y \in \mathcal{A}$ *cu* $\varphi_A\, x = \varphi_A\, y$. *Atunci* $U \in \mathcal{L}\,(\mathcal{A}_A, F)$ *şi*

$$| U |_A = | U |_B \textit{ pentru orice } B \in \mathcal{C} \textit{ cu } A \subset B.$$

Fie $B \in \mathcal{C}$ cu $A \subset B$ şi să arătăm că $| U |_A = | U |_B$. Avem întîi $| U |_A \geqslant | U |_B$. Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $\varepsilon > 0$ şi $x \in \mathcal{A}$ cu $\| x \|_A \leqslant 1$. Din axioma 3) urmează că există $y \in A$ cu $\varphi_A\, x = \varphi_A\, y$ şi $\| y \|_B \leqslant \| x \|_A + \varepsilon \leqslant 1 + \varepsilon$. Atunci

$$| Ux | = | Uy | = (1 + \varepsilon) \left| U \frac{y}{1 + \varepsilon} \right| \leqslant (1 + \varepsilon)\, | U |_B,$$

deci $| U |_A \leqslant (1 + \varepsilon)\, | U |_B$, de unde, ε fiind arbitrar

$$| U |_A \leqslant | U |_B.$$

Deoarece $U \in \mathcal{L}\,(\mathcal{A}, F)$, există $C \in \mathcal{C}$ cu $| U |_C < \infty$. Atunci

$$| U |_A = | U |_{A \cup C} \leqslant | U |_C < \infty$$

deci $U \in \mathcal{L}\,(\mathcal{A}_A, F)$.

Observaţie. Pentru o operaţie $U \in \mathcal{L}\,(\mathcal{A}, F)$ verificînd condiţiile propoziţiei precedente vom scrie $| U | = | U |_A$.

5. Corolar. *Dacă* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}\,(\mathcal{A}, F)$ *este o funcţie de mulţime, atunci :*

a) *pentru orice mulţime* $A \in \mathcal{C}$ *avem* $m\,(A) \in \mathcal{L}\,(\mathcal{A}_A, F)$;

b) *pentru orice mulţimi* $A, B \in \mathcal{C}$ *cu* $A \subset B$ *avem* $| m\,(A) |_A = | m\,(A) |_B$.

Observație. În cele ce urmează vom scrie $|m(A)|$ în loc de $|m(A)|_A$. Dacă (A_n) este un șir din $\mathcal{C}$ cu reuniunea $A_0 \in \mathcal{C}$, normele $|m(A_n)|$ vor fi calculate în raport cu o mulțime arbitrară $B \in \mathcal{C}$ cu $A_0 \subset B$. De exemplu, egalitatea

$$m(A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

înseamnă că seria este convergentă în $\mathcal{L}(\mathcal{A}_B, F)$ și suma ei este $m(A_0)$.

O funcție de mulțime $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ va fi numită *măsură aditivă* dacă este aditivă :

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

pentru orice mulțimi disjuncte A, $B \in \mathcal{C}$.

Funcția de mulțime m va fi numită *măsură numărabil aditivă*, sau *măsură*, dacă este numărabil aditivă :

$$m(\bigcup A_n) = \sum m(A_n)$$

pentru orice șir (A_n) de mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ cu reuniunea în $\mathcal{C}$.

§ 5. VARIAȚIA ȘI SEMIVARIAȚIA FUNCȚIILOR DE MULȚIME

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o funcție de mulțime.

6. DEFINIȚIE. *Se numește semivariația lui m, funcția de mulțime $\widetilde{m}$ definită pentru orice parte $A \subset T$ prin egalitatea :*

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left| \sum m(A_i)\, x_i \right|,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate familiile finite $(A_i)_{i \in I}$ de mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ conținute în A și pentru toate familiile finite $(x_i)_{i \in I}$ de cîmpuri din $\mathcal{A}$ astfel încît $\|x_i\|_{A_i} \leqslant 1$ pentru orice $i \in I$.

Semivariația $\widetilde{m}$ a lui m are următoarele proprietăți :

1) $0 \leqslant \widetilde{m}(A) \leqslant \infty$;

2) $\widetilde{m}(A) \leqslant \widetilde{m}(B)$, dacă $A \subset B$;

3) $\widetilde{m}(A) = 0$ dacă și numai dacă $m(B) = 0$ pentru orice $B \in \mathcal{C}$ cu $B \subset A$;

4) $|m(A)| \leqslant \widetilde{m}(A)$, pentru $A \in \mathcal{C}$;

5) Dacă m este aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci $\widetilde{m}$ este subaditivă pe $\mathcal{C}_\lambda$;

6) Dacă m este numărabil aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci

$$\widetilde{m}(\bigcup A_n) \leqslant \sum \widetilde{m}(A_n)$$

pentru orice șir (A_n) de mulțimi din $\mathcal{C}_\lambda$.

Spunem că m are *semivariație finită* dacă

$$\widetilde{m}(A) < \infty, \text{ pentru orice } A \in \mathcal{C}$$

și că m are *semivariație mărginită* dacă $\widetilde{m}(T) < \infty$.

Observăm că semivariaţia $\tilde{m}$ depinde în mod esenţial de spaţiile $\mathcal{A}$ şi F. Cînd va fi nevoie să punem în evidenţă această dependenţă, vom scrie $\tilde{m}_{\mathcal{A},F}$ în loc de $\tilde{m}$.

Dacă punem $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$, avem $X = \mathcal{L}(R, X)$. Atunci

7) $\tilde{m}_{R,X} \leqslant \tilde{m}_{\mathcal{A},F}$.

Dacă, în plus, X este un spaţiu normat, avem $X \subset \mathcal{L}(X', R)$. În acest caz avem

7′) $\tilde{m}_{\mathcal{A},F} \leqslant \tilde{m}_{X',R}$.

Dacă $\mathcal{A}$ şi F sînt spaţii vectoriale complexe, se poate lua C în loc de R în ultimele două proprietăţi.

7. Definiţie. *Se numeşte variaţia lui m, funcţia de mulţime $\overline{m}$ definită pentru orice parte $A \subset T$ prin egalitatea*

$$\overline{m}(A) = sup \sum | m(A_i) |,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate familiile finite (A_i) de părţi disjuncte din $\mathcal{C}$ conţinute în A.

Variaţia $\overline{m}$ a lui $\overline{m}$ are următoarele proprietăţi:

1) $0 \leqslant \overline{m}(A) \leqslant \infty$;

2) $\overline{m}(A) \leqslant \overline{m}(B)$, dacă $A \subset B$;

3) $\overline{m}(A) = 0$ dacă şi numai dacă $m(B) = 0$ pentru orice $B \in \mathcal{C}$ cu $B \subset A$ (deci dacă şi numai dacă $\tilde{m}(A) = 0$);

4) $| m(A) | \leqslant \overline{m}(A)$, pentru orice $A \in \mathcal{C}$;

4′) $\tilde{m}(A) \leqslant \overline{m}(A)$, pentru orice $A \subset T$;

5) Dacă m este aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci $\overline{m}$ este aditivă pe $\mathcal{C}_\lambda$.

6) Dacă m este numărabil aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci

$$\overline{m}(\bigcup A_n) = \sum \overline{m}(A_n)$$

pentru orice şir (A_n) de părţi disjuncte din $\mathcal{C}_\lambda$.

Spunem că m are *variaţie finită* dacă

$$\overline{m}(A) < \infty, \text{ pentru orice } A \in \mathcal{C}$$

şi că m are *variaţie mărginită* dacă $\overline{m}(T) < \infty$.

Dacă m are variaţie finită, vom nota cu $| m |$ restricţia lui m la $\mathcal{C}$, iar $| m |$ va fi numită tot variaţia lui m.

Observăm că dacă m este o măsură aditivă cu variaţie finită, atunci $| m |$ este o măsură aditivă pozitivă şi finită pe $\mathcal{C}$. Dacă, în plus, m este o măsură numărabil aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci $| m |$ este o măsură pozitivă numărabil aditivă pe $\mathcal{C}$.

Observăm de asemenea că variaţia $\overline{m}$ nu depinde de spaţiile $\mathcal{A}$ şi F, ci depinde numai de spaţiul $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

8. Propoziţie. *Dacă $F = C$, atunci $\tilde{m} = \overline{m}$.*

Fie $A \subset T$. Trebuie arătat doar că $\overline{m}(A) \leqslant \tilde{m}(A)$, deoarece inegalitatea contrară este specificată în proprietatea 4′). Pentru aceasta fie

$(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o familie finită de părți disjuncte din $\mathcal{C}$ conținute în A și fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există $x_i \in \mathcal{A}$ cu

$$\|x_i\|_{A_i} \leqslant 1 \text{ și } |m(A_i)| \leqslant m(A_i)\, x_i + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} |m(A_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(A_i)\, x_i + \varepsilon \leqslant \widetilde{m}(A) + \varepsilon$$

deci

$$\overline{m}(A) \leqslant \widetilde{m}(A) + \varepsilon.$$

Deoarece ε este arbitrar, deducem $\overline{m}(A) \leqslant \widetilde{m}(A)$ și deci

$$\overline{m}(A) = \widetilde{m}(A).$$

Observăm că în definiția 7, marginea superioară se ia pentru toate familiile (A_i) cu $\sum\varphi_{A_i} \leqslant \varphi_A$ iar în definiția 6, marginea superioară se ia pentru toate funcțiile $\sum\varphi_{A_i}\, |x_i| \leqslant \varphi_A$ cu A_i disjuncte și $x_i \in \mathcal{A}$. Putem acum unifica cele două definiții, și putem înlătura condiția ca A_i să fie disjuncte.

9. PROPOZIȚIE. *Dacă* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *este aditivă, atunci pentru orice mulțime* $A \subset T$ *avem*

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left|\sum m(A_i)\, x_i\right| \quad \text{(sume finite)}$$

și

$$\overline{m}(A) = \sup \sum |m(A_i)\, x_i| \quad \text{(sume finite)}$$

pentru $\sum \varphi_{A_i}\, |x_i| \leqslant \varphi_A$, *unde* $x_i \in \mathcal{A}$ *iar* A_i *sînt mulțimi (disjuncte, respectiv arbitrare) din* $\mathcal{C}$.

Fie $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ o familie finită de mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ conținute în A și fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există $x_i \in \mathcal{A}$ cu $\|x_i\|_{A_i} \leqslant 1$ și $|m(A_i)| \leqslant |m(A_i)\, x_i| + \frac{\varepsilon}{n}\cdot$ Atunci $\sum \varphi_{A_i}\, |x_i| \leqslant \varphi_A$ și

$$\sum |m(A_i)| \leqslant \sum |m(A_i)\, x_i| + \varepsilon.$$

Pe de altă parte, dacă $\sum\varphi_{A_i}\, |x_i| \leqslant \varphi_A$ cu A_i disjuncte, atunci $\|x_i\|_{A_i} \leqslant 1$ deci

$$\sum |m(A_i)\, x_i| \leqslant \sum |m(A_i)|.$$

Din cele două inegalități obținute, rezultă egalitatea din enunț pentru $\overline{m}$ în cazul mulțimilor A_i disjuncte. După cum am remarcat mai sus, această egalitate pentru $\widetilde{m}$ în cazul mulțimilor disjuncte rezultă din definiția 6.

Să arătăm acum că putem înlătura condiția ca A_i să fie disjuncte. Fie $\sum \varphi_{A_i}\, |x_i| \leqslant \varphi_{A_i}$ cu A_i mulțimi arbitrare din $\mathcal{C}$ și $x_i \in A$. Putem găsi o familie finită (B_j) de mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ astfel ca fiecare A_i să fie reuniunea unui anumit număr de mulțimi B_j. Dacă pentru fiecare j punem

$$y_j = \sum_{B_j \subset A_i} x_i$$

atunci $y_j \in \mathcal{A}$ şi

$$\sum_i \varphi_{A_i} x_i = \sum_j \varphi_{B_j} y_j .$$

Atunci

$$\sum_j \varphi_{B_j} | y_j | = | \sum \varphi_{B_j} y_j | = | \sum \varphi_{A_i} x_i | \leqslant \sum \varphi_{A_i} | x_i | \leqslant \varphi_A$$

şi

$$\sum m (A_i) x_i = \sum m (B_j) y_j$$

deci egalitatea din enunț rezultă pentru $\widetilde{m}$ în cazul mulțimilor arbitrare.

Avem de asemenea

$$\sum_i | m (A_i) x_i | = \sum_i | \sum_{B_j \subset A_i} m (B_j) y_j | \leqslant \sum | m (B_j) y_j) |$$

şi deci egalitate din enunț rezultă şi pentru $\overline{m}$ în cazul mulțimilor A_i arbitrare.

Pentru fiecare $z \in F'$ să definim funcția de mulțime $m_z : \mathcal{C} \to \mathcal{L} (\mathcal{A}, C)$ prin egalitatea

$$m_z (A) x = < m (A) x, z >, \quad \text{pentru } A \in \mathcal{C} \text{ şi } x \in \mathcal{A}.$$

Dacă m este aditivă sau numărabil aditivă, atunci pentru fiecare z, m_z este aditivă respectiv numărabil aditivă. În plus, datorită propoziției 8 avem $\widetilde{m}_z = \overline{m}_z$ pentru fiecare $z \in F'$.

10. PROPOZIȚIE. *Pentru orice mulțime $A \subset T$ avem*

$$\widetilde{m} (A) = \sup_{|z| \leqslant 1} \overline{m}_z (A).$$

Fie $A \subset T$. Dacă $\sum \varphi_{A_i} | x_i | \leqslant \varphi_A$ cu $A_i \in \mathcal{C}$ şi $x_i \in \mathcal{A}$, avem

$$| \sum m (A_i) x_i | = \sup_{|z| \leqslant 1} | < \sum m (A_i) x_i , z > | =$$

$$= \sup_{|z| \leqslant 1} | \sum m_z (A_i) x_i | \leqslant \sup_{|z| \leqslant 1} \widetilde{m}_z (A) = \sup_{|z| \leqslant 1} \overline{m}_z (A)$$

deci

$$\widetilde{m} (A) \leqslant \sup_{|z| \leqslant 1} \overline{m}_z (A).$$

Pe de altă parte, dacă $\Sigma \varphi_{A_i} | x_i | \leqslant \varphi_A$ cu $A_i \in \mathcal{C}$ şi $x_i \in \mathcal{A}$, atunci

$$| \sum m_z (A_i) x_i | = | < \sum m (A_i) x_i , z > | \leqslant | \sum m (A_i) x_i | \leqslant \widetilde{m} (A)$$

deci

$$\overline{m}_z(A) = \widetilde{m}_z(A) \leqslant \widetilde{m}(A)$$

de unde

$$\sup_{|z|\leqslant 1} \overline{m}_z(A) \leqslant \widetilde{m}(A).$$

§ 6. INTEGRAREA CÎMPURILOR DE VECTORI ETAJATE

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *o măsură aditivă.*

Se poate arăta ușor că dacă $\sum \varphi_{A_i} x_i$ este un cîmp etajat cu $\sum \varphi_{A_i} x_i = 0$, atunci $\sum m(A_i) x_i = 0$.

11. Definiție. *Pentru orice cîmp de vectori etajat*

$$x = \sum \varphi_{A_i} x_i, \quad cu \quad A_i \in \mathcal{C} \quad și \quad x_i \in \mathcal{A}$$

se definește integrala $\int x \mathrm{d}m$ *prin egalitatea*

$$\int x \,\mathrm{d}m = \sum m(A_i) x_i .$$

Din observația precedentă deducem că definiția integralei $\int x \mathrm{d}m$ depinde numai de x.

Aplicația $x \to \int x \,\mathrm{d}m$ a spațiului $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ în F este liniară. Dacă $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ și $A \in \mathcal{C}_\lambda$, atunci $\varphi_A x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$; de asemenea, dacă $x \in \mathcal{A}$ și $A \in \mathcal{C}$, atunci $\varphi_A x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$. În aceste cazuri vom scrie

$$\int_A x \,\mathrm{d}m = \int \varphi_A x \,\mathrm{d}m.$$

12. Propoziție. *Pentru orice mulțime* $A \subset T$ *avem*

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left| \int x \,\mathrm{d}m \right| \leqslant \infty$$

pentru $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *cu* $\|x\| \leqslant 1$.

În adevăr, fiecare asemenea cîmp de vectori $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ cu $|x| \leqslant \varphi_A$ poate fi scris sub forma $x = \sum \varphi_{B_j} y_j$ cu B_j mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ conținute în A și în acest caz $\|y_j\|_{B_j} \leqslant 1$ pentru fiecare j.

13. Corolar. *Pentru orice mulțime* $A \subset T$ *și pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *avem*

$$\left| \int x \,\mathrm{d}m \right| \leqslant \|x\| \, \widetilde{m}(A).$$

În adevăr, pentru cîmpul $y = \dfrac{x}{\|x\|}$ avem $|y| \leqslant \varphi_A$.

14. COROLAR. *Dacă* x, $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ *sînt egale m-aproape peste tot, atunci*

$$\int x \, \mathrm{d}m = \int y \, \mathrm{d}m.$$

Este suficient să presupunem că $x(t) = 0$ m-aproape peste tot și să arătăm că $\int x \, \mathrm{d}m = 0$.

Dacă x este m-neglijabil, există o mulțime $N \in \mathcal{N}(m)$ astfel încît $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, N)$, deci

$$\left|\int x \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \|x\| \, \widetilde{m}(N) = 0.$$

15. PROPOZIȚIE. *Pentru orice mulțime* $A \subset T$ *avem*

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left|\int x \, \mathrm{d}m\right|$$

pentru $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu $\|x\|_\infty = N_\infty(x, m) \leqslant 1$.

Să notăm cu $\mathcal{D}$ mulțimea cîmpurilor x din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu $\|x\|_\infty \leqslant 1$. Fie $x = \sum \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{D}$ și fie $\varepsilon > 0$. Avem $|x(t)| \leqslant 1 + \varepsilon$, m-aproape peste tot, deci putem găsi o mulțime m-neglijabilă $N \in \mathcal{C}_\lambda$ astfel ca $|x(t)| \leqslant 1 + \varepsilon$ în afara lui N. Dacă pentru orice i punem $B_i = A_i - N$, avem

$$y = \sum \varphi_{B_i} x_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A) \text{ și } \|y\| \leqslant 1 + \varepsilon,$$

deci

$$\left|\int x \, \mathrm{d}m\right| = \left|\int y \, \mathrm{d}m\right| \leqslant (1 + \varepsilon) \, \widetilde{m}(A).$$

Urmează că

$$\sup \left|\int x \, \mathrm{d}m\right| \leqslant (1 + \varepsilon) \, \widetilde{m}(A), \text{ pentru } x \in \mathcal{D}$$

deci, ε fiind arbitrar,

$$\sup \left|\int x \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \widetilde{m}(A), \text{ pentru } x \in \mathcal{D}.$$

Inegalitatea contrarie rezultă din relația $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|$.

16. COROLAR. *Pentru orice mulţime* $A \subset T$ *şi pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *avem*

$$\left|\int x\,\mathrm{d}m\right| \leqslant \|x\|_\infty \widetilde{m}(A) \leqslant \|x\|\,\widetilde{m}(A) \leqslant \infty$$

§ 7. INTEGRAREA CÎMPURILOR DE VECTORI TOTAL MĂSURABILE

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o *măsură aditivă* cu *semivariaţie finită* $\widetilde{m}$. În acest caz definiţia integralei se poate extinde la cîmpurile de vectori total măsurabile.

17. PROPOZIŢIE. *Fie* $A \in \mathcal{C}$. *Dacă* (x_n) *este un şir uniform convergent din* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$, *atunci şirul integralelor* $\left(\int x_n\,\mathrm{d}m\right)$ *este un şir Cauchy în* F.

Dacă (x_n) *şi* (y_n) *sînt două şiruri din* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *uniform convergente către aceeaşi limită, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int x_n\,dm = \lim_{n\to\infty} \int y_n\,\mathrm{d}m.$$

În adevăr, pentru orice indici n şi m avem

$$\left|\int x_n\,dm - \int x_m\,\mathrm{d}m\right| = \left|\int (x_n - x_m)\,\mathrm{d}m\right| \leqslant \|x_n - x_m\|\,\widetilde{m}(A) < \infty$$

şi deci $\left(\int x_n\,dm\right)$ este un şir Cauchy în F.

Dacă (x_n) şi (y_n) converg uniform către aceeaşi limită, atunci $(x_n - y_n)$ converge uniform către 0 şi

$$\left|\int x_n\,dm - \int y_n\,dm\right| = \left|\int (x_n - y_n)\,dm\right| \leqslant \|x_n - y_n\|\,\widetilde{m}(A)$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int x_n\,dm - \int y_n\,dm\right| = 0$$

de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int x_n\,dm = \lim_{n\to\infty} \int y_n\,dm.$$

Această propoziţie ne conduce la următoarea

18. DEFINIŢIE. *Pentru orice cîmp de vectori total* $\mathcal{C}$*-măsurabil* $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ *se defineşte integrala* $\int x\,\mathrm{d}\,m$ *prin egalitatea*

$$\int x\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int x_n\,\mathrm{d}m,$$

unde (x_n) *este un şir oarecare de cîmpuri etajate din* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ *uniform convergent către* x.

Din propoziţia 6 rezultă că integrala $\int x \, dm$ depinde numai de x.

Aplicaţia $x \to \int x \, dm$ a spaţiului $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ în F este liniară.

19. PROPOZIŢIE. *Dacă* $x, y \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ *sînt egale* m*-aproape peste tot, atunci*

$$\int x \, dm = \int y \, dm.$$

În adevăr, fie $A \in \mathcal{C}$ o mulţime astfel încît $x, y \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ şi fie $N \subset A$ o mulţime m-neglijabilă din $\mathcal{C}$ astfel încît să avem $x(t) = y(t)$ pentru $t \notin N$. Fie (x_n) un şir din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ uniform convergent către x. Dacă punem $z = \varphi_{A-N} x$ şi $z_n = \varphi_{A-N} x_n$, atunci $z_n \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A - N)$ şi (z_n) converge către z, deci

$$\int x \, dm = \lim_{n \to \infty} \int x_n \, dm = \lim_{n \to \infty} \int z_n \, dm = \int z \, dm.$$

Se arată în acelaşi mod că

$$\int y \, dm = \int z \, dm$$

de unde rezultă

$$\int x \, dm = \int y \, dm.$$

Această propoziţie permite extinderea integralei la clasa cîmpurilor aproape total m-măsurabile.

20. DEFINIŢIE. *Pentru orice cîmp de vectori* $x \in \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(m)$ *se defineşte integrala* $\int x \, dm$ *prin egalitatea*

$$\int x \, dm = \int y \, dm,$$

unde y *este un cîmp oarecare din* $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ *egal* m*-aproape peste tot cu* x.

Din propoziţia 7 rezultă că integrala $\int x \, dm$ depinde numai de x.

Aplicaţia $x \to \int x \, dm$ a spaţiului $\mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(m)$ în F este liniară.

Corolarul 16 rămîne valabil pentru cîmpuri din $\mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(m)$ cu restricţia $A \in \mathcal{C}_{\lambda}$. Dacă $\mathcal{C}$ este trib, această restricţie nu este necesară.

21. PROPOZIŢIE. *Pentru orice mulţime* $A \in \mathcal{C}_\lambda$ *şi orice cîmp* $x \in \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(m, A)$

avem

$$\left|\int x \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \|x\|_\infty \, \widetilde{m}(A) \leqslant \|x\| \, \overline{m}(A) \leqslant \infty .$$

Fie y un cîmp din $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ egal m-aproape peste tot cu x. Să presupunem că x se anulează în afara unei mulţimi $B \in \mathcal{C}$ şi putem lua $B \subset A$. Fie (y_n) un şir de cîmpuri etajate din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, B)$ uniform convergent către y. Pentru fiecare n avem

$$\left|\int y_n \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \|y_n\|_\infty \, \widetilde{m}(B) < \infty$$

şi trecînd la limită obţinem

$$\left|\int y \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \|y\|_\infty \, \widetilde{m}(B)$$

de unde

$$\left|\int x \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \|x\|_\infty \, \widetilde{m}(A) .$$

Observaţie. Dacă $E(t) = R$ pentru orice $t \in T$ şi dacă $F = R$, definiţia 20 conţine definiţia integralei funcţiilor reale din $\mathcal{M}^\infty(\mu)$ în raport cu o măsură pozitivă şi aditivă $\mu : \mathcal{C} \to R$.

Măsura μ poate fi, de exemplu, variaţia $|m|$ a unei măsuri aditive vectoriale cu variaţie finită.

22. PROPOZIŢIE. *Fie* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *o măsură aditivă cu variaţie finită* $|m|$. *Pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(m)$ *avem*

$$\left|\int x \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \int |x| \, \mathrm{d}\, |m| .$$

Să presupunem întîi că $x = \varphi_A \, y$ cu $A \in \mathcal{C}$ şi $y \in \mathcal{A}$. Fie $\varepsilon > 0$ şi să luăm $\eta > 0$ astfel încît $2\eta \, |m|(A) < \varepsilon$. Deoarece $|x| \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, există o funcţie etajată pozitivă

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} \, \alpha_i$$

cu A_i mulţimi disjuncte din $\mathcal{C}$ cu reuniunea egală cu A, astfel încît să avem

$$\big| \, |x(t)| - \varphi(t) \big| < \eta, \text{ pentru orice } t \in T.$$

Atunci

$$\varphi(t) \leqslant |x(t)| + \eta, \text{ pentru orice } t \in T.$$

Urmează că pentru fiecare i avem

$$|y(t)| \leqslant \alpha_i + \eta, \text{ pentru } t \in A_i$$

deci

$$\|y\|_{A_i} \leqslant \alpha_i + \eta.$$

Deducem că

$$\left|\int x \,\mathrm{d}m\right| = |m(A)\,y| = \left|\sum_{i=1}^{n} m(A_i)\,y\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |m(A_i)|\,\|y\|_{A_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |m|(A_i)\,\alpha_i + \eta \sum_{i=1}^{n} |m|(A_i) \leqslant$$

$$\leqslant \int \varphi \,\mathrm{d}|m| + \eta\,|m|(A) \leqslant \int |x|\,\mathrm{d}|m| + 2\eta\,|m|(A) \leqslant \int |x|\,\mathrm{d}|m| + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, rezultă

$$\left|\int x \,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int |x|\,\mathrm{d}|m|.$$

Dacă acum

$$x = \Sigma\, \varphi_{B_i}\, y_i \text{ (sumă finită)}$$

cu B_i mulţimi disjuncte din $\mathcal{C}$ şi $y_i \in \mathcal{A}$, atunci

$$|x| = \Sigma\, \varphi_{B_i}\, |y_i|$$

şi

$$\left|\int x \,\mathrm{d}m\right| \leqslant \Sigma \left|\int \varphi_{B_i}\, y_i \,\mathrm{d}m\right| \leqslant \Sigma \int \varphi_{B_i}\, |y_i|\,\mathrm{d}|m| =$$

$$= \int \Sigma\, \varphi_{Bi}\, |y_i|\,\mathrm{d}|m| = \int |x|\,\mathrm{d}|m|.$$

Trecînd la limită, această inegalitate rămîne adevărată, întîi pentru cîmpuri din $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ şi apoi pentru cîmpuri din $\mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(m)$.

Observaţie. Luînd $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, unde E este un spaţiu Banach, situaţia precedentă conţine integrarea funcţiilor $x : T \to E$ în raport cu o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(E, F)$.

§ 8. INTEGRAREA FUNCŢIILOR SCALARE TOTAL MĂSURABILE

Dacă $\|x\| < \infty$ pentru orice $x \in \mathcal{A}$, în particular dacă $T \in \mathcal{C}$ sau dacă $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, atunci $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ este un spaţiu Banach şi considerînd $X = \mathcal{L}(R, X)$, putem deduce, din definiţia 20, definiţia integralei $\int \varphi \, \mathrm{d}m$ a funcţiilor scalare φ în raport cu m, luînd $E(t) = R$ pentru orice $t \in T$ şi $F = X$.

Dacă însă X nu este un spaţiu Banach, trebuie să definim în mod corespunzător integrala funcţiilor scalare.

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o *măsură aditivă* cu *semivariaţie finită* $\widetilde{m}$.

Pentru orice funcţie scalară $\mathcal{C}$-etajată

$$\varphi = \Sigma \varphi_{A_i} \alpha_i, \text{ cu } A_i \in \mathcal{C} \text{ şi } \alpha_i \text{ scalari,}$$

se defineşte

$$\int \varphi \, \mathrm{d}m = \sum m(A_i) \alpha_i .$$

Definiţia integralei $\int \varphi \, \mathrm{d}m$ depinde numai de φ. Integrala $\int \varphi \, \mathrm{d}m$ aparţine spaţiului $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

Dacă φ se anulează în afara unei mulţimi $A \in \mathcal{C}$, atunci, presupunînd mulţimile A_i disjuncte, avem $A_i \subset A$ pentru fiecare i, deci $m(A_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$ pentru fiecare i, deci $\int \varphi \, \mathrm{d}m \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$.

Se deduce ca în corolarul 16 că avem

$$\left| \int \varphi \, \mathrm{d}m \right|_A \leqslant \|\varphi\|_\infty \widetilde{m}_{R, X}(A) \leqslant \|\varphi\|_\infty \widetilde{m}(A) < \infty$$

unde $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

Dacă acum φ este o funcţie din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ nulă în afara unei mulţimi $A \in \mathcal{C}$ şi dacă (φ_n) este un şir de funcţii etajate din $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ uniform convergent către φ, şi nule în afara lui A, atunci $\left(\int \varphi_n \, \mathrm{d}m \right)$ este un şir Cauchy în apaţiul Banach $\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$

Se defineşte atunci

$$\int \varphi \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}m$$

şi această limită depinde numai de φ.

Dacă φ şi ψ sînt două funcţii din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ egale aproape peste tot, atunci

$$\int \varphi \, \mathrm{d}m = \int \psi \, \mathrm{d}m$$

Putem atunci defini integrala $\int \varphi\, \mathrm{d}m$ pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{M}^\infty(\mathcal{C})$ prin egalitatea

$$\int \varphi\, \mathrm{d}m = \int \psi\, \mathrm{d}m,$$

unde ψ este o funcţie oarecare din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ egală m-aproape peste tot cu φ.

23. Propoziţie. *Pentru orice funcție* $\varphi \in \mathcal{M}^\infty(m)$ *și pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{A}$ avem $\varphi x \in \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(m)$ *și*

$$\int \varphi x\, \mathrm{d}m = \int \varphi\, \mathrm{d}m \cdot x.$$

În adevăr, această egalitate este verficată întîi pentru funcţii etajate φ din $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ şi apoi prin trecere la limită pentru orice funcţie φ din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ şi din $\mathcal{M}^\infty(m)$.

24. Propoziţie. *Dacă* $A \in \mathcal{C}$ *și dacă* $\varphi \in \mathcal{M}^\infty(m, A)$, *atunci* $\int \varphi\, \mathrm{d}m \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$.

Pentru orice mulțime $B \in \mathcal{C}$ *cu* $A \subset B$ *avem*

$$\left| \int \varphi\, \mathrm{d}m \right|_A = \left| \int \varphi\, \mathrm{d}m \right|_B .$$

În adevăr, pentru orice cîmpuri $x, y \in \mathcal{A}$ cu $\varphi_A\, x = \varphi_A\, y$ avem $\varphi x = \varphi y$ şi deci (propoziţia 23)

$$\int \varphi\, \mathrm{d}m \cdot x = \int \varphi x\, \mathrm{d}m = \int \varphi y\, \mathrm{d}m = \int \varphi\, \mathrm{d}m \cdot y$$

Se aplică apoi propoziţia 4.

În continuare vom scrie $\left| \int \varphi\, \mathrm{d}m \right|$ în loc de $\left| \int \varphi\, \mathrm{d}m \right|_A$ pentru funcţiile $\varphi \in \mathcal{M}^\infty(m, A)$.

Cu această convenţie se poate demonstra următoarea

25. Propoziţie. *Pentru orice mulțime* $A \in \mathcal{C}_\lambda$ *și pentru orice funcție* $\varphi \in \mathcal{M}^\infty(m, A)$ *avem*

$$\left| \int \varphi\, \mathrm{d}m \right| \leqslant \|\varphi\|\, \widetilde{m}_{R,\, X}(A) \leqslant \|\varphi\|\, \widetilde{m}(A),$$

şi de asemenea următoarea

26. Propoziţie. *Dacă* m *are variație finită* $|m|$, *atunci pentru orice funcție* $\varphi \in \mathcal{M}^\infty(m)$ *avem*

$$\left| \int \varphi\, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |\varphi|\, \mathrm{d}|m|.$$

CAPITOLUL II

REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERAȚIILOR LINIARE PE SPAȚII DE CÎMPURI TOTAL MĂSURABILE

§ 1. OPERAȚII PE SPAȚIUL $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$

Fie $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ o operație liniară. Pentru orice mulțime $A \subset T$ notăm cu U_A restricția lui U la spațiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$.

1. Definiție. *Pentru fiecare mulțime* $A \subset T$ *notăm*

$$\| U_A \| = \sup \mid U(x) \mid$$

și

$$||| U_A ||| = \sup \sum \mid U(\varphi_{A_i} x_i) \mid,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate cîmpurile de vectori $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ *din* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *cu* A_i *mulțimi disjuncte din* $\mathcal{C}$ *și* $\| x \| \leqslant 1$.

Deoarece pentru $A \in \mathcal{C}_\lambda$ spațiul $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ este dens în $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$, deducem că pentru $A \in \mathcal{C}_\lambda$, $\| U_A \|$ este norma obișnuită a lui U_A pe $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$.

Dacă $\mathcal{C}$ este trib, această observație este valabilă pentru orice mulțime $A \subset T$.

Din definiție rezultă imediat următoarea inegalitate:

$$\| U_A \| \leqslant ||| U_A ||| \leqslant \infty .$$

Pentru funcționale avem chiar egalitate.

2. Propoziție. *Dacă* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to C$ *este o funcțională liniară, atunci*

$$\| U_A \| = ||| U_A ||| \leqslant \infty, \textit{ pentru orice mulțime } A \subset T.$$

Fie $A \subset T$ și fie $x = \sum \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu $\| x \| = 1$ și A_i disjuncte. Deoarece $U(\varphi_{A_i} x_i)$ este un scalar, putem găsi un număr α_i cu $\mid \alpha_i \mid = 1$ astfel încît $\mid U(\varphi_{A_i} x_i) \mid = \alpha_i U(\varphi_{A_i} x_i)$. Atunci $y = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i x_i \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ și $\| y \| = \| x \| = 1$ deci

$$\sum \mid U(\varphi_{A_i} x_i) \mid = \sum U(\varphi_{A_i} \alpha_i x_i) = U(\sum \varphi_{A_i} \alpha_i y_i) \leqslant \| U_A \|$$

deci

$$||| U_A ||| \leqslant \| U_A \| .$$

Inegalitatea contrară fiind de asemenea adevărată, rezultă

$$||| U_A ||| = \| U_A \| .$$

O funcțională liniară $L : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to R$ este *pozitivă* dacă $L(\varphi) \geqslant 0$ pentru orice funcție $\varphi \geqslant 0$.

3. PROPOZIȚIE. *Dacă* $L : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to R$ *este o funcțională liniară pozitivă, atunci*

$$\| L_A \| = L(\varphi_A), \text{ pentru orice } A \in \mathcal{C}.$$

În adevăr, dacă $A \in \mathcal{C}$ și dacă $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$, atunci

$$-\varphi_A \|\varphi\| \leqslant \varphi \leqslant \|\varphi\| \varphi_A$$

deci, L fiind crescătoare,

$$-\|\varphi\| L(\varphi_A) \leqslant L(\varphi) \leqslant \|\varphi\| L(\varphi_A)$$

de unde

$$|L(\varphi)| \leqslant L(\varphi_A) \|\varphi\|.$$

Urmează că

$$\|L_A\| \leqslant L(\varphi_A).$$

Pe de altă parte

$$L(\varphi_A) \leqslant \|L_A\|$$

deci

$$\|L_A\| = L(\varphi_A).$$

4. TEOREMĂ. *Există un izomorfism* $U \longleftrightarrow m$ *între mulțimea aplicațiilor liniare* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *cu* $\|U_A\| < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{C}$ *și mulțimea măsurilor aditive* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu semivariația finită* $\widetilde{m}$, *dat de egalitatea*

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}).$$

Dacă U *și* m *sînt în corespondență, atunci pentru orice mulțime* A *avem*

$$\|U_A\| = \widetilde{m}(A) \leqslant \infty$$

și

$$|||U_A||| = \overline{m}(A) \leqslant \infty.$$

Dacă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ este o măsură aditivă cu semivariație finită $\widetilde{m}$, atunci aplicația $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ definită prin egalitatea

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

este liniară. Din propoziția 12 deducem

$$\|U_A\| = \sup |U(x)| = \sup \left| \int x \, \mathrm{d}m \right| = \widetilde{m}(A),$$

unde $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu $\|x\| \leqslant 1$. În particular, pentru $A \in \mathcal{C}$ avem $\|U_A\| = \widetilde{m}(A) < \infty$.

Corespondența $m \to U$ este evident liniară și biunivocă (deoarece $U = 0$ implică $m = 0$).

Reciproc, fie $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ o aplicaţie liniară cu $\| U_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$. Pentru orice $A \in \mathcal{C}$ şi orice $x \in \mathcal{A}$ să punem

$$m(A)\, x = U(\varphi_A\, x).$$

Se verifică uşor că aplicaţia $m(A) : x \to U(\varphi_A\, x)$ a lui $\mathcal{A}$ în F este liniară şi continuă :

$$| m(A)\, x | = | U(\varphi_A\, x) | \leqslant \|U_A\| \, \|x\|_A$$

deci $m(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ şi

$$| m(A) | \leqslant \|U_A\|.$$

Aplicaţia $m : A \to m(A)$ a lui $\mathcal{C}$ în $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ este aditivă şi

$$m(A)\, x = m(A)\, y \text{ dacă } \varphi_A\, x = \varphi_A\, y\,,$$

deci m este o măsură aditivă. Pentru orice cîmp etajat $x = \sum \varphi_{A_i}\, x_i$ din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ avem

$$\int x \,\mathrm{d}m = \sum m(A_i)\, x_i = \sum U(\varphi_{A_i}\, x_i) = U(x).$$

Pentru orice mulţime A avem

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left| \int x \,\mathrm{d}m \right| = \sup \,| U(x) | = \| U_A \|$$

pentru $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu $\|x\| \leqslant 1$. Dacă $A \in \mathcal{C}$, atunci

$$\widetilde{m}(A) = \| U_A \| < \infty$$

deci m are semivariaţie finită.

Fie acum $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ şi fie $A \in \mathcal{C}$ o mulţime în afara căreia se anulează x. Fie (x_n) un şir din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ uniform convergent către x. Atunci

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} U(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int x_n \,\mathrm{d}m = \int x \,\mathrm{d}m.$$

În sfîrşit, fie $A \subset T$ şi fie $x = \sum \varphi_{A_i}\, x_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte şi $\|x\| \leqslant 1$. Atunci $\| x_i \|_{A_i} \leqslant 1$ pentru fiecare i. Avem

$$\sum | U(\varphi_{A_i}\, x_i) | = \sum | m(A_i)\, x_i | \leqslant \overline{m}(A)$$

deci

$$||| U_A ||| \leqslant \overline{m}(A).$$

Reciproc, fie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ mulţimi disjuncte din $\mathcal{C}$ conţinute în A şi fie $\varepsilon > 0$. Pentru fiecare i există $x_i \in \mathcal{A}$ cu $\| x_i \|_{A_i} \leqslant 1$ şi

$$| m(A_i) | \leqslant | m(A_i)\, x_i | + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Atunci

$$\Sigma \mid m(A_i) \mid - \varepsilon \leqslant \Sigma \mid m(A_i)\, x_i \mid = \Sigma \mid U(\varphi_{A_i}\, x_i) \mid \leqslant ||| U_A |||$$

deci

$$\overline{m}(A) - \varepsilon \leqslant ||| U_A ||| .$$

ε fiind arbitrar, deducem

$$\overline{m}(A) \leqslant ||| U_A |||$$

şi deci

$$||| U_A ||| = \overline{m}(A).$$

Observație. Dacă $T = [a, b]$, dacă $\mathcal{C}$ este clanul mulţimilor măsurabile Lebesgue şi dacă $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, din teorema precedentă se obţine teorema clasică a lui M. Gowurin.

5. Corolar. *Pentru orice mulțime* $A \in \mathcal{C}_\lambda$ *avem*

$$\widetilde{m}(A) = \sup \left| \int x \, \mathrm{d}m \right|, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A) \text{ cu } \| x \| \leqslant 1.$$

6. Corolar. *Există un izomorfism* $U \leftrightarrow m$ *între mulțimea funcționalelor* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \rightarrow C$ *cu* $\| U_A \| < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{C}$ *și mulțimea măsurilor aditive* $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}, C)$ *cu variație finită* $\overline{m}$, *dat de egalitatea*

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}).$$

Dacă U și m sînt în corespondență, atunci

$$\| U_A \| = \overline{m}(A) \leqslant \infty, \text{ pentru orice } A \subset T.$$

Observație. În cazul cînd T este un spaţiu compact şi $\mathcal{C}$ este clanul mulţimilor boreliene ale lui T, corolarul 6 este analog unui rezultat al lui I. Singer.

7. Corolar. *Există un izomorfism* $U \leftrightarrow m$ *între mulțimea aplicațiilor liniare continue* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \rightarrow F$ *și mulțimea măsurilor aditive* $m : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu semivariație mărginită dat de egalitatea*

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}).$$

Dacă U și m sînt în corespondență, atunci

$$\| U \| = \widetilde{m}(T).$$

8. Corolar. *Egalitatea*

$$L(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

realizează un izomorfism $L \leftrightarrow \mu$ *între mulțimea funcționalelor liniare pozitive* $L : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to R$ *și mulțimea măsurilor aditive pozitive* $\mu : \mathcal{C} \to R$, *și avem*

$$\| L_A \| = \bar{\mu}(A) \leqslant \infty, \text{ pentru orice } A \subset T$$

și

$$\| L_A \| = \mu(A) < \infty, \text{ pentru } A \in \mathcal{C}.$$

§ 2. OPERAŢII PE SPAŢIUL $\mathcal{M}(\mathcal{C})$

Fie $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o operație liniară. Pentru orice mulțime $A \subset T$ notăm cu U'_A restricția lui U' la subspațiul $\mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$. Toate operațiile liniare $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ vor fi presupuse că verifică axioma următoare :

(i) $U'(\varphi)x = U'(\varphi)y$, dacă $\varphi x = \varphi y$ cu $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ și $x, y \in \mathcal{A}$.

9. PROPOZIŢIE. *Dacă* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *este o operație liniară (verificînd axioma* i) *atunci pentru orice funcție* $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ *nulă în afara unei mulțimi* $A \in \mathcal{C}$ *avem* $U'(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$ *și pentru orice mulțime* $B \in \mathcal{C}$ *cu* $A \subset B$ *avem*

$$| U'(\varphi) |_A = | U'(\varphi) |_B .$$

În adevăr, pentru orice $x, y \in \mathcal{A}$ cu $\varphi_A x = \varphi_A y$ avem $\varphi x = \varphi y$ deci $U'(\varphi)x = U'(\varphi)y$ și se aplică propoziția 4, § 1.

Observație. În continuare vom scrie $| U'(\varphi) |$ în loc de $| U'(\varphi) |_A$.

10. DEFINIŢIE. *Pentru orice mulțime* $A \subset T$ *notăm*

$$\| U' \| = \sup \ | U(\varphi) |$$

și

$$||| U' ||| = \sup \sum | U(\varphi_{A_i} \alpha_i) |,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate funcțiile etajate $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i$ *din* $\mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ *cu* A_i *disjuncte și* $\|\varphi\| \leqslant 1$.

Avem

$$\| U'_A \| \leqslant ||| U'_A ||| \leqslant \infty .$$

Dacă $A \in \mathcal{C}_\lambda$, atunci $\| U'_A \|$ este norma obișnuită a lui U'_A pe $\mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$; $\| U'_A \| < \infty$ înseamnă că U'_A este continuă pe $\mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$.

Teorema următoare este analogă teoremei 4 :

11. TEOREMĂ. *Există un izomorfism* $U' \leftrightarrow m$ *între mulțimea aplicațiilor liniare* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\| U'_A \| < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{C}$ *și mulțimea măsurilor aditive* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu semivariație finită* $\widetilde{m}$, *dat de egalitatea :*

$$U'(\varphi) = \int \varphi \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

Dacă U' și m sînt în corespondență, atunci pentru orice mulțime $A \subset T$ avem

$$\| U'_A \| = \widetilde{m}_{R,X}(A) \leqslant \infty$$

și

$$||| U'_A ||| = \overline{m}(A) \leqslant \infty,$$

unde $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

Demonstrația este analogă celei a teoremei 4.

12. TEOREMA. *Pentru orice aplicație liniară $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ cu $\| U_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ există o aplicație liniară $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu $\|U'_A\| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ și numai una, astfel încît să avem*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ și } x \in \mathcal{A}.$$

Dacă U și U' sînt în corespondență, atunci pentru orice $A \subset T$ avem

$$\| U'_A \| \leqslant \| U_A \| \leqslant \infty$$

și

$$||| U'_A ||| = ||| U_A ||| \leqslant \infty$$

și există o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu semivariație finită $\widetilde{m}$ astfel încît să avem

$$U(x) = \int x \, dm, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

și

$$U'(\varphi) = \int \varphi dm, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

Fie $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ o aplicație liniară cu $\| U_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ și fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ măsura aditivă cu semivariație finită $\widetilde{m} = \widetilde{m}_{\mathcal{A},F}$ astfel încît (teorema 4)

$$U(x) = \int x \, dm \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

și

$$\| U_A \| = \widetilde{m}(A), \quad ||| U_A ||| = \overline{m}(A).$$

Din inegalitatea $\widetilde{m}_{R,X}(A) \leqslant \widetilde{m}_{\mathcal{A},F}(A)$ pentru $A \in \mathcal{C}$, unde $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$, deducem că există (teorema 11) o aplicație liniară $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu $\|U'_A\| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ astfel ca

$$U'(\varphi) = \int \varphi dm, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

și

$$\| U'_A \| = \widetilde{m}_{R,X}(A), \quad ||| U'_A ||| = \overline{m}(A).$$

Din propoziţia 23, § 1, deducem că

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ şi } x \in \mathcal{A}$$

şi din inegalitatea $\widetilde{m}_{R,X} \leqslant \widetilde{m}$ deducem că

$$\| U'_A \| \leqslant \| U_A \|.$$

Deducem apoi că

$$|||U'_A||| = \overline{m}(A) = |||U_A|||.$$

Pentru a demonstra unicitatea lui U', fie $U'' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o aplicaţie liniară cu

$$U(\varphi x) = U''(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ şi } x \in \mathcal{A}.$$

Rezultă că

$$U''(\varphi)x = U'(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ şi } x \in \mathcal{A}$$

deci

$$U''(\varphi) = U'(\varphi) \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

adică $U'' = U'$.

Observaţii. 1°. Corespondenţa $U \to U'$ este liniară şi biunivocă deoarece dacă $U' = 0$, atunci $m = 0$ şi deci $U = 0$.

2°. Există aplicaţii liniare $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu $\| U'_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$, care nu corespund nici unei aplicaţii liniare $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$.

13. COROLAR. *Dacă aplicaţia liniară $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ este continuă, atunci aplicaţia liniară corespunzătoare $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ este continuă şi avem*

$$\| U' \| \leqslant \| U \|.$$

14. COROLAR. *Dacă $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to C$ este o funcţională liniară cu $\| U_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$, există o aplicaţie liniară $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{A}' = \mathcal{L}(\mathcal{A}, C)$ cu $|||U'_A||| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ şi numai una, astfel încît*

$$<\varphi x, U> = < x, U'\varphi >, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ şi } x \in \mathcal{A}.$$

Dacă U şi U' sînt în corespondenţă, atunci

$$\| U'_A \| \leqslant \| U_A \| = |||U'_A|||,$$

şi există o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{A}'$ cu variaţie finită astfel încît

$$< x, U > = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

şi

$$U'(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

§ 3. OPERAŢII MAJORATE PE $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$

15. DEFINIŢIE. *Spunem că o operaţie liniară* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *(respectiv* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$*) este majorată, dacă există o funcţională liniară pozitivă* L *pe* $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ *astfel încît să avem*

$$|U(x)| \leqslant L(|x|), \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

respectiv

$$|U'(\varphi)| \leqslant L(|\varphi|), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

Spunem că U sau U' este majorată de L, sau că L majorează pe U sau U'.

16. PROPOZIŢIE. *Orice funcţională liniară pozitivă* $L : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to R$ *este majorată (de ea însăşi).*

În adevăr, pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ avem

$$-|\varphi| \leqslant \varphi \leqslant |\varphi|$$

deci, L fiind crescătoare ,

$$-L(|\varphi|) \leqslant L(\varphi) \leqslant L(|\varphi|)$$

de unde

$$|L(\varphi)| \leqslant L(|\varphi|).$$

Din corolarul 8 deducem următoarea

17. PROPOZIŢE. *O operaţie liniară* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *(respectiv* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$*) este majorată dacă şi numai dacă există o măsură aditivă pozitivă* μ *pe* $\mathcal{C}$*, astfel încît să avem*

$$|U(x)| \leqslant \int |x| \, d\mu, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

respectiv

$$|U'(\varphi)| \leqslant \int |\varphi| \, d\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

Din teoremele 19 şi 22 rezultă că există o cea mai mică măsură aditivă pozitivă care majorează pe U respectiv U', care va fi notată cu μ_U respectiv $\mu_{U'}$.

18. PROPOZIŢIE. *Dacă* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *(respectiv* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$*) este o operaţie liniară majorată, atunci* $\|U_A\| < \infty$ *(respectiv* $\|U'_A\| < \infty$*), pentru orice* $A \in \mathcal{C}$.

În adevăr, fie μ o măsură aditivă pozitivă care majorează pe U şi fie $A \in \mathcal{C}$. Pentru orice cîmp $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ avem atunci

$$|U(x)| \leqslant \int |x| \, d\mu \leqslant \|x\| \, \mu(A)$$

de unde

$$\| U_A \| \leqslant \mu(A) < \infty$$

La fel se arată că $\| U'_A \| \leqslant \mu(A) < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$.

Observaţie. Există aplicaţii liniare $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ cu $\| U_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ sau $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu $\| U'_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$, care nu sînt majorate.

Dacă însă $F = C$, vom arăta că orice funcţională liniară $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to C$ cu $\| U_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ este majorată (corolarul 21).

Pentru operaţii majorate, izomorfismul dat de teorema 4 se poate preciza :

19. TEOREMĂ. *Egalitatea*

$$U(x) = \int x \,\mathrm{d}m, \ \textit{pentru}\ x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

realizează un izomorfism $U \leftrightarrow m$ *între mulţimea aplicaţiilor liniare majorate* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *şi mulţimea măsurilor aditive* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu variaţie finită* $| m |$.

Dacă U *şi* m *sînt în corespondenţă, atunci*

$$\mu_U = | m |$$

şi pentru orice mulţime $A \subset T$ *avem*

$$\| U_A \| = \widetilde{m}(A)$$

şi

$$||| U_A ||| = \overline{m}(A).$$

Să considerăm izomorfismul $U \leftrightarrow m$ dat de teorema 4. Trebuie să arătăm că U este majorată dacă şi numai dacă m are variaţie finită.

Dacă m are o variaţie finită $| m |$, atunci

$$| U(x) | = \left| \int x \mathrm{d}m \right| \leqslant \int | x | \,\mathrm{d}\, | m |, \ \text{pentru} \ \ x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}),$$

deci U este majorată de $| m |$.

Reciproc, să presupunem că U este majorată de o măsură aditivă pozitivă μ. Atunci pentru orice mulţime $A \in \mathcal{C}$ şi orice cîmp $x \in \mathcal{A}$ avem

$$| m(A) x | = \left| \int \varphi_A x \,\mathrm{d}m \right| = | U(\varphi_A x) | \leqslant \int \varphi_A | x | \,\mathrm{d}\mu \leqslant \mu(A) \, \| x \|_A$$

deci

$$| m(A) | \leqslant \mu(A) < \infty.$$

Urmează că m este cu variaţie finită $| m |$ şi că $| m | \leqslant \mu$. Cum μ este arbitrară, deducem că $| m |$ este cea mai mică măsură pozitivă care majorează pe U, deci

$$\mu_U = | m |.$$

Observaţii. 1°. Dacă U este o operaţie liniară majorată, atunci funcţionala liniară pozitivă

$$L(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}\mu_U, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

este cea mai mică funcţională liniară pozitivă care majorează pe U.

2°. Din egalitatea $|||U_A||| = \overline{m}(A)$, deducem că pentru orice mulţime $A \in \mathcal{C}$ avem

$$\mu_U(A) = \sup \sum |U(\varphi_{A_i} x_i)|,$$

unde marginea superioară se ia pentru $|\sum \varphi_{A_i} x_i| \leqslant \varphi_A$ cu A_i mulţimi disjuncte din $\mathcal{C}$ conţinute în A.

3°. Pentru orice funcţie $\varphi \geqslant 0$ din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ avem

$$L(\varphi) = \sup \sum |U(\varphi_{A_i} x_i)|,$$

unde marginea superioară se ia pentru $|\sum \varphi_{A_i} x_i| \leqslant \varphi$ cu A_i mulţimi disjuncte din $\mathcal{C}$.

Dacă $F = C$, atunci

$$L(\varphi) = \sup_{|x| \leqslant \varphi} |U(x)|, \quad x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}).$$

20. Corolar. *Fie X un spaţiu Banach. Egalitatea*

$$U(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}m, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

stabileşte un izomorfism $U \leftrightarrow m$ între mulţimea operaţiilor liniare majorate $U : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to X$ şi mulţimea măsurilor aditive cu variaţie finită $m : \mathcal{C} \to X$ şi avem:

$$\mu_U = |m|$$

şi

$$|||U_A||| = \overline{m}(A), \textit{ pentru orice } A \subset T.$$

În adevăr, în acest caz avem $E(t) = R$ pentru orice $t \in T$ deci $\mathcal{A} = R$ şi $\mathcal{L}(R, X) = X$.

21. Corolar. *Dacă $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to C$ este o funcţională liniară cu restricţia U_A la spaţiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ continuă pentru orice $A \in \mathcal{C}$, atunci U este majorată.*

În adevăr, pentru măsura aditivă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu semivariaţie finită care corespunde lui U prin teorema 4, variaţia şi semivariaţia sînt egale (propoziţia 8, cap. 1) deci m este cu variaţie finită şi deci, prin teorema 19, U este majorată.

Teorema 19 poate fi precizată:

22. Teoremă. *Egalitatea*

$$U'(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}m, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

stabileşte un izomorfism $U' \leftrightarrow m$ *între mulţimea operaţiilor liniare majorate* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *şi mulţimea măsurilor aditive* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu variaţie finită.*

Dacă U' *şi* m *sînt în corespondenţă, atunci*

$$\mu_{U'} = |m|$$

şi pentru orice mulţime $A \subset T$ *avem*

$$\|U'_A\| = \widetilde{m}(A)$$

şi

$$|||U'_A||| = \overline{m}(A).$$

Demonstraţia este analogă celei a teoremei 19.

Din teoremele 19 şi 22 deducem următoarea caracterizare intrinsecă a operaţiilor majorate :

23. PROPOZIŢIE. *O aplicaţie liniară* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *(respectiv* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$*) este majorată dacă şi numai dacă* $|||U_A||| < \infty$ *(respectiv* $|||U'_A||| < \infty$*) pentru orice* $A \in \mathcal{C}$.

Dacă U *este majorată, atunci*

$$\mu_U(A) = |||U_A|||, \text{ pentru orice } A \in \mathcal{C}$$

şi dacă U' *este majorată, atunci*

$$\mu_{U'}(A) = |||U'_A|||, \text{ pentru orice } A \in \mathcal{C}.$$

Corespondenţa din teorema 12 poate fi precizată pentru operaţii majorate.

24. TEOREMĂ. *Egalitatea*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)\, x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ şi } x \in \mathcal{A}$$

stabileşte un izomorfism $U \leftrightarrow U'$ *între mulţimea operaţiilor liniare majorate* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *şi mulţimea operaţiilor majorate* $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

Dacă U *şi* U' *sînt în corespondenţă, avem*

$$\mu_U = \mu_{U'}$$

şi există o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu variaţie finită astfel încît să avem*

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

şi

$$U'(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

Să considerăm corespondenţa $U \to U'$ dată în teorema 12. Dacă U este majorată, atunci măsura $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ corespunzătoare lui U prin teorema 19 are variaţie finită şi $\mu_U = |m|$. Prin teorema 12 avem de asemenea

$$U'(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}m \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),$$

deci din teorema 22 deducem că U' este majorată şi $\mu_{U'} = |m|$ deci $\mu_U = \mu_{U'}$.

Fie acum $U' : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o operaţie liniară majorată. Prin teorema 22 lui U' îi corespunde o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu variaţie finită astfel încît

$$U'(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}).$$

Aplicaţia liniară $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ definită prin egalitatea

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

este atunci majorată iar pentru $x \in \mathcal{A}$ şi $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ avem

$$U(\varphi x) = \int \varphi x \mathrm{d}m = \int \varphi \mathrm{d}m \cdot x = U'(\varphi) \cdot x.$$

Observaţie. Vom identifica operaţiile majorate U şi U' care se corespund şi vom scrie U în loc de U'. Cu această convenţie, pentru orice operaţie liniară majorată $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ avem

$$U(\varphi x) = U(\varphi) x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \text{ şi } x \in \mathcal{A}.$$

În anumite condiţii măsura m corespunzătoare unei operaţii majorate este numărabil aditivă.

25. TEOREMĂ. *Fie* $U : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \to F$ *o operaţie liniară majorată şi fie* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *măsura aditivă cu variaţie finită care verifică egalitatea*

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}).$$

Măsura m este numărabil aditivă dacă şi numai dacă pentru orice şir descrescător (φ_n) de funcţii din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ cu $\varphi_n \to 0$ avem $U(\varphi_n) \to 0$.

Să presupunem că m este numărabil aditivă. Atunci variaţia sa $|m|$ este numărabil aditivă iar funcţiile din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ sînt $|m|$-integrabile. Dacă (φ_n) este un şir descrescător cu $\varphi_n \to 0$, atunci $\int \varphi_n \mathrm{d}|m| \to 0$. Din relaţiile

$$|U(\varphi_n)| = \left| \int \varphi_n \mathrm{d}m \right| \leqslant \int \varphi_n \mathrm{d}|m|$$

deducem că $U(\varphi_n) \to 0$.

Reciproc, dacă $U(\varphi_n) \to 0$ pentru orice şir descrescător $\varphi_n \to 0$, atunci pentru orice şir descrescător (A_n) din $\mathcal{C}$ cu intersecţia vidă, avem

$$m(A_n) = U(\varphi_{A_n}) \to 0$$

deci m este numărabil aditivă.

Observaţii. 1°. Dacă m este numărabil aditivă, atunci folosind teorema lui Lebesgue deducem că $U(\varphi_n) \to 0$ pentru orice şir (φ_n) de funcţii din $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ astfel ca $\varphi_n \to 0$ şi $|\varphi_n| \leqslant \varphi_A M$, unde $M = \|\varphi_1\|$ iar A este o mulţime din $\mathcal{C}$ astfel ca $\varphi_1 \in \mathcal{M}(\mathcal{C}, A)$.

2°. Dacă m este numărabil aditivă, avem o proprietate mai puternică : $U(x_n) \to 0$ pentru orice şir (x_n) cu $x_n \to 0$ şi $|x_n| \leqslant \varphi_A M$ pentru o anumită constantă $M > 0$ şi o anumită mulţime $A \in \mathcal{C}$. În adevăr, în acest caz $|x_n| \to 0$ deci, folosind teorema lui Lebesgue, deducem că $\int |x_n| \, \mathrm{d}|m| \to 0$. Din relaţiile

$$|U(x_n)| = \left| \int x_n \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |x_n| \, \mathrm{d}|m|$$

urmează că $U(x_n) \to 0$.

Remarcăm că această condiţie nu este suficientă pentru ca m să fie numărabil aditivă.

§ 5. OPERAŢII PE $\overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu)$

Fie μ o *măsură aditivă pozitivă* (finită sau infinită) pe $\mathcal{C}$. Vom presupune că mulţimea $\mathcal{N}(\mu)$ a părţilor μ -neglijabile este conţinută în $\mathcal{C}$. Putem realiza întotdeauna această condiţie, luînd în locul clanului $\mathcal{C}$ clanul $\mathcal{C}'$ al mulţimilor de forma $A \cup N$ cu $A \in \mathcal{C}$ şi $N \in \mathcal{N}(\mu)$ şi prelungind μ la $\mathcal{C}'$ prin egalitatea

$$\mu(A \cup N) = \mu(A), \text{ pentru } A \in \mathcal{C} \text{ şi } N \in \mathcal{N}(\mu).$$

26. Definiţie. *Spunem că o măsură aditivă* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *este absolut continuă în raport cu* μ *dacă* $\mu(A) = 0$ *implică* $m(A) = 0$ *adică dacă* $\mathcal{N}(\mu) \subset \mathcal{U}(m)$.

Deducem că m este absolut continuă în raport cu μ dacă şi numai dacă variaţia sa $|m|$ este absolut continuă în raport cu μ.

Dacă m este absolut continuă în raport cu μ, atunci

$$\overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(m)$$

şi pentru orice cîmp de vectori x avem

$$N_\infty(x, m) \leqslant N_\infty(x, \mu).$$

Să considerăm spaţiul $\overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu)$ cu topologia definită de seminorma $\|x\|_\infty = N_\infty(x, \mu)$.

27. Definiţie. *Fie* $U : \overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *o aplicaţie liniară. Pentru orice mulţime* $A \subset T$ *punem*

$$\|U_A\|_\infty = \sup |U(x)|$$

şi

$$|||U_A|||_\infty = \sup \sum |U(\varphi_{A_i} x_i)|,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate cîmpurile etajate $x = \sum \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *cu* A_i *disjuncte și* $\| x \|_{\infty} \leqslant 1$.

Avem

$$\| U_A \|_{\infty} \leqslant ||| U_A |||_{\infty} \leqslant \infty, \text{ pentru orice } A \subset T.$$

Dacă $A \in \mathcal{C}_{\lambda}$, $\| U_A \|_{\infty}$ este norma obișnuită a restricției U_A a lui U la $\mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu, A)$. În acest caz $\| U_A \|_{\infty} < \infty$ înseamnă că U_A este continuă pe $\mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu, A)$ pentru seminorma $\| x \|_{\infty}$.

28. PROPOZIȚIE. *Dacă* $U : \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu) \to C$ *este o funcțională liniară, atunci pentru orice mulțime* $A \subset T$ *avem*

$$\| U_A \|_{\infty} = ||| U_A |||_{\infty}.$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 2.

Prezintă interes operațiile liniare $U : \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ care se anulează pentru cîmpuri μ -neglijabile.

De exemplu, dacă $\| U_A \|_{\infty} < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{C}$, atunci avem $U(x) = 0$, pentru orice cîmp μ -neglijabil x.

Asemenea operații liniare se pot identifica cu restricțiile lor la spațiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$, de aceea vom nota cu aceeași literă atît operația U cît și restricția sa la spațiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$.

29. PROPOZIȚIE. *Dacă* $U : \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *este o operație liniară cu* $U(x) = 0$ *pentru orice cîmp* μ*-neglijabil* x, *atunci pentru orice mulțime* A *avem*

$$\| U_A \|_{\infty} = \| U_A \|$$

și

$$||| U_A |||_{\infty} = ||| U_A |||.$$

Deoarece $\| x \|_{\infty} \leqslant \| x \|$, avem $\| U_A \| \leqslant \| U_A \|_{\infty}$ și $||| U_A ||| \leqslant ||| U_A |||_{\infty}$. Reciproc, fie $A \subset T$ și fie $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ un cîmp din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte și $\| x \|_{\infty} \leqslant 1$ și fie $\varepsilon > 0$. Există o mulțime μ -neglijabilă $N \in \mathcal{C}$ astfel încît $| x(t) | \leqslant 1 + \varepsilon$ în afara lui N. Atunci cîmpul $y = x \varphi_{A-N}$ aparține lui $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ și avem $\| y \| \leqslant 1 + \varepsilon$, deci, folosind ipoteza, deducem

$$| U(x) | = | U(y) | \leqslant (1 + \varepsilon) \| U_A \|$$

deci

$$\| U_A \|_{\infty} \leqslant (1 + \varepsilon) \| U_A \|.$$

Avem de asemenea

$$\sum | U(\varphi_{A_i} x_i) | = \sum | U(\varphi_{A_i - N} x_i) | \leqslant (1 + \varepsilon) ||| U_A |||$$

deci

$$||| U_A |||_{\infty} \leqslant (1 + \varepsilon) ||| U_A |||.$$

Deoarece ε este arbitrar, deducem

$$\| U_A \|_\infty \leqslant \| U_A \| \text{ şi } ||| U_A |||_\infty \leqslant ||| U_A |||.$$

Spunem că o funcţională liniară $L : \mathcal{M}^\infty(\mu) \to R$ este pozitivă dacă $L(\varphi) \geqslant 0$ pentru orice funcţie φ din $\mathcal{M}^\infty(\mu)$ astfel încît $\varphi(t) \geqslant 0$ μ-aproape peste tot.

Dacă L este pozitivă, atunci $L(\varphi) = 0$ pentru orice funcţie μ-neglijabilă φ; în particular, avem $L(\varphi_A) = 0$ pentru orice mulţime $A \in \mathcal{N}(\mu)$.

Folosind propoziţia 3, deducem din propoziţia precedentă următorul

30. COROLAR. *Dacă L este o funcţională liniară pozitivă pe $\mathcal{M}^\infty(\mu)$, atunci*

$$\| L_A \|_\infty = L(\varphi_A), \textit{ pentru orice } A \in \mathcal{C}.$$

31. TEOREMĂ. *Există un izomorfism $U \longleftrightarrow m$ între mulţimea operaţiilor liniare $U : \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ cu $\| U_A \|_\infty < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$ şi mulţimea măsurilor aditive $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu semivariaţie finită $\widetilde{m}$ şi absolut continue în raport cu μ, dat de egalitatea :*

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \textit{ pentru } x \in \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Dacă U şi m sînt în corespondenţă, atunci pentru orice mulţime $A \subset T$ avem

$$\| U_A \|_\infty = \widetilde{m}(A)$$

şi

$$||| U_A |||_\infty = \overline{m}(A).$$

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o măsură aditivă cu variaţie finită $\widetilde{m}$ şi absolut continuă în raport cu μ. Atunci $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(m)$, deci putem defini aplicaţia liniară $U : \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ prin egalitatea

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Deoarece m este absolut continuă în raport cu μ, avem $U(x) = 0$ pentru orice cîmp μ-neglijabil x, deci folosind propoziţia 29, pentru orice mulţime A, avem

$$\| U_A \|_\infty = \widetilde{m}(A) \text{ şi } ||| U_A |||_\infty = \overline{m}(A).$$

În particular $\| U_A \|_\infty = \widetilde{m}(A) < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$.

Corespondenţa $m \to U$ este liniară şi biunivocă.

Reciproc, fie $U : \mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o aplicaţie liniară cu $\| U_A \|_\infty < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$. Urmează că $U(x) = 0$ pentru orice cîmp μ-neglijabil x, deci folosind propoziţia 29, deducem

$$\| U_A \| = \| U_A \|_\infty < \infty, \text{ pentru } A \in \mathcal{C}.$$

Folosind teorema 4, obţinem o măsură aditivă m cu semivariaţie finită $\widetilde{m}$ astfel încît să avem

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$$

şi această egalitate rămîne adevărată şi pentru $x \in \overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu)$.

Se verifică apoi uşor că dacă $\mu(A) = 0$, atunci $m(A) = 0$.

Observaţie. Din această teoremă se deduce ca un corolar, teorema IV.8.16 din Dunford şi Schwartz [1] în cazul spaţiului $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$:

32. Corolar. *Să presupunem că $T \in \mathcal{C}$. Există un izomorfism $L \longleftrightarrow \nu$ între mulţimea funcţionalelor liniare continue L pe $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ şi mulţimea măsurilor aditive scalare ν pe $\mathcal{C}$, cu variaţie finită şi absolut continuă în raport cu μ, dat de egalitatea:*

$$L(\varphi) = \int \varphi \mathrm{d}\nu, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^{\infty}(\mu).$$

Dacă L şi ν sînt în corespondenţă, avem

$$\|L\| = |\nu|(T).$$

Vom spune că o operaţie liniară $U : \overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ care se anulează pentru cîmpurile μ-neglijabile, este *majorată*, dacă restricţia sa la spaţiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ este majorată.

Din propoziţiile 23 şi 29 deducem că dacă U este majorată, atunci $|||U_A|||_{\infty} < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{C}$.

33. Teoremă. *Egalitatea*

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \textit{ pentru } x \in \overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu)$$

stabileşte un izomorfism $U \longleftrightarrow m$ între mulţimea operaţiilor liniare majorate $U : \overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ şi mulţimea măsurilor aditive $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu variaţie finită $\widetilde{m}$ şi absolut continue în raport cu μ, şi avem

$$|||U_A|||_{\infty} = \widetilde{m}(A), \textit{ pentru orice } A \subset T.$$

Măsura m este numărabil aditivă dacă şi numai dacă $U(\varphi_n) \to 0$ pentru orice şir descrescător $\varphi_n \to 0$ de funcţii din $\overset{\infty}{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}(\mu)$.

Spunem că o submulţime $Z \subset F'$ este *normantă* dacă

$$|y| = \sup_{z \in Z} \frac{|\langle y, z \rangle|}{|z|}, \text{ pentru orice } y \in F.$$

34. Teoremă. *Fie μ o măsură scalară cu variaţie finită. Să presupunem că are loc teorema lui Lebesgue-Nikodym* *).

---

*) v. Cap. IV, § 3.

Dacă $U : \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, \mu) \to F$ *este o operaţie liniară majorată şi dacă* $U(\varphi_n) \to 0$ *pentru orice şir* $\varphi_n \to 0$ *din* $\mathcal{M}^{\infty}(\mathcal{C}, \mu)$, *atunci există o funcţie* $t \to G(t) \in \mathcal{L}(E(t), Z')$ *cu următoarele proprietăţi :*

1) *pentru orice* $x \in \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu)$ *şi orice* $z \in Z$ *funcţia* $t \to \langle G(t)\, x(t), z \rangle$ *este* μ*-integrabilă şi*

$$\langle U(x), z \rangle = \int \langle G(t)\, x(t), z \rangle \,\mathrm{d}\mu(t) ;$$

2) *pentru orice mulţime* $A \in \mathcal{C}$ *avem*

$$|||U_A|||_{\infty} = N_1(G\varphi_A, \mu).$$

În adevăr, fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ măsura cu variaţia finită $|m|$ şi absolut continuă în raport cu μ, astfel încît să avem

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu)$$

şi

$$|||U_A||| = |m|(A), \text{ pentru } A \in \mathcal{C}.$$

Aplicînd teorema lui Lebesgue-Nikodym, măsura m se poate scrie sub forma

$$\left\langle \int x \mathrm{d}m, z \right\rangle = \int \langle G(t)\, x(t), z \rangle \,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}^{\infty}_{\mathcal{A}}(\mu) \text{ şi } z \in Z.$$

Avem de asemenea

$$\int \varphi \mathrm{d}\,|m| = \int \varphi\, |G|\, \mathrm{d}\,|\mu|, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

În particular, pentru $\varphi = \varphi_A$ cu $A \in \mathcal{C}$ avem

$$|||U_A||| = |m|(A) = N_1(\varphi_A G, \mu).$$

şi teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 16 iulie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

ASUPRA MODELĂRII MONTE-CARLO A MODELELOR PENTRU ÎNVĂȚARE DE TIP BUSH-MOSTELLER

DE

R. THEODORESCU

O tratare sistematică a modelelor care apar în teoria matematică a învățării a fost făcută de către R. R. Bush și F. Mosteller [2]. Deși acești autori nu au cunoscut teoria proceselor cu legături complete inițiată de către O. Onicescu și G. Mihoc [10], ei au utilizat în monografia lor astfel de procese și prin aceasta au dezvoltat cel mai important cîmp de aplicație al acestei teorii 1).

Scopul acestui articol este să extindă rezultatele obținute în [12] asupra estimării probabilităților limită pentru procese cu legături complete cu ajutorul modelării Monte-Carlo la modele stochastice pentru învățare de tip Bush-Mosteller.

1. Să considerăm un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{X}, P)$ și două procese aleatoare discrete $(\xi_n)_{n\in N^*}$, $(\xi'_n)_{n\in N^*}$, $N^* = \{1, 2, \ldots,\}$, definite pe Ω și respectiv cu mulțimile finite de stări $S = (S_1, \ldots, S_{m+1})$, $S' = (S'_1, \ldots, S'_{m'+1})$, $m,\ m' \in N^*$.

Să introducem notațiile

$$p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n;\, j_1 \ldots j_l} =$$

$$= P(\xi_{n+\gamma}(\omega) = S_{j_\gamma},\ 1 \leqslant \gamma \leqslant l \mid \xi_\alpha(\omega) = S_{i_\alpha},\ \xi'_\beta(\omega) = S_{i'_\beta},\ 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant n)$$

pentru fiecare $1 \leqslant i_1, \ldots, i_n,\ j_1, \ldots, j_l \leqslant m + 1,\ 1 \leqslant i'_1, \ldots, i'_n \leqslant m' + 1$ și $l,\ n \in N^*$, dacă

$$P(\xi_\alpha(\omega) = S_{i_\alpha},\ \xi'_\beta(\omega) = S'_{i'_\beta},\ 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant n) > 0,$$

---

1) Pentru detalii asupra acestei teorii, vezi monografia [3]; relația dintre modele stochastice pentru învățare descrise în [2] și teoria proceselor cu legături complete a fost stabilită în [11].

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 3, P. 387–396, BUCUREȘTI, 1966

și

$$p'_{i;j'} = P(\xi'_1\,\omega) = S'_{j'} \mid \xi_1(\omega) = S_i),$$

$$p'_{i_1\ldots i_{n+1},\, i'_1\ldots i'_n;\, j'_1\ldots j'_l} = P(\xi'_{n+\gamma}(\omega) = S'_{j'_\gamma},\ 1 \leqslant \gamma \leqslant l \mid \xi_\alpha(\omega) =$$

$$= S_{i_\alpha},\ \xi'_\beta(\omega) = S'_{i'_\beta},\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n+1,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n)$$

pentru fiecare $1 \leqslant i_1, \ldots, i_n, i \leqslant m+1,\ 1 \leqslant i'_1, \ldots, i'_n, j'_1, \ldots j'_l, j' \leqslant m'+1$ și $l,\ n \in N^*$, dacă

$$P(\xi_\alpha(\omega) = S_{i_\alpha},\ \xi'_\beta(\omega) = S'_{i'_\beta},\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n+1,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n) > 0.$$

În fapt

$$p_{i_1\ldots i_n,\, i'_1\ldots i'_n;\, j_1\ldots j_l} \text{ și } p'_{i_1\ldots i_{n+1},\, i'_1\ldots i'_n;\, j'_1\ldots j'_l}$$

sînt respectiv probabilitățile condiționate ale traiectoriilor $S_{j_1} \ldots S_{j_l}$ și $S'_{j'_1} \ldots S'_{j'_l}$ de lungime l îndată ce întregul trecut al proceselor aleatoare $(\xi_n)_{n\in N^*}$ și $(\xi'_n)_{n\in N^*}$ este dat. Mai departe, să considerăm o familie de aplicații $\psi^{(n)}_{(ii')}, 1 \leqslant i \leqslant m+1, 1 \leqslant i' \leqslant m'+1,\ n \in N^*$, care transformă simplexul

$$\mathfrak{M} = \left\{ \boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_{m+1}) : 0 \leqslant p_i \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m+1, \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1 \right\}$$

în el însuși și fie $\psi^{(n)}_{(ii'),j}\ (\boldsymbol{p})$ a j-a coordonată, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, a punctului $\psi^{(n)}_{(ii')}\ (\boldsymbol{p}) \in \mathfrak{M}$. Analog, să notăm cu $\mathfrak{M}'$ simplexul

$$\left\{ \boldsymbol{p}' = (p'_1, \ldots, p'_{m'+1}) : 0 \leqslant p'_{i'} \leqslant 1,\ 1 \leqslant i' \leqslant m'+1, \sum_{i'=1}^{m'+1} p_i = 1 \right\}.$$

DEFINIȚIA 1. *Procesul aleator discret* $(\xi_n)_{n\in N^*}$ *și* $(\xi'_n)_{n\in N^*}$ *formează un model pentru învățare de tip Bush-Mosteller (pe scurt, BM-model) cu aplicațiile de trecere* $(\psi^{(n)}_{(ii')})_{1\leqslant i\leqslant m+1,\ 1\leqslant i'\leqslant m'+1}$, $n \in N^*$ *și cu vectorii de probabilitate condiționați* $\boldsymbol{p}'_i, \boldsymbol{p}'_{i_1\ldots i_{n+1},\, i'_1\ldots i'_n} \in \mathfrak{M}', 1 \leqslant i_1, \ldots, i_{n+1}, i \leqslant m+1,$ $1 \leqslant i'_1, \ldots, i'_n \leqslant m'+1,\ \ n \in N^*$, *dacă pentru fiecare* $1 \leqslant i_1 \ldots, i_n,\ i,$ $j \leqslant m+1,\ 1 \leqslant i'_1, \ldots, i'_n,\ j' \leqslant m+1$ *și* $n \in N^*$ *avem*

$$p_{i_1,\ldots,i_n,\, i'_1\ldots i'_n;\, j} = \psi^{(n)}_{(i_n i'_n),\, j}\,(\boldsymbol{p}_{i_1\ldots i_{n-1}\, i'_1\ldots i'_{n-1}})\,^{2)} \quad \textit{pentru } n > 1,$$

$$p_{i,\, i';j} = \psi^{(1)}_{(i_1 i'_1)\, j}\,(\boldsymbol{p}) \qquad\qquad \textit{pentru } n = 1,$$

unde

$$p_j = P(\xi_1\ (\omega) = S_j),\ 1 \leqslant j \leqslant m+1,$$

---

²) Evident,

$$\boldsymbol{p}_{i_1\ldots i_n,\, i'_1\ldots i'_n} = \boldsymbol{\psi}^{(n)}_{(i_1 i'_1)\ldots(i_n i'_n)}\,(\boldsymbol{p}),$$

unde

$$\boldsymbol{\psi}^{(m+n-1)}_{(i_1 i'_1)\ldots(i_n i'_n)} = \boldsymbol{\psi}^{(m+n-1)}_{(i_n i'_n)} \circ \cdots \circ \boldsymbol{\psi}^{(m)}_{(i_1 i'_1)}.$$

sînt probabilitățile inițiale,

$$\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_{m+1}),$$

$$\boldsymbol{p}_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n} = (p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n;\, 1}, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n;\, m+1}),\ n > 1,$$

sînt elemente aparținînd mulțimii $\mathfrak{M}$ *și*

$$\boldsymbol{p}'_i = (p'_{i;\,1}, \ldots, p'_{i;\,m'+1}),$$

$$\boldsymbol{p}'_{i_1 \ldots i_{n+1},\, i'_1, \ldots, i'_n} = (p'_{i_1 \ldots i_{n+1},\, i'_1 \ldots i'_n;\, 1}, \ldots, p'_{i_1 \ldots i_{n+1},\, i'_1 \ldots i'_n;\, m'+1}),\ n > 1.$$

Din definiția 1 rezultă că fiind dat un BM-model, procedăm astfel. La momentul n efectuăm un experiment corespunzînd variabilei aleatoare ξ_n și obținem starea S_i; mai departe, efectuăm un experiment corespunzînd variabilei aleatoare ξ'_n și obținem starea S'_i. Apoi vectorul de probabilitate condiționat corespunzător variabilei aleatoare ξ_{n+1} este determinat prin aplicarea lui $\psi^{(n)}_{(ii')}$ vectorului de probabilitate condiționat corespunzător variabilei aleatoare ξ_n. Astfel, luînd în considerare evoluția de mai sus, sîntem conduși la o regulă precisă care modifică de la probă la probă probabilitățile condiționate corespunzătoare procesului aleator discret $(\xi_n)_{n \in N^*}$. Să observăm aici că probabilitățile condiționate corespunzătoare procesului aleator discret $(\xi'_n)_{n \in N^*}$ au o formă foarte generală și sînt specificate efectiv pentru fiecare experiment pentru învățare particular considerat.

Să observăm, de asemenea, că pentru un BM-model avem

$$p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n;\, j_1 \ldots j_l} =$$

$$= \sum_{j'_1 \ldots j'_{l-1}=1}^{n'+1} \psi^{(n)}_{(i_n i'_n),\, j_1}(\boldsymbol{p}_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1}})\, p'_{i_1 \ldots i_n j,\, i'_1 \ldots i'_n;\, j'_1} \times \ldots$$

$$\ldots \times p'_{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_{l-1},\, i'_1 \ldots i'_n j'_1 \ldots j'_{l-2};\, j'_{l-1}}\, \psi^{(n+l-1)}_{(j_{l-1} j'_{l-1}),\, j_l}$$

$$(\boldsymbol{p}_{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_{l-2},\, i'_1 \ldots i'_n j'_1 \ldots j'_{l-2}}) \qquad \text{pentru } l > 2, \tag{1}$$

$$p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n;\, j_1 j_2} =$$

$$= \sum_{j'_1=1}^{m'+1} \psi^{(n)}_{(i_n i'_n),\, j_1}(\boldsymbol{p}_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1}})\, p'_{i_1 \ldots i_n j_1,\, i'_1 \ldots i'_n;\, j'_1}\, \psi^{(n+1)}_{(j_1 j'_1),\, j_2}\, (\boldsymbol{p}_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n})$$

$$\text{pentru } l = 2,$$

$$p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n;\, j_1} = \psi^{(n)}_{(i_n i'_n),\, j_1}(\boldsymbol{p}_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1}}) \qquad \text{pentru } l = 1.$$

DEFINIȚIA 2. *Un BM-model se numește elemenatar dacă*

$$\boldsymbol{p}'_i = \boldsymbol{p}'^{(1)}_i \qquad \textit{pentru } n = 1,$$

$$\boldsymbol{p}'_{i_1 \ldots i_{n+1},\, i'_1 \ldots i'_n} = \boldsymbol{p}'^{(n+1)}_{i_{n+1}} \qquad \textit{pentru } n > 1,$$

pentru fiecare $1 \leqslant i_1, \ldots, i_{n+1}, i \leqslant m + 1$ *și* $1 \leqslant i'_1, \ldots, i'_n \leqslant m' + 1$.

Un BM-model elementar este un BM-model în sensul definiției 1 [8]3).

Modelele descrise de către R. R. Bush și F. Mosteller [2] ca și diferitele lor generalizări (vezi, de exemplu, [7]) sînt cazuri particulare de BM-modele elementare. Anume, evenimentele controlate de experimentator se obțin punînd

$$\psi^{(n)}_{(ii')} = \psi^{(n)}_{i'}, \qquad \boldsymbol{p}'^{(n)}_i = \boldsymbol{p}'^{(n)}$$

pentru fiecare $1 \leqslant i \leqslant m + 1$, $1 \leqslant i' \leqslant m' + 1$ și $n \in N^*$, unde $\psi^{(n)}_{i'}$ se reduce la o matrice stochastică de ordinul $(m + 1) \times (m + 1)$. Evenimentele controlate de subiect rezultă prin identificarea lui S și S' 4) și punînd

$$\psi^{(n)}_{(ii)} = \psi^{(n)}_{i}, \qquad \boldsymbol{p}'^{(n)}_i = \boldsymbol{\delta}_i \; 5)$$

pentru fiecare $1 \leqslant i \leqslant m + 1$ și $n \in N^*$, unde $\psi^{(n)}_i$ se reduce la o matrice stochastică de ordinul $(m + 1) \times (m + 1)$; în acest caz obținem un lanț cu legături complete. Pentru evenimentele controlate de experimentator și de subiect apariția stării $S'_{i'}$, este identificată cu apariția unei stări S_i și cu apariția unui rezultat particular O_k, $1 \leqslant k \leqslant s + 1$, așa că o mulțime de probabilități constante π_{ik}, $1 \leqslant i \leqslant m + 1$, $1 \leqslant k \leqslant s + 1$, este definită, specificînd probabilitatea condiționată a rezultatului O_k, știind că a apărut starea S_i; în fapt, fiecare indice j', $1 \leqslant j' \leqslant m' + 1$, este o pereche (i, k), $1 \leqslant i \leqslant m + 1$, $1 \leqslant k \leqslant s + 1$, astfel că

$$\psi^{(n)}_{(ii')} = \psi^{(n)}_{(i,\,(i,\,k))} = \psi^{(n)}_{(i,\,k)}$$

pentru fiecare $1 \leqslant i \leqslant m + 1$, $1 \leqslant k \leqslant s + 1$ și $n \in N^*$, unde $\psi^{(n)}_{(i,\,k)}$ se reduce la o matrice stochastică de ordinul $(m + 1) \times (m + 1)$ și

$$\boldsymbol{p}'^{(n)}_i = \boldsymbol{p}'^{(n)}$$

pentru fiecare $1 \leqslant i \leqslant m + 1$ și $n \in N^*$, unde componentele $p'^{(n)}_{j'}$, $j' = (i, k)$, $1 \leqslant i \leqslant m + 1$, $1 \leqslant k \leqslant s + 1$, ale lui $\boldsymbol{p}'^{(n)}$ sînt produsul dintre π_{ik} și probabilitatea condiționată corespunzătoare stării S_i la momentul n.

DEFINIȚIA 3. *Un BM-model elementar se numește omogen dacă aplicațiile de trecere și vectorii de probabilitate condiționați nu depind de* $n \in N^*$.

De exemplu, evenimentele controlate de experimentator și evenimentele controlate de subiect, așa cum sînt descrise în [2], sînt BM-modele elementare omogene.

---

3) Acest articol conține o scurtă trecere în revistă a rezultatelor obținute de autori în domeniul teoriei matematice a învățării pentru o mulțime finită de stări.

4) Evident, în acest caz avem un singur șir de variabile aleatoare.

5) $\boldsymbol{\delta}_i$ este vectorul de probabilitate concentrat în starea S_i, $1 \leqslant i \leqslant m + 1$.

2. Să indicăm acum modelarea Monte-Carlo a unui experiment pentru învăţare guvernat de un BM-model⁶).

Să notăm cu $(x_n)_{n\in N^*}$ şi $(y_n)_{n\in N^*}$ două şiruri de numere aleatoare uniform repartizate şi să punem

$$r_0 = 0,$$

$$r_k = \sum_{t=1}^{k} p_t, \quad 1 \leqslant k \leqslant m+1,$$

Procedăm astfel : luăm numărul aleator x_1 şi notăm cu i_1 acel indice pentru care

$$r_{i_1-1} < x_1 \leqslant r_{i_1} ;$$

astfel determinăm prima stare S_{i_1}. În mod analog, să punem

$$s_{i_1;\, 0} = 0,$$

$$s_{i_1;\, k'} = \sum_{t'=1}^{k'} p'_{i_1,\, t'} \quad 1 \leqslant k' \leqslant m'+1.$$

Luăm numărul aleator y_1 şi notăm cu i'_1 acel indice pentru care

$$s_{i_1;\, i'-1} < y_1 \leqslant s_{i_1;\, i'_1} ;$$

astfel determinăm prima stare $S'_{i'_1}$.

Mai departe, luăm numărul aleator x_2 şi notăm cu i_2 acel indice pentru care

$$r_{i_1,\, i'_1;\, i_2-1} < x_2 \leqslant r_{i_1,\, i';\, i_2},$$

unde

$$r_{i_1,\, i'_1;\, 0} = 0,$$

$$r_{i_1,\, i'_1;\, k} = \sum_{t=1}^{k} \psi^{(1)}_{(ii'_1),\, t}(\boldsymbol{p}), \quad 1 \leqslant k \leqslant m+1 ;$$

astfel determinăm a doua stare S_{i_2}. În mod analog, să punem

$$s_{i_1 i_2,\, i'_1;\, 0} = 0,$$

$$s_{i_1 i_2,\, i'_1;\, k'} = \sum_{t'=1}^{k'} p'_{i_1 i_2,\, i'_1;\, t'}, \quad 1 \leqslant k' \leqslant m+1.$$

---

⁶) În cazul evenimentelor controlate de subiect aplicăm direct modelarea descrisă în [12], deoarece sîntem în prezenţa unui lanţ cu legături complete.

Luăm numărul aleator y_2 și notăm cu i'_2 acel indice pentru care

$$s_{i_1 i_2,\, i'_1;\, i'_2-1} < y_2 \leqslant s_{i_1 i_2,\, i'_1;\, i'_2};$$

astfel determinăm a doua stare $S'_{i'_2}$.

În general, la momentul n luăm numărul aleator x_n și notăm cu i_n acel indice pentru care

$$r_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, i_{n-1}} < x_n \leqslant r_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, i_n},$$

unde

$$r_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, 0} = 0,$$

$$r_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, k} = \sum_{t=1}^{k} \psi^{(n-1)}_{(i_{n-1}\, i'_{n-1}),\, t} (\boldsymbol{p}_{i_1 \ldots i_{n-1},\, i'_1 \ldots i'_{n-1}}), \quad 1 \leqslant k \leqslant m+1;$$

astfel determinăm starea S_{i_n}. În mod analog, să punem

$$s_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, 0} = 0,$$

$$s_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, k'} = \sum_{t'=1}^{k'} p'_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_{n-1}:\, t'}, \quad 1 \leqslant k' \leqslant m'+1.$$

Luăm numărul aleator y_n și notăm cu i'_n acel indice pentru care

$$s_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, i'_n-1} < y_n \leqslant s_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, i'_n};$$

astfel determinăm starea $S'_{i'_n}$.

Așadar, obținem traiectoriile $S_{i_1} \ldots S_{i_n}$, $S'_{i'_1}, \ldots, S'_{i'_n}$, utilizînd procedeul de modelare descris mai sus[7]).

3. Să notăm cu $\eta_{n,\, j_1 \ldots j_l}$, $n \in N^*, 1 \leqslant j_1, \ldots, j_l \leqslant m+1, l \in N^*$, variabila aleatoare care ia valorile $p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n:\, j_1 \ldots j_l}$, unde $1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant m+1$, $1 \leqslant i'_1, \ldots, i'_n \leqslant m'+1$, $n \in N^*$; pentru $n = 0$, să punem

$$\eta_{0,\, j_1 \ldots j_l} = P(\xi_1(\omega) = S_{j_1}, \ldots, \xi_l(\omega) = S_{j_l}). \tag{2}$$

Valorile $p_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n:\, j_1 \ldots j_l}$ ale variabilei aleatoare $\eta_{n,\, j_1 \ldots j_l}$ sînt luate, respectiv, cu probabilitățile

$$\pi_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_n} = \tag{3}$$

$$= p_{i_1} p'_{i;\, i'_1}\ \psi^{(1)}{}_{i'_1),\, i_2}\ (p) \ldots \psi^{(n-1)}_{(i_{n-1} i'_{n-1}),\, i_n} (p_{i_1 \ldots i_{n-2}})\ p'_{i_1 \ldots i_n,\, i'_1 \ldots i'_{n-1};\, i'_n}.$$

---

[7]) Acest procedeu conține ca un caz particular pe cel descris în [12] pentru lanțuri cu legături complete; pentru lanțuri Markov vezi, de exemplu, [5].

Să notăm acum cu $P^{(n)}_{j_1 \dots jl}(\boldsymbol{p})$ [8]) probabilitatea absolută la momentul n a traiectoriei $S_{j_1} \dots S_{jl}$ de lungime l, adică

$$P^{(n)}_{j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p}) = P(\xi_n(\omega) = S_{j_1}, \dots, \xi_{n+l+1}(\omega) = S_{jl}), \ n \in N^*;$$

dacă calculăm valoarea medie a variabilei aleatoare $\eta_{n,\, j_1 \dots jl}$, adică

$$E(\eta_{n,\, j_1 \dots jl}) = \sum_{i_1 \dots i_n = 1}^{m+1} \sum_{i'_1 \dots i'_n = 1}^{m'+1} \pi_{i_1 \dots i_n,\, i'_1 \dots i'_n}\, p_{i_1 \dots i_n,\, i'_1 \dots i'_n;\, j_1 \dots j_l}, \ n \in N^*,$$

şi dacă ţinem seamă de expresiile (1) şi (3) deducem

$$P^{(n+1)}_{j_1 \dots j_l}(p) = E(\eta_{n,\, j_1 \dots jl}) \tag{4}$$

pentru fiecare $n \in N = \{0, 1, \dots\}$ (dacă ţinem seamă şi de (2)).

Să utilizăm acum relaţia (4) pentru estimarea probabilităţii absolute la momentul $n+1$, anume $P^{(n+1)}_{j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p})$. Se ştie că în acest caz luăm ca estimaţie valoarea medie de selecţie

$$\overline{y}_{n,\, j_1 \dots j_l} = \frac{1}{k_n} \sum_{t=1}^{k_n} y^{(t)}_{n,\, j_1 \dots j_l},$$

unde $y^{(t)}_{n,\, j_1 \dots j_l}$ sînt valorile de selecţie corespunzătoare variabilei aleatoare $\eta_{n,\, j_1 \dots j_l}$, iar k_n volumul selecţiei, aşa că

$$P^{(n+1)}_{j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p}) \approx \overline{y}_{n,\, j_1 \dots j_l}.$$

Acum putem aplica procedeul Monte-Carlo descris la punctul **2**. Anume,

$$y^{(t)}_{n,\, j_1 \dots j_l} = p_{i_1(t) \dots i_n(t),\, i'_1(t) \dots i'_n(t);\, j_1 \dots j_l},$$

unde $S_{i_1(t)} \dots S_{i_n(t)}$ şi $S'_{i'_1(t)} \dots S'_{i'_n(t)}$ sînt traiectoriile obţinute la a t-a modelare, $1 \leqslant t \leqslant k_n$.

Mai departe, dacă considerăm un BM-model care este ergodic [9]) în sens tare, adică limita

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)}_{j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p}) = P^{(\infty)}_{j_1 \dots j_l}$$

există şi nu depinde de $\boldsymbol{p} \in \mathfrak{M}$ pentru fiecare $1 \leqslant j_1, \dots, j_l \leqslant m+1$ şi $l \in N^*$, atunci pentru n suficient de mare putem lua

$$P^{(\infty)}_{j_1 \dots j_l} \approx \overline{y}_{n,\, j_1 \dots j_l}.$$

---

[8]) În fapt, $P^{(n)}_{j_1 \dots jl}(\boldsymbol{p})$ depinde nu numai de vectorul iniţial de probabilitate $\boldsymbol{p}$; specificăm aici numai pe $\boldsymbol{p}$, deoarece este cel mai important parametru.

[9]) Pentru comportarea ergodică a proceselor aleatoare discrete, vezi, de exemplu, [1].

Eroarea comisă este formată din două părţi : *a*) o parte se referă la înlocuirea lui $P^{(\infty)}_{j_1 \ldots j_l}$ prin $P^{(n)}_{j_1 \ldots j_l}(\mathbf{p})$ care este evaluată de o teoremă ergodică şi *b*) o parte care se referă la estimarea lui $P^{(n)}_{j_1 \ldots j_l}(\mathbf{p})$ prin $\bar{y}_{n, j_1 \ldots j_l}$.

Ca o observaţie suplimentară, notăm că deoarece BM-modelul considerat este ergodic în sens tare, obţinem o estimare mai bună pentru $P^{(\infty)}_{j_1 \ldots j_l}$ luînd în loc de $\bar{y}_{n, j_1 \ldots j_l}$ o medie aritmetică $\bar{\bar{y}}_{n, j_1 \ldots j_l}$ de mărimi similare calculate pornind de la vectori de probabilitate iniţiali diferiţi $\mathbf{p} \in \mathfrak{M}$.

4. Să examinăm acum variabila aleatoare

$$\eta_{(n) j_1 \ldots j_l} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \eta_{i, j_1 \ldots j_l}.$$

Evident, din relaţia (4) deducem

$$E(\eta_{(n), j_1 \ldots j_l}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} P^{(i+1)}_{j_1 \ldots j_l}(\mathbf{p}). \tag{5}$$

Presupunînd că BM-modelul considerat este ergodic în sens tare, obţinem imediat în virtutea relaţiilor (4) şi (5)

$$\lim_{n \to \infty} E(\eta_{(n), j_1 \ldots j_l}) = P^{(\infty)}_{j_1 \ldots j_l}. \tag{6}$$

Avem, de asemenea,

$$\lim_{n \to \infty} D^2(\eta_{(n), j_1 \ldots j_l}) = 0 \tag{7}$$

utilizînd o metodă de demonstrare analogă cu cea din [9].

Mai departe, să punem

$$\bar{\bar{y}}_{n, j_1 \ldots j_l} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} y_{i, j_1 \ldots j_l}, \tag{8}$$

unde $y_{i, j_1 \ldots j_l}$ sînt respectiv valorile variabilelor aleatoare $\eta_{i, j_1 \ldots j_l}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, alese în aşa fel încît să fie obţinute succesiv una din cealaltă. Cu alte cuvinte, $\bar{\bar{y}}_{n, j_1 \ldots j_l}$ este media aritmetică a probabilităţilor condiţionate calculate pentru traiectorii date, să spunem $S_{i_1} \ldots S_{i_n}$ şi $S'_{i'_1} \ldots S'_{i'_n}$; aceste traiectorii pot fi modelate aşa cum s-a indicat la punctul 2. Relaţiile (5) şi (6) arată că mărimea (8) poate fi luată de asemenea ca estimare a lui $P^{(\infty)}_{j_1 \dots j_l}$.

Este uşor de observat că

$$D^2(\overline{\overline{\overline{y}}}_{n, j_1 \dots j_l}) \geqslant \frac{k_n}{(n+1)^2} D^2(\overline{y}_{n, j_1 \dots j_l}),$$

aşa că pentru un k_n convenabil avem

$$D^2(\overline{\overline{\overline{y}}}_{n, j_1 \dots j_l}) \geqslant D^2(\overline{y}_{n, j_1 \dots j_l}).$$

Mai mult, să alegem pe k_n astfel încît

$$D^2(\overline{\overline{\overline{y}}}_{n, j_1 \dots j_l}) \geqslant n^{\alpha} D^2(\overline{y}_{n, j_1 \dots j_l})$$

pentru $\alpha > 1$. Conchidem că deşi estimaţia $\overline{\overline{\overline{y}}}_{n, j_1 \dots j_l}$ se obţine mai uşor, eroarea comisă este mai mare decît cea corespunzătoare fie lui $\overline{y}_{n, j_1 \dots j_l}$, fie lui $\overline{\overline{y}}_{n, j_1 \dots j_l}$; aceasta se datorează, în principal, faptului că $\overline{\overline{\overline{y}}}_{n, j_1 \dots j_l}$ este o estimaţie deplasată a lui $P^{(n)}_{j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p})$.

5. Să amintim că deoarece legea numerelor mari este adevărată pentru lanţuri cu legături complete omogene (vezi de exemplu, [4], [6]), ea poate fi, de asemenea, utilizată pentru estimarea probabilităţilor limită. Este suficient să se aplice procedeul de modelare la punctul 2 şi apoi să se calculeze frecvenţele relative corespunzătoare ale diverselor stări. Aceste frecvenţe relative pot fi luate atunci ca estimaţii ale probabilităţilor limită.

6. La punctul precedent am discutat posibilitatea estimării mărimii $P^{(n)}_{j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p})$ şi apoi a mărimii $P^{(\infty)}_{j_1 \dots j_l}$ pentru BM-modele care sînt ergodice în sens tare. Să observăm că putem aplica acelaşi procedeu nu numai mărimii

$$E_{1, n; j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p}) = E(\eta_{n, j_1 \dots j_l}), \tag{9}$$

dar şi mărimii

$$E_{r, n; j_1 \dots j_l}(\boldsymbol{p}) = E(\eta^r_{n, i_1 \dots j_l}), \; r > 2, \tag{10}$$

cît şi mărimii

$$E_{r_1 \dots r_m, n; j_1 \dots j_l}(p) = E\,(\eta^{r_1}_{n, j_1 \dots j_l} \dots \eta^{r_m}_{n, j_1 \dots j_l}),\ r_1 \dots r_m \geqslant 1$$

şi apoi să estimăm limitele $E_{r, \infty; j_1 \dots j_l}$ şi $E_{r_1 \dots r_m, \infty; j_1 \dots j_l}$ 10), dacă există.

Primită la redacţie la 17 iulie 1965.

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti 3

BIBLIOGRAFIE

1. Botez M., Theodorescu R., *On the ergodic behaviour of discrete random processes.* Rev. Roum. math. pures et appl., **10**, 991—1010 (1965).
2. Bush R. R., Mosteller F., *Stochastic models for learning.* New York, 1955.
3. Ciucu G., Theodorescu *R.*, *Procese cu legături complete.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960.
4. Cohn H., *Quelques théorèmes limites pour une classe de variables aléatoires dépendents.* Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. fis. mat. nat., Ser. *8*, **38**, 815—818(1965).
5. Hammersley J. M., Handscomb D. C., *Monte Carlo methods.* London 1964.
6. Iosifescu M., *Случайные системы с полными связами с произвольным множеством состоянный.* Rev. math. pures et appl., **8**, 611—645 (1963).
7. Iosifescu M., Theodorescu R., *Some remarks on certain models for learning.* Rev. Math. pures et appl., **7**, 425—437 (1962).
8. Iosifescu M., Theodorescu R., *On the Bush-Mosteller stochastic models for learning.* J. Math. Psychology, **2**, 196—203 (1965).
9. Mihoc G., *Sur l'aplication de la méthode de Monte-Carlo aux processus pour apprendre.* Rev. math. pures et appl., **8**, 337—347 (1963).
10. Onicescu O., Mihoc G., *Sur le chaînes statistiques.* C.r. Acad. Sci. Paris, **200**, 511—512 (1935).
11. Theodorescu R., *Nouvelle interprétation de certains modèles stochastiques pour apprendre.* Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. fis. mat. nat., Ser. *8*, **28**, 1953—1955 (1960).
12. Theodorescu R., *On the estimation of the limit probability distribution for chains with complete connections.* Rev. Roum. math. pures et appl., **10**, 1241—1246 (1965).

---

10) Relaţiile funcţionale verificate de mărimile (9) şi (10) sînt indicate în [7]; în acelaşi timp comportarea lor asimptotică este examinată şi expresii efective pentru $E_{r, \infty; j_1 \dots j_l}$ şi $E_{r_1 \dots r_m, \infty; j_1 \dots j_l}$ sînt date pentru cazul liniar omogen (adică aplicaţia $\psi^{(n)}_{(ii')}$ nu depinde de $n \in N^*$ şi este liniară).

DETERMINAREA SUBGRUPURILOR GRUPULUI

$$X_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + 2x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^3}, (\alpha = 1, 2),\ X_3 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1},$$

$$X_4 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$$

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină subgrupurile grupului definit de operatorii $X_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + 2x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^3}$, $(\alpha = 1, 2)$, $X_3 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}$, $X_4 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$, grup care intervine în anumite probleme importante de geometrie integrală.

Să considerăm în spaţiul R_3 de coordonate x^1, x^2, x^3, grupul G_4 definit de operatorii

$$X_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + 2x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^3}, (\alpha = 1, 2), X_3 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1},$$

$$X_4 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

şi a cărui structură este dată de ecuaţiile

$$(X_1 X_2) = (X_3 X_4) = 0,\ (X_1 X_3) = (X_2 X_4) = X_2,\ (X_1 X_4) = (X_2 X_3) = X_1.$$

Acest grup intervine în problema de geometrie integrală referitoare la familiile de cercuri din plan şi pentru a putea determina formele canonice ale familiilor cu unu sau doi parametri de cercuri măsurabile din plan avem nevoie de subgrupurile grupului G_4. În cele ce urmează vom determina aceste subgrupuri.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 3, P. 397–405 , BUCUREŞTI, 1966

I

Pentru a determina subgrupurile cu trei parametri ale grupului G_4, să considerăm operatorii

$$Y_1 = a_h X_h, \quad Y_2 = b_h X_h, \quad Y_3 = c_h X_h, \quad (h = 1, 2, 3, 4).$$

Să presupunem întîi că $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. De aici rezultă că $a_1 \neq 0$ și printr-o schimbare de parametri putem lua $a_1 = 1$ deci

$$Y_1 = X_1 .$$

În locul operatorilor Y_2 și Y_3 putem lua operatorii

$$Z_2 = Y_2 - b_1 Y_1 = b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4, \quad Z_3 = Y_3 - c_1 Y_1 = \\ = c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4.$$

Dacă $b_3 = b_4 = 0$, rezultă $b_2 \neq 0$ și deci putem presupune $b_2 = 1$, adică

$$Z_2 = X_2 .$$

În acest caz putem considera ca al treilea operator al grupului operatorul

$$T_3 = Z_3 - c_2 Z_2 = c_3 X_3 + c_4 X_4.$$

Dacă $c_4 = 0$, rezultă $c_3 \neq 0$, adică $c_3 = 1$ și deci

$$T_3 = X_3.$$

Se verifică imediat că operatorii Y_1, Z_2, T_3 formează grup, deci avem un prim subgrup cu trei parametrii al grupului G_4 și anume

$$G_3' \equiv [X_1, X_2, X_3].$$

Dacă $c_4 \neq 0$, putem presupune $c_4 = 1$ și deci

$$T_3 = \alpha X_3 + X_4 .$$

Și în acest caz operatorii Y_1, Z_2, T_3 formează grup, deci al doilea subgrup cu trei parametrii al grupului G_4 este

$$G_3'' \equiv [X_1, X_2, \alpha X_3 + X_4].$$

Să presupunem acum că $b_4 = 0$ și $b_3 \neq 0$. Atunci putem lua $b_3 = 1$ și operatorul Z_2 se scrie

$$Z_2 = b_2 X_2 + X_3.$$

Considerînd ca al treilea operator al grupului operatorul $T_3 = Z_3 - c_3 Z_2$, avem

$$T_3 = \alpha X_2 + c_4 X_4 ,$$

unde am notat $\alpha = c_2 - c_3 b_2$.

Punînd condiţia ca operatorii Y_1, Z_2 şi T_3 să formeze grup, rezultă că $b_2 = c_4 = 0$ şi regăsim grupul G_3'.

Dacă $b_4 \neq 0$, luăm $b_4 = 1$ şi operatorul Z_2 se scrie

$$Z_2 = b_2X_2 + b_3X_3 + X_4 .$$

Alegînd ca al treilea operator pe $T_3 = Z_3 - c_4Z_2$, avem

$$T_3 = \alpha X_2 + \beta X_3,$$

unde am pus $\alpha = c_2 - c_4b_2$, $\beta = c_3 - c_4b_3$.

Pentru ca operatorii Y_1, Z_2, T_3 să formeze grup, trebuie ca $\beta = 0$. De aici rezultă că putem lua $\alpha = 1$ şi deci avem $T_3 = X_2$. Luînd acum în locul operatorului Z_2 operatorul $Z_2 - b_2T_3$, regăsim grupul G_3''.

Să presupunem acum că $a_3 = a_4 = 0$ şi $a_2 \neq 0$. În acest caz, printr-o schimbare de parametrii putem obţine $a_2 = 1$ şi deci

$$Y_1 = a_1X_1 + X_2.$$

Alegînd ca ceilalţi doi operatori pe $Z_2 = Y_2 - b_2Y_1$ şi $Z_3 = Y_3 - c_2Y_1$, avem

$$Z_2 = b_1' X_1 + b_3' X_3 + b_4' X_4, \quad Z_3 = c_1' X_1 + c_3' X_3 + c_4' X_4 .$$

Dacă $b_3' = b_4' = 0$, rezultă $b_1' \neq 0$, adică luînd $b_1' = 1$,

$$Z_2 = X_1 .$$

Luînd în locul operatorilor Y_1 şi Z_3 operatorii

$$Z_1 = Y_1 - a_1 Z_2 = X_2, \quad T_3 = Z_3 - c_1' Z_2 = c_3'X_3 + c_4' X_4,$$

găsim subgrupurile G_3' sau G_3'' după cum $c_4' = 0$ sau $c_4' \neq 0$.

Dacă $b_4' = 0$, $b_3' \neq 0$, luînd $b_3' = 1$, avem

$$Z_2 = b_1'X_1 + X_3.$$

Vom alege ca al treilea operator pe $T_3 = Z_3 - c_3'Z_2$, adică pe

$$T_3 = \alpha X_1 + c_4' X_4,$$

unde am pus $\alpha = c_1' - c_3' b_1'$.

Punînd condiţia ca operatorii X_1, Z_2, T_3 să formeze grup, obţinem $c_4' = 0$. De aici rezultă $\alpha \neq 0$, adică $\alpha = 1$ şi luînd în loc de operatorii Y_1 şi Z_2 operatorii $Y_1 - a_1T_3$ respectiv $Z_2 - b_1' T_3$, găsim grupul G_3'.

Dacă $b_4' \neq 0$, putem lua $b_4' = 1$ şi deci

$$Z_2 = b_1'X_1 + b_3'X_3 + X_4.$$

Luînd $T_3 = Z_3 - c_4' Z_4$, avem

$$T_3 = \alpha X_1 + \beta X_3,$$

unde am notat $\alpha = c_1' - c_4' b_1'$, $\beta = c_3' - c_4' b_3'$.

Pentru ca operatorii $Y_1 Z_2$ şi T_3 să formeze grup, trebuie ca $\beta = 0$. De aici deducem $\alpha \neq 0$, adică $\alpha = 1$ şi luînd în loc de Y_1 şi Z_2 operatorii $Y_1 - a_1 T_3$ respectiv $Z_2 - b_1' T_3$, găsim grupul G_3''.

Să considerăm acum cazul $a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$. Luînd $a_3 = 1$, avem

$$Y_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + X_3.$$

Vom alege drept ceilalţi doi operatori ai grupului operatorii

$$Z_2 = Y_2 - b_3 Y_1 = b_1' X_1 + b_2' X_2 + b_4 X_4,\ Z_3 = Y_3 - c_3 Y_1 = \\ = c_1' X_1 + c_2' X_2 + c_4 X_4.$$

Dacă $b_1' = b_2' = 0$, rezultă $b_4 \neq 0$ şi deci putem presupune $b_4 = 1$. Luînd în loc de Z_3 operatorul $T_3 = Z_3 - c_4 Z_2$, se verifică imediat că operatorii Y_1, Z_2 şi T_3 nu formează grup.

Dacă $b_1' = 0$, $b_2' \neq 0$, putem presupune $b_2' = 1$ şi deci

$$Z_2 = X_2 + b_4 X_4.$$

Luînd ca al treilea operator pe $T_3 = Z_3 - c_2' Z_2$, avem

$$T_3 = c_1' X_1 + \alpha X_4.$$

unde $\alpha = c_4 - c_2' b_4$.

Dacă $\alpha = 0$, putem presupune că $c_1' = 1$ şi deci $T_3 = X_1$. Luînd în loc de Y_1 operatorul $Z_1 = Y_1 - a_1 T_3$ şi punînd condiţia ca Z_1, Z_2 şi T_3 să formeze grup, obţinem $b_4 = 0$ şi deci găsim grupul G_3'. Dacă $\alpha \neq 0$, putem considera că $\alpha = 1$ şi se verifică imediat că operatorii Y_1, Z_2 şi T_3 nu formează grup.

Dacă $b_1' \neq 0$, considerăm că $b_1' = 1$ şi luăm ca al treilea operator pe

$$T_3 = Z_3 - c_1' Z_2 = \alpha X_2 + \beta X_4,$$

unde $\alpha = c_2' - c_1' b_2'$, $\beta = c_4 - c_1' b_4$.

Dacă $\beta = 0$ putem presupune că $\alpha = 1$ şi din condiţia ca operatorii Y_1, Z_2 şi T_3 să formeze grup deducem $b_4 = 0$. Obţinem astfel grupul G_3'.

Dacă $\beta \neq 0$ putem lua $\beta = 1$ şi se verifică imediat că operatorii Y_1, Z_2 şi T_3 nu formează grup.

În sfîrşit, să considerăm cazul în care $a_4 \neq 0$, deci $a_4 = 1$. Vom lua în loc de Y_2 şi Y_3 operatorii

$$Z_2 = Y_2 - b_4 Y_1 = b_1' X_1 + b_2' X_2 + b_3' X_3,\ Z_3 = Y_3 - c_4\, Y_1 = c_1' X_1 + \\ + c_2' X_2 + c_3' X_3.$$

Dacă $b_1' = b_2' = 0$, rezultă $b_3' \neq 0$ şi deci $b_3' = 1$. Atunci putem presupune că subgrupul este definit de operatorii

$$Z_1 = Y_1 - a_3 Z_2 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + X_4,\ Z_2 = X_3,$$

$$T_3 = Z_3 - c_3' Z_2 = c_1' X_1 + c_2' X_2.$$

Punînd condiţia ca aceşti operatori să formeze grup, rezultă $c_1' = c_2' = 0$ ceea ce este absurd.

Dacă $b_1 = 0$, $b'_2 \neq 0$ deducem $b'_2 = 1$ și putem considera că subgrupul este definit de operatorii

$$Z_1 = Y_1 - a_2Z_2 = a_1X_1 + a'_3X_3 + X_4,\ Z_2 = X_2 + b'_3X_3,$$

$$T_3 = Z_3 - c'_2Z_2 = c'_1X_1 + c''_3X_3 .$$

Dacă $c''_3 = 0$, rezultă $c'_1 \neq 0$, adică $c'_1 = 1$ și deci

$$T_3 = X_1.$$

Punînd condiția ca operatorii Z_1, Z_2 și T_3 să formeze grup, deducem $b'_3 = 0$ și grupul este identic cu G''_3.

Dacă $c''_3 \neq 0$ se verifică imediat că operatorii Z_1, Z_2 și T_3 nu formează grup.

Să presupunem acum că $b'_1 \neq 0$, deci $b'_1 = 1$. În acest caz putem considera că cei trei operatori ai grupului sînt

$$Z_1 = Y_1 - a_1Z_2 = a'_2X_2 + a'_3X_3 + X_4, Z_2 + X_1 + b'_2X_2 + b'_3X_3,$$

$$T_3 = Z_3 - c'_1 Z_2 = c''_2X_2 + c''_3X_3 .$$

Dacă $c''_3 = 0$, rezultă $c''_2 = 1$ și deci

$$T_3 = X_2.$$

Pentru ca operatorii Z_1, Z_2 și T_3 să formeze grup, trebuie ca $b'_3 = 0$ și grupul este identic cu G''_3.

Dacă $c''_3 \neq 0$, operatorii Z_1, Z_2 și T_3 nu formează grup.

Avem deci teorema :

Subgrupurile cu trei parametri ale grupului $G_4(1)$ pot fi reduse, prin schimburi de parametri, la una din formele

$$G'_3 \equiv [X_1, X_2, X_3],\ G''_3 \equiv [X_1, X_2, \alpha X_3 + X_4].$$

II

Vom determina acum subgrupurile cu doi parametri ale grupului $G_4(1)$. Fie

$$Y_1 = a_hX_h,\quad Y_2 = b_hX_h,\quad (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

operatorii unui astfel de subgrup.

Vom presupune mai întîi că $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. De aici deducem că $a_1 \neq 0$, adică $a_1 = 1$. Deci

$$Y_1 = X_1.$$

Considerînd ca al doilea operator al grupului operatorul $Z_2 = Y_2 - b_1X_1$ și punînd condiția ca Y_1 și Z_2 să formeze grup, rezultă $b_3 = 0$, deci

$$Z_2 = b_2X_2 + b_4X_4.$$

Dacă $b_4 = 0$, atunci $b_2 \neq 0$ și obținem subgrupul

$$G'_2 \equiv [X_1,\ X_2].$$

Dacă $b_4 \neq 0$, putem lua $b_4 = 1$, şi avem subgrupul

$$G_2 \equiv [X_1,\ \alpha X_2 + X_4].$$

Prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 + \alpha \\ \bar{x}^2 = x^2, \\ \bar{x}^3 = 2\alpha x^2 + x^3 + (\alpha)^2 \end{cases}$$

putem presupune că $\alpha = 0$ şi deci avem subgrupul

$$G_2'' \equiv [X_1,\ X_4].$$

Să considerăm acum cazul în care $a_3 = a_4 = 0$, $a_2 \neq 0$. Putem lua $a_2 = 1$ şi deci

$$Y_1 = a_1 X_1 + X_2.$$

Alegînd ca al doilea operator al grupului pe

$$Z_2 = Y_2 - b_2 Y_1 = b_1' X_1 + b_3' X_3 + b_4 X_4$$

şi punînd condiţia ca Y_1 şi Z_2 să formeze grup, deducem $b_3 = 0$.

Dacă $b_4 = 0$, putem presupune că $b_1' = 1$, şi luînd în loc de Y_1 operatorul $Y_1 - a_1 Z_2$, obţinem grupul

$$G_2 \equiv [X_2,\ X_4]$$

care prin schimbarea variabilelor x^1 şi x^2 între ele se reduce la grupul G_2''.

Dacă $b_4 \neq 0$, putem considera $b_4 = 1$ şi avem subgrupul

$$G_2 \equiv [\alpha X_1 + X_2,\ \beta X_1 + X_4].$$

Prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = -\alpha x^2 + x^1 + \beta, \\ \bar{x}^2 = x^2, \\ \bar{x}^3 = (\alpha x^2)^2 - 2\alpha x^1 x^2 - 2\alpha\beta x^2 + 2\beta x^1 + x^3 + (\beta)^2, \end{cases}$$

obţinem $\alpha = \beta = 0$, deci avem subgrupul G_2''.

Să presupunem acum că $a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$, adică $a_3 = 1$.

În acest caz, luînd ca al doilea operator al grupului pe

$$Z_2 = Y_2 - b_3\ Y_1 = b_1' X_1 + b_2' X_2 + b_4 X_4.$$

şi punînd condiţia ca operatorii Y_1, Z_2 să formeze grup, deducem $b_1' = a_2 b_4$, $b_2' = - a_1 b_4$, de unde rezultă $b_4 \neq 0$. Cei doi operatori ai grupului sînt deci

$$Y_1 = \alpha X_1 = \beta X_2 + X_3, \quad Y_2 = \beta X_1 - \alpha X_2 + X_4.$$

Prin schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 + \beta \\ \bar{x}^2 &= x^2 - \alpha \\ \bar{x}^3 &= 2\beta x^1 - 2\alpha x^2 + x^3 + \alpha^2 + \beta^2, \end{aligned}$$

obținem $\alpha = \beta = 0$, deci avem subgrupul

$$G_2''' = [X_3, X_4].$$

În sfîrșit, să considerăm cazul în care $a_4 \neq 0$, adică $a_4 = 1$, deci

$$Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + X_4.$$

Vom alege ca al doilea operator al grupului pe

$$Z_2 = Y_2 - b_4Y_1 = b_1'X_1 + b_2'X_2 + b_3'X_3.$$

Dacă $b_2' = b_3' = 0$, rezultă $b_1' = 1$, deci

$$Z_2 = X_1.$$

Luînd în loc de Y_1 operatorul

$$Z_1 = Y_1 - a_1Z_1 = a_2X_2 + a_3X_3 + X_4$$

și punînd condiția ca operatorii Z_1 și Z_2 să formeze grup, obținem $a_3 = 0$, adică avem subgrupul

$$G_2 \equiv [X_1, \alpha X_2 + X_4],$$

pe care l-am redus anterior la G_2''.

Dacă $b_3' = 0$, $b_2' \neq 0$, putem lua $b_2' = 1$, adică

$$Z_2 = b_1'X_1 + X_2.$$

Alegînd în loc de Y_1 operatorul

$$Z_1 = Y_1 - a_2Z_2 = a_1'X_1 + a_3X_3 + X_4$$

și punînd condiția ca operatorii Z_1 și Z_2 să formeze grup, deducem $a_3 = 0$, deci avem subgrupul

$$G_2 \equiv [\alpha X_1 + X_2, \beta X_1 + X_4]$$

pe care l-am redus anterior la G_2''.

Dacă $b_3' \neq 0$, adică $b_3' = 1$, avem

$$Z_2 = b_1'X_1 + b_2'X_2 + X_3.$$

Vom lua în loc de Y_1 operatorul

$$Z_1 = Y_1 - a_3Z_2 = a_1'X_1 + a_2'X_2 + X_4.$$

Pentru ca operatorii Z_1 și Z_2 să formeze grup, trebuie ca

$$b_1' = -a_2', \; b_2' = a_1',$$

deci avem subgrupul

$$G_2 \equiv [\alpha X_1 - \beta X_2 + X_3, \quad \beta X_1 + \alpha X_2 + X_4]$$

care se reduce la G_2'''.

Avem deci teorema

Subgrupurile cu doi parametri ale grupului $G_4(1)$ pot fi reduse, prin schimbări de variabile și parametri, la una din formele

$$G_2' \equiv [X_1, X_2],\ G_2'' \equiv [X_1,\ X_4],\ G_2''' \equiv [X_3,\ X_4].$$

III

Pentru a determina subgrupurile cu un parametru ale grupului G_4 să considerăm operatorul

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4.$$

Dacă $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, rezultă $a_1 \neq 0$, și deci avem subgrupul

$$G_1' \equiv [X_1].$$

Dacă $a_3 = a_4 = 0$, $a_2 \neq 0$, printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_2 = 1$ și operatorul Y se scrie

$$Y = \alpha X_1 + X_2.$$

Prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^2, \\ \bar{x}^2 = x^1 - \alpha x^2, \\ \bar{x}^3 = (\alpha x^2)^2 - 2\alpha x^1 x^2 + x^3 \end{cases}$$

obținem

$$Y = \overline{X}_1,$$

deci avem același subgrup G_1'.

Dacă $a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$, putem lua $a_3 = 1$ și operatorul Y se scrie

$$Y = \alpha X_1 + \beta X_2 + X_3.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = x^1 - x^2 + \alpha + \beta, \\ \bar{x}^2 = x^1 + x^2 - \alpha + \beta, \\ \bar{x}^3 = -(x^1)^2 - (x^2)^2 + x^3, \end{cases}$$

deducem

$$Y_1 = \overline{X}_3,$$

deci în acest caz obținem subgrupul

$$G_1'' \equiv [X_3].$$

Dacă $a_4 \neq 0$, putem lua $a_4 = 1$ și deci

$$Y = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + X_4.$$

Prin schimbarea de variabile

$$\begin{aligned}
\bar{x}^1 &= x^1 - \gamma x^2 + \alpha,\\
\bar{x}^2 &= \gamma x^1 + x^2 + \beta\\
\bar{x}^3 &= (\beta\gamma + \alpha)x^1 + (\beta - \alpha\gamma)x^2 + (1 + \gamma^2)x^3 + \frac{\alpha^2+\beta^2}{2},
\end{aligned}$$

găsim

$$Y_1 = \gamma\,\bar{X}_3 + \bar{X}_4\,,$$

deci avem subgrupul

$$G_1''' \equiv [\gamma X_3 + X_4].$$

Rezultă teorema

Subgrupurile cu un parametru ale grupului $G_4(1)$ pot fi reduse prin schimbări de parametri și variabile, la una din formele

$$G_1' \equiv [X_1],\quad G_1'' \equiv [X_3],\ G_1''' \equiv [\gamma X_3 + X_4].$$

Primită la redacție la 10 iulie 1965

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47,
București

ELEMENTE DE TEORIA FASCICULELOR (II)

DE

NICOLAE POPESCU

Se prezintă capitolele II şi III ale seminarului de teoria fasciculelor. Capitolul II conţine cîteva rezultate privind categoriile de prefascicule cu multe aplicaţii, iar capitolul III se ocupă de categoriile de fracţii şi aplicaţiile lor.

INTRODUCERE

În această parte a lucrării sînt expuse capitolele II şi III din seminarul de „Teoria fasciculelor'' ţinut la Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România în anul 1964—1965. Se prezintă teoremele fundamentale privind functorii adjuncţi pentru categoriile de prefascicule (cap. II) şi rezultatele de bază din teoria categoriilor de fracţii (cap. III). Expunerile în cadrul seminarului au fost făcute de Andrei Duma şi Octavian Stănăşilă; redactarea (ca de altfel a întregului seminar) aparţinînd autorului.

CAPITOLUL II

CATEGORII DE PREFASCICULE

§ 1. PROPRIETĂŢI DE PERMANENŢĂ

Fie U un univers; toate categoriile considerate sînt, pînă la menţiunea contrarie, U-categorii. Păstrăm toate convenţiile şi notaţiile din capitolul I.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi I o categorie element al lui U. Categoria $\mathcal{C}^I =$ $=$ Fonct $(I, \mathcal{C})$ are foarte multe din proprietăţile lui $\mathcal{C}$. Vom face uz constant de teorema de permanenţă a lui Grothendieck ((1), cap. I). Reamintim că toate construcţiile din $\mathcal{C}^I$ (privind limite inductive, limite proiective, nucleu, conucleu etc.) se fac „pe componente'', sau argument

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 3, P. 407–456, BUCUREŞTI, 1966

cu argument. Aceasta revine la aceea că, pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$, functorul $F \rightsquigarrow FX$ de la $\mathcal{C}^I$ la $\mathcal{C}$ ($F \in \text{Ob}\ \mathcal{C}^I$) este un functor ce comută cu limitele inductive și proiective (reprezentabile) este exact etc. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie perfectă, $\mathcal{C}^I$ este de asemenea.

Dacă $\mathcal{C}$ este o bicategorie și $\mathcal{C}^I$ este.

Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie mică și $\mathcal{C}^\wedge$ categoria prefasciculelor peste $\mathcal{C}$. Evident $\mathcal{C}^\wedge$ se identifică cu Fonct ($\mathcal{C}^0$, Ens) și deci pentru ea sînt încă valabile concluziile teoremei de permanență. Fie $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$ functorul canonic : $h(x) = h_X$. Știm (cap. I, propoziția 1.4) că h este un functor deplin fidel și comută cu limitele proiective reprezentabile din $\mathcal{C}$ (cap. I, propoziția 1.20).

Fie $F \in \text{Ob}\ \mathcal{C}^\wedge$. Notăm cu $\mathcal{C}/F$ categoria ale cărei obiecte sînt perechi de tipul (X, α), cu $X \in \text{Ob}\ \mathcal{C}$ și $\alpha : h_X \to F$, un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$. Un morfism $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ este, prin definiție, un morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$, cu $h(f) \circ \alpha = \beta$. $\mathcal{C}/F$ este o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}^\wedge/F$ (categoria obiectelor peste F); $\mathcal{C}/F$ este o U-categorie mică. Notăm cu $s_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}$ functorul : $s_F(X, \alpha) = X$. Fie $t : \varinjlim h \circ s_F \to F$ morfismul canonic, definit cu condiția că $t \circ \alpha = p_{X,\alpha}$, $p_{X,\alpha} : h \circ s_F(X, \alpha) \to \varinjlim h \circ s_F$ fiind morfismele structurale.

PROPOZIȚIA 2.1. *Morfismul t este un izomorfism functorial.*

Demonstrație. Deoarece construcțiile în $\mathcal{C}^\wedge$ se fac „pe componente”, vom dovedi că pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$, $t_X : (\varinjlim h \circ s_F)(X) \to FX$ este un izomorfism. Fie deci $x \in FX$ și $\varphi^x : h_X \to F$ un morfism din $C^\wedge$, de clasă fundamentală x. (cap. I, definiția 1.5). În categoria $\mathcal{C}/F$ există deci obiectul (X, φ^x) și deci t_X este epimorfism conform cu diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
h_X(X) \arrow[rr, "\varphi^x_x"] \arrow[dr, "p_{X}, \varphi^x"'] & & F \\
& (\varinjlim h \circ s_F)(X) \arrow[ur, "t_X"'] &
\end{tikzcd}$$

Fie acum $u, v \in (\varinjlim h \circ s_F)(X)$, cu $x = t_X(u) = t_X(v)$.

Fie (X, α), (Z, β) obiecte din $\mathcal{C}/X$ și $f \in h_Y(X)$, $g \in h_Z(X)$, cu $p_{Y,\alpha}(X)(f) = u$, $p_{Z,\beta}(X)(g) = v$. Fie $\varphi^x : h_X \to F$ morfismul din $\mathcal{C}^\wedge$ de clasă fundamentală x.

Atunci $\alpha_X(f) = \beta_Y(g) = x$. Fie $y \in FY$, $z \in FZ$ clasele fundamentale ale lui α și β respectiv. În $\mathcal{C}^\wedge$ avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
h_X \arrow[r, "h(f)"] \arrow[d, "h(g)"'] \arrow[dr, "\varphi^x"] & h_Y \arrow[d, "\alpha"] \\
h_Z \arrow[r, "\beta"'] & F
\end{tikzcd}$$

Pentru aceasta, fie $T \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi m un element din $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$ $((\alpha_T \circ h)(f))(m) = \alpha_T(f \circ m) = F(f \circ m)(y)$ şi $((\beta_T \circ h)(g))(m) = \beta_T(g \circ m) = F(g \circ m)(z)$. Pe de altă parte, $\varphi_T^{\alpha}(m) = F(m)(x)$, şi $x = F(f)(y)$, $x = F(g)(z)$. Aşa dar $F(f \circ m)(y) = (F(m) \circ F(f))(y) = F(m)(x) = (F(m) \circ F(g))(z) = F(g \circ m)(z)$. De aici, concludem, direct, că $u = v$, ceea ce arată că t_X este un monomorfism în Ens, şi deci, din cele de mai sus, t este un izomorfism din $\mathcal{C}^{\wedge}$.

q.e.d.

Corolar. *În ipotezele propoziţiei dovedite, fie* F, $G \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^{\wedge}$; *atunci* $F = \varinjlim h \circ s_F = \varinjlim\limits_{(X,\, \alpha) \in \mathcal{C}/F} (h_X, \alpha)$ *şi*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(F, G) = \varprojlim_{(X,\, \alpha) \in \mathcal{C}/F} G(X).$$

Observaţie. Propoziţia dovedită afirmă că orice obiect din $\mathcal{C}^{\wedge}$ este conul final al categoriei $\mathcal{C}/F$; mai precis, categoria $\mathcal{C}/F$ are un obiect final. Vom spune că orice obiect al lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ este o limită inductivă de functori reprezentabili. Aceasta este de cea mai mare importanţă pentru multe considerente din matematică. Pentru a exprima acest fapt de multe ori vom spune că un obiect F din $\mathcal{C}^{\wedge}$ este o limită inductivă de functori reprezentabili h_{X_α} sau chiar X_α, identificînd pe $\mathcal{C}$ cu o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}^{\wedge}$. Vom spune despre un obiect X din $\mathcal{C}^{\wedge}$ că este în $\mathcal{C}$ şi vom înţelege prin aceasta că X este un obiect izomorf cu un obiect de tipul $h_{X'}$, $X' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

Propoziţia 2.2. *Fie* $\mathcal{C}$ *o* U*-categorie şi* V *un univers care conţine universul* U *şi* $i : \mathcal{C}_{\hat{U}} \to \mathcal{C}_{\hat{V}}$ *functorul de injecţie (natural). Functorul* i *comută cu limitele inductive şi proiective reprezentabile. În plus, orice subobiect al lui* $i(F)$ *este izomorf cu imaginea prin* i *a unui singur subobiect al lui* F *(aşadar, există o bijecţie între ansamblul subobiectelor lui* F *şi ansamblul subobiectelor lui* $i(F)$.

Demonstraţia este imediată, folosind propoziţia 2.1.

Observaţie. Fie $\mathcal{C}$ o categorie, element al lui U, cu limite inductive reprezentabil. Fie $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ formată din obiectele F cu F limită proiectivă de obiecte din $\mathcal{C}$, $F = \varprojlim X_\alpha$. Evident, un astfel de functor comută cu limitele inductive, adică transformă limitele inductive în proiective. Conform cu duala propoziţie 1.24, deducem că F este reprezentabil.

Aşadar $\mathcal{C}$ coincide cu $\mathcal{C}_1$. Dacă $\mathcal{C}$ nu este o U-categorie mică, atunci, cu notaţiile de mai sus, F este reprezentabil dacă şi numai dacă este U-mărginit, în felul următor : există o mulţime $\{X_i\}_{i \in I}$ de obiecte ale lui $\mathcal{C}$ astfel că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi $x \in FX$, există $i \in I$, $f : X \to X_i$ morfism din $\mathcal{C}$ şi $x_i \in F(X_i)$, cu $F(f)(x_i) = x$.

În general, fie $\mathcal{C}$ o U-categorie mică şi F un obiect din $\mathcal{C}^{\wedge}$. F se zice pro-reprezentabil dacă $F = \varprojlim\limits_{\alpha \in \mathrm{Ob}\, I} X_\alpha$, unde I este o U-categorie mică (cerinţa ca I să fie U-categorie mică nu este esenţială). Dacă $G \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, cu $G = \underset{\beta\in \mathrm{Ob}\, I}{\underset{\longleftrightarrow}{\lim}} X_\beta$, atunci

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(G, F) = \underset{\beta}{\underset{\longleftarrow}{\lim}}\ \underset{\alpha}{\underset{\longleftarrow}{\lim}}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X_\beta, X_\alpha).$$

Fie $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele F, care sînt limite proiective ale functorului $h\circ c_F : F/\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$ (cu $F/\mathcal{C}$ am notat categoria obiectelor de sub F, construită în mod dual categoriei $\mathcal{C}/F$; c_F este functorul canonic construit dual cu s_F). Evident, dacă $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, atunci $X = \underset{\longleftarrow}{\lim}\, h\circ c_X$. Există deci un functor deplin fidel $h_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$. Vom studia ulterior acest functor.

Fie acum $\mathcal{C}$ o U-categorie mică, $\mathcal{D}$ o categorie cu limite inductive şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor. Putem defini un functor $T_1 : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{D}$ astfel: pentru orice $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^\wedge$ definim

$$T_1(F) = \underset{\longrightarrow}{\lim}\, T\circ s_F,$$

unde $s_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}$, este functorul canonic construit mai sus. Dacă $u : F \to G$ este un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$, atunci u induce un functor $u_* : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}/G$, definit canonic: $u_*(X, f) = (X, u\circ f)$. Evident, u_* defineşte un morfism unic $T_1(u) : T_1(F) \to T_1(G)$. Verificarea faptului că T_1 astfel definit este un functor, este imediată.

PROPOZIŢIA 2.3. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie element al lui U şi $\mathcal{D}$ o categorie cu limite inductive. Asocierea $T \rightsquigarrow T$ dă o echivalenţă între categoria* Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *a* (*functorilor covarianţi*) *şi categoria* Ad $(\mathcal{C}^\wedge, \mathcal{D})$ *formată din perechi* (T, S) *cu* $T : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{D}$ *un functor şi S adjunct la dreapta lui T* (*morfismele canonic definite*). *De asemenea există o echivalenţă între* Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *şi categoria functorilor de la $\mathcal{C}^\wedge$ la $\mathcal{D}$ ce comută cu limitele inductive.*

Demonstraţie. Evident, asocierea de mai sus $T \rightsquigarrow T_1$ este functorială, fapt uşor de verificat din construcţia lui T_1. Mai mult, dacă t : Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to F_i(\mathcal{C}^\wedge, \mathcal{D})$ este functorul de mai sus, cu $F_i(\mathcal{C}^\wedge, \mathcal{D})$ categoria functorilor de la $C^\wedge$ la $\mathcal{D}$ ce comută cu limitele inductive, şi dacă $u, v : T \to T'$ sînt morfisme din Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, atunci din $t(u) = t(v)$ se deduce că $u = v$, fapt mai mult decît evident. Dacă $u : t(T) \to t(T')$, atunci în particular din aceea că $t(T)\circ h = T$ se deduce că $u = t(v)$ cu $v : T \to T'$, deoarece t (?) sînt functori ce comută cu limitele inductive; evident că $t(T_1 \circ h) = T_1$.

Pentru a termina o parte a demonstraţiei, arătăm că t (?) este un functor ce comută ca limitele inductive. Pentru aceasta fie $I \in \mathrm{Ob}$ Cat U şi $H : I \to \mathcal{C}^\wedge$ un functor; fie $F = \underset{i}{\underset{\longrightarrow}{\lim}}\, H_i$ şi $h_i : H_i \to F$ morfismele structurale, $i \in \mathrm{Ob}\, I$. Obiectele de tipul $(X, h\circ f)$ cu $(f, X) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/H_i$, dau un sistem cofinal în $\mathcal{C}/F$; pentru aceasta fie $(Y, g) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/F$ şi $y = f_Y(1_Y)$ clasa sa fundamentală din FY. Fie $i \in \mathrm{Ob}\, I$ şi $y' \in H_i(Y)$ cu $h_{iY}(y') = y$. Atunci, există morfismul $l : Y \to H_i$, cu $h_i \circ l = g$. Aşadar, pentru a calcula pe F este suficient să considerăm în $\mathcal{C}/F$ doar subcategoria plină mai sus amintită. Deci, dacă $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, atunci

$$T_1(\underset{\longrightarrow}{\lim}\, H_i) = T_1(F) = \underset{\longrightarrow}{\lim}\,(T\circ s_F) = \underset{\longrightarrow}{\lim}\,(T\circ \bar{s}_F);$$

prin $\bar{s}_F$ am notat restricţia lui s_F la subcategoria cofinală de mai sus. Dar evident că $\varinjlim (T \circ \bar{s}_F) = \varinjlim_i (T \circ s_{Hi}) = \varinjlim T_1 (H_i)$.

Fie acum $T_1 : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{D}$ un functor ce comută cu limitele inductive. Definim functorul $S_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^\wedge$ astfel : pentru $D \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$, $S_1 (D) : C \to \mathrm{Ens}$ şi lucrează astfel

$$S_1 (D) (X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}} (T_1 X, D) \quad (X = h_X)$$

Construim izomorfismul functorial

$$\varphi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}} (T_1, ?) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} (?, S_1).$$

Fie mai întîi $? = X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ şi $D \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$. Atunci

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge} (X, S_1 D) = (S_1 D) (X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}} (T X, D).$$

Dacă $f : X \to S_1 D$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci există un morfism unic $g : T_X \to D$ cu $f_X (1_X) = g$. Punem $\varphi (f) = g$. Faptul că φ este un izomorfism functorial este imediat. Dacă $F \in Ob\ \mathcal{C}^\wedge$, $F = \varinjlim h \circ s_F$ şi deci

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}} (T (\varinjlim h \circ s_F), D) = \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}} (T_1 \cdot h \circ s_F, D) =$$

$$= \varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} (h \circ s_F, S_1 D) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge} (\varinjlim h \circ s_F\ S_1 D) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge} (F, S_1 D).$$

Egalităţile scrise sînt izomorfisme functoriale. Cititorul va verifica aceste fapte. Din cele de mai sus, propoziţia este complet dovedită.

Observaţie. Ultima parte a propoziţiei dovedite se obţine ca un caz cu totul particular, folosind duala propoziţiei 1.16. Am preferat însă demonstraţia directă. Numim propoziţia 2.3 ,,*Teorema de prelungire*''.

§ 2. APLICAŢII ALE TEOREMEI DE PRELUNGIRE

Fie $\mathcal{C}$ o categorie concretă ((2), cap. I) şi $S : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ functorul subiacenţă ; S este un functor fidel.

DEFINIŢIA 2.4. *Vom spune că $\mathcal{C}$ este o categorie cu ,,structură'' sau ,,de structură'', dacă ea are limite proiective şi functorul S admite un adjunct la stînga, de asemenea fidel.*

Categorii cu structură sînt, spre exemplu, categoriile : Top, Ab, Gr, Ann, Annc etc.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie element al lui U şi $\mathcal{D}$ o categorie cu structură, $S : \mathcal{D} \to \mathrm{Ens}$ functorul subiacenţă şi T un adjunct al său la stînga. Notăm cu Fonct $(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{D})$ categoria ,,prefasciculelor'' ,,cu structură'' de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{D}$.

DEFINIŢIA 2.5. *Vom spune că obiectul X al lui $\mathcal{C}$ are structură de $\mathcal{D}$-obiect, dacă prefasciculul $h_X : \mathcal{C} \to$ Ens se factorizează prin $\mathcal{D}$, adică există un functor contravariant $L_X : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ cu $S \circ L_X = h_X$.*

Observație. Din cele de mai sus, deducem că conceptul de obiect grup, obiect, inel etc. este un caz particular al definiției de mai sus.

Fie X, Y două obiecte ale lui $\mathcal{C}$, ambele cu structură de $\mathcal{D}$-obiect; un morfism $f : X \rightarrow Y$ se zice morfism de $\mathcal{D}$-obiecte, dacă există un morfism functorial $f' : L_X \rightarrow L_Y$ astfel ca diagrama

$$\begin{tikzcd}
h_X \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "hf"'] & S \circ L_X \arrow[d, "Sf'"] \\
h_Y \arrow[r, "\sim"] & S \circ L_Y
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă (izomorfismele functoriale sînt cele din definiția obiectului cu structură).

DEFINIȚIA 2.6. *Categoria $\mathcal{C}$ se zice categorie cu $\mathcal{D}$-structură, dacă orice obiect al său este obiect cu $\mathcal{D}$-structură și orice morfism al său morfism de obiecte cu $\mathcal{D}$-structură.*

Ca exemplu de categorii cu $\mathcal{D}$-structură putem cita orice categorie aditivă ($\mathcal{D} = \text{Ab}$).

Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu $\mathcal{D}$-structură; atunci functorul $S : \mathcal{D} \rightarrow \text{Ens}$ induce un functor : $S^{\wedge} : \overline{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}^{\wedge}$, unde $\overline{\mathcal{C}}$ este categoria prefasciculelor cu structură de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{D}$. Functorul $S^{\wedge}$ este fidel și admite un adjunct la stînga, după cum vom vedea imediat. Asupra categoriei $\overline{\mathcal{C}}$ facem următoarele observații :

a) Functorul $X \rightsquigarrow L_X$ definește pe $\mathcal{C}$ ca o subcategorie a lui $\overline{\mathcal{C}}$; notăm cu L acest functor; evident L comută cu limitele proiective reprezentabile din $\mathcal{C}$.

b) Dacă $F \in \text{Ob}\, \overline{\mathcal{C}}$ și $X \in \text{Ob}\, \mathcal{C}$, atunci există o injecție functorială ψ în F și X de la $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(L_X, F)$ la $F(X)$.

Dacă ψ este pentru orice X și F o bijecție, se zice că $\mathcal{C}$ este o categorie cu $\mathcal{D}$-structură tare. Așa este cazul, spre exemplu, dacă $\mathcal{C}$ este aditivă și $\mathcal{D} = \text{Ab}$ etc. Situație analogă se întîlnește și în cazul $\mathcal{D} = \text{Gr}$, Ann, Annc etc.

Evident, în cazul acesta functorul $L : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ este deplin fidel, ceea ce se vede imediat. Mai mult, în cazul acesta pentru categoria $\overline{\mathcal{C}}$ este valabilă propoziția 2.1 (făcînd ipoteza că $\mathcal{C}$ este un element al lui U). De asemenea, cititorul poate verifica ușor și valabilitatea propoziției 2.3, în care locul lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ este luat de $\overline{\mathcal{C}}$, iar al lui $\mathcal{D}$ de o categorie cu obiecte de D-structură cu limite inductive. Vom numi în acest caz propoziția 2.3 „*teorema de prelungire a categoriilor cu $\mathcal{D}$-structură forte*”, sau simplu „*teorema de prelungire forte*”.

a) Fie A un inel cu identitate nenulă; A este evident o categorie preaditivă, deci are structură de Ab-obiect. Notăm cu $\mathcal{C}_A$ categoria prefasciculelor cu structură de grup aditiv de la A la Ab; un prefascicul este deci un grup abelian M astfel că dacă $a \in A$, adică un element din $\text{Hom}_A(A, A)$, (prin a înțelegem un morfism de la A la A, A fiind privit ca un obiect „abstract”, compunerea morfismelor din A fiind compunerea în categoria respectivă); atunci $M(a) : M \to M$ este un endomorfism de grupuri abeliene şi $M(a \circ b) = M(b) \circ M(a)$. Aşadar un functor contravariant de la A la Ab este un A-modul drept peste A. Remarcăm că categoria $A^\wedge$ nu este altceva decît categoria mulţimilor pe care operează A.

Functorul $L : A \to \mathcal{C}_A$ este cel care asociază lui A pe A_d structura sa de A-modul drept, fapt imediat de constatat. L este evident deplin fidel.

Un functor covariant de la categoria A la categoria Ab, constă prin a se da un grup abelian N şi o structură de A-modul stîng pe N. Fie acum $M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_A$; atunci categoria A/M are ca obiecte perechi (A_d, m) cu A_d structura de A-modul drept al lui A şi m un element din M, $f : (A_d, m) \to (A_d, m')$ este prin definiţie un element f al lui A, cu $m \circ f = m'$, M este evident conul final al diagramei $L \circ s_M$ ($s_M : A/M \to A$ este functorul canonic...). Dar conform cu duala propoziţiei 1.11, deducem că M este conucleul cuplului

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & F_0 \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}$$

ceea ce revine la aceea că există şirul exact

$$(*)\ F_1 \xrightarrow{q} F_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$$

$q = d_1 - d_0$, şi F_0, F_1 sume directe de exemplare izomorfe cu A_d, respectiv. Aşadar, putem aplica teorema tare de prelungire. Considerăm functorul $N \circ s_M : A/M \to Ab$ şi definim functorul $N_1(M) = \varinjlim N \circ s_M$, ceea ce revine la un şir exact de tipul

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow N_1(M) \longrightarrow 0$$

şi care se obţine din şirul exact (*) înlocuind pe A_d cu N şi elementele lui A cu endomorfismele lui N corespunzătoare lor. Notăm cu $M \otimes_A N$ functorul astfel obţinut. Un adjunct la dreapta pentru el este functorul $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{Ab}(A_d \otimes_A N, X)$, a cărui structură de A-modul drept se obţine în mod evident.

Observaţie. Functorul $N_1 : \mathcal{C}_A \to \mathrm{Ab}$ se numeşte functorul produs tensorial cu N, la stînga. Cititorul poate obţine o propoziţie duală, schimbînd pe A cu A°, inelul opus (sau ceea ce este acelaşi lucru categoria duală).

DEFINIŢIA 2.7. *Cu notaţiile de mai sus A-modulul stîng N se zice plat dacă functorul $N_1 = ? \otimes_A N$ este exact la stînga.*

Deoarece Ab este o categorie cu scufundare injectivă, din propoziţia 1 .32 se deduce

PROPOZIŢIA 2.8. *Fie A un inel cu identitate şi N un A-modul stîng (unitar). Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

a) *N este un modul plat.*

b) *Functorul $X \rightsquigarrow Hom_{Ab}(N, X)$ de la Ab la $\mathcal{C}_A$ păstrează injectivele,*

c) *Obiectul* $\mathrm{Hom}_{Ab}(N, T)$ *din $\mathcal{C}_A$ este injectiv, cu $T = R/Z$, cogeneratorul categoriei* Ab ((1), cap. I)).

Demonstraţie. Echivalenţa *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) rezultă din propoziţia amintită. Evident b) $\Rightarrow$ c), deoarece T este un obiect injectiv din Ab. Pentru a verifica că c) $\Rightarrow$ b) spre exemplu, observăm că orice grup abelian X este subgrup într-un produs direct $\prod_{i \in I} T_i$, cu $T_i \simeq T$ pentru orice $i \in T$; de asemenea că $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(N, ?)$ comută cu produsele directe şi că un produs de injective este încă un injectiv, iar un sumand direct într-un injectiv este injectiv.

b) Fie A, B două inele şi $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ categoriile de module drepte respective. Evident, $\mathcal{C}_A$ are (pentru orice A) o structură de Ab-categorie cu limite inductive. Un functor de la categoria A la categoria $\mathcal{C}_B$ este, prin definiţie, un obiect N din $\mathcal{C}_B$, adică un B-modul drept, şi care este şi A-modul stîng. Dar, dacă $a \in A$, endomorfismul $\varphi_a : N \to N$ corespunzător este un endomorfism de B-module, deci pentru orice $b \in B$ şi orice $n \in N$, avem $(an)b = a(nb)$.

Aşadar N este un $A-B$-bimodul. Aplicînd teorema de prelungire aici, deducem că există un functor notat încă $? \otimes_A N : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}_B$ care îl prelungeşte pe N şi care are ca adjunct la dreapta functorul $\mathrm{Hom}_B(N, ?) : \mathcal{C}_B \to \mathcal{C}_A$. Mai mult, categoria $A-B$-bimodulelor este echivalentă cu categoria perechilor de functori (T, S) cu $T : C_A \to C_B$ un functor şi S un adjunct al său la dreapta şi în care morfismele se definesc canonic, cu condiţiile evidente de compatibilitate. Din teorema de prelungire forte, mai deducem că singurii functori între categoriile de module care admit adjuncţi la dreapta sînt „produsul tensorial" şi orice functor între două categorii de module care comută cu limitele inductive (care comută cu sumele directe şi este exact la dreapta) are adjunct la dreapta şi deci coincide cu produsul tensorial.

c) Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană şi A un inel cu identitate nenulă ; vom spune că $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ este un A-obiect dacă este definit un homomorfism de inele $\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. Notăm cu $\mathcal{C}^A$ categoria A-obiectelor : un morfism din $\mathcal{C}^A$ este prin definiţie un morfism $f : X \to Y$ din $\mathcal{C}$, cu X, Y, A-obiecte (astfel că dacă $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ şi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ au în mod canonic structură de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ (resp. de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$) module astfel că dacă $\alpha : X \to Z$ este un morfism din $\mathcal{C}$ şi $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, atunci $\alpha\lambda = \alpha \circ \lambda : X \to Z$), atunci cerem ca $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f)$ să fie pentru orice Z un morfism de A-module ($\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ este canonic A-modul prin intermediul lui φ). Definiţia categoriei $\mathcal{C}^A$ se poate da şi astfel (observăm că în toate cele de mai sus $\mathcal{C}$ nu trebuie să fie neapărat abeliană ci doar aditivă sau chiar preaditivă) : $\mathcal{C}^A$ este categoria prefasciculelor de la A° la $\mathcal{C}$. Admitem că în $\mathcal{C}$ există sume directe (indexate de elemente ale lui U) de exemplare izomorfe cu A-obiectul X ($X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$). Aceasta revine la aceea că orice functor $F : I \to \mathcal{C}$, cu I, U-categorie mică pentru care $F(i) = X$, pentru orice $i \in \mathrm{Ob}\,I$, are în $\mathcal{C}$ o limită inductivă : pentru aceasta facem apel la construcţia limitei inductive ca un conucleu de săgeată dublă.

A da pe X o structură de A-obiect revine la a defini un functor covariant de la categoria A la categoria $\mathcal{C}$. Definim acum un functor $X_1 : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ astfel : (în mod evident) : Pentru orice $M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_A$ avem : $M = \varinjlim L \circ s_M$ (folosim notațiile de mai sus). Atunci $X_1 (M) = \varinjlim X \circ s_M$ cu $X : A \to \mathcal{C}$ functorul evident. Evident că limita $X_1 (M)$ există și ea nu depinde decît de M, A și X și nu de diagrama cu vîrfuri egale cu A, de con final M. Functorul X_1 are un adjunct la dreapta notat$X^1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_A$ și care, oricărui obiect Y din $\mathcal{C}$ îi asociază A-modulul : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (X, Y)$ ca A-modul drept prin intermediul lui $\varphi : A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (X, X)$.

Fie acum că $\mathcal{C}$ satisface Ab3. Notăm cu Ad $(A, \mathcal{C})$ categoria perechilor (T, S) de functori $T : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ și S un adjunct al său la dreapta ; un morfism $(u, v) : (T, S) \to (T', S')$ din Ad $(A, \mathcal{C})$ este prin definiție un cuplu de morfisme : $u : T' \to T$ și $v : S \to S'$, astfel că diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (T, ?) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, dashed, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (u, ?)"'] & \mathrm{Hom}_A (?, S) \arrow[d, dashed, "\mathrm{Hom}_A (?, v)"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (T', ?) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_A (?, S')
\end{tikzcd}$$

este comutativă (izomorfismele orizontale fiind cele functoriale).

Din propoziția de prelungire forte rezultă că asocierea $X \rightsquigarrow X_1$ de la $\mathcal{C}^A$ la Ad $(A, \mathcal{C})$ este o echivalență de categorii. Mai rezultă de aici că un functor $T : \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ are adjunct la dreapta dacă și numai dacă comută cu limitele inductive sau comută cu sumele directe și este exact la dreapta.

Observație. Rezultatele de la punctul *c*) au fost în parte obținute de Lucian Bădescu (vezi capitolul I, Bibliografia).

Din cele de mai sus rezultă de asemenea că dacă T $: \mathcal{C}_A \to \mathcal{C}$ este un functor ce comută cu sumele directe și exact la dreapta, atunci $T (A_d)$ este canonic un A-obiect și deci există în $\mathcal{C}$ sume directe de exemplare izomorfe cu $T (A_d)$. Așadar T are un adjunct la dreapta.

d) Fie Δ categoria ale cărei obiecte sînt șiruri $(0,1, \ldots, n) = [n]$ de cîte $n + 1$ numere întregi ordonate în ordine naturală. Morfismele din Δ sînt funcțiile $f : [n] \to [m]$ nedescrescătoare. Notăm cu $\Delta^\wedge$ categoria prefasciculelor peste Δ (putem considera că universul U admite un cardinal transfinit). $\Delta^\wedge$ se numește categoria complexelor semisimpliciale. Fie $R : \Delta \to \mathrm{Top}$ functorul care asociază oricărui obiect [n] spațiul topologic inclus în I^{n+2} și format din toate $n + 3$-tuplele $(a_0, a_1, \ldots a_{n+2})$, astfel că $a_0 = 0$, $a_{n+2} = 1$ și $a_i \leqslant a_{i+1}$. Functorul R se va extinde la un functor $|\,?\,| : \Delta^\wedge \to \mathrm{Top}$, în baza teoremei de prelungire. Un adjunct la dreapta pentru $|\,?\,|$ este functorul $S : \mathrm{Top} \to \Delta^\wedge$ și care asociază oricărui spațiu topologic X complexul semisimplicial SX, pentru care $(SX)_n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}} (R\, [n], X)$. Ulterior vom detalia acest exemplu.

Remarcăm că în Ens, limitele inductive filtrate și conexe, comută cu limitele proiective finite (propoziția 1.18). Același fapt este valabil și pentru $\mathcal{C}^\wedge$, aceasta fiind o categorie de diagrame peste Ens. Admitem acum că $\mathcal{C}$ este o categorie cu sume fibrate şi că functorul $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$ comută cu sumele fibrate. Atunci pentru orice $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^\wedge$, categoria $\mathcal{C}/F$ este filtrată şi ea se descompune în „componente conexe'', adică subcategorii pline, astfel că $\mathcal{C}/F$ să fie de fapt suma directă în Cat U a acestor subcategorii. Pentru a face limita inductivă a functorului $h \circ S_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}^\wedge$, este suficient să o facem pentru orice componentă conexă şi suma directă este limita inductivă căutată.

Fie acum $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor, astfel că în $\mathcal{D}$ limitele inductive filtrate şi conexe comută cu limitele proiective finite (spre exemplu $\mathcal{D} = \mathrm{Ens}$, Ab sau Gr) şi functorul T comută cu limitele proiective finite; atunci aceeaşi proprietate o are şi functorul $T_1 : \mathcal{C}^\wedge \to D$, extinsul său.

§ 3. CÎŢIVA FUNCTORI ADJUNCŢI IMPORTANŢI

Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ două categorii elemente ale lui U, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor şi $\mathcal{D}$ o categorie. Considerăm categoriile :

Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ şi Fonct $(\mathcal{C}', \mathcal{D})$. Functorul T induce un functor $T_* :$ Fonct $(\mathcal{C}', \mathcal{D}) \to$ Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ (e vorba de functori covarianţi).

Functorul T_* se mai notează uneori cu T şi se numeşte functorul restricţie sau imagine directă.

PROPOZIŢIA 2.9. *Admitem că $\mathcal{C}$ este un element al lui U şi în $\mathcal{D}$ limitele inductive şi (proiective) sînt reprezentabile. Atunci functorul T_* admite un adjunct la stînga T^*, (respectiv la dreapta T^+).*

Observaţie. Această propoziţie dă o generalizare, într-un fel, a teoremei de prelungire.

Demonstraţie. Este suficient să dovedim cum se construieşte T^*, dacă $\mathcal{D}$ este cu limite inductive. Fie $Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. Notăm cu I_T^Y categoria $(T, \mathcal{C})/Y$. Dacă $f : Y \to Y'$ este un morfism din $\mathcal{C}'$, atunci el induce un functor $I_T^f : I_T^Y \to I_T^{Y'}$. Fie $s_Y : I_T^Y \to \mathcal{C}$ functorul evident (functorul „sursă'') : dacă $(X, g) \in \mathrm{Ob}\ I_T^Y$, atunci $s_Y(X, g) = X$. Evident, dacă $f : Y \to Y'$ este un morfism din $\mathcal{C}'$, atunci $s_{Y'} \circ I_T^f = s_Y$. Dacă $F \in \mathrm{Ob}$ Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ definim

$$T^*(F)(Y) = \varinjlim F \circ s_Y.$$

Faptul că $T^*(F)$ astfel definit este un functor, se deduce adhoc. Să dovedim că T^* este adjunct la stînga lui T_*. Fie pentru aceasta $\alpha : F \to T_* F'$, cu $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ şi $F' : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ functori covarianţi. Atunci $T_* F' = F' \circ T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Definim un morfism unic $\varphi(\alpha) : T^* F \to F'$, şi deci o funcţie de adjuncţie (după cum se va vedea). Dacă $Y' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}'$, atunci $(T^* F)(Y') = \varinjlim F \circ s_Y$. Pentru orice $(X, g) \in \mathrm{Ob}\ (\mathcal{C}, T)(Y)$, fie $\alpha_X : F(X) \to (F' \circ T)(X)$, morfismele functoriale şi $F'(f) : (F' \circ T)(X) \to F'(Y)$ morfismele evidente : Morfismele $F'(f) \circ \alpha_X$ dau un morfism (functorial) unic de la $\varinjlim F \circ s_Y$ la $F'(Y)$ notat $\overline{\alpha}_Y$ şi deci un morfism functorial $\overline{\alpha} : T^* F \to F'$.

Fie acum $\beta : T^* F \to F'$ un morfism functorial; atunci pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$, e dat un morfism $\beta_Y : (T^* F)(Y) \to F'(Y)$. Dar $(T^*F)(Y) = \varinjlim F \circ s_Y$. În particular, dacă $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, atunci $\beta_X : (T^* F)(TX) \to F'(TX)$. Dar este suficient să observăm că $(T^* F)(TX) = TX$, deoarece în categoria $(\mathcal{C}, T)/TX$ există un obiect final, egal cu $(TX, 1_X)$. Deci β_X definesc un morfism functorial de la F la $T_* F'$, notat $\overline{\beta}$. Se verifică imediat că asocierea $\alpha \rightsquigarrow \overline{\alpha}$; $\beta \rightsquigarrow \overline{\beta}$ sînt două funcţii una inversă celeilalte.

Observaţie. În cele de mai sus am omis ipoteza că $\mathcal{C}'$ este o U-categorie mică; acest fapt nu duce la o contradicţie, admiţînd tacit că $\mathcal{C}'$ este o V-categorie, mică, cu V un univers ce conţine pe U; dar nici această ipoteză nu este necesară, deoarece, dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un functor, atunci cardinalul mulţimii morfismelor functoriale de la F la $T_* F'$ nu depăşeşte cardinalul mulţimii

$$\prod_{X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, (F' \circ T)(X)),$$

care este un element al lui U.

PROPOZIŢIA 2.10. *Cu notaţiile de mai sus, admitem că în $\mathcal{D}$ limitele inductive sînt reprezentabile; de asemenea limitele proiective finite sînt reprezentabile şi limitele inductive conexe şi pseudofiltrante comută cu limitele proiective finite. Admitem în plus că în $\mathcal{C}$ limitele inductive finite sînt reprezentabile şi că functorul $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ comută cu limitele inductive finite.*

În aceste condiţii în Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *şi în Fonct $(\mathcal{C}', \mathcal{D})$ limitele proiective finite sînt reprezentabile şi functorul T^* comută cu limitele proiective finite.*

Demonstraţie. Este mai puţin banal să observăm că pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$ categoria $(\mathcal{C}, T)/Y$ este conexă şi pseudofiltrantă. Faptul că e conexă se deduce din aceea că există sume directe în $\mathcal{C}$ şi T comută cu ele; restul analog.

PROPOZIŢIA 2.11. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie element al lui U, $\mathcal{C}'$ o categorie şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor:*

1) *Functorul $T_* : \mathcal{C}'^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ comută cu limitele inductive şi proiective,*

2) *Functorul $T^+ : \mathcal{C}^{\wedge} \to \mathcal{C}'^{\wedge}$ comută cu limitele proiective. Mai mult, pentru orice prefascicul F peste $\mathcal{C}$ şi orice obiect Y din $\mathcal{C}'$, avem*

$$T^+ F(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}} (T_* Y, F),$$

3) *Functorul $T^* : \mathcal{C}^{\wedge} \to \mathcal{C}'^{\wedge}$ comută cu limitele inductive. Functorul T^* este definit pînă la un izomorfism canonic. Putem totdeauna să-l alegem astfel că diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}^{\wedge} \arrow[d, "T^*"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "h'"] & \mathcal{C}'^{\wedge}
\end{tikzcd}$$

de categorii şi functori (h este functorul $X \rightsquigarrow h_X$) să fie comutativă. De asemenea, pentru orice prefascicul F peste $\mathcal{C}$, avem

$$T^* F \xrightarrow{\sim} \varinjlim h' \circ T \circ s_F$$

s_F, cel de mai sus: $s_F : \mathcal{C}/F \to \mathcal{C}$,

4) *Dacă limitele proiective finite sînt reprezentabile în* $\mathcal{C}$ *și dacă* T *comută cu limitele proiective finite, functorul* T^* *comută cu limitele proiective finite.*

Demonstrație. În cele de mai sus am folosit categoriile de prefascicule; demonstrațiile sînt exact ca și în cazul functorilor covarianți cu modificările de rigoare acolo unde este cazul; (e vorba de unele schimbări de săgeți pe care cititorul le va sesiza la momentul oportun). Valabilitatea punctelor 1), 2) și 4) rezultă imediat din cele două propoziții de mai sus și din proprietățile binecunoscute ale lui Ens. Ens posedă limite inductive universale și limite proiective.

Valabilitatea punctului 3) se deduce astfel : fie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; atunci pentru un $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$, $[T^*(h_X)](Y') = \varinjlim h_X \circ s_{Y'}$. Dacă $Y' = TY$, atunci categoria $Y'/\mathcal{C}$ conține un obiect inițial care în duală este final și deci putem considera că $[T^*(h_X)](TY)$ este mulțimea morfismelor de la TY la TX, din categoria $\mathcal{C}'$, adică $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TY, TX)$. Așadar este evident că $h' \circ T \simeq T^* \circ h$. Restul de fapte este imediat.

PROPOZIȚIA 2.12. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două categorii elemente ale lui* U, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor și* S *un adjunct la stînga al lui* T. *Există atunci izomorfismele functoriale, compatibile cu izomorfismele de adjuncție :* $S_* \simeq T^*$ *și* $S^+ \simeq \mathcal{C}T_*(\mathcal{C}'^{\wedge} \xrightarrow{T_*} \mathcal{C}^{\wedge} \xrightarrow{S_*} \mathcal{C}'^{\wedge})$.

Demonstrație. Este suficient să dovedim spre exemplu că S_* este un adjunct la dreapta pentru T_*. Fie pentru aceasta $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\wedge}$ și $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Atunci

$$(S \circ F)(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(S(Y), F).$$

Dar, din cele de mai sus (propoziția 2.10) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(S(Y), F) \simeq F(S(Y)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\mathcal{C}/F} (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S(Y), ?) \circ s_F).$$

Dar S este adjunct la stînga lui T și deci :

$$\varinjlim_{\mathcal{C}/F} (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S(Y), ?) \circ s_F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\mathcal{C}/F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, T)$$

Din punctul 3 al propoziției de mai sus, deducem

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Y, T?) \circ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(Y, T^* F) \xrightarrow{\sim} T^* F(Y)$$

Așadar, pentru orice Y am definit un izomorfism functorial în Y și F de la $(S_* F)(Y)$ la $(T^* F)(Y)$.

Altă demonstrație (directă):

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(F,\ S_*\,G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim_{\alpha} X_\alpha,\ S_*\,G) \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X_\alpha,\ S_*\,G) \xrightarrow{\sim} \varprojlim\,((S_*\,G)\,(X_\alpha)) \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha}\,(G\circ S)\ (X_\alpha) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha}\,(G\,(SX_\alpha)) \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(SX_\alpha,\ G) \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(\varinjlim SX_\alpha,\ G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(T^*F,\ G) \end{aligned}$$

(facem apel la definiția lui T*)$_{\text{. q. e. d.}}$

Din cele de mai sus deduce că functorul T comută cu limitele proiective, căci S_* comută.

PROPOZIȚIA 2.13. *Ne situăm în ipotezele propoziției 2.11. Presupunem în plus că T este un functor ce admite următoarea proprietate:*

(D) *În orice diagramă comutativă din C de forma*

$$\begin{tikzcd} \ast & & \ast \arrow[ll, "m"'] \arrow[dl, "T(g)"] \\ & \ast \arrow[ul, "T(f)"] & \end{tikzcd}$$

morfismul m este de forma T (n).

În aceste condiții:

a) *Functorul T^* este fidel,*

b) *Pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$, orice obiect H din $\mathcal{C}^\wedge$ și orice $m : H \to X$, morfism din $\mathcal{C}^\wedge$, diagrama*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & (T_*\circ T^*)(H) \arrow[d, "(T_*\circ T^*)(m)"] \\ X \arrow[r] & (T_*\circ T^*)(X) \end{tikzcd}$$

canonic construită este carteziană, adică $H = X\Pi_{(T_*\circ T^*)(X)}\,(T_*\circ T^*)(H)$.

Dacă, în plus, T este un functor deplin fidel, atunci:

c) *Functorul T^* este deplin fidel.*

Demonstrație. Pentru a dovedi *a*) este suficient să dovedim că aplicația $T^*(X,\ H) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(T^*X,\ T^*H)$ este injecție pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. Dar, $T^*X = (T^*\circ h)(X) = (h'\circ T)(X)$ și deci

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(T^*X,\ T^*H) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(h'_{TX},\ T^*H) = (T^*H)(TX) =$$

$$= \varinjlim_{\mathcal{C}/F} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TX,\ ?)$$

(conform cu propoziția precedentă).

Fie deci m_1 şi m_2 două morfisme de la X la H care au aceeaşi imagine în limita inductivă, fapt echivalent cu aceea că există (după construcţia limitei inductive) un şir (X_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, de obiecte ale lui $\mathcal{C}$ $(X_1 = X_n = X)$, şi pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$, un morfism $f_i : T(X) \to T(X_i)$, $f_0 = f_n = 1_{TX}$ şi un morfism $g_i : X_i \to H$ $(g_0 = m_1,\ g_n = m_2)$ şi încă, pentru orice cuplu $(i, i+1)$, un morfism $h_i : X_i \to X_{i+1}$ sau $h_i : \to X_{i+1} \to X_i$, astfel că :

1) diagramele următoare sînt comutative:

$$\begin{tikzcd} & TX \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_{i+1}"] & \\ TX_i \arrow[rr, "Th_i"] & & TX_{i+1} \end{tikzcd}$$

sau

$$\begin{tikzcd} & TX \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_{i+1}"] & \\ TX_i \arrow[rr] & & TX_{i+1} \end{tikzcd}$$

2) diagramele următoare sînt comutative :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & X_{i+1} \arrow[dl, "g_{i+1}"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

sau

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & X_{i+1} \arrow[dl, "g_{i+1}"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

Folosind proprietatea (D) şi recurenţa după i, deducem că f_i sînt unice, de forma $T(f_i')$ şi că diagramele

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_i'"'] \arrow[dr, "f_{i+1}'"] & \\ X_i \arrow[rr, "h_i"] & & X_{i+1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_i'"'] \arrow[dr, "f_{i+1}'"] & \\ X_i \arrow[rr, "h_i"] & & X_{i+1} \end{tikzcd}$$

sînt comutative ; de aici se deduce imediat că $m_1 = m_2$.

b) Fie Z un obiect din $\mathcal{C}$ şi diagrama construită canonic

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "p"] \arrow[dd, "g"'] & & T_* \circ T^*(H) \arrow[dd, "T_* \circ T^*(m)"] \\ & H \arrow[dl, "m"'] \arrow[ur] & \\ X \arrow[rr] & & T_* \circ T^*(X) \end{tikzcd}$$

Pentru a dovedi b) este suficient să dovedim că există o factorizare prin H a morfismelor $Z \to X$ şi $Z \to T_* T^*(H)$ (unicitatea va rezulta din aceea că $H \to T_* \circ T^* (H)$ este un monomorfism (conform cu a) și cu propoziția 1.17). Dar din diagrama (*) deducem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} T^* Z \arrow[rr, "p'"] \arrow[dr, "T^* (g)"'] & & T^* H \arrow[dl, "T^* (m)"] \\ & T^* X & \end{tikzcd}$$

dedusă, aplicînd T^* diagramei (*), unde $p' = \Phi_{T^*_H} \circ T^* (p)$, $\Phi : T^* \circ T_* \to \to \mathrm{Id}\, \mathscr{C}'^\wedge$ este un morfism de adjuncție, cvasiinvers cu $\Psi : \mathrm{Id}\, \mathscr{C} \to T_* \circ T^*$. Dacă $p' = T^* (p'')$, atunci diagrama (*) este carteziană ; invers, dacă diagrama (*) este, carteziană se deduce că $p' = T^* (p'')$. Dar acest fapt se întîmplă mereu, deoarece $T^{*+} Z = TZ$ și $p' = (T (s) \circ r$, cu r : $TZ \to \to TX$. Aplicăm (D), și totul rezultă.

Dacă T este deplin fidel, atunci, deoarece $(T^* \circ h) (X) = (h' \circ T) (X)$ se deduce că pentru obiecte reprezentabile T^* este deplin fidel. Restul rezultă din aceea că o limită inductivă de izomorfisme este un izomorfism și din faptul că orice prefascicul este limită inductivă de functori reprezentabili.

CAPITOLUL III

CATEGORII DE FRACȚII

Una din cele mai importante noțiuni din algebra modernă este cea de categorie de fracție. La timpul lor, inelele de fracție au jucat un rol deosebit în algebră, fără să mai vorbim de aportul lor la dezvoltarea geometriei algebrice sub forma actuală. De asemenea, cu diferite ocazii au fost puse în evidență categorii de fracții și rezultatele obținute, folosind acest instrument, au fost remarcabile ; vom ilustra aceasta chiar în cursul acestui seminar.

Prima parte a acestui capitol se ocupă cu o teorie formală a categoriilor de fracții ; în continuare se studiază cazuri importante de construcția unei categorii de fracții. Proprietățile și multe aplicații sînt date în ultima parte a capitolului. Expunerea acestui capitol revine lui Radu Alexandru, Niță Constantin și Stoia Manuela. Remarcăm că noțiunea de categorie de fracții a fost introdusă de elevii lui Grothendieck ; o mare parte a acestui capitol a fost elaborată după idei originale.

§ 1. CATEGORII DE FRACȚII

În paragraful de față vom studia următoarea problemă : Fie $\mathscr{C}$ o U-categorie mică și S un sistem oarecare de morfisme din $\mathscr{C}$. Să găsim o U-categorie (eventual mică) $\mathscr{C}_S$ și un functor $P_S : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_S$ astfel că :

1) Pentru orice $s \in S$, $P_S (s)$ este un izomorfism din $\mathscr{C}_S$.

2) Pentru orice categorie $\mathcal{D}$ și orice functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ astfel că $T(s)$ este izomorfism pentru orice $s \in S$, există un functor unic $\overline{T} : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ cu $\overline{T} \circ P_S = T$.

Categoria $\mathcal{C}_S$ (dacă există) se numește categoria de fracții a lui $\mathcal{C}$ relativ la sistemul S, iar P_S functorul canonic. În cele ce urmează vom dovedi existența categoriei $\mathcal{C}_S$ pentru orice sistem S de morfisme din $\mathcal{C}$.

§ 2. CATEGORIE LIBERĂ GENERATĂ DE O SCHEMĂ

Fie $\sum$ o schemă ((1), cap. I), O mulțimea vîrfurilor și M mulțimea săgeților, d : $M \to O \times O$ aplicația din definiția schemei. Dacă $\varphi \in d^{-1}(i, j)$ notăm cu (i, j) ,,orientarea '' lui φ. Mai scriem $i =$ sursa lui φ, iar j adresa sa : prescurtat : $i = s(\varphi)$; $j = b(\varphi)$.

Admitem că pentru orice $i \in \mathrm{O}$, $d^{-1}(i, i) \neq \emptyset$. Marcăm pentru orice $i \in O$ un element e_i, pe care îl vom numi preunitate Notăm cu $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ un sistem de săgeți din $\sum$ astfel că $s(\varphi_i) = b(\varphi_{i+1})$, $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, și numim acest sistem, săgeată compusă din $\sum$. Fie $\varphi_1 \; \varphi_2 \ldots \varphi_n$ o săgeată compusă din $\sum$; scheletul său se definește ca fiind mulțimea de săgeți $\{\varphi_{i1}, \varphi_{i2} \ldots, \varphi_{ik}\} \subset \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ care nu sînt preunități.

Notăm cu $\overline{\sum}$ și numim pseudocategorie, următorul concept :

— O mulțime O a vîrfurilor sau pseudoobiectelor lui $\overline{\sum}$.

— Pentru orice $i, j \in O$ notăm cu Fl (i, j) toate săgețile compuse de sursă i și adresa j din $\sum$ (Sursa și adresa unei săgeți compuse se definește în mod evident.)

— Dacă $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \in \mathrm{Fl}(i, j)$, $\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_m \in \mathrm{Fl}(j, k)$ definim $\psi_1 \psi_2 \ldots \ldots \psi_m \cdot \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathrm{Fl}(i, k)$ și numim aceasta compunerea celor două săgeți.

Evident compunerea săgeților (compuse) este asociativă.

Introducem în mulțimea Fl (i, j) următoarea relație de echivlaență :

$$\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n \sim \varphi_1 \cdots \psi_m,$$

dacă și numai dacă ele au același schelet *).

Se verifică imediat că compunerea săgeților compuse este compatibilă cu relația de echivalență introdusă. Notăm cu $\mathrm{Hom}_{\Sigma}(i, j)$ mulțimea cît a lui Fl (i, j) prin relația de mai sus. Din cele de mai sus se deduce imediat că putem defini o categorie $\sum^*$ ale cărei obiecte sînt elementele lui O, și pentru orice $i, j \in O$, $\mathrm{Hom}_{\Sigma^*}(i, j) = \mathrm{Hom}_{\Sigma}(i, j)$. Compunerea este definită în mod canonic și în plus preunitățile devin unități. Categoria $\sum^*$ se numește categoria liberă generată de $\sum$.

§ 3. RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ ÎN CATEGORII

Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Vom spune că în $\mathcal{C}$ este dată o relație de echivalență simplă, dacă pentru orice două obiecte $X, Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ s-a dat o relație de echivalență ${}_X R_Y$ astfel că :

---

* Dacă o săgeată compusă este formată doar din preunități (necesar egale între ele), atunci ea este echivalentă cu preunitatea de ,,schelet vid''.

— Dacă $f, g: X \rightrightarrows Y$, $f \sim g$ $({}_XR_Y)$ şi $h: Z \to X$, atunci $f \circ h \sim$ $\sim g \circ h$ $({}_ZR_Y)$, pentru orice $Z \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$.

— Dacă $p: Y \to Z'$, atunci $p \circ f \sim p \circ g$ $({}_XR_{Y'})$ pentru orice $Z' \in \mathrm{Ob}$ $\mathcal{C}$, $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z')$.

Fiind dată o categorie $\mathcal{C}$ şi o relaţie de echivalenţă simplă, R pe $\mathcal{C}$ definim o nouă categorie $\mathcal{C}/R$ astfel :

— Obiectele lui $\mathcal{C}/R$ sînt obiectele lui $\mathcal{C}$.

— $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/R}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) / {}_XR_Y$.

— Compunerea morfismelor se defineşte în mod evident.

Dacă $T: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un functor astfel că pentru orice $f, g: X \rightrightarrows Y$, $\sim g$ $({}_XR_Y)$, $T(f) = T(g)$, atunci există un functor $\overline{T}: \mathcal{C}/R \to \mathcal{D}$, unic, astfel că $\overline{T} \cdot P = T$, unde $P: \mathcal{C} \to \mathcal{C}/R$ este functorul definit canonic în contextul de mai sus.

Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie mică şi R_i o familie de relaţii de echivalenţă simple pe $\mathcal{C}$.

Notăm cu $R = \bigcap R_i$,,intersecţia acestor relaţii de echivalenţă; R este încă o relaţie de echivalenţă simplă pe $\mathcal{C}$.

Fie pentru orice $X, Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $(f_i\, g_i)_{i \in I(X, Y)}$ o familie de perechi de morfisme din $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Există (cu conceptul de intersecţie de relaţii de echivalenţă) o cea mai fină relaţie de echivalenţă R, simplă, pe $\mathcal{C}$ astfel ca $f_i \sim g_i$ $({}_XR_Y)$, $i \in I(X, Y)$.

Fie $\mathcal{C}$ *o* U-categorie mică ; putem concepe $\mathcal{C}$ ca o schemă şi deci putem vorbi de categoria liberă asociată, pe care o vom nota cu $\mathcal{C}^*$. Există un functor canonic $F: \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}$ care defineşte pe $\mathcal{C}$ ca o categorie cît a lui $\mathcal{C}$ prin o anumită relaţie de echivalenţă.

Fie acum S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$; construim o schemă Σ în felul următor :

(Notăm cu $S(X, Y)$ toate morfismele din S, de la X la Y).

— Vîrfurile lui Σ sînt obiectele lui $\mathcal{C}$.

— Săgeţile de la X la Y sînt : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cup S(Y, X)$ (reuniunea disjunctă).

— Preunităţile lui Σ sînt unităţile lui $\mathcal{C}$.

Fie Σ^* categoria liberă asociată. Definim în Σ^* următoarea relaţie de echivalenţă :

— Pentru orice două obiecte X, Y din Σ^* considerăm mulţimea de perechi (f_i, g_i) $i \in I(X, Y)$, definită astfel :

— Perechi (φ, ψ) de săgeţi compuse de tipul (f, g), care nu conţin săgeţi simple din S şi care în $\mathcal{C}$ sînt egale (admiţînd că compunerea se face în $\mathcal{C}$).

— Perechi (φ, ψ) de tipul $= (ss^{-1}, 1_Y)$. $(1_X, s^{-1}s)$, cu $s \in S \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$ (Y, X), iar s^{-1} este săgeată din $\mathrm{Fl}(X, X)$, (convenim ca elementele mulţimii $S(X, Y)$, pe care o adăugăm la $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ la definirea lui Σ, să le scriem sub forma s^{-1} cu $s \in S(X, Y)$).

Există deci în $\sum$ o relaţie de echivalenţă construită, din cele de mai sus. Notăm cu $\mathcal{C}_S$ categoria cît obţinută. Definim un functor $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ astfel :

$$P_S(X) = X, \text{ pentru } X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}.$$

— Dacă $f : X \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci $P_S(f) =$ clasa lui f prin relaţia de echivalenţă de mai sus. Relaţia de echivalenţă este construită de aşa manieră, încît P_S este functor.

Să verificăm că perechea $(\mathcal{C}_S, P_S)$ astfel construită, răspunde la problema de mai sus.

— Fie $s \in \mathcal{S}$. Evident că $P_S(s)$ are un invers în $\mathcal{C}_S$ şi anume clasa lui s^{-1}.

— Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor, astfel că $T(s)$ este pentru orice $s \in \mathcal{S}$ un izomorfism. Atunci din felul cum a fost definită relaţia de echivalenţă pe $\sum$ pentru a construi pe $\mathcal{C}_S$ se deduce că putem defini un functor $\overline{T}_1 : \sum^*_- \to \mathcal{D}$, compatibilul cu acea relaţie de echivalenţă. Există deci $\overline{T}_0 : \mathcal{C}_S \to \mathcal{D}$ cu $\overline{T} \circ P_S = T \cdot \overline{T}$ este, evident, din construcţie, unic.

Formal, construcţia lui $\mathcal{C}_S$ se face astfel. Obiectele lui $\mathcal{C}_S$ sînt obiectele lui $\mathcal{C}$.

— Pentru orice două obiecte X, Y din $\mathcal{C}_S$ Hom $\mathcal{C}_S\,(X, Y)$ constă din compuneri de morfisme de tipul f cu $f : X \to Z$ morfism din $\mathcal{C}$ şi $s \in \mathcal{S}\,(Y, Z)$ (deci s^{-1} are sens invers), cu condiţia ca $ss^{-1} = 1_Y$, $s^{-1}s = 1_X$ şi compunerea în $\mathcal{C}_S$ a două morfisme din $\mathcal{C}$ este compunerea lor din $\mathcal{C}$.

Iată un rezultat important legat de categoria de fracţii a unei categorii relativ la un sistem de morfisme.

PROPOZIŢIA 3.1. *Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie mică şi $\mathcal{S}$ un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$. Fie $\mathcal{C}_S$ categoria de fracţii a lui $\mathcal{C}$ relativ la $\mathcal{S}$ şi $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ functorul canonic. Atunci pentru orice categorie $\mathcal{D}$, functorul*

$$P_{S*} = \operatorname{Fonct}(P_S, \mathcal{D}) : \operatorname{Fonct}(\mathcal{C}_S, \mathcal{D}) \to \operatorname{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

este deplin fidel.

Demonstraţie. Definiţia functorului P_{S*} este evidentă. P_{S*} este un functor restricţie biunivoc pentru obiecte şi fidel. Fie F, G două obicte din Fonct $(\mathcal{C}_S, \mathcal{D})$ şi $\varphi : F \circ P_S \to G \circ P_S$ un morfism functorial. Să dovedim că există un morfism $\psi : F \to G$, astfel că $\psi P_S = \varphi$. Vom arăta că putem lua $\varphi = \psi$. Pentru aceasta, este suficient să dovedim că pentru orice $\bar{f} : X \to Y$ morfism din $\mathcal{C}_S$, avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\bar{f})"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\varphi_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(\bar{f})"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Dar, din cele de mai sus este suficient să considerăm pe $\bar{f}$ de tipul : $\bar{f} = s^{-1} \circ f$ cu $f : X \to Z$, $s \in \mathcal{S}\,(Y, Z)$. Atunci avem în $\mathcal{C}$ diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Z & Y \arrow[l, "s"']
\end{tikzcd}$$

şi deci diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & F(Z) \arrow[d, "\varphi_Z"'] & F(Y) \arrow[l, "F(s)"'] \arrow[d, "\varphi_Y"] \\
G(Y) \arrow[r, "G(f)"] & G(Z) & G(Y) \arrow[l, "G(s)"']
\end{tikzcd}$$

adică

$$\varphi_Z \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_X$$

şi

$$\varphi_Z \circ F(s) = G(s) \circ \varphi_Y,$$

deci

$$\varphi_Z = G(s) \circ \varphi_Y \circ F(s)^{-1}$$

şi

$$G(s) \circ \varphi_Y \circ F(s)^{-1} \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_X$$

sau

$$\varphi_Y \circ F(s)^{-1} \circ F(f) = G(s)^{-1} \circ G(f) \circ \varphi_X,$$

deci

$$\varphi_Y \circ F(\bar{f}) = G(\bar{f}) \circ \varphi_X. \qquad \text{q.e.d.}$$

Construcţia categoriei de fracţii pentru o categorie dată nu are o descriere canonică. Vom da în cele ce urmează exemple în care descrierea categoriei de fracţii, pentru anumite sisteme de morfisme este canonică şi simplă.

Mai observăm, că conceptul de categorie de fracţii ţine să generalizeze conceptul de inel de fracţii, monoid de fracţii etc. În ultimul timp acest concept a căpătat o utilizare largă în algebra omologică şi în topologia algebrică.

§ 4. CALCULUL FRACŢIILOR LA DREAPTA

Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie mică şi S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$. Vom spune că S este multiplicativ stabil dacă compunerea a două morfisme din S este în S (dacă compunerea are sens) ; S se zice multiplicativ închis, dacă este multiplicativ stabil şi conţine toate izomorfismele din $\mathcal{C}$.

Fie S un sistem din Fl $\mathcal{C}$ multiplicativ închis. Se zice că S permite calculul fracţiilor la dreapta dacă :

a) Orice diagramă $X \xrightarrow{s} Y \xleftarrow{f} Z$ din $\mathcal{C}$ cu $s \in S$ se poate scufunda în diagrama comutativă.

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "s'"'] & X \arrow[d, "s"] \\
Z \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd} \qquad \text{cu } s' \in S$$

b) Dacă pentru $u,\ v: X \rightrightarrows Y$ există $s: Y \to Z$, $su = sv$, atunci există $s': Z' \to X$, $s' \in S$ cu $us' = vs'$. În acest caz, categoria de fracţii $\mathcal{C}_S$ se construieşte în mod canonic şi uşor astfel:

— obiectele lui $\mathcal{C}_S$ sînt obiectele lui $\mathcal{C}$;

— pentru a defini morfismele lui $\mathcal{C}_S$, notăm pentru $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ cu S/X subcategoria lui $\mathcal{C}/X$ plină, formată din obiectele (X, s) cu $s: Y \to X$, $s \in S$. Categoria S/X este un sistem filtrat peste X. În adevăr, spunem că $(Y_1, s_1) \leqslant (Y_2, s_2)$, dacă avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "s_1"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & X \\
& Y_2 \arrow[ur, "s_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Evident că în felul acesta se deduce că S/X este o categorie pseudo-filtrată şi conexă (căci dacă $\alpha, \beta: (Y_1, s_1) \rightrightarrows (Y_2, s_2)$, atunci $s_2 \circ \alpha = s_2 \circ \beta$ şi deci există $s \in S$ cu $\alpha\, s = \beta\, s$. Dar $s,\ s_2 \in S$ etc.

Definim atunci

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \underset{\overrightarrow{s \in S/X}}{\lim}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), Y),$$

unde cu $\alpha(s)$ am notat sursa morfismului s. Din felul cum a fost definit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ deducem că un morfism din $\mathcal{C}_S$ de la X la Y este o clasă de echivalenţă de morfisme de tipul

$$\begin{tikzcd}
& \alpha(s) \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Evident că o pereche (s, f) este echivalentă cu perechea (s', f'), dacă şi numai dacă ele au aceeaşi imagine în limita inductivă, adică dacă există $s'': \alpha(s'') \to X$ şi diagrama

$$\begin{tikzcd}
& & \alpha(s'') \arrow[dll, "u"'] \arrow[drr, "v"] & & \\
\alpha(s) \arrow[dr, "s"] \arrow[drrr] & & & & \alpha(s') \arrow[dl, "f'"] \arrow[dlll, "s'"'] \\
& X & & Y &
\end{tikzcd}$$

cu $su = s'v \in S$, $fu = f'v$.

Pentru o pereche (s, f) notăm cu (s/f) imaginea şi în limita inductivă. Făcînd calculele de rigoare se poate uşor dovedi că $\mathcal{C}_S$ este într-adevăr o categorie. Iată spre exemplu cum este definită compunerea morfismelor din $\mathcal{C}_S$: fie $(s/f) : X \to Y$, $(t/g) : Y \to Z$. Atunci în $\mathcal{C}$ avem diagramele

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\
 & \alpha(s) \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & \alpha(t) \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

în care t' şi f' au fost calculaţi graţie lui $a)$ şi $t' \in S$. Definim $(t/g) \circ (s/f) = (st'/gf')$.

Nedependenţa de reprezentanţi se calculează imediat.

Definim $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ astfel : $P(X) = X$, pentru $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C} = \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_S$ şi $P_S(f) = (1_X|f)$, cu $f : X \to Y$. Dacă $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, notăm $P_S(X) = X$. Evident, dacă $s : X \to Y$, $s \in S$, atunci un invers pentru $P_S(s) = (1_X|s)$ este $(s|1_X)$. Într-adevăr, din cele de mai sus : $(1_X|s)\ (s|1_Y) = (1_X|1_X) = 1_{P_S(X)}$, căci avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & & \\
 & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr] & & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\
X & & Y & & X
\end{tikzcd}$$

Evident că $(s|1_Y)\ (1_X|s) = (1_Y|1_Y) = 1_{P_S(Y)}$.

Observaţie. Notăm $P_S(s)^{-1} = (s|1_X)$; atunci, orice morfism din $\mathcal{C}_S$ are forma $P_S(f) \circ P_S(s)^{-1}$ *cu* $f \in \mathrm{Fl}\, \mathcal{C}$, $s \in S$.

Fie acum $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor astfel că $T(s)$ este, pentru orice $s \in S$, un izomorfism. Definim $T : \mathcal{C}_s \to \mathcal{C}$ astfel : $\overline{T}(\overline{X}) = T(X)$ cu $P_S(X) = X$ şi $T_S(s|f) = T(f) \circ T(s)^{-1}$. Faptul că T este un functor ne arată că $\overline{T}$ este bine definit. Unicitatea lui este evidentă.

Despre functorul P_s putem dovedi următoarea

PROPOZIŢIA 3.2. *P_S comută cu limitele proiective finite, reprezentabile, din $\mathcal{C}$.*

Demonstrație. Fie D o diagramă de schemă finită peste $\mathcal{C}$ şi X un con iniţial al său. Fie $f_i : X \to D_i$ morfismele structurale. Fie $\overline{Y} \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_S$. Atunci

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{X}, \overline{Y}) = \varinjlim_{s\in S/X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), Y) = \varinjlim_{s\in S/X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), \varprojlim D_i) =$$

$$= \varinjlim_{s\in S/X} \varprojlim_{i} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), D_i) = \varprojlim_{i} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{Y}, \bar{D}_i) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{Y}, \overline{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(Y, \varprojlim \overline{D}_i),$$

căci limitele inductive filtrate și reprezentabile comută cu limitele proiective finite în U-Ens (propoziția 1.17).

DEFINIȚIA 3.3. *Vom spune că un sistem multiplicativ închis din $\mathcal{C}$ este complet calculabil dacă el permite calculul fracțiilor la dreapta și la stînga. Aceasta revine la aceea că odată cu axiomele a)—b) ce trebuie să le satisfacă un sistem pentru a permite calculul fracțiilor la dreapta, sînt verificate și dualele lor a′), b′).*

Pentru calculul lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ avem în cazul unui sistem complet calculabil două moduri de descriere. Vom dovedi că cele două moduri sînt echivalente. Fie

$${}_{I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{X}, \overline{Y}) = \varinjlim_{s\in S/X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), Y),$$

$${}_{II}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{X}, \overline{Y}) = \varinjlim_{s\in Y/S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, b(s)),$$

„$b(s)$ = but s”, adică adresa lui s. Pentru aceasta observăm că cu ajutorul lui S putem construi două categorii $\mathcal{C}'_S$ și $\mathcal{C}''_S$ care verifică aceeași problemă de universalitate. Ele sînt deci echivalente și, mai mult, sînt izomorfe deoarece au aceleași obiecte. Deducem în acest caz că functorul P_S, grație celor două descrieri simultane ale sale, comută cu limitele inductive și proiective finite, reprezentabile din $\mathcal{C}$.

§ 5. EXEMPLE DE CALCULUL FRACȚIILOR LA STÎNGA ȘI LA DREAPTA

a) Fie A un inel comutiv și S un sistem de elemente din A, multiplicativ stabil. Evident, S permite calculul fracțiilor la dreapta și la stînga ; categoria A_S este, conform cu propoziția 3.4, încă preaditivă, deci A_S este încă un inel ; din construcție, acest inel este „inelul de fracții” al lui A relativ la sistemul S. Construcția lui A_S este, conform cu cele de mai sus, următoarea :

$$A_S = \mathrm{Hom}_{A_S}(A_S, A_S) = \varinjlim_{s\in S} \mathrm{Hom}_A(A, A) = \varinjlim_{s\in S} A_s,$$

cu alte cuvinte cosiderăm aplicaţiile $s : A \to A$ cu $s(a) = sa$ şi limita inductivă astfel formată (care este filtrată, deoarece S este multiplicativ stabil). Inelul limită inductivă este exact $A_{S,1}$ inelul de fracţii al lui A în raport cu S.

b) Dacă A este un inel oarecare şi $S \subset A$ este un sistem multiplicativ stabil de elemente din A, ce permite calculul la dreapta al fracţiilor, atunci putem construi inelul de fracţii A_S, cu binecunoscuta condiţie de universalitate.

Observaţie. Fie A un inel necomutativ şi S un sistem multiplicativ stabil din A; putem construi categoria A_S, care nu este neapărat un inel, în mod canonic, astfel că functorul canonic: $P_S : A \to A_S$ să fie un morfism de „inele". Într-un paragraf rezervat exclusiv inelelor vom examina această problemă.

c) Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ categorii şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant, iar S: $C' \to C$ un adjunct al său la dreapta; fie că S este deplin fidel şi fie $\sum$ sistemul tuturor morfismelor din $\mathcal{C}$ inversate de T; $\sum$ permite calculul fracţiilor la stînga. Pentru a verifica aceasta fie $\Psi : \mathrm{Id}\, C \to S \circ T$ un morfism de adjuncţie al lui S cu T şi Φ un cvasiinvers al său; conform cu propoziţia 1.15, Φ este izomorfism.

Faptul că $\sum$ este multiplicativ închis, este cu totul evident. Observăm încă că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $T\Psi_X$ este un izomorfism, deoarece $\Phi_{TX} \circ T_{\psi X} = 1_{TX}$ şi Φ este izomorfism. Fie deci diagrama $A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{s} B$, cu $s \in \sum$, din $\mathcal{C}$. Atunci există în $\mathcal{C}$ diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\Psi_A"'] & X \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\Psi_X"] & B \arrow[d, "\Psi_B"] \\
STA & STX \arrow[l, "STf"'] \arrow[r, "STs"] & STB
\end{tikzcd}$$

din care deducem că $\Psi_A \in \sum$ şi în plus

$$(STf) \circ (STs)^{-1} \circ \Psi_B \circ s = \Psi_A \circ f,$$

deoarece Ts este inversibil.

Fie apoi $u, v : A \rightrightarrows B$ două morfisme din $\mathcal{C}$ şi $s : X \to A$ un morfism din $\sum$ cu $us = vs$, atunci din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\Psi_X"'] & A \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[d, "\Psi_A"] & B \arrow[d, "\Psi_B"] \\
STX \arrow[r, "STs"] & STA \arrow[r, shift left, "STu"] \arrow[r, shift right, "STv"'] & STB
\end{tikzcd}$$

deducem că $STu = STv$ şi deci $\Psi_B \circ u = STu \circ \Psi_A = STv \circ \Psi_A = \Psi_B \circ v$ şi $\Psi_B \in \Sigma$.

Vom dovedi în cele ce urmează că $\mathcal{C}$ este echivalentă cu categoria de fracţii a lui $\mathcal{C}$ relativ la sistemul Σ.

d) Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană şi $\mathcal{A}$ o subcategorie plină a sa ; se zice că $\mathcal{A}$ este o subcategorie deasă a lui $\mathcal{C}$, dacă pentru orice şir exact

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$$

din $\mathcal{C}$, astfel că A', $A'' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$, deducem că $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ şi invers.

Aşa fiind, fie Σ familia tuturor morfismelor f din C, pentru care $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Coker} f \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$; în aceste condiţii Σ permite calculul fracţiilor la stînga şi la dreapta. Fie pentru aceasta $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ două morfisme din Σ ; atunci $\operatorname{Ker} g \circ f \supseteq Ker\, f$ şi există şirul exact.

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Ker} g \circ f \longrightarrow \operatorname{Ker} g \longrightarrow 0$$

din care deducem că $\operatorname{Ker} g \circ f \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Analog deducem că $\operatorname{Coker} f \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$.

Fie în C diagrama $X \overset{f}{\to} Y \overset{s}{\to} Z$ cu $s \in \Sigma$; atunci în diagrama canonic construită :

$$\begin{tikzcd}
X \Pi_Y Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "s'"'] & Z \arrow[d, "s"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

$s' \in \Sigma$. Într-adevăr, fie $i : \operatorname{Ker} s' \to \operatorname{Ker} s$ morfismul canonic indus de f' ; se dovedeşte imediat că i este un izomorfism. Analog,

$$\operatorname{Coker} s' \simeq X/f^{-1} (\operatorname{Im} s),$$

adică $\operatorname{Coker} s'$ este un subobiect al lui $Y/\operatorname{Im} s$ şi deci din $\mathcal{A}$.

Fie acum $f, g : X \rightrightarrows Y$ două morfisme din $\mathcal{C}$ şi $s \in \Sigma$, cu $sf = sg$; atunci $s(f - g) = 0$ şi deci $\operatorname{Im} (f - g) \subseteq \operatorname{Ker} s \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Dar avem şirul exact :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} (f - g) \longrightarrow X \longrightarrow \operatorname{Im} (f - g) \longrightarrow 0$$

din care deducem că $i \in \Sigma$ şi încă $f \circ i = g \circ i$.

Folosind conceptul de sumă fibrată, deducem că Σ permite calculul fracţiilor şi la stînga ; deci Σ este un sistem complet calculabil.

Categoria de fracţii $\mathcal{C}_\Sigma$ se notează cu $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ şi se numeşte categoria cît a lui $\mathcal{C}$ relativ la $\mathcal{A}$ ([2], cap. III).

e) Fie $\mathcal{C}$ o categorie în care produsele fibrate sînt reprezentabile şi fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor ce comută cu produsele fibrate ; fie S sistemul tuturor morfismelor din $\mathcal{C}$ inversate de $T \cdot S$ permite calculul fracţiilor la dreapta ; pentru a verifica aceasta, fie $X \overset{s}{\leftrightarrow} Y \overset{f}{\leftarrow} Z$ o diagramă din $\mathcal{C}$; atunci în $\mathcal{C}$ există diagrama comutativă, canonic constantă,

$$\begin{tikzcd}
X \Pi_Y Z \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f'"'] & Z \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "s"] & Y
\end{tikzcd}$$

Evident, aplicînd T acestei diagrame, obţinem în $\mathcal{C}'$ diagrama;

$$\begin{tikzcd}
TX\Pi_{TY}TZ \arrow[r, "T(s')"] \arrow[d, "T(f')"'] & TZ \arrow[d, "T(f)"] \\
TX \arrow[r, "T(s)"] & TY
\end{tikzcd}$$

în care $T(s)$ este izomorfism şi deci $T(s')$ este şi el izomorfism. Deci $s' \in S$.

Dacă $f, g : X \rightrightarrows Y$ sînt morfisme din $\mathcal{C}$ şi $s : Y \to Z$, $s \in S$, cu $sf = sg$, atunci $T(f) = T(g)$ şi deci $i : \operatorname{Ker}(f, g) \to Y$ este din S, căci $T(i)$ este izomorfism, T comutînd cu nucleele de săgeată dublă. Rezultatele se pot dualiza. Dacă $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sînt categorii abeliene spre exemplu şi T un functor exact la stînga, atunci notăm cu $\operatorname{Ker} T$ subcategoria plină a lui C formată din toate obiectele X, cu $TX = 0$. Un morfisms $f : A \to B$ din $\mathcal{C}$ devine prin T inversibil, dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} f \in \operatorname{Ob} \operatorname{Ker} T$ şi morfismul canonic $i : \operatorname{Im} f \to B$ devine izomorfism prin T. Evident, sistemul S al morfismelor lui C, inversate de T, permite calculul fracţiilor la dreapta. Dacă T este exact la dreapta, atunci S permite calculul fracţiilor la stînga; dacă T este exact, S este un sistem complet calculabil. În acest caz $\operatorname{Ker} T$ este o subcategorie deasă şi un morfism f din C este în S dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f \in \operatorname{Ob} \operatorname{Ker} T$

§ 6 PROPRIETĂŢI DE PERMANENŢĂ

Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$, care permite calculul la dreapta al fracţiilor; în cele ce urmează vom dovedi că multe din proprietăţile categoriei $\mathcal{C}$ se transmit categoriei $\mathcal{C}_S$.

Propoziţia 3.4. *Fie $\mathcal{C}$ o U- categorie mică şi S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$, care permite calculul la dreapta al fracţiilor. Atunci dacă $\mathcal{C}$ este preaditivă şi $\mathcal{C}_S$ este preaditivă, iar functorul canonic $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ este aditiv.*

Dacă $\mathcal{C}$ este aditivă, $\mathcal{C}_S$ este aditivă în mod canonic.

Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie în care orice cuplu de morfisme are nucleu, atunci aceeaşi proprietate o are şi $\mathcal{C}_S$ (dual, pentru calculul la stînga al fracţiilor şi conucleu).

Demonstraţie. Fie că $\mathcal{C}$ este preaditivă; atunci, pentru orice $\overline{X}, \overline{Y} \in$ $\in \operatorname{Ob} \mathcal{C}_s$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, \overline{Y}) = \varinjlim_{s \in S/X} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), Y)$; aşadar $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{X}, \overline{Y})$ are în mod canonic structură de grup abelian.

Fie O un obiect nul al lui C; atunci $P_S(O) = \overline{O}$ este un obiect nul al lui C; într-adevăr, O este un obiect iniţial din $\mathcal{C}_S$, căci dacă $O_X : O \to X$ este unicul morfism de la O_X la X din C, atunci, pentru orice morfism $f : X \to O$, avem $f \circ O_X = 1_X$. Fie că $\overline{O}_X : \overline{O} \to X$ este morfismul $P_S(O_X)$;

atunci pentru orice morfism $\overline{g} : \overline{O} \to \overline{X}$, avem $\overline{g} = P_S(f) \circ P_S(s)^{-1}$ (conform cu notațiile din § 4) și deci în $\mathscr{C}$ avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
O & & X \\
& Y \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Dar, evident, $P_S\,(s)^{-1} = P_S\,(O_Y)$ și deci

$$\overline{g} = P_S\,(f) \circ P_S\,(O_Y) = P_S\,(f \circ O_Y) = \overline{O}_X,$$

ceea ce arată că $\overline{O}$ este un obiect inițial din $\mathscr{C}$. Analog $\overline{O}$ este un obiect final din C și deci un obiect nul.

Observație. Rezultă de aici că dacă O este un obiect inițial (final) din $\mathscr{C}$, $\overline{O}$ este un obiect inițial (final) al lui $\mathscr{C}_S$ (pentru orice categorie $\mathscr{C}$ și S permițînd calculul la dreapta al fracțiilor).

Pentru a termina demonstrația, rămîne să dovedim că dacă

$$\overline{f}, \overline{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_S}(\overline{X}, \overline{Y}) \text{ și } \overline{h} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_S}(\overline{Z}, \overline{X}), \text{ atunci } (\overline{f} + \overline{g}) \circ \overline{h} = \overline{f} \circ \overline{h} + \overline{g}\, h \circ \overline{h}.$$

Acest fapt rezultă, în mod calculatoriu, din definiția categoriei $\mathscr{C}_S$ și din felul cum s-a definit compunerea în $\mathscr{C}_S$ (propoziția 3.2).

Dacă $\mathscr{C}$ este aditivă, atunci, din propoziția 3.2, deducem că C este o categorie cu sume directe finite, și deci din cele de mai sus, este o categorie aditivă.

Fie că $\mathscr{C}$ este o categorie cu nucleu de săgeată dublă și $\overline{f}, \overline{g} : \overline{X} \rightrightarrows \overline{Y}$ un cuplu de morfisme din $\mathscr{C}_S$. Fie că $\overline{f} = P_S(f) \circ P_S(s)^{-1}$, $\overline{g} = P_S(g) \circ P_S(t)^{-1}$, atunci în $\mathscr{C}_S$ avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
X & & & & Y \\
& Z_1 \arrow[ul, "s"] \arrow[urrr, "f"' near start] & & Z_2 \arrow[ulll, "t" near start] \arrow[ur, "g"'] & \\
& & T \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "v"'] & &
\end{tikzcd}$$

cu $s \circ u = t \circ v$. Fie $i : K \to T$ un nucleu al cuplului $(f \circ u,\ g \circ v)$. Atunci: $P_S\,(i) : \overline{K} \to \overline{T}$ este un nucleu al cuplului $(P_S\,(f \circ u),\ P_S\,(g \circ v))$ (propoziția 3.2) și deci $P_S\,(t \circ v) = P_S\,(i)$ este un nucleu al cuplului $(\overline{f}, \overline{g})$; într-adevăr,

$$\overline{f} = P_S\,(f) \circ P_S\,(s)^{-1}; \quad \overline{g} = P_S\,(g) \circ P_S\,(t)^{-1},$$

adică

$$\overline{f} \circ P_S\,(s \circ u) \circ P_S\,(i) = P_S\,(f) \circ P_S\,(s)^{-1} \circ P_S\,(s) \circ P_S\,(u) \circ P_S\,(i) =$$

$$= P_S\,(f) \circ P_S\,(u) \circ P_S\,(i) = P_S\,(g) \circ P_S\,(u) \circ P_S\,(i) =$$

$$= P_S\,(g) \circ P_S\,(t)^{-1} \circ P_S\,(t \circ u) \circ P_S\,(i) = \overline{g} \circ P_S\,(s \circ u) \circ P_S\,(i) \text{ etc.}$$

Ca o consecinţă a celor dovedite avem

PROPOZIŢIA 3.5. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ care permite calculul la dreapta şi la stînga al fracţiilor. Atunci, dacă C este preabeliană şi $\mathcal{C}$ este preabeliană. Dacă C este abeliană şi $\mathcal{C}$ este abeliană iar functorul P_S este exact. Mai mult, dacă Ker P_S este subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele anulate de P_S, atunci un morfism f din $\mathcal{C}$ este inversat de P_S dacă şi numai dacă Ker f, Coker $f \in$* Ob Ker P_S. *Dacă* $0 \to \overline{X}' \to \overline{X} \to \overline{X}'' \to 0$ *este un şir exact din $\mathcal{C}_S$ atunci există în $\mathcal{C}$ şirul exact* $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ *şi izomorfismele $\overline{f}', \overline{f}, \overline{f}''$ din $\mathcal{C}_S$ astfel că diagrama*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{Y}' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{Y}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{X}' \arrow[r] & \overline{X} \arrow[r] & \overline{X}'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{C}$ este preabeliană, atunci $\mathcal{C}_s$ este aditivă şi orice morfism are nucleu şi conucleu, deci este preabeliană. Fie că C este abeliană şi fie $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ un morfism din C_S; avem diagrama din $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & \\
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "i"] \\
\text{Coim } f \arrow[r, "\theta"] & \text{Im } f
\end{tikzcd}$$

în care (i, θ, p) este descompunerea canonică a morfismului f, θ fiind un izomorfism. Evident $\overline{i} \circ \overline{\theta} \circ \overline{p} = P_S(f)$ şi deci $(\overline{i}, \overline{\theta}, \overline{p} \circ P_S(s)^{-1})$ dă o descompunere a lui f în categoria $\mathcal{C}_S$, cu $\overline{\theta} = P_S(\theta)$ izomorfism. $\mathcal{C}$ este deci abeliană.

Functorul P_S este, conform cu propoziţia 3.2, exact la stînga şi la dreapta, deci exact. Dacă f este un morfism din $\mathcal{C}$ astfel că Ker f, Coker $f \in$ Ob Ker P_S, atunci, din faptul că P_S este exact, deducem că $P_S(f)$ este un izomorfism. Invers, fie că $P_S(f)$ este un izomorfism; atunci din şirul exact

$$0 \to \text{Ker } f \to X \xrightarrow{f} Y \to \text{Coker } f \to 0$$

deducem că $P_S(i) = 0$, $P_S(j) = 0$, ceea ce arată că

$$P_S(\text{Ker } f) \approx P_S(0) \approx P_S(\text{Coker } f).$$

Fie $f : X \to Y$ un morfism din $\mathcal{C}$; atunci $P_S(f)$ este un monomorfism (epimorfism) dacă şi numai dacă Ker $f \in$ Ob KerP_S (Coker $f \in$ Ob

Ker P_S), ceea ce se deduce imediat. De asemenea $P_S(f) = 0$, dacă şi numai dacă Im $f \in$ Ob Ker P_S.

Ultima parte a propoziţiei este calculatorie şi lăsată cititorului, care are un bun prilej pentru a-şi verifica tehnica de lucru cu obiecte şi morfisme dintr-o categorie abeliană.

q.e.d.

Studiul categoriilor de fracţii pentru categoriile abeliene se va face în detaliu în cele ce urmează.

§ 7. DESCRIEREA UNOR CATEGORII DE FRACŢII

Vom da în cele ce urmează cîteva condiţii suficiente pentru a descrie categoria de fracţii a unei categorii atunci cînd sistemul morfismelor permite calculul la dreapta (sau stînga) al fracţiilor.

PROPOZIŢIA 3.6. *Fie* $k : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}'$ *un functor care este biunivoc pentru obiecte şi* S *un sistem de morfisme din* C, *multiplicativ închis. Următoarele afirmaţii sînt echivalente.*

a) $\mathcal{C}$ *este categoria de fracţii a lui* C *în raport cu* S, k *functorul canonic şi* S *permite calculul la dreapta al fracţiilor.*

b) *Sînt verificate condiţiile :*

1) *pentru orice pereche* $f, g : X \rightrightarrows Y$ *de morfisme din* $\mathcal{C}$, $k(f) = k(g)$, *dacă şi numai dacă există* $s \in S$ *cu* $fs = gs$;

2) $k(s)$ *este izomorfism pentru orice* $s \in S$;

3) *orice morfism* $k : \overline{X} \to \overline{Y}$ *din* $\overline{\mathcal{C}}$ *este de forma* $k(f) \circ k(s)^{-1}$, *cu* s, f *morfisme din* $\mathcal{C}$.

Demonstraţie. Evident a) $\Rightarrow$ b) deoarece 1) şi 2) sînt evidente şi dacă $h : \overline{X} \to \overline{Y}$ este un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$ $(\overline{X} = k(X))$), $\overline{Y} = k(\overline{Y})$, atunci h este de forma (s/f) cu $s : Z \to X$, $f : Z \to Y$ şi

$$(s/f) = (1_X/f) \circ (s/1_Y) = k(f)\, k(s)^{-1}.$$

b) $\Rightarrow$ a). Să dovedim că S permite calculul fracţiilor la dreapta. Fie $A \overset{s}{\to} B \overset{f}{\leftarrow} c$ o diagramă în $\mathcal{C}$ cu $s \in S$. Atunci $h(s)^{-1} \circ k(f)$ este de forma : $k(g) \circ k(s')^{-1}$. Aşadar, în $\mathcal{C}$ există diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "s'"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "s"] & B \end{tikzcd}$$

cu $k(fs) = k(sg)$; deci există $s'' \in S$ cu $fs's'' = sgs''$.

Fie $f, g : X \rightrightarrows Y$ morfisme din $\mathcal{C}$ şi $s \in S$, $s : Y \to Z$ cu $sf = sg$. Atunci $k(sf) = k(sg)$ sau $k(f) = k(g)$. Aşadar există $s' \in S$ cu $fs' = fs''$.

Fie acum $\mathcal{D}$ o categorie și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor astfel că $T(s)$ este un izomorfism pentru orice $s \in S$. Definim $T_* : \overline{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ astfel:

— pentru $\overline{X} \in \text{Ob } \mathcal{C}$, definim $T_*(\overline{X}) = T(X)$ cu $k(X) = X$, $\overline{X} \in \text{Ob } \mathcal{C}$;

— pentru $h : \overline{X} \to \overline{Y}$, există în C diagrama

$$x \overset{s}{\to} z \to y \text{ cu } k(f)\, k(s)^{-1} = h.$$

Punem deci $T_*(h) = T(f) \circ T(s)^{-1}$. Definirea lui $T_*(h)$ nu depinde de reprezentanți și T_* este un functor unic cu $T_* \circ k = T$. q.e.d.

Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie și S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ care permite calculul la dreapta al fracțiilor; fie $\mathcal{C}_S$ categoria de fracții și $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ functorul canonic. Notăm cu $\bar{S}$ sistemul tuturor morfismelor lui $\mathcal{C}$ care prin P_S devine inversibil. Ca o consecință a propoziției de mai sus deducem următoarea

PROPOZIȚIA 3.7. *$\bar{S}$ este un sistem, ce permite calculul la dreapta al fracțiilor.*

Demonstrație. Pentru demonstrație este suficient să verificăm că S satisface condițiile punctului b) din propoziția precedentă (aici $k = P_S$ și $\mathcal{C} = \mathcal{C}_S$), fapt ce se dovedește imediat, din construcția lui $\mathcal{C}_S$.

Iată cum se descrie un element din $\bar{S}$; prin definiție, $P_S(f)$ este inversibil ($f : X \to Y$) dacă există un element $(s/g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{Y}, \overline{X})$ cu $(s/g) \circ \bar{f} = 1_X$ și $\bar{f} \circ (s/g) = 1_{\overline{Y}}$

Dar atunci în $\mathcal{C}$ există diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X & & Y & & X \\
& X \arrow[ul, "1_X"'] \arrow[ur, "f"] & & Z \arrow[ul, "s"'] \arrow[ur, "g"'] & \\
& & W \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

care dă compunerea: $(s/f) \circ \bar{f} = 1_{\overline{X}}$. Așadar f se poate insera în diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
W \arrow[u, "s'"] \arrow[r, "f'"] & Z \arrow[u, "s"'] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

cu $s, s' \in S$. Invers, dacă morfismul f se poate insera în diagrama comutativă de mai sus, cu $s, s' \in S$, atunci imaginea sa prin P_S este inversibilă, deoarece un invers al său va fi $P_S(g) \circ P(s)^{-1}$; calculul este imediat

Dacă S este un sistem de morfism ce permite calculul la stînga al fracțiilor, atunci un morfism f din $\mathcal{C}$ este inversat de P_s, dacă și numai dacă el se poate insera în diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s'"'] \arrow[dr, "g"] & Y \arrow[d, "s"] \\
W \arrow[r, "f'"] & Z
\end{tikzcd}$$

cu $s, s' \in S$.

DEFINIȚIA 3.8. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie, S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_S$ categoria de fracții a lui $\mathcal{C}$ relativ la S și $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ functorul canonic; sistemul $\bar{S}$ al morfismelor lui $\mathcal{C}$, inversate de P_S, se zice saturatul lui $\bar{S}$.*

Fie acum $\mathcal{C}$ o U-categorie abeliană mică și S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ complet calculabil; notăm cu $\bar{S}$ saturatul său și cu Ker $P_S = \mathcal{A}$ subcategoria „nucleu" a lui P_S.

$\mathcal{A}$ este o subcategorie deasă în $\mathcal{C}$. Notăm cu S' sistemul tuturor morfismelor lui $\mathcal{C}$ al căror nucleu și conucleu se află în $\mathcal{A}'$.

PROPOZIȚIA 3.9. $S' \equiv \bar{S}$.

Demonstrație. Pentru demonstrație observăm că orice morfism din S' este inversat de P_S, conform cu propoziția 3.2 din care rezultă și rezultatul invers.

Deducem deci că între sistemele complet calculabile și saturate ale unei categorii abeliene și subcategoriile sale dese există o corespodență biunivocă.

Iată un caz cînd se pune în evidență ușor categoria de fracții:

PROPOZIȚIA 3.10. *Fie H un functor adjunct la dreapta functorului $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ și $\Phi : GH \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ o săgeata de adjuncție a lui G cu H*; fie $S = \{s \in \mathrm{Fl}\ \mathcal{C}$, cu $G(s)$ inversabilă$\}$. *Sînt echivalente afirmațiile*:

i) *H este deplin fidel.*

ii) *Săgeata functorială $\Phi : GH \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ este inversabilă.*

iii) *Functorul $F : \mathcal{C}_s \to \mathcal{D}$ cu $G = F \circ P_S$* este o echivalență.

iv) Pentru orice categorie $\mathcal{B}$ functorul Fonct $(G, \mathcal{B})$: Fonct $(\mathcal{D}, \mathcal{B}) \to$ Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ este deplin fidel.

Demonstrație. Echivalența $i) \Leftrightarrow$ ii) rezultă din propoziția 1.15.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "P_S"] \arrow[dr, shift left, "G"] & & \mathcal{C}_s \arrow[dl, shift left, "F"] \\
& \mathcal{D} \arrow[ul, shift left, "H"] \arrow[ur, shift left, "P_S \circ H"] &
\end{tikzcd}$$

ii) $\Rightarrow$ iii); din ii) $F\,(P_S \circ H) \approx \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$; deci este suficient de probat că $(P_S \circ H) \circ F \approx \mathrm{Id}\,\mathcal{C}_s$. Cum Fonct $(P_S, \mathcal{C}_S)$ este deplin fidel este suficient deci de probat că $(P_S \circ H) \circ F \circ P_S \approx P_S$. Dar dacă notăm cu $\Psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to H \circ G$ săgeata de adjuncție cvasiinversă lui Φ se știe că săgeata compusă

$$G \xrightarrow{G\Psi} G \circ H \circ G \xrightarrow{\Phi_G} G$$

este săgeata identică a lui G. Cum Φ_G este inversabilă, rezultă că $G\,\Psi$ este inversabilă și deci $P_S\Psi$ este inversibilă deoarece dacă $v \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$; urmează că $G\Psi\,(v)$ este inversibila : deci $\Psi\,(v) \in S$, adică $P_S\,\Psi\,(v)$ este inversibilă

iii) $\Rightarrow$ iv). Într-adevăr cum F este o echivalență rezultă Fonct $(F, \mathcal{D})$ deplin fidel. Dar din propozița anterioară Fonct $(P_S, \mathcal{B})$ este de asemenea deplin fidel.

Prin urmare tot astfel este și Fonct $(G, \mathcal{B}) =$ Fonct $(P_S, \mathcal{B}) =$ $=$ Fonct $(F, \mathcal{B})$.

vi) $\Rightarrow$ i). Stabilim în prealabil următoarea

LEMĂ. *Fie diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D}' \arrow[ll, "H"'] \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

și fie $\Phi : (F \circ G) \circ H \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}'$ *o săgeată de adjuncție a lui* H *cu* $F \circ G$. *Dacă pentru orice categorie* $\mathcal{B}$, *functorul* Fonct $(G, \mathcal{B})$: Fonct $(\mathcal{D}, \mathcal{B}) \to$ Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ *este deplin fidel, atunci* Φ *este o săgeată de adjuncție de la* GH *în* F.

Demonstrația lemei. Într-adevăr, fie $\Psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to H \circ (F \circ G)$ săgeata cvasiinversă lui Φ. Din ipoteză, există o săgeată functorială $\Psi' : \mathrm{Id}\,\mathcal{D} \to (G \circ D) \circ F$ și una singură încît $\Psi'_G = G\,\Psi$. (Într-adevăr, $G\,\Psi : G \to FGFG$ și cum Fonct $(G, \mathcal{D})$ este deplin fidel, rezultă că există unica săgeată $\Psi' : \mathrm{Id}\,\mathcal{D} \to G \circ H \circ F$ cu $\Psi'_G = G\,\Psi$).

Este suficient deci să probăm că Ψ' și Φ sînt cvasiinverse una alteia. Dar săgeata compusă

$$H \xrightarrow{\Psi_H} HFGH \xrightarrow{H\Phi} H$$

ne dă, prin multiplicare cu G,

$$GH \xrightarrow{G\Psi_H} GHF\,GH \xrightarrow{GH\,\Phi} GH$$

Cum $(H\,\Phi) \circ (\Psi_H) = \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ și cum $G\Psi = \Psi'_G$ rezultă că

$$((GH)\,\Phi) \circ G \circ H \approx \mathrm{Id}\;GH.$$

Pe de altă parte pentru a proba că săgeata compusă

$$F \xrightarrow{F\Psi'} FGHE \xrightarrow{\Phi_F} F$$

este săgeata identică a lui F, este suficient de probat că

$$FG \xrightarrow{F\Psi'_G} FG\,HFG \xrightarrow{\Phi FG} FG$$

este săgeata identică a lui FG. Dar aceasta rezultă din $\Psi'_G = G\Psi'$ și din faptul că Ψ' este cvasiinversă lui Φ.

Revenim la $(iv) \Rightarrow i)$. Vom considera diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \arrow[ll, "H"'] \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Id}\,\mathcal{D}"'] &
\end{tikzcd}$$

Cum Fonct $(G, \mathcal{B})$ este deplin fidel oricare ar fi $\mathcal{B}$ și $(\mathrm{Id}\,\mathcal{D} \circ G) \circ H \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ este o săgeată de adjuncție, rezultă că $\Phi : \mathrm{Id}\,\mathcal{D} \circ (G \circ H) \to \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ este o săgeată de adjuncție a lui GH cu $\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$. Dar cum functorii adjuncți sînt unic determinați pînă la un izomorfism, rezultă că $GH \approx \mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ (căci $\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$ este adjunct lui $\mathrm{Id}\,\mathcal{D}$). Deci Φ este un izomorfism.

§ 8. FUNCTORUL SECȚIUNE

Fie C o categorie și S un sistem de morfisme din C care permite calculul fracțiilor la dreapta. Problema care se pune este de a determina condiții necesare și suficiente pentru ca functorul canonic : $P_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_s$ să admită un adjunct la dreapta. În scopul acesta avem

PROPOZIȚIA 3.11. *Fie S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$, care permite calculul fracțiilor la dreapta și* $\bar{Y} \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_S$, $\bar{Y} = P_S(Y)$, *cu* $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. *Următoarele afirmații sînt echivalente* :

a) *Categoria* $\bar{Y}/(\mathcal{C}, P_S)$ *are un obiect inițial* (X, γ), $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\gamma : \bar{Y} \to P_S X$,

b) *Există un morfism* $\gamma : \bar{Y} \to P_S X$, *inversibil și pentru orice* $s \in S$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, s)$ *este o bijecție.*

c) *Există* $\gamma : \bar{Y} \to P_S]\, X$ *inversibil și pentru orice* $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *aplicația* $P_S(X, Z) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_s X, P_S Z)$ *este bijectivă.*

Demonstrație.

a) $\Rightarrow$ b) Fie $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, cu $\overline{Y} = P_S\, Y$; atunci există : $\varphi : Y \to X$ cu $P_S(\varphi) \circ \gamma = 1_Y$, ceea ce arată că γ este inversibil la stînga. Dar $\gamma \circ P_S(\varphi) : P_S\, X \to P_S\, X$ și $\gamma \circ P_s(\varphi) \circ \gamma = \gamma$.

Deci, $\gamma \circ P_S(\varphi) = 1_{P_S(X)}$, căci $(P_S\, X, \gamma)$ este obiect inițial.

Așadar γ este inversibil.

Faptul că categoria $\overline{Y}(\mathcal{C}, P_S)$ are un obiect inițial este echivalent cu acela că functorul

$$Z \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\overline{Y}, P_S\, Z)$$

este reprezentabil și X este un reprezentant al său, adică

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{Y}, P_S\, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

egalitatea fiind un izomorfism functorial. De aici, direct deducem că a $\Rightarrow$ b)

b) $\Rightarrow$ c). Evident,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S\, X, P_S\, Y) = \varinjlim_{s \in S/X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), Z)$$

(definiția categoriei de fracții cînd sistemul permite calculul fracțiilor la dreapta).

Fie $s : X' \to X$; deoarece funcția

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

indusă de s este un izomorfism, deducem că există $s_1 : X \to X'$ cu $s \circ s_1 = 1_X$. Așadar, aplicația

$$\varphi_s : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Z),$$

definită astfel : $f \rightsquigarrow f \circ s$, $f : X \to Z$, este un monomorfism, căci s este un epimorfism, pentru orice $s \in S/X$. Deducem de aici că aplicația indusă

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \to \varinjlim_{s \in S/X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(s), Z)$$

este un monomorfism (φ este indusă astfel : pentru orice $s \in S/X$ considerăm, φ_S ca mai sus și limita lor inductivă φ este aplicația naturală $P_S(X, Z)$, fapt care se deduce imediat). φ este surjectivă. Fie într-adevăr (s/f) un element din $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(P_S\, X, P_S\, Z)$; atunci avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, shift left, "s_1"] & & Z \\
& X' \arrow[ul, shift left, "s"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

în care s_1 este o secțiune a lui s. Avem însă diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, shift left, "1X'"] \arrow[r, shift right, "s_1 \circ s"'] & X' \arrow[r, "s"] & X \end{tikzcd}$$

comutativă ; există deci $t \in S$ cu $t = s_1 \circ s \circ t$, $t : X'' \to X'$. Așadar

$$(s/f) = (s \circ t/f \circ t) = (s \circ t/fs,\ st) = (1/fs_1)$$

și deci φ este un epimorfism.

c) $\Rightarrow$ *a*). Evident. q. e. d.

Dacă una din afirmațiile de mai sus este valabilă, atunci functorul P_S se „adjuncționează" la stînga pentru obiectul Y. Dacă cele de mai sus sînt valabile pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, atunci P_S are un adjunct la stînga. Acest functor se numește functorul „secțiune" prin extensiune de limbaj. Putem da condiții duale, astfel că P_S să admită un adjunct la dreapta. Cititorul este invitat să facă acest lucru.

Observație. Din propoziția dovedită, se deduce că dacă functorul P_S are un adjunct la dreapta (sau la stînga), T, atunci T este neapărat deplin fidel, conform cu propoziția 3.10.

§ 9. EXEMPLE DE CATEGORII DE FRACȚII

a) Fie Top categoria spațiilor topologice și Ens categoria mulțimilor (evident, că peste tot în acest seminar, mulțimile care apar sînt elemente ale universului U). Fie S : Top $\to$ Ens functorul subiacență ; evident functorul T : Ens $\to$ Top care asociază oricărei mulțimi X spațiul topologic discret, este un adjunct la dreapta pentru S. Faptul că T este deplin fidel este cu totul evident, deoarece o săgeată de adjuncție a lui T cu S este săgeata identică, pentru orice $X \in$ Ob Ens.

b) Fie Top categoria mai sus considerată, Sep categoria spațiilor topologice separate și S : Sep $\to$ Top functorul incluziune (evident deplin fidel).

Vom dovedi că pentru orice obiect $X \in$ Ob Top, categoria X/S are un obiect inițial. Pentru aceasta, fie D familia tuturor perechilor (f, Y) cu X un spațiu separat și $f : X \to Y$ aplicație epimorfă, astfel că Y este dotat cu topologia cît (existența acestor spații este imediată). Evident, cu ajutorul unor funcții (ce există între perechile respective) obținem o diagramă de spații separate, notată încă D și o aplicație continuă

$$g : X \longrightarrow \varprojlim D.$$

Mai observăm că orice limită proiectivă de spații separate calculată în Top este încă un spațiu separat (sau echivalent, că functorul S comută cu limitele proiective, și Sep este o categorie cu limite proiective). Putem dovedi (deși aceasta nu este necesar pentru scopurile noastre), că ($\varprojlim D$, g) este un spaţiu cît al lui X. Dacă $f : X \to Y$ este un morfism din $\overleftarrow{\text{Top}}$ de la X la un spaţiu topologic separat (putem să admitem că f este epimorfă), atunci avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr] & & \varprojlim D \arrow[d, "p_1"] \\
Y & & Y_1 \arrow[ll, "i"']
\end{tikzcd}$$

în care Y_1 este spaţiul Y cu topologia cît (mai fină ca cea a lui Y şi deci separată), i este aplicaţia identică a lui Y, continuă, şi p proiecţia canonică, deoarece (f_1, Y_1) apare în limita proiectivă de mai sus, $f : X \to Y$, fiind aplicaţia ce defineşte pe X ca spaţiu topologic cît. Faptul că diagrama este comutativă, este evident; $i \circ p_1$, este unic cu această proprietate. Conform cu propoziţia 1.11 se deduce că S are un adjunct la stînga. Aşadar, Sep este o categorie de fracţii a lui Top.

Terminologie. Dacă $S \subset \text{Fl}\ \mathcal{C}$ este un sistem de morfism ce permite calculul la dreapta al fracţiilor, atunci vom spune că perechea (P_S, $\mathcal{C}_S$) este o categorie de fracţii la dreapta a lui C relativ la S şi dual.

Din propoziţia 3.10 deducem că dacă $S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ are un adjunct la dreapta T, deplin fidel, atunci (S, C') este o categorie de fracţii la stînga a lui C şi dual (aici sistemul de morfisme, care permite calculul la stînga al fracţiilor, este format din toate morfismele lui $\mathcal{C}$ inversate de functorul S).

c) Fie Gr categoria tuturor grupurilor şi Ab categoria grupurilor abeliene; functorul G : Ab $\to G$ este deplin fidel şi admite un adjunct la stînga T (TX este pentru orice $X \in$ Ob Gr grupul cît $X/\text{C}(X)$, unde $C(X)$ este comutatorul lui X). Aşadar Ab este o categorie de fracţii la dreapta a lui Gr.

d) Fie $\mathcal{C}$ o categorie, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor şi $\Psi^{\cdot} : \text{Id}\ \mathcal{C} \to T$ o săgeată functorială, astfel că $T\Psi^{\cdot} = \Psi^{\cdot}_T$. Fie S cel mai mic sistem multiplicativ (găsit cu ideea de intersecţie de sisteme multiplicative, care conţine toate unităţile lui $\mathcal{C}$ şi toate morfismele de tipul $\Psi^{\cdot}_{T^n}$). Se deduce uşor că S permite calculul la stînga al fracţiilor. Categoria de fracţii $\mathcal{C}_S$ se descrie în acest caz uşor; obiectele ei sînt obiectele lui $\mathcal{C}$ şi, pentru orice $\overline{X}$, $\overline{Y} \in \text{Ob C}_S$, definim

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_s}(\overline{X}, \overline{Y}) = \varinjlim_{s \in Y/S} \text{Hom}\,(\mathcal{C}\,(X, b\,(s))$$

($\overline{X} = P_S\,X$); dar este suficient să luăm pe s de tipul

$$s = \Psi^{\cdot}_{T^n X} \cdot \Psi^{\cdot}_{T^{n-1} X} \cdots \Psi^{\cdot}_{TX} \text{ şi deci}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(\overline{X}, \overline{Y}) = \varinjlim_{n} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T^n\,Y).$$

e) Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cît şi $K'(\mathcal{C})$ categoria complexelor lui $\mathcal{C}$ ((3), cap. IV), iar $K(\mathcal{C})$ categoria cît a lui obţinută prin identificarea obiectelor cu acelaşi tip de omotopie ((3), cap. IV). Notăm cu S sistemul morfismelor lui $K(\mathcal{C})$, astfel că $u \in S$, $u : X \to Y$, dacă şi numai dacă $H_n(u) : H_n(X) \to H_n(Y)$ este pentru orice n, un izomorfism. Se dovedeşte (cititorul este invitat să facă aceasta) că S permite calcule la stînga şi la dreapta fracţiilor. Categoria de fracţii $K(\mathcal{C})_S$ este categoria derivată a lui $\mathcal{C}$, descrierea căreia se face în felul următor: considerăm categoria $\mathcal{C}_1$ a perechilor lui $\mathcal{C}$ în care introducem următoarea relaţie de echivalenţă, simplă, (compatibilă cu adunarea morfismelor): $(\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta') \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(d, d')$ ($d : X \to Y$, $d' : X' \to Y'$) morfisme din $\mathcal{C}$) dacă şi numai dacă există $u : Y \to X'$, morfism din $\mathcal{C}$, cu $\alpha - \alpha' = u.d$.

f) Fie Ens categoria mulţimilor şi σ un cardinal, element al lui U (σ infinit). Notăm prin S_σ, familia tuturor morfismelor lui Ens formată din funcţii $u : M \to N$, astfel că

i) $N \neq \emptyset$ implică că $M \neq \emptyset$

ii) card $(N - u(M)) < \sigma$

iii) Există o parte M' a lui M, astfel că restricţia u/M' este injectivă, şi card $(M - M') < \sigma$. Notăm de asemenea cu S_σ^* toate săgeţile lui Ens ce satisfac ii) şi iii). S_σ şi S_σ^* permite calculul la stînga al fracţiilor. Lăsăm cititorului dovedirea acestor chestiuni, cum şi faptul că orice categorie de fracţii la stînga a lui Ens este una din categoriile: Ens, Ens_{S_σ} şi $\mathrm{Ens}_{S_\sigma^*}$. În ceea ce priveşte categoriile de fracţii la dreapta ale lui Ens, atunci acestea sînt Ens şi $\mathrm{Ens}_{\mathrm{Fl\ Ens}}$ (adică, saturatul oricărui sistem ce permite calculul la dreapta al fracţiilor, din Ens, este Fl Ens, dacă acest sistem nu se reduce la toate izomorfismele lui Ens).

§ 10. CÎTEVA CHESTIUNI PRIVIND LIMITELE INDUCTIVE ŞI PROIECTIVE

Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor şi S un adjunct al său la dreapta, deplin fidel; atunci conform cu propoziţia 3.10, categoria $\mathcal{C}'$ este echivalentă cu categoria de fracţii a lui $\mathcal{C}$ relativ la un sistem de morfisme, ce permite calculul la stînga al fracţiilor. Functorul T comută cu limitele inductive reprezentabile din $\mathcal{C}$, conform cu propoziţia 1.18; tot de aici deducem că S comută cu limitele proiective reprezentabile din $\mathcal{C}'$. Mai mult, fie $D : I \to \mathcal{C}'$ un functor $I \in \mathrm{Ob\ Cat}\ U$. Atunci $S \circ D : I \to \mathcal{C}$. Admitem că $\varinjlim (S \circ D)$ există şi este izomorfă cu un obiect de tipul SX', cu $X' \in \mathrm{Ob}\ C'$; atunci, dacă pentru orice $i \in I$, $Sf_i : SX' \to S \circ D_i$ sînt morfismele structurale, $f_i : X' \to D_i$ definesc pe X' ca limită proiectivă a functorului D.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu limite inductive şi fie $D : I \to \mathcal{C}'$ un functor, I fiind U-categorie mică; atunci $S \circ D : I \to \mathcal{C}$. Fie $X = \varinjlim S \circ D$ şi $f_i : S \circ D \to X$ morfismele structurale. Atunci, identificînd $T \circ S \circ D_i$ cu D_i, obţinem că TX este un con iniţial al diagramei D şi $Tf_i : TX \to D_i$ sînt morfismele canonice.

Fie acum $\mathscr{C}$ o categorie cu limite proiective; fie $I \in \mathrm{Ob\ Cat}\ U$ și $D : I \to \mathscr{C}$ un functor. Fie $S \circ D : I \to \mathscr{C}$ și $X = \underset{\longleftarrow}{\lim}\ S \circ D$; fie : p'_i : $TX \to D_i$, unicele morfisme din $\mathscr{C}'$, astfel că $Sp_i \circ \Psi_X = p'_i$, $\Psi : \mathrm{Id}\,\mathscr{C} \to S \circ T$ fiind o săgeată de adjuncție a lui S cu T. Atunci, TX împreună cu morfismele $p_i : TX \to D_i$ definesc pe T ca o limită proiectivă a lui D. Pentru aceasta observăm că toate diagramele care apar sînt comutative (D este o diagramă). Fie apoi $f_i : Y' \to D_i$ morfisme din $\mathscr{C}'$ cu condițiile de rigoare satisfăcute. Atunci în $\mathscr{C}$ avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Psi_X"] \arrow[d, "p'_i"'] & STX \arrow[dl, "Sp_i"] \\
SD_i & SY' \arrow[l, "Sf_i"] \arrow[ul, "u"']
\end{tikzcd}$$

și deci $u : Y' \to X$ cu $p'_i \circ u = Sf_i$, u unic cu această proprietate. Dar atunci $\Psi_X \circ u : SY' \to STX$ este unic astfel că $Sp_i \circ \Psi_X \circ u = p'_i \circ u = Sf_i$. Dar $Sp_i \circ \Psi_X = Sf_i$ și deci $Sp_i \circ Sf = S\,(p_i \circ f) = Sf_i$, deci $p_i \circ f = f_i$. Faptul că f este unic, este evident.

Fie acum X un generator (putem considera o familie de generatori ai lui $\mathscr{C}$) al lui $\mathscr{C}$. Atunci, pentru orice A, $B \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}$ și $f : A \to B$, din aceea că $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, f)$ este izomorfism, se deduce că f este izomorfism. În aceste condiții TX este un generator al lui $\mathscr{C}^{\circ\prime}$, ceea ce se deduce imediat. În concluzie am dovedit

PROPOZIȚIA 3.12. *Fie $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ categorii, $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ un functor și S un adjunct al său la dreapta deplin fidel. Atunci:*

a) *Dacă $\mathscr{C}$ este o categorie cu limite inductive, la fel este și $\mathscr{C}'$,*

b) *Dacă $\mathscr{C}$ este o categorie cu limite proiective, la fel este și $\mathscr{C}'$,*

c) *Dacă $\mathscr{C}$ are generatori, atunci și $\mathscr{C}'$ are generatori.*

Cititorul poate aplica această propoziție pentru a trage unele concluzii asupra unor categorii de fracții exemplificate mai sus.

§ 11. CATEGORII DE FRACȚII ALE CATEGORIILOR ABELIENE

În paragraful de față și în cele care urmează tratăm problema categoriilor de fracții ale unei categorii abeliene; evident sînt interesante cazurile cînd, fiind dat un sistem de morfisme S din $\mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ U-categorie mică, abeliană) categoria de fracții $\mathscr{C}_S$ este încă abeliană și functorul $P_S : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_S$ este exact; atunci conform cu exemplul *d*) § 5, deducem că $\mathscr{C}$ este categoria de fracții a lui $\mathscr{C}$ relativ la un sistem de morfisme ce permite calculul la stînga și la dreapta al fracțiilor. Mai știm din § 5, exemplul 4 că oricărui sistem de morfisme din $\mathscr{C}$, complet calculabil, putem să-i asociem o subcategorie deasă $\mathscr{C}(S)$ a lui $\mathscr{C}$, astfel că categoria cît $\mathcal{C}/\mathcal{C}(s)$ să fie echivalentă cu $\mathcal{C}_S$. Aşadar, pentru studiul categoriilor de fracţii ale unei categorii abeliene vom considera perechi $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ cu $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$ categorii abeliene şi $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a lui $\mathcal{C}$. Pentru a justifica unele noţiuni procedăm la cîteva consideraţii.

Fie Ab (U) categoria ale cărui obiecte sînt U-categoriile mici care sînt abeliene, şi pentru orice $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}' \in$ Ob Ab (U), notăm cu $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}(U)}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ mulţimea tuturor functorilor exacţi de la $\mathcal{C}$ la $\mathcal{C}'$; Hom Ab $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ are în mod canonic structură de monoid comutativ relativ la adunarea functorilor : $(F_1 + F_2)(X) = F_1 X \oplus F_2 X$;

$$(F_1 + F_2)(f) = F_1(f) \oplus F_2(f).$$

Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un morfism din Ab (U) şi Ker T subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$, formată din toate obiectele anulate de T ; Ker T este o subcategorie deasă a lui $\mathcal{C}$ şi deci un obiect din Ab (U), subobiect al lui $\mathcal{C}$. Dacă I : Ker $T \to \mathcal{C}$ este functorul incluziune, atunci $T \circ I = 0$ (0, fiind functorul nul, definit în mod evident). Dacă $S : \mathcal{C}'' \to \mathcal{C}$ este un morfism din Ab(U), cu $T \circ S = 0$, atunci pentru orice $X'' \in$ Ob $\mathcal{C}''$ $SX'' \in$ Ob Ker T şi deci există un functor unic, pînă la o echivalenţă naturală (izomorfism de functori) $S' : \mathcal{C}'' \to$ Ker T, cu $I \circ S' = S$. Deducem din cele de mai sus, că Ab (U) este o categorie în care orice morfism are un nucleu. Ab(U) are şi proprietatea că orice morfism are şi imagine ; mai precis, fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un morfism din Ab (U) şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/$Ker T morfismul canonic ; există un morfism unic $F' : \mathcal{C}/$Ker $T \to \mathcal{C}'$ cu $T' \circ T = F$, din care tragem concluzia că Ab (U) este o bicategorie, F' fiind un functor fidel, deci un monomorfism în Ab (U) şi T un epimorfism în Ab (U). Mai mult, dacă $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ este un subobiect din $\mathcal{C}$, în Ab (U), atunci $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}$ joacă rolul de conucleu, ceea ce se vede imediat. Aşadar

PROPOZIŢIA 3.13. Ab (U) *este o categorie cu următoarele proprietăţi* :

a) *orice morfism din* Ab(U) *are nucleu* ;

b) Ab(U) *este o bicategorie* ;

c) *există obiectul cît asociat cu orice subobiect.*

Observaţie. Un studiu mai detaliat al lui Ab (U) ar scoate, poate, la iveală multe proprietăţi ale acestei categorii. Cititorul este invitat să-l facă.

Pentru cele ce urmează, considerăm în Ab (U), şirul exact

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{T'} \mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}/\mathcal{A} \to 0$$

şi vom căuta să studiem pe $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ în funcţie de $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{A}$.

Fie mai întîi I o categorie discretă $I \in$ Ob Cat (U) şi $\mathcal{C}^I =$ Fonct $(I, \mathcal{C})$. Evident $\mathcal{C}^I$ este o categorie obiect al lui Ab (U). Functorul T' induce un functor $T'^I : \mathcal{A}^I \to \mathcal{C}^I$ care defineşte pe $\mathcal{A}^I$ ca o subcategorie deasă din $\mathcal{C}^I$. Considerăm de asemenea categoriile $(\mathcal{C}/\mathcal{A})^I$ şi $\mathcal{C}^I/\mathcal{A}^I$ şi functorul H', care face să corespundă oricărui obiect $(D_i)_{i \in I}$ din $\mathcal{C}^I$, obiectul $(TD_i)_{i \in I}$ din $(\mathcal{C}/\mathcal{A})^I$ şi dacă $(f_i) : (D_i) \to (D_i')$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci definim

$$H((f_i)) = (T(f_i)) : H'((D_i)) \to H'((D_i')).$$

Dacă $(D_i) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}^I$, atunci $H'((D_i)) = (TD_i) = 0$ și deci H' induce un functor $H: \mathcal{C}^I/\mathcal{A}^I \to (\mathcal{C}/\mathcal{A})^I$ unic, astfel că $H \circ \overline{T}^I = H'$ unde $\overline{T}^I: \mathcal{C}^I \to \mathcal{C}^1/\mathcal{A}^I$ este functorul canonic.

PROPOZIȚIA 3.14. *Functorul H este o echivalență de categorii.*

Demonstrație. H este deplin fidel; într-adevăr, dacă $H((\overline{f}_i)) = 0$, atunci putem considera că $(\overline{f}_i) = T^I((f_i))$ (deoarece dacă $\overline{f}: \overline{X} \to \overline{Y}$ este un morfism din $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, atunci există în $\mathcal{C}$ diagrama

$$\begin{tikzcd}
X & & Y \\
& Z \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

cu $\mathrm{Ker}\, s$, $\mathrm{Coker}\, s \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$ și $f = T(g) \circ T(s)^{-1}$; mai mult, în $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ avem diagrama comutativă, canonic construită,

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[rr, "\overline{f}"] & & \overline{Y} \\
& Z \arrow[ul, "T(s)"] \arrow[ur, "T(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

care arată că orice morfism $\overline{f}$ din $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ este izomorf cu un morfism de tipul $T(g)$, cu g morfism din $\mathcal{C}$). Așadar, din aceea că $H \circ \overline{T}^I = H'$, deducem că $H'((f_i)) = 0$, adică $T(f_i) = 0$, pentru orice $i \in I$ și deci $\mathrm{Im}\, f_i \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$, adică $\mathrm{Im}\, \{f_i\} \in \mathrm{Ob}\, A^I$. Așadar $\overline{T}^I((f_i)) = 0$, deci $\{\overline{f}_i\} = 0$. Fie acum $(\overline{g}_i)$ un morfism $(\mathcal{C}/\mathcal{A})^I$; atunci putem considera că $\overline{g}_i = Tg_i$, $i \in I$. Evident că $(g_i)_{i \in I}$ este un morfism din $\mathcal{C}^I$ și încă, $(H\, \overline{T}^I)((g_i)) = (\overline{g}_i)$. Fie acum $\overline{X} = \{\overline{X}_i\}$ un obiect din $(\mathcal{C}/\mathcal{A})^I$; evident $\overline{X}_i = TX_i$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $i \in I$. Atunci, din felul cum a fost definit H' avem că $H'((X_i)) = (\overline{X}_i)$, așadar, conform cu propoziția 1.29 H este o echivalență de categorii.

COROLARUL 1. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană obiect al lui* Ab(U), *ce satisface* Ab4 *și $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a sa ce satisface* Ab 3 ((1), cap. I). *Atunci $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ satisface* Ab4.

Demonstrație. Fie I o mulțime (U-categorie unică, discretă) și diagrama de categorii și functori în care liniile sînt exacte în Ab(U):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^I \arrow[r, "T'^I"] \arrow[d, "F'"'] & \mathcal{C}^I \arrow[r, "T^I"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{C}^I/\mathcal{A}^I \arrow[r] \arrow[d, "F''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "T'"] & \mathcal{C} \arrow[r, "T"] & \mathcal{C}/\mathcal{A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

în care F', F sînt adjuncți la stînga functorilor k', și k respectivi (cap. I, § 5). F'' este construit în mod canonic, astfel că $F'' \circ \overline{T}^I = T \circ F$. Faptul că F'' este exact, rezultă imediat din aceea că $(\mathcal{C}^I/\mathcal{A}^I, \underline{T}^I)$ este un conucleu în categoria Ab(U) și faptul că este adjunct lui $\overline{k}'': \mathcal{C}/\mathcal{A} \to \mathcal{C}^I/\mathcal{A}^I$, cu $\overline{k}'' = H^{-1} \circ k''$ (unde $k'': \mathcal{C}/\mathcal{A} \to (\mathcal{C}/\mathcal{A})^I$ este functorul incluziune canonică, iar H^{-1} un functor adjunct la stînga, spre exemplu, lui H, și care este și el echivalență) se deduce printr-un calcul direct. q.e.d.

Observaţie. Rezultatele se pot, evident, dualiza. Prin demonstraţii analoage cu cele de mai sus putem deduce (aceasta rămîne cititorului):

COROLARUL 2. *Dacă* $\mathcal{C}$ *satisface* Ab 5 *şi* $\mathcal{A}$ *satisface* Ab 3, *atunci* $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ *satisface* Ab 5.

§ 12. FUNCTORUL SECŢIUNE PENTRU CATEGORIILE ABELIENE

Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ categorii abeliene şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor exact, iar S un adjunct al său la dreapta deplin fidel. Fie $\Psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C} \to ST$ un morfism de adjuncţie şi Φ un cvasiinvers al său; Φ este un izomorfism functorial. Din cele de mai sus se deduce că $\mathcal{C}'$ este echivalentă cu categoria de fracţii la stînga a lui $\mathcal{C}$ relativ la sistemul tuturor morfismelor lui $\mathcal{C}$ inversate de T; notăm cu Σ acest sistem. Ştim că un morfism $f \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$ este în Σ dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ker}\, T$ şi că $T(f) = 0$, dacă şi numai dacă $\mathrm{Im}\, f \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{Ker}\ T$. Aşa fiind, putem dovedi:

PROPOZIŢIA 3.15. *Cu notaţiile de mai sus un obiect* X *din* $\mathcal{C}$ *este în* $\mathrm{Ker}\ T$ *dacă şi numai dacă* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SX') = 0$, *pentru orice* $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$.

Demonstraţie. Evident, dacă $X \in \mathrm{Ob}\mathrm{Ker}\ T$, atunci $TX = 0$ şi deci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SX') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(0, X) = 0$. (Cu 0 am notat grupul format doar din elementul său nul). Invers, dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, SX) = 0$, pentru orice $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, atunci deducem că $\Psi_X : X \to STX$ este morfismul nul şi inversibil în $\mathcal{C}'$; or, singurul obiect pentru care morfismul nul este inversibil, este obiectul nul.

Observaţie. Propoziţia de mai sus este valabilă şi dacă S nu este neapărat deplin fidel.

Pentru tot ce urmează admitem că sîntem în ipotezele şi cu notaţiile de mai sus.

PROPOZIŢIA 3.16. *Pentru obiectul* X *din* $\mathcal{C}$ *următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

a) *Pentru orice morfism* $u : P \to Q$, *astfel că* $\mathrm{Ker}\ U$, $\mathrm{Coker}\ u \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ker}\ T$, *aplicaţia*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u\ X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X)$$

este izomorfism.

b) Orice subobiect al lui X din $\mathrm{Ker}\ T$ este nul şi dacă în şirul exact

$$0 \to X \to M \to A \to 0$$

$i \in \Sigma$, (adică $A \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ker}\ T$), atunci i admite o retracţie (adică un morfism $p : M \to X$ cu $p \circ i = 1_X$).

c) *Pentru orice obiect* Y *al lui* $\mathcal{C}$, *aplicaţia canonică* $T(Y, X)$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TY, TX)$ *este un izomorfism.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b) deoarece i induce conform cu a) izomorfismul

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(i, X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

și deci există $p : M \to X$, morfism din $\mathcal{C}$, cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(i, X)(p) = p \circ i = 1_X$.

b) $\Rightarrow$ c). Dacă $f : Y \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci, din $T(f) = 0$, deducem că $\mathrm{Im}\, f = 0$ și deci $f = 0$, căci X nu are subobiecte nenule din Ker T. Dacă $\bar{f} : TY \to TX$, atunci $\bar{f} = T(g) \circ T(s)^{-1}$ și deci în $\mathcal{C}$ avem diagrama

(✳)
$$\begin{tikzcd}
Y & & X \\
& Z \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

cu $s \in \sum$; dar atunci din (✳) deducem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "s'"] & \\
Z \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "s"'] & & X \coprod_Z Y \\
& Y \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

în care $s' \in \sum$; așadar s' este un monomorfism, și deci există o retracție a sa, notată p. Atunci $p \circ g' : Y \to X$ și $p \circ g' \circ s = p \circ s' \circ g = g$. Deci $T(p \circ g') \circ T(s) = T(s)$ și $T(p \circ g') = T(g) \circ T(s)^{-1} = \bar{f}$ ceea ce arată că $T(Y, X)$ este și surjectivă.

c) $\Rightarrow$ a) aceasta rezultă imediat din diagrama comutativă, canonic construită

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X) \arrow[r, "T(P,\, X)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TP, TX) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, X) \arrow[r, "T(Q,\, X)"] \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\, X)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(TQ, TX) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(Tf,\, TX)"']
\end{tikzcd}$$

în care morfismele orizontale și cel vertical din dreapta sînt izomorfisme.

Observație. Mai întîi observăm că în ultima propoziție nu am folosit încă faptul că T are un adjunct la dreapta și nici faptul că T este exact. Această lemă este deci valabilă în cazul cînd $\mathcal{C}'$ este o categorie de fracții a lui $\mathcal{C}$ relative la un sistem de morfisme complet calculabil, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ fiind functorul canonic. Această propoziție admite o variantă cînd $\sum$ este un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ care permite calculul la stînga (dreapta) al fracțiilor. Cititorul este invitat să reproducă această variantă.

DEFINIȚIA 3.17. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană și $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a sa astfel încît categoria cît $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ există (nu cerem neapărat ca $\mathcal{C}$ să fie U-categorie mică). Un obiect X din $\mathcal{C}$ care satisface una din afirmațiile echivalente ale ultimei propoziții se zice A-închis sau închis dacă nu este pericol de confuzie.*

Fie cu notațiile de mai sus $X' \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}'$ și $X = STX$, atunci X este un obiect Ker T-închis, deoarece, pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, avem $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (Y, ST) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}} (TX, TY)$ și această aplicație este chiar $T(X, Y)$, ceea ce se deduce imediat (vezi cap. I, functorii adjuncți). Invers, dacă X este un obiect închis, atunci $\Psi_X \colon X \to STX$ este un izomorfism, deoarece altfel ST ar conține subobiecte nenule din Ker T, deoarece X nu conține și Ψ_X are o retracție și deci este un izomorfism. Așadar:

PROPOZIȚIA 3.18. *Un obiect X al lui $\mathcal{C}$ este* Ker *T-închis, dacă și numai dacă $\Psi_X \colon X \to STX$ este un izomorfism.*

Deducem din cele de mai sus că S stabilește o echivalență între $\mathcal{C}$ și subcategoria obiectelor lui $\mathcal{C}$, Ker T-închise; dacă $\mathcal{C}_1$ este această categorie, atunci, nucleele și sumele directe finite din $\mathcal{C}_1$ se fac ca și în $\mathcal{C}$, deoarece S este aditiv și exact la stînga. Un morfism $f \colon X \to Y$ din $\mathcal{C}_1$ este epimorfism dacă și numai dacă Coker $f \in$ Ob Ker T; atunci conucleul unui morfism din $\mathcal{C}$ se obține astfel: fie mai întîi șirul exact $X \to Y \to \mathrm{Coker}\, f \to 0$ cu f morfism din $\mathcal{C}_1$, șirul exact, fiind calculat în $\mathcal{C}$. Atunci în $\mathcal{C}'$ avem șirul exact

$$TX \longrightarrow TY \longrightarrow T\,(\mathrm{Coker}\, f) \to 0$$

și deci în $\mathcal{C}$ diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_x"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\psi_y"'] & \mathrm{Coker}\ f \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_{\mathrm{Coker}\, f}"] & 0 \\
STX \arrow[r, "ST\,(f)"] & ST \arrow[r] & ST\,(\mathrm{Coker\ f}) &
\end{tikzcd}$$

Atunci $(ST\,\mathrm{Coker}\ f,\ \Psi_{\mathrm{Coker}\, f} \circ j)$ este un conucleu al lui f în $\mathcal{C}_1$.

Dacă $f \colon X \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}_1$, atunci avem în $\mathcal{C}$ descompunerea canonică

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\
\mathrm{Coim}\ f \arrow[r, "\Theta"] & \mathrm{Im}\ f \arrow[u, phantom] \arrow[from=1-2, to=2-2, "j"]
\end{tikzcd}$$

Din această diagramă obținem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coim}\ f \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\Psi_{\mathrm{Coim}\, f}"] & \mathrm{Im}\ f \arrow[d, "\Psi_{\mathrm{Im} f}"'] \\
ST\,(\mathrm{Coim}\ f) \arrow[r, "ST\,(\Theta)"] & ST\,(\mathrm{Im}\ f)
\end{tikzcd}$$

din care deducem că $\Psi_{\mathrm{Coim}\, f}$ este un epimorfism din $\mathcal{C}_1$ (deoarece Coker $\Psi_{\mathrm{Coim}\, f} \in$ Ob Ker T) și deci $ST\, i \circ ST\, \theta\, (\Psi_{\mathrm{Coim}\, f} \circ p)$ dă o descompunere a lui f în $\mathcal{C}_1$ cu $ST\ \theta$ izomorfism.

Deoarece functorul T comută cu limitele inductive, deducem că o limită inductivă de obiecte din Ker T este încă un obiect din Ker T; mai mult, pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$ există un morfism într-un obiect închis, al cărui nucleu este în Ob Ker T, şi este cel mai mare subobiect al lui X cu această proprietate ; dacă X nu are subobiecte din Ker T, atunci evident Ψ_X este un monomorfism. Vom vedea în cele ce urmează că aceste proprietăţi sînt caracteristice pentru o subcategorie deasă din $\mathcal{C}$, pentru ca functorul canonic, de trecere la categoria de fracţii respectivă, să aibă un adjunct la dreapta.

DEFINIŢIA 3.19. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană şi $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a sa astfel că există categoria de fracţie $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{C}$ relativ la $\mathcal{A}$ şi functorul canonic : $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}$ are un adjunct la dreapta ; atunci $\mathcal{A}$ se numeşte o subcategorie localizantă a lui $\mathcal{C}$.*

PROPOZIŢIA 3.20. *Fie $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a categoriei abeliene $\mathcal{C}$; următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

a) *$\mathcal{A}$ este localizantă.*

b) *Orice obiect X din $\mathcal{C}$ are un cel mai mare subobiect al său din $\mathcal{A}$ şi dacă X nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$ există un monomorfism al său într-un obiect $\mathcal{A}$-închis.*

Demonstraţie. Implicaţia a) $\Rightarrow$ b) este imediată, din cele de mai sus. Fie b) verificată şi $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$; notăm cu $X_1 = X/X'$, unde cu X' am notat cel mai mare subobiect al lui X din $\mathcal{A}$; atunci X_1 nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$ şi există un monomorfism $i : X_1 \to Y$, cu Y obiect $\mathcal{A}$-închis (conform cu definiţia 3.17). Atunci dacă $Z = \operatorname{Coker} i$ şi Z' este cel mai mare subobiect al lui Z din $\mathcal{A}$, fie $\bar{X} = p^{-1}(Z')$, cu $p : Y \to Z$ morfismul canonic ((p, Z) este un conucleu al lui i). Atunci există în $\mathcal{C}$ şirul exact

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & X \arrow[r, "\Psi_X"] & \bar{X} \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

în care X', $Z' \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ şi $\bar{X}$ este un obiect $\mathcal{A}$-închis. Pentru a justifica aceasta, observăm că $\bar{X}$ nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$ şi dacă $f : P \to Q$ este un morfism din $\mathcal{C}$, cu Ker f, Coker $f \in \operatorname{Ob} A$, iar $u : P \to \bar{X}$ este un morfism din $\mathcal{C}$, iar $i : \operatorname{Ker} f \to P$ şi $j : Q \to \operatorname{Coker} f$ sînt morfismele canonice, avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Q \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & \operatorname{Coker} f \arrow[r, dash] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "v"] & Y \arrow[r, "p"] & Y/X \arrow[r, dash] & 0 \end{tikzcd}$$

cu liniile exacte ; există $g : Q \to Y$, cu $g \circ f = v \circ u$ (deoarece Y este $\mathcal{A}$-închis), atunci există h cu $h \circ j = p \circ g$; dar $h = 0$, deoarece $Y/X \simeq Z/Z'$ şi deci nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$.

Atunci $p \circ g = 0$ şi deci există $l : Q \to X$ unic, astfel că $v \circ l = g$, adică $v \circ l \circ f = g \circ f = v \circ u$, deci $l \circ f = u$.

Dacă $r : Q \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$ cu $r \circ f = 0$, atunci există k : $\operatorname{Coker} f \to X$, cu $k \circ j = r$. Dar neapărat $k = 0$, deoarece X nu are subobiecte nenule din A şi deci $r = 0$. Aşadar, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} (f, X)$ este un izomorfism. Conform cu definiţia 3.7, X este un obiect A-închis.

Fie acum Y un obiect A-închis și $u : X \to Y$ un morfism din $\mathcal{C}$; atunci $i : X' \to X$ este morfismul canonic (cu notațiile de mai sus); avem $u \circ i = 0$ și deci există un morfism unic $\overline{u} : \overline{X} \to Y$ cu $\overline{u}' \circ \Psi_X = u$, deoarece Coker $\Psi_X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$. Deducem de aici, că dacă notăm cu $\mathcal{C}'$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele $\mathcal{A}$-închise și $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$, functorul incluziune, atunci asocierea $X \rightsquigarrow \overline{X}$ este un functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, adjunct la stînga cu S. Mai mult, $\mathcal{C}$ este o categorie de fracții a lui $\mathcal{C}$ relative la un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ care permite calculul la stînga și la dreapta al fracțiilor, deoarece $T\ (s)$, (s morfisme din $\mathcal{C}$) este inversibil dacă și numai dacă în diagrama cu liniile exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, s \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"] & X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\Psi_X"] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\Psi_Y"] & \mathrm{Coker}\, s \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, s \arrow[r, "p"] & X \arrow[r, "\overline{s}"] & \overline{Y} \arrow[r, "q"] & \mathrm{Coker}\, \overline{s} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

p și q sînt aplicațiile nule; dar atunci $\Psi_X \circ i = 0$ și deci Ker $\overline{s} \subseteq$ Ker $\Psi_X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$, deoarece $\overline{s}$ este și epimorfism; deducem că Coker $\overline{s} = 0$ și deci Coker $\overline{s} \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$. Invers, dacă un morfism s din $\mathcal{C}$ este astfel că Ker s, Coker $s \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$, atunci, pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\ (s, Y)$ este izomorfism și deci $\overline{s}$ este un izomorfism. Așadar, sîntem în situația de mai sus: $\mathcal{C}_1$ este echivalentă cu subcategoria obiectelor $\mathcal{A}$-închise și deci abeliană (altfel, $\mathcal{C}_1$ este echivalentă cu $\mathcal{C}_S$, unde S este sistemul de morfism asociat lui $\mathcal{A}$, și deci abeliană), iar $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este exact.

Observăm că în propoziția de mai sus, doar din simplul fapt că functorul incluziune $I : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ are un adjunct la stînga, notat G, iar $\theta : I \circ G \to \mathrm{Id}\ \mathcal{C}$ este un monomorfism (fapte care se întîmplă în cazul unei subcategorii localizante) nu se deduce că orice obiect din $\mathcal{C}$ ce nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$ este un subobiect al unui obiect $\mathcal{A}$-închis. Obiectele $\mathcal{A}$-închise, joacă, după cum se vede, rolul de obiecte „injective relativ la $\mathcal{A}$" în sensul că orice șir exact $0 \to X \to M \to A \to 0$ din $\mathcal{C}$ cu X — $\mathcal{A}$-închis și $A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$ este fisibil. Dacă trecem însă în categoria de fracții, aceste obiecte nu sînt neapărat injective (în categoria de fracții respectivă). Dacă însă admitem că $\mathcal{C}$ este o categorie cu anvelopă injectivă ((1), cap. I) se deduce că orice obiect injectiv din $\mathcal{C}$ care nu are subobiecte nenule din $\mathcal{A}$ este $\mathcal{A}$-închis și atunci propoziția de mai sus devine

PROPOZIȚIA 3.21. *Pentru subcategoria deasă $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{C}$, următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) *$\mathcal{A}$ este localizantă.*

b) *Orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ are un cel mai mare subobiect din $\mathcal{A}$.*

Cititorul este invitat să reproducă demonstrația acestei propoziții.

În cazul acesta se deduce că categoria $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ este încă o categorie cu anvelopă injectivă.

PROPOZIȚIA 3.22. *Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cu anvelope injective, și $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă a sa, atunci $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ este o categorie cu anvelope injective și orice injectiv Q din $\mathcal{C}$ se scrie sub forma $Q = Q_1 \oplus Q_2$, cu Q_1 anvelopa* *injectivă a unui obiect din* $\mathcal{A}$ *iar* Q_2 *un obiect* $\mathcal{A}$*-închis. Această descompunere este unică pînă la un izomorfism.*

Din cele de mai sus rezultă demonstrația.

Fie, în ipotezele propoziției precedente, că anvelopa injectivă a oricărui obiect din $\mathcal{A}$ este încă în $\mathcal{A}$; atunci, pentru orice obiect Q, al lui $\mathcal{C}$, injectiv, TQ este încă injectiv, deoarece $Q = Q_1 \oplus Q_2$, cu $Q_1 \in \text{Ob } \mathcal{A}$ și Q_2 $\mathcal{A}$-închis.

§ 13. CATEGORIILE CÎT ALE UNOR CATEGORII SPECIALE

Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană ce satisface axioma Ab5 a lui Grothendieck; dacă $\mathcal{A}$ este o subcategorie localizantă a sa, atunci, conform cu propoziția 3.14 și corolarul 2, dacă categoria $\mathcal{C}/A$ există, ea satisface Ab5.

Fie acum că $\mathcal{A}$ este o subcategorie deasă a lui $\mathcal{C}$ care este închisă la limitele inductive; atunci orice obiect al lui $\mathcal{C}$ conține un subobiect maxim printre subobiectele sale din $\mathcal{A}$. Dar nici în acest caz nu putem deduce că $\mathcal{A}$ este o subcategorie localizantă; acest fapt se realizează conform cu propoziția 3.21, dacă $\mathcal{C}$ este, spre exemplu, o categorie cu anvelope injective sau chiar cu scufundare injectivă.

Într-adevăr, dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cu Ab5 și $X' \subset X$ este un subobiect astfel că există $X'' \subset X$, alt subobiect, nenul, astfel că $X' \cap X'' = 0$, atunci există ținînd seama de lema lui Zorn, există unul maximal X'' cu proprietatea că $X'' \subseteq \overline{X}''$ și $\overline{X}'' \cap X' = 0$. Dar atunci există unul maximal, $\overline{X}'$ cu $X' \subseteq X'$ și $X' \cap \overline{X}'' = 0$. Dacă X este injectiv, putem deduce că $\overline{X}'$ este încă injectiv. Cititorul își poate verifica tehnica completînd aceste demonstrații. În concluzie,

PROPOZIȚIA 3.23. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie satisfăcînd axioma* Ab5 *a lui Grothendieck și* $\mathcal{A}$ *o subcategorie deasă a sa închisă la limite inductive. Dacă* $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ *există, atunci* $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ *este o categorie cu* Ab5. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este o categorie cu scufundare injectivă, atunci* $\mathcal{C}/A$ *există și este o categorie cu anvelopă injectivă, iar* $\mathcal{A}$ *este o subcategorie localizantă.*

Observație. Vom dovedi în *capitolul V* că dacă $\mathcal{C}$ este o categorie cu AB5 și generatori, iar $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a sa, atunci următoarele afirmații sînt echivalente:

a) $\mathcal{A}$ este localizantă.

b) $\mathcal{A}$ este închisă la limite inductive.

Pentru a dovedi aceasta vom folosi faptul că o categorie cu Ab5 și generatori este o categorie cu anvelope injective.

Folosind propozițiile 3.21 și 3.12 deducem că o categorie cît a unei categorii cu generatori și Ab5, prin o subcategorie localizantă este încă o categorie cu generatori și Ab5.

PROPOZIȚIA 3.24. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie cu* AB5 *și generatori și* $\mathcal{A}$ *o subcategorie deasă a sa, astfel că există categoria cît* $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, *și fie* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}$ *functorul canonic. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) $\mathcal{A}$ *este localizantă.*

b) *$\mathcal{A}$ este închisă la limitele inductive.*

c) *T comută cu limitele inductive.*

Demonstrație. Este mai puțin trivial (din cele de mai sus) să dovedim că c) $\Rightarrow$ b), ceea ce se deduce imediat.

Situîndu-ne în ipotezele propoziției de mai sus, se deduce imediat că dacă $\mathcal{A}$ este localizantă, atunci ea satisface AB5 și, mai mult, dacă $\{U_i\}_{i\in I}$ este o mulțime de generatori ai lui $\mathcal{C}$(I este un element al lui U), și dacă U_i' este cel mai mare subobiect al lui U_i din $\mathcal{A}$, atunci $\{U_i''=U_i/U_i'\}$ dau o mulțime de generatori ai lui $\mathcal{A}$, aceasta deoarece functorul canonic I : $\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ este deplin fidel și admite un adjunct la dreapta exact și totul rezultă conform cu duala propoziției 3.12.

În sfîrșit, pentru categoriile abeliene cu Ab5 și scufundare injectivă, subcategoriile localizante se caracterizează astfel :

PROPOZIȚIA 3.25. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu* Ab5 *și scufundare injectivă și $\mathcal{A}$ o subcategorie deasă a lui $\mathcal{C}$. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *$\mathcal{A}$ este localizantă.*

b) *Există o familie $(Q_\alpha)_{\alpha\in I}$ de injective ale lui $\mathcal{C}$, astfel că $X'\in$* Ob *$\mathcal{A}$, dacă și numai dacă* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Q_\alpha)=0$ *pentru orice $\alpha\in I$.*

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b). Dacă $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ sînt toate injectivele lui $\mathcal{C}/\mathcal{A}$, atunci SQ_α sînt încă injective în $\mathcal{C}$ (conform cu propoziția 1.32) și încă, dacă, $X'\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', SQ_\alpha)=0$ pentru orice $\alpha\in I$, iar dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X'', Q_\alpha)=0$, pentru orice $\alpha\in I$, deducem că cel mai mare subobiect al său din $\mathcal{A}$ este X'', altfel obținem contradicție.

b) $\Rightarrow$ a). Fie $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ o familie de obiecte injective din $\mathcal{C}$; atunci toate obiectele X' din $\mathcal{C}$, cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Q_\alpha)=0$, pentru orice $\alpha\in I$, dau evident o subcategorie deasă și închisă la limitele inductive, deci localizantă conform cu propoziția precedentă *q.e.d.*

Observație. Ultima propoziție se poate enunța pentru categorii cu anvelopă injectivă ; cititorul este invitat să facă aceasta (cu unele modificări în enunț !).

§ 14. EXEMPLE DE SUBCATEGORII LOCALIZANTE

a) În categoria Ab considerăm categoria Tors a grupurilor abeliene de torsiune. Evident Tors este localizantă, căci o limită inductivă de grupuri de torsiune este încă un grup de torsiune. Se vede ușor că obiectele Tors închise din Ab sînt grupurile injective, abeliene fără torsiune. Așadar, categoria Ab/Tors se identifică cu subcategoria plină a lui Ab formată din grupurile fără torsiune sume directe de exemplare izomorfe cu Q (Q, fiind corpul raționalelor).

b) *Fasciculele de module.* Fie E un spațiu topologic și V un subspațiu deschis al său. Fie $\mathcal{C}$ categoria fasciculelor de module peste fasciculul de inele A dat pe E. Considerăm restricția A_V a lui A la V și functorul T de fascicule de module : $X \rightsquigarrow X_V$ de la categoria $\mathcal{C}$ la categoria $\mathcal{C}'$ a fasciculelor de module peste fasciculul de inele A_V. Functorul T este exact. El are un adjunct S (functorul imagină directă). Ker T este subcategoria lui $\mathcal{C}$ formată din toate obiectele lui $\mathcal{C}$ care se anulează deasupra lui V și care este localizantă. Acest caz va fi analizat detaliat ulterior.

c) *Functorii sateliți* ((3), cap. III). Fie $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ două categorii abeliene astfel că $\mathcal{C}$ conține suficiente injective (adică orice obiect este subobiect al unui obiect injectiv) și categoria următoare, notată $\mathcal{S}$: obiectele lui $\mathcal{S}$ sînt șiruri $(F_n)_{n \in Z}$ de functori de la $\mathcal{C}$ în $\mathcal{D}$ astfel că $\{F_n\}$ să fie un sistem de functori legați (vezi Grothendieck, Tohoku, cap. II). Morfismele în categoria $\mathcal{S}$ sînt evidente : sisteme $\{f_n\}_{n \in Z}$, $f_n : F_n \to G_n$, de morfisme functoriale care comută cu operatorii frontieră. Obiectele lui $\mathcal{S}$ pentru care prima componentă F_0 este nulă formează o subcategorie deasă $\mathcal{A}$ în $\mathcal{S}$.

Considerăm functorii S : Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathcal{S}$ care asociază oricărui functor șirul sateliților săi (căci acesta este un sistem de functori legați). Evident, deoarece problema de universalitate a lui S este solubilă în $\mathcal{S}$, se deduce că S are un adjunct la stînga G. Evident $G \circ S \simeq 1$ și în plus G este axact. Așadar Fonct $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ se obține ca o categorie cît a lui $\mathcal{S}$. Mai mult, G este functorul care asociază oricărui obiect $(F_n)_{n \in Z}$ din $\mathcal{S}$, functorul F_0, prima sa componentă.

§ 15. LOCALIZAREA ÎN RAPORT CU CENTRUL

Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie aditivă, numim centrul său ansamblul morfismelor functoriale ale functorului identic în el însuși. Notăm cu $Z(\mathcal{C})$ acest ansamblu, care în mod canonic are structură de grup abelian relativ la adunarea morfismelor și structură de inel comutativ relativ la compunere și adunare. De exemplu, dacă $\mathcal{C} = \mathcal{C}_A$, cu A inel cu identitate, atunci $Z(\mathcal{C}) = Z(A)$, unde $Z(A)$ este centrul lui A. Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie cu AB5 și generatori sau cu AB5 și scufundare injectivă și Σ un sistem multiplicativ din $Z(\mathcal{C})$; notăm prin $\mathcal{C}_\Sigma$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ ale cărei obiecte sînt acele obiecte M din $\mathcal{C}$, astfel că M este marginea superioară a subobiectelor N, $s(N)$ fiind nul cel puțin pentru un $s \in \Sigma$. $\mathcal{C}_\Sigma$ este o subcategorie deasă și localizantă, căci dacă

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

este un șir exact cu $M = \sup\limits_{\alpha} N_\alpha$, cu $s_\alpha(N_\alpha) = 0$ pentru $s_\alpha \in \Sigma$, atunci $s_\alpha (M' \cap N_\alpha) = M' \cap s_\alpha (N_\alpha) = 0$ și

$$\sup_{\alpha} (M' \cap N_\alpha) = M' \cap (\sup N_\alpha) = M',$$

$$M'' \cap p(N_\alpha) = p(s_\alpha(N_\alpha)) = 0$$

și încă $M'' = \sup p(N_\alpha) = \sup (M'' \cap p(N_\alpha)) = M''$ etc.

Dacă $0 \to M \to Q$ este o anvelopă adjectivă a lui M care nu are subobiecte din $\mathcal{C}_\Sigma$, atunci nici Q nu are. Evident, orice obiect M din $\mathcal{C}$ are un cel mai mare subobiect în $\mathcal{C}_\Sigma$ şi anume $M = \sup\limits_\alpha M_\alpha$, cu $M_\alpha \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_\Sigma$. (Din aceea că Σ este multiplicativ, deducem că familia subobiectelor lui M din $\mathcal{C}_\Sigma$ este dirijată.)

PROPOZIŢIA 3.26. *În ipotezele de mai sus următoarele afirmaţii sînt echivalente* :

a) *M este un obiect $\mathcal{C}_\Sigma$ închis.*

b) *Pentru orice element $s \in \Sigma$ s_M este un automorfism al lui M.*

Demonstraţie. Pentru orice $s \in \Sigma$ şi orice obiect $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ $\mathrm{Ker}\, s_X$ şi $\mathrm{Coker}\, s_X$ sînt în $\mathcal{C}_\Sigma$; într-adevăr, din diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ s_X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "s_1"'] & X \arrow[r, "s_X"] \arrow[d, "s_X"] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "s_X"] & \mathrm{Coker}\ s_X \arrow[r] \arrow[d, "s_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ s_X \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "s_X"] & X \arrow[r, "j"] & \mathrm{Coker}\, s_X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

cu i monomorfism, j epimorfism, deducem

$$i \circ s_1 = s_X \circ i = 0, \text{ adică } s_1\ (\mathrm{Ker}\ s_X) = s(\mathrm{Ker}\ s_X) = 0.$$

Dual $s_2 \circ j = j \circ s_2 = 0$; deci $s_2 = 0$, pentru orice s ($\mathrm{Coker}\ s_X = \mathrm{Ker}\ s_2$).

Aşadar, s_M este pentru orice $s \in \Sigma$ un automorfism al lui M. Dacă M este un obiect închis, atunci

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{C}_\Sigma}\ (TM,\ TM)$$

unde $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{C}_\Sigma$ este functorul canonic şi deoarece pentru $s \in \Sigma$, $T(s)$ este invertibil, şi s este. Aşadar a) $\Rightarrow$ b). Pentru a dovedi că b) $\Rightarrow$ a), observăm că orice obiect închis are proprietatea că pentru el orice morfism de tipul s este automorfism, din cauză că S (adjunctul la dreapta al lui T) este deplin fidel. Fie deci X un obiect din $\mathcal{C}$, astfel că pentru orice $s \in \Sigma$, s_X este un automorfism al său. Atunci avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "s_X"] & STX \arrow[r] \arrow[d, "s_{TX}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "s_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & STX \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Evident că pentru orice $s \in \Sigma$, s_{ST} este monomorfism şi s_X este izomorfism din presupunere. Aşadar s_A este monomorfism. Dar $T(A) = 0$, adică $A = \sup\limits_{s \in \Sigma} \mathrm{Ker}\ s$, adică $A = 0$; deci Ψ_X este izomorfism, deoarece este monomorfism (fapt ce se vede imediat).

Observaţia 1. O importantă aplicaţie a categoriilor de fracţii cititorul poate găsi în [2].

Observația 2. Fie $\mathcal{C}$ o categorie oarecare și M monoidul morfismelor functoriale ale functorului identic al lui $\mathcal{C}$ în el însuși ; atunci M este comutativ și pentru orice sistem multiplicativ al lui M, putem găsi un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ care permite calculul la dreapta și la stînga al fracțiilor. Categoria de fracții astfel obținută se zice ,,categorie de fracții centrală''. Cititorul este invitat să facă diferite calcule, pentru a se convinge de unele afirmații.

§ 16. EXACTITATEA FUNCTORULUI SECȚIUNE

Fie, ca de obicei, $\mathcal{C}$ o categorie abeliană și $\mathcal{A}$ o subcategorie localizantă a sa ; fie și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}$ functorul canonic și S un adjunct al său la dreapta. Evident, functorul $L = S \circ T$ este exact dacă și numai dacă functorul S este exact. Iată un caz interesant cînd functorul S este exact :

PROPOZIȚIA 3.27. *Fie, cu notațiile de mai sus, $\mathcal{C}$ o categorie cu anvelopă injectivă. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) *Functorul localizare este exact.*

b) *Dacă N este un subobiect al lui M și dacă M, N sînt $\mathcal{A}$-închise, atunci M/N este $\mathcal{A}$-închis.*

c) *Dacă Q este un injectiv ce nu conține nici un subobiect nenul din $\mathcal{A}$, și dacă N este un suboiect $\mathcal{A}$-închis al lui Q, atunci Q/N este $\mathcal{A}$-închis.*

Demonstrație a) $\Rightarrow$ *b*) $\Rightarrow$ c) este cu totul evident. c) $\Rightarrow$ a). Fie $L = S \circ T$; vom dovedi că $R'L = 0$ ($R'L$ este primul functor derivat la dreapta al lui L, conform cu (3), cap. V—VI). Fie mai întîi că $i : M \to Q$ este o anvelopă injectivă, cu $M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$. ; fie $p : Q \to N$, cu $p\,(N) = \mathrm{Coker}\, i$. Deoarece $L\,(p)$ va fi un izomorfism, deducem că în șirul exact, canonic constant ((3) cap. V) $0 \to LM \to LQ \to LN \to R'LM \to 0$ avem $R'LM = 0$.

Presupunem acum că M nu conține subobiecte nenule din $\mathcal{A}$; atunci din șirul exact $0 \to M \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{p} N \to 0$ deducem șirul exact

$$0 \longrightarrow LM \xrightarrow{L(i)} LQ \xrightarrow{L(p)} LN$$

în care $\mathrm{Coker}\, L(p) = LN/\mathrm{Im} L(p) \simeq LN/\mathrm{Im}\, \Psi_N$, deoarece în diagrama comutativă cu linii exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\Psi_M"] & Q \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Psi_Q"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\Psi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & LM \arrow[r, "L(i)"] & LQ \arrow[r, "L(p)"] & LN &
\end{tikzcd}$$

($\Psi : \mathrm{Id}\, \mathcal{C} \to L$, un morfism de adjuncție al lui S cu T) avem $\mathrm{Im}\,(\Psi_N \circ p) \simeq \mathrm{Im}\, \Psi_N \simeq \mathrm{Im}\, L(p) \simeq \mathrm{Im}\,(L(p) \circ \Psi_Q)$ întrucît p și Ψ_Q sînt epimorfisme. Atunci, $\mathrm{Coker}\, L(P) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$ și $L(p)$ este un epimorfism, conform cu ipotezele, și deci $R^1LM = 0$, conform cu șirul exact (*).

În cazul general, fie $M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, M' cel mai mare subobiect al său din $\mathcal{A}$ şi $M'' = M/M'$. Din şirul exact: $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ obţinem şirul exact: $R^1LM' \to R^1LM \to R^1LM''$, deci $R^1LM = 0$ *q.e.d.*

Ca un corolar, din propoziţia dovedită putem deduce că, în cazul localizării în raport cu centrul, functorul secţiune este exact.

Primită la redacţie la 3 iulie 1965

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47 Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Bănică Constantin, Popescu Nicolae *Imversion d'une catégorie preabelienne dans une catégorie abelienne*. Rev. Roum. de Math. Pures et Appliquées, **10**, *5* (1965).
2. Gabriel Pierre, *Des catégories abeliennes*. Bull. de la Soc. Mat. de France, **90**, *3* (1962).
3. Gabriel Pierre, Zismann Michel, *Fondaments de la Topologie simpliciele*. Seminaire, Université du Strasbourg, 1963—1964.
4. Verdier Jean Louis, *Topologie et fasceaux*. Seminaire. J. E.H.S., 1964 (fascicule, II, III).
5. Bănică Constantin, Popescu Nicolae, *Categorii cit.*, St. cerc. mat., **17**, *6* (1965).

MIŞCĂRI CU VÎRTEJ CONSTANT PENTRU FLUIDE INCOMPRESIBILE VÎSCOASE

DE

ION I. CRISTEA şi VICTORIA CRISTEA

În prezenta lucrare arătăm că în cazul mişcărilor cu vîrtej constant, în domeniul ocupat de un fluid vîscos sînt satisfăcute ecuaţiile (2.4) şi (2.5), aceleaşi ca şi în cazul cînd fluidul ar fi fost perfect. Deci, unor aceleaşi ecuaţii, satisfăcute în domeniul ocupat de fluid, li se pot ataşa două tipuri de condiţii la limită, după cum fluidul este perfect sau vîscos.

Formulele (6.3) şi (6.4) dau acţiunea fluidului asupra unui obstacol fix.

1. FORMA REPREZENTĂRII LUI CLEBSCH

Fie $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ vectorul turbion, $\vec{v}$ fiind vectorul vitezei fluidului. Cum vectorul $\vec{\Omega}$ se presupune acelaşi în orice punct al domeniului ocupat de fluid, să raportăm mişcarea fluidului la un sistem cartezian de coordonate, axa *Oz* fiind aleasă paralelă cu vectorul $\vec{\Omega}$. Dacă notăm cu $\vec{k}$ versorul axei *Oz*, putem scrie

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v} = \Omega \vec{k}, \tag{1.1}$$

unde $\Omega = \Omega(t)$ este modulul vectorului $\vec{\Omega}$.

Dat fiind că pentru vectorul $\vec{v}$ avem reprezentarea lui Clebsch [1], [2], [3]

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi + \psi \operatorname{grad} \chi, \tag{1.2}$$

putem scrie

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{grad} \psi \times \operatorname{grad} \chi. \tag{1.3}$$

Conform cu (1.1) rezultă

$$(1.4)\qquad \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(x,y)}=\Omega,\quad \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(y,z)}=0,\quad \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(z,x)}=0.$$

încît cum $\Omega \neq 0$ neapărat

$$(1.5)\qquad \psi=\psi(x,y),\qquad \chi=\chi(x,y,t).$$

În baza primei din ecuațiile (1.4) rezultă că

$$\psi \operatorname{grad} \chi - \Omega \times \operatorname{grad} y = \operatorname{grad} \Phi^*$$

și prin urmare în reprezentarea (1.2) se poate lua $\psi = \Omega x$ și $\chi = y$ fără ca generalitatea studiului nostru să fie afectată cu ceva. Așadar, pentru orice mișcare cu vîrtej constant și paralel cu axa Oz, vectorul $\vec{v}$ al vitezei se poate reprezenta sub forma

$$(1.6)\qquad \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi + \Omega \times \operatorname{grad} y,$$

încît

$$(1.7)\qquad v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\Omega x,\qquad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

2. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Dacă forțele de masă se presupun conservative, ecuațiile lui Navier-Stokes și ecuația continuității în cazul unui fluid incompresibil devin

$$(2.1)\qquad \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{v}=\operatorname{grad} B+\frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{v},\quad B=U-\frac{p}{\rho}-\frac{1}{2}V^2,$$

$$(2.2)\qquad \operatorname{div}\vec{v}=0$$

unde ρ este densitatea, p presiunea, $V=|\vec{v}|$, iar μ coeficientul de vîscozitate.

Conform cu (1.1), din ecuația (2.1) avem

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}-\Omega v_y=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\Delta v_x$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+\Omega v_x=\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\Delta v_y$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=\frac{\partial B}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\Delta v_z$$

şi conform cu (1.7) rezultă

$$\Omega v_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - B - \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\varphi\right)$$

$$\dot{\Omega} x + \Omega v_x = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - B - \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\varphi\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - B - \frac{\mu}{\rho}\,\Delta\varphi\right).$$

Or, din ecuaţia de continuitate (2.2) conform cu (1.6) avem

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2.3}$$

astfel că ecuaţiile precedente devin

$$\Omega v_y = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dot{\Omega} x + \Omega v_x = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial z}, \tag{2.4}$$

unde prin H s-a notat hamiltonianul [4]:

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - B = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} - U. \tag{2.5}$$

În felul acesta din ecuaţiile de mişcare (2.4) şi (2.5) dispare coeficientul de vîscozitate μ, ecuaţiile avînd exact aceeaşi formă ca şi în cazul fluidului perfect. Prin urmare, analog ca în cazul fluidului perfect în mişcare cu vîrtej constant [5], [6], rezultă că H nu depinde de z

$$H = H(x, y, t), \tag{2.6}$$

că funcţia φ este de forma

$$\varphi = \Phi(x, y, t) + \varphi_0(t)\cdot z + \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} z^2 \tag{2.7}$$

şi că funcţiile

$$\widetilde{\Phi} = \Phi + \frac{1}{2}\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} x^2 \quad \text{şi} \quad \psi = -\frac{1}{\Omega} H + \frac{1}{2}\Omega x^2 \tag{2.8}$$

sînt armonic conjugate. Vizibil

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x, \qquad v_z = \varphi_0(t) + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} z. \tag{2.9}$$

În cazul vîrtejului constant şi în timp ($\dot{\Omega} \equiv 0$), suprafeţele

$$H = \text{const.}, \text{ adică } \psi - \frac{1}{2}\Omega x^2 = \text{const.} \tag{2.10}$$

sînt atît suprafețe de curent cît și suprafețe de vîrtej, adică suprafețe Bernoulli-Vâlcovici.

Deosebirea de studiu a unei mișcări cu vîrtej constant pentru un fluid vîscos incompresibil față de studiul unei mișcări analoage pentru un fluid perfect incompresibil constă în existența unor condiții la limită de contur deosebite pentru cele două tipuri de fluide.

Astfel, dacă fluidul este în contact cu o suprafață impermeabilă fixă S, în cazul cînd fluidul este perfect, din condiția de alunecare a moleculelor de fluid pe S rezultă [5], [6] că

$$\psi = \frac{1}{2}\Omega x^2 + \text{const. pe } S \tag{2.11}$$

și din punct de vedere matematic problema revine la a rezolva o problemă de tip Dirichlet pentru funcția $\psi = \psi(x, y, t)$ armonică în raport cu x și y în domeniul ocupat de fluid.

Dacă fluidul este însă vîscos, pe suprafața S avem condiția de aderență

$$\vec{v} = 0 \quad \text{pe } S \tag{2.12}$$

ceea ce revine la

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\,\Omega x, \qquad \varphi_0(t) + \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} z = 0 \quad \text{pe } S. \tag{2.13}$$

Ultima condiție arată că suprafața S :

or este un plan paralel cu planul xOy ($z = z_0 = \text{const.}$), în care caz

$$\varphi_0(t) = -\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} z_0;$$

or nu este un astfel de plan ($z \not\equiv \text{const.}$) și atunci $\varphi_0(t) \equiv \dot{\Omega} \equiv 0$. În acest ultim caz, mișcarea este deci cu vîrtej constant și în timp, $v_z = 0$, iar $\widetilde{\Phi} \equiv \Phi \equiv \varphi$. Mai mult, din primele două condiții (2.13) rezultă că suprafața S trebuie să fie neapărat un cilindru infinit cu generatoarele paralele la axa Oz. Din punct de vedere matematic problema revine la a determina funcția armonică $\Phi = \Phi(x, y, t)$ știind că pe suprafața S avem condițiile la limită

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\,\Omega x \quad \text{pe } S, \tag{2.13'}$$

la care se adaugă eventual condițiile la mari distanțe și condițiile inițiale. O dată funcția Φ determinată, se determină funcția $\Psi = \Psi(x, y, t)$ armonic conjugată cu Φ, iar conform cu (2.8), funcția H. Din (2.5) avem apoi presiunea p :

$$p = \rho\left(U - \frac{1}{2} V^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H\right). \tag{2.14}$$

Se observă că dacă funcţia de forţă U nu depinde de z, rezultă că $p = p(x, y, t)$ şi deci mişcarea fluidului este plană.

Condiţiile la limită (2.13′) se mai scriu

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \Omega x, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \text{ pe } S, \tag{2.15}$$

sau încă conform cu (2.8):

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \text{ pe } S. \tag{2.16}$$

Observînd apoi că

$$\Delta H = \Omega^2, \tag{2. 17}$$

determinarea funcţiei H se poate face direct rezolvînd ecuaţia de tip Poisson (2.17) cu condiţiile la limită (2.16) pe S şi a unor eventuale condiţii iniţiale şi la mari distanţe.

3. UTILIZAREA VARIABILEI COMPLEXE

Punînd $\mathfrak{z} = x + iy$, cum funcţiile Φ şi Ψ sînt armonic conjugate *) în raport cu x şi y, urmează că funcţia

$$F(\mathfrak{z}, t) = \Phi(x, y, t) + i\Psi(x, y, t) \tag{3.1}$$

este o funcţie complexă olomorfă de variabila complexă $\mathfrak{z}$. Analog ca în [5], [6] vom numi această funcţie *potenţial complex* al mişcării cu vîrtej constant considerate. Cu ajutorul potenţialului complex $F(\mathfrak{z}, t)$ viteza complexă

$$w(\mathfrak{z}, t) = v_x(x, y, t) - iv_y(x, y, t)$$

are expresia

$$w(\mathfrak{z}, t) = \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}} - i\Omega x \tag{3.2}$$

Potenţialul complex $F(\mathfrak{z}, t)$ va trebui să satisfacă pe o suprafaţă cilindrică S cu generatoarele paralele la Oz condiţiei la limită

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}} = i\Omega x \text{ pe } S, \tag{3.3}$$

condiţiilor iniţiale

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}}\right|_{t=t0} = w^0(\mathfrak{z}) + i\Omega^0 x \tag{3.4}$$

şi eventual unor condiţii la mari distanţe.

---

*) adică $\dot{\Omega} \equiv 0$.

4. CAZUL MIȘCĂRII RELATIVE ÎN RAPORT CU O SUPRAFAȚĂ MOBILĂ

Fie $O'x'y'z'$ un triedru trirectangular drept solidar legat de o suprafață cilindrică S, avînd axa $O'z'$ paralelă cu axa Oz. Dacă $\mathfrak{z}_{O'} = x_{O'} + \mathrm{i}y_{O'}$ este afixa originii O' a triedrului mobil în raport cu triedrul fix $Oxyz$, iar $\theta = \theta(t)$ unghiul planelor xOz și $x'O'z'$, legătura între variabila complexă absolută $\mathfrak{z} = x + \mathrm{i}y$ și variabila complexă relativă $\mathfrak{z}' = x' + \mathrm{i}\, y'$ ale unei particule fluide este dată de relația

$$(4.1) \qquad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{O'} + \mathfrak{z}'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} .$$

Dacă $v_{rx'}$, și $v_{ry'}$, sînt componentele vitezei relative $\vec{v}_r$ pe axele mobile $O'x'$ și $O'y'$, punînd $w'_r = v_{rx'} - \mathrm{i}\, v_{ry'}$ avem

$$(4.2) \qquad w'_r = \frac{\partial F'}{\partial \mathfrak{z}'} - \mathrm{i}\,\Omega x\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - w'_{o'} + \mathrm{i}\,\omega \mathfrak{z}',\ \ \omega = \dot{\theta},$$

unde am notat $w'_{O'} = v_{O'x'} - \mathrm{i}\, v_{O'y'}$, $v_{O'x'}$ și $v_{O'y'}$ fiind componentele pe axele $O'x'$ și $O'y'$ ale vitezei punctului O' în raport cu triedrul $O'x'y'z'$, iar $F'(\mathfrak{z}', t) = F(\mathfrak{z}, t)$.

Analog ca în [5], [6] se introduce *potențialul complex relativ* $F'_r(\mathfrak{z}'\, t)$ conform relației

$$(4.3) \qquad F'(\mathfrak{z}'\, t) = F'_r(\mathfrak{z}'\, t) + F'_t(\mathfrak{z}',\ t),$$

unde

$$(4.4) \qquad F'_t(\mathfrak{z}'\, t) = (w'_{O'} + \mathrm{i}\,\Omega x_{O'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \mathfrak{z}' + \frac{1}{4}\,\mathrm{i}\,(\Omega \mathrm{e}^{2\mathrm{i}} - \Omega')\, \mathfrak{z}'^2$$

are interpretarea unui *potențial complex de transport*. Cu $\Omega' = \Omega - 2\omega$ s-a notat valoarea vîrtejului în raport cu axele mobile $O'x'y'z'$.

Cu ajutorul potențialului complex relativ $F'_r(\mathfrak{z}', t)$ expresia (4.2) a vitezei relative complexe capătă o formă analogă cu expresia (3.2) :

$$(4.5) \qquad w'_r = \frac{\partial F'_r}{\partial \mathfrak{z}'} - \mathrm{i}\ \Omega' x'.$$

Observînd apoi că se poate introduce și *hamiltonianul relativ* $H'_r(x', y', t)$ conform relației

$$(4.6) \qquad \frac{H'}{\Omega} = \frac{H'_r}{\Omega'} - \left[v_{O'x'}\, y' - v_{O'y'}\, x' - \frac{\omega}{2}\,(x'^2 + y'^2) \right],$$

unde am pus $H'(x', y', t) = H(x, y, t)$ și am făcut abstracție de o funcție aditivă depinzînd de t, familia liniilor de curent este dată de relația

$$(4.7) \qquad H'_r = \mathrm{const}.$$

sau ceea ce este același lucru

$$(4.8) \qquad \Psi'_r - \frac{1}{2}\,\Omega' x'^2 = \mathrm{const}.,$$

unde Ψ_r' este partea imaginară a potenţialului complex relativ $F_r'(\mathfrak{z}', t)$. Se deduce că potenţialul complex relativ este supus condiţiilor

$$\frac{\partial F_r'}{\partial \mathfrak{z}'} = \mathrm{i}\,\Omega' x' \text{ pe } S, \tag{4.9}$$

$$\left.\frac{\partial F_r'}{\partial \mathfrak{z}'}\right|_{t=t_0} = w_r'^{0}(\mathfrak{z}') + \mathrm{i}\Omega'^{0} x^{0}. \tag{4.10}$$

Rezultă deci că din punct de vedere matematic studiul unei mişcări cu vîrtej constant în prezenţa unui obstacol mobil este echivalent cu studiul unei mişcări de acelaşi tip dar în prezenţa obstacolului presupus fix, rolul funcţiilor $F(\mathfrak{z}, t)$, $H(x, y, t)$, $w(\mathfrak{z}, t)$ fiind luat de funcţiile $F_r'(\mathfrak{z}', t)$, $H_r'(x', y', t)$, $w_r'(\mathfrak{z}', t)$, iar Ω înlocuindu-se cu Ω'.

5. ACŢIUNEA FLUIDULUI ASUPRA UNUI OBSTACOL FIX

Cu aceleaşi notaţii ca în [5], [6], acţiunea hidrodinamică a fluidului asupra unei porţiuni S a unei suprafeţe cilindrice avînd generatoarele paralele cu Oz şi a cărei urmă în planul xOy este o curbă C, este dată de formulele

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x &= -\int_C p\,\mathrm{d}y, \qquad R_y = \int_C p\,\mathrm{d}x, \\ \mathcal{M}_0 &= \int_C p\,(x,\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Or, cum pe C avem $V = 0$, din (2.14) şi (2.8) rezultă

$$p = \rho\left(U - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\Omega^2 x^2 - \Omega\Psi\right) \text{ pe } C. \tag{5.2}$$

Atunci

$$\mathcal{R}_x = -\rho\int_C U\,\mathrm{d}y + \rho\frac{\partial}{\partial t}\int_C \Phi\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\rho\Omega^2\int_C x^2\,\mathrm{d}y + \rho\Omega\int_C \Psi\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathcal{R}_y = \rho\int_C U\,\mathrm{d}x - \rho\frac{\partial}{\partial t}\int_C \Phi\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\rho\Omega^2\int_C x^2\,\mathrm{d}x - \rho\Omega\int_C \Psi\,\mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 = \rho\int_C U\,(x\,\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) - \rho\frac{\partial}{\partial t}\int_C \Phi\,(x\,\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) + \\ + \frac{1}{2}\rho\Omega^2\int_C x^2\,(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) - \rho\Omega\int_C \Psi\,(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y). \end{aligned}$$

Însă notînd cu D interiorul curbei C în planul xOy și cu G centrul de greutate al domeniului D, avem

$$\int_C x^2 \mathrm{d}y = \iint_D 2x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 2x_G \mathcal{A}, \qquad \int_C x^2 \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_C x^2 (x \mathrm{d}x + y \mathrm{d}x) = \iint_D 2xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 2 I_{xy},$$

unde I_{xy} este momentul centrifugal de inerție al domeniului D în raport cu axele Ox și Oy.

Apoi, în baza condițiilor la limită (2.13′) și (2.14), avem

$$\int_C \Phi \, \mathrm{d}x = x\,\Phi \Big|_C - \int_C x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathrm{d}y \right) = x\Phi \Big|_C + \int_C \Omega x^2 \, \mathrm{d}y =$$

$$= x\Phi \Big|_C + 2\, \Omega x_G \mathcal{A},$$

$$\int_C \Phi \, \mathrm{d}y = y\Phi \Big|_C - \int_C y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathrm{d}y \right) = y\Phi \Big|_C + \int_C \Omega y x \, \mathrm{d}y =$$

$$= y\Phi \Big|_C + \Omega \iint_D y \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = y\Phi \Big|_C + \Omega y_G \mathcal{A},$$

$$\int_C \Psi \, \mathrm{d}x = x\,\Psi \Big|_C - \int_C x \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathrm{d}y \right) = x\Psi \Big|_C - \int_C \Omega x^2 \, \mathrm{d}x = x\Psi \Big|_C,$$

$$\int_C \Psi \, \mathrm{d}y = y\,\Psi \Big|_C - \int_C y \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathrm{d}y \right) = y\,\Psi \Big|_C - \int_C \Omega x\, y \, \mathrm{d}x =$$

$$= y\,\Psi \Big|_C + \Omega \iint_D x \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = y\Psi \Big|_C + \Omega x_G \mathcal{A},$$

și

$$\int_C \Phi\, (x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y) = \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi \Big|_C - \frac{1}{2} \int_C (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi \Big|_C + \frac{1}{2} \Omega \int_C (x^2 + y^2)\, x \, \mathrm{d}y = \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi \Big|_C +$$

$$+ \frac{1}{2} \Omega \iint_D (3x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \frac{x^2 + y^2}{2} \Phi \Big|_C + \frac{1}{2} \Omega\, (3 I_{yy} + I_{xx}),$$

$$\int_C \Psi\, (x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y) = \frac{x^2 + y^2}{2} \Psi \Big|_C - \frac{1}{2} \int_C (x^2 + y^2) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \frac{x^2+y^2}{2}\Psi\Big|_C - \frac{1}{2}\Omega\int_C (x^2+y^2)\,x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+y^2}{2}\Psi\Big|_C +$$

$$+ \frac{1}{2}\Omega\iint_D 2\,xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{x^2+y^2}{2}\Psi\Big|_C + \Omega I_{xy}.$$

În concluzie,

$$(5.3)\qquad \begin{aligned} \mathcal{R}_x &= -\rho\int_C U\,\mathrm{d}y + \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Omega\Psi\right)y\Big|_C, \\ \mathcal{R}_y &= \rho\int_C U\,\mathrm{d}x - \rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Omega\Psi\right)x\Big|_C, \end{aligned}$$

şi

$$(5.4)\qquad \mathcal{M}_0 = \rho\int_C U\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) - \rho\,\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Omega\Psi\right)\Big|_C.$$

Din (5.3) avem

$$(5.3')\qquad \mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y = -\,\mathrm{i}\rho\int_C U\,\mathrm{d}\bar{\mathfrak{z}} + \mathrm{i}\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Omega\Psi\right)\bar{\mathfrak{z}}\Big|_C.$$

În absenţa forţelor de masă obţinem deci următoarele formule ce dau acţiunea hidrodinamică a fluidului asupra peretelui S :

$$(5.5)\qquad \mathcal{R}_x - \mathrm{i}\mathcal{R}_y = \mathrm{i}\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Omega\Psi\right)\bar{\mathfrak{z}}\Big|_C,$$

$$(5.6)\qquad \mathcal{M}_0 = -\,\rho\,\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Omega\Psi\right)\Big|_C.$$

6. EXEMPLE

Rezultatele prezentate în paragrafele precedente în cazul fluidului incompresibil vîscos permit în analogie cu gazul fluidelor perfecte [5], [6], a imagina o *metodă inversă* de construire a unor astfel de mişcări. Astfel, alegînd diverse funcţii armonice $\Phi = \Phi\,(x,\,y,\,t)$ se pot obţine, conform celor tratate mai înainte, diverse mişcări particulare cu vîrtej constant. Ecuaţiile (2.13′), în cazul cînd nu sînt incompatibile, vor da liniile de curent ale mişcării pe care fluidul este în repaus. Solidificînd aceste linii de curent se pot obţine mişcări în prezenţa unor pereţi ficşi.

a) Considerînd potenţialul complex

$$(6.1)\qquad F(\mathfrak{z},\,t) = \mathrm{i}\,\frac{\Omega}{2}\,\mathfrak{z}^2 + V_0\,\mathfrak{z},$$

avem

$$\Phi = -\,\Omega xy + V_0\,x,\ \Psi = \frac{1}{2}\,\Omega\,(x^2 - y^2) + V_0 y$$

încît liniile de curent ale mișcării au ecuațiile

$$\Psi\lambda - \frac{1}{2}\,\Omega x^2 = -\,\frac{1}{2}\,\Omega y^2 + V_0 y = \text{const.}$$

Deci, aceste linii de curent sînt drepte paralele la axa Ox.

Componentele vitezei sînt

$$v_x = V_0 - \Omega y,\ v_y = 0 \tag{6.2}$$

și se observă că dreapta $y = \dfrac{V_0}{\Omega}$ este o linie de curent pe care fluidul este în repaus. Solidificînd această linie de curent avem mișcarea, de exemplu, în semiplanul superior mărginit de această linie de curent. Dacă $V_0 = 0$, linia de curent pe care fluidul este în repaus este chiar axa Ox *).

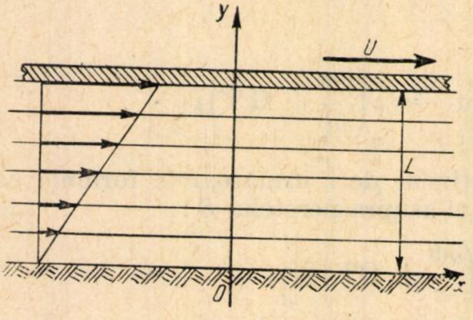


Fig. 1

Considerînd axa Ox ca un perete fix, să materializăm și linia de curent $y = L$ asimilînd-o cu un perete paralel cu axa Ox și avînd o mișcare de translație paralelă cu axa Ox. Între cei doi pereți avem de-a face astfel cu o mișcare de tip Cuette pentru un fluid vîscos incompresibil. Dacă U este viteza peretelui mobil $y = L$, cum $V_0 = 0$, avem $U = -\Omega L$. Așadar, potențialul complex al acestei mișcări este

$$F\,(\mathfrak{z},\ t) = -\,\mathrm{i}\,\frac{U}{2L}\,\mathfrak{z}^2,\quad 0 \leqslant \operatorname{Im}\mathfrak{z} \leqslant L.$$

b) Să pornim acum de la potențialul complex

$$F\,(\mathfrak{z}) = \mathrm{i}\,\frac{\Omega}{4}\,(\mathfrak{z}^2 + R^2 \ln\,\mathfrak{z}^2). \tag{6.3}$$

Avem

$$\Phi = -\,\frac{1}{2}\,\Omega\left(xy + R^2\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

$$\Psi = \frac{1}{4}\,\Omega\,(x^2 - y^2 + 2R^2 \ln \sqrt{x^2 + y^2})$$

---

*) A se vedea în acest sens fig. 2 din [5].

astfel că hamiltonianul mişcării este

$$H = \frac{1}{4}\,\Omega^2\,(r^2 - R^2 \ln r^2), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Deci, liniile de curent ale mişcării au ecuaţiile

$$r^2 - R^2 \text{ în } r^2 = \text{const.},$$

fiind nişte cercuri cu centrul în origine.

Viteza complexă este

$$w = \mathrm{i}\,\frac{\Omega}{2}\left(\mathfrak{z} + \frac{R^2}{\mathfrak{z}}\right) - \mathrm{i}\Omega\, x = -\,\mathrm{i}\,\frac{\Omega}{2}\,\bar{\mathfrak{z}}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right),$$

încît

$$v_x = -\,\frac{1}{2}\,\Omega y\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \quad v_y = \frac{1}{2}\,\Omega x\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \tag{6.4}$$

şi deci modulul vitezei

$$V = \frac{1}{2}\,\Omega\left(r - \frac{R^2}{r}\right). \tag{6.4'}$$

Se observă astfel că cercul $r = R$ este o linie de curent pe care fluidul este în repaus. Solidificînd această linie de curent, avem mişcarea cu vîrtej constant a unui fluid vîscos incompresibil, fie în interiorul cilindrului circular $r = R$ fie în exteriorul acestui cilindru.

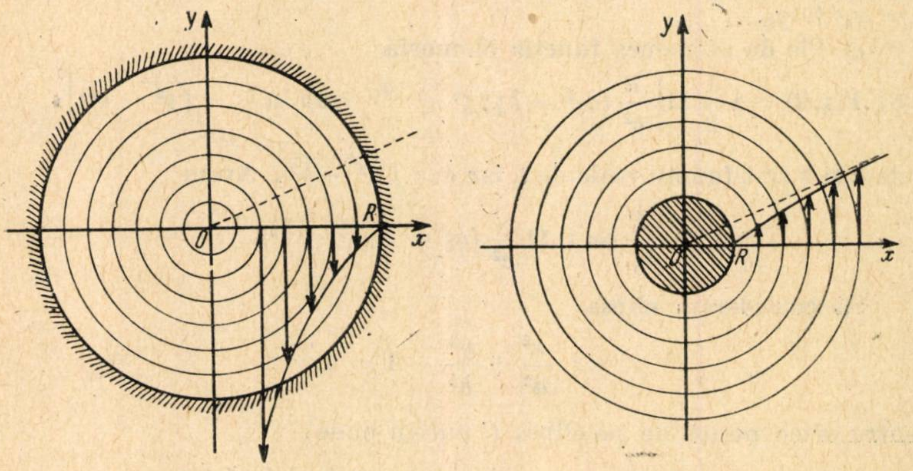


Fig. 2

Dacă pe lîngă cercul $r = R$ materializăm şi un alt cerc concentric cu acesta, potenţialul (6.3) descrie mişcarea cu vîrtej constant a unui fluid vîscos incompresibil cuprinsă între doi cilindri circulari coaxiali, unul din ei fiind fix iar celălalt avînd o mişcare de rotaţie uniformă în jurul axei sale.

Fie ω viteza unghiulară de rotaţie a cilindrului mobil, iar d distanţa dintre cilindri. Viteza liniară a unui punct de pe cilindrul mobil este $U = (R + d)\,\omega$. Pe de altă parte, ţinînd cont de (6.4′) rezultă că

$$(R+d)\,\omega = \frac{1}{2}\,\Omega\left[(R+d) - \frac{R^2}{R+d}\right],$$

de unde

$$\Omega = 2\omega\,\frac{(R+d)^2}{d\,(2R+d)},$$

astfel că potenţialul complex al mişcării între aceşti doi cilindri este

$$F(\mathfrak{z}) = \mathrm{i}\,\frac{\omega}{2}\,\frac{(R+d)^2}{d(2R+d)}\,(\mathfrak{z}^2 + R^2 \ln \mathfrak{z}^2),$$

$$R \leqslant |\mathfrak{z}| \leqslant R + d.$$

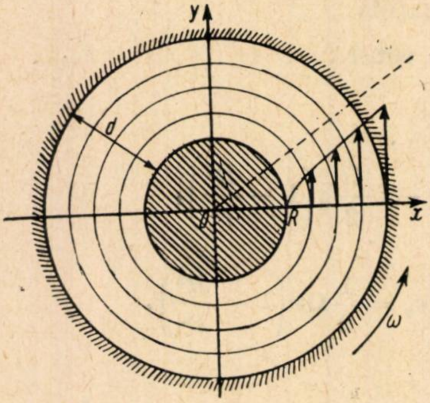


Fig. 3

Dacă în loc de potenţialul complex (6.3) se ia potenţialul

$$F(\mathfrak{z}, t) = \mathrm{i}\,\frac{\Omega}{4}\,[(\mathfrak{z} + \bar{\mathfrak{z}}_0)^2 + R^2 \ln\,(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0)^2]\,, \tag{6.5}$$

atunci cercurile de curent vor avea centrul în punctul de afixă $\mathfrak{z}_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

c) Fie de asemenea funcţia olomorfă

$$F(\mathfrak{z}, t) = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,\Omega\left[\frac{a}{c^2}\,(a\mathfrak{z}^2 - b\mathfrak{z}\sqrt{\mathfrak{z}^2 - c^2}) + ab \ln\,(\mathfrak{z} + \sqrt{\mathfrak{z}^2 - c^2})\right], \tag{6.6}$$

unde a şi b sînt funcţii reale de t, iar $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Avem

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}} = \mathrm{i}\;\Omega\,\frac{a}{c^2}\,(a\mathfrak{z} - b\sqrt{\mathfrak{z}^2 - c^2}).$$

Să considerăm elipsa

$$C:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

Pentru orice punct de pe elipsa C putem pune

$$x = a\cos\lambda,\ y = b\sin\lambda,\ \text{cu}\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$$

astfel că pe C avem

$$\mathfrak{z} = x + \mathrm{i}\,y = a\cos\lambda + \mathrm{i}\,b\sin\lambda,$$

$$\sqrt{\mathfrak{z}^2 - c^2} = b\cos\lambda + \mathrm{i}\,a\sin\lambda$$

şi deci

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{z}}\right|_C = \mathrm{i}\,\Omega \frac{a}{c^2}\left[a\,(a\cos\lambda + ib\sin\lambda) - b\,(b\cos\lambda + ia\sin\lambda)\right] =$$
$$= \mathrm{i}\ \Omega a\cos\lambda = \mathrm{i}\ \Omega x.$$

Adoptînd, ca de obicei, funcţia (6.6) ca potenţialul complex al unei mişcări cu vîrtej constant pentru un fluid vîscos incompresibil, pe elipsa considerată, viteza fluidului este nulă. Solidificînd această elipsă, potenţialul (6.6) caracterizează o atare mişcare fie în interiorul elipsei, fie în exteriorul ei.

Se observă că pentru $\mathfrak{z} \neq 0$,

$$\lim_{c\to 0}\frac{a\mathfrak{z}^2 - b\mathfrak{z}\sqrt{\mathfrak{z}^2 - c^2}}{c^2} = \lim_{c\to 0}\frac{\mathfrak{z}\,(\mathfrak{z}^2 + b^2)}{a\mathfrak{z} + b\sqrt{\mathfrak{z}^2 - c^2}} = \frac{\mathfrak{z}^2 + R^2}{2R},$$

căci în acest caz elipsa tinde către un cerc ($a \to R$, $b \to R$). Aşadar, făcînd în (6.6) ca $c \to 0$, abstracţie de o funcţie aditivă depinzînd de t, potenţialul (6.6) se reduce la potenţialul (6.3) ce caracterizează mişcarea cu vîrtej constant a unui fluid incompresibil vîscos în jurul unui cerc.

Primită la redacţie la 5 august 1965

Facultatea de matematică
şi mecanică a Universităţii din Bucureşti
Institutul de construcţii
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Clebsch A., Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin, 1857, p. 293—312.
2. Appell P. A., *Traité de mécanique rationnelle*, vol. III, Paris, Ed. III, 1928, p. 460—463.
3. Lamb H., *Hidrodynamics*, Cambridge, Ed. VI, 1932, p. 248—249.
4. Cristea I. Ion, Studia Universitatis Babeş-Bolyai, series Mathematica-Physica, Cluj, fasciculus 2, 81—94 (1963).
5. Cristea I. Ion, St. cerc. mat., XIV, *2*, 256—306 (1963).
6. Cristea I. Ion, Disertaţie, Universitatea Bucureşti, 1965.

ASUPRA SPAŢIILOR LUI RIEMANN V_3 CU CONEXIUNE CONSTANTĂ DE GENUL DOI

DE

EFTIMIE GRECU

Într-o lucrare [1], acad. G. Vrănceanu a arătat că metrica unui spaţiu riemannian V_3 cu conexiune constantă de genul doi poate fi redusă la forma canonică

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2mz}(2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \mathrm{d}y^2) \pm \mathrm{e}^{4mz}\,\mathrm{d}z^2. \tag{1}$$

În ceea ce priveşte ecuaţiile geodezicelor, ele se scriu

$$\ddot{x} = m\dot{y}^2,\ \ddot{y} = -2m\,\dot{y}\dot{z},\ \ddot{z} = -2m\dot{z}^2, \tag{2}$$

unde m este diferit de zero, altfel spaţiul (1) este local euclidian,

În cele ce urmează ne propunem mai întîi să găsim ecuaţiile finite ale geodezicelor acestor spaţii, prin integrarea sistemului (2) de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi.

Considerăm ecuaţia

$$\ddot{z} = -2\,m\,\dot{z}^2. \tag{3}$$

Prin substituţia $\dot{z} = u$, deducem $\ddot{z} = \dot{u}$, iar înlocuind în (3), obţinem

$$\dot{u} = -2mu^2, \text{ de unde rezultă } u = \frac{1}{2(mt + C_1)}\cdot$$

Deci $\dot{z} = \dfrac{1}{2(mt + C_1)}$, de unde obţinem prin integrare

$$z = \frac{1}{2m}\ln(mt + C_1) + C_2, \tag{4}$$

unde C_1, C_2 sînt constante de integrare.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 3, P. 471–480, BUCUREŞTI, 1966

Ţinem acum seama de expresia (4) a lui z în ecuaţia

$$\ddot{y} = 2\,m\dot{y}\dot{z}$$

şi obţinem pentru y expresia

$$y = \frac{C_3}{m} \ln\,(mt + C_1) + C_4, \tag{5}$$

unde C_3, C_4 sînt constante de integrare.

Considerăm ecuaţia

$$\ddot{x} = m\dot{y}^2.$$

Avînd în vedere expresia (5) a lui y, obţinem

$$x = -\,\frac{C_3^2}{m} \ln\,(mt + C_1) + C_5\,t + C_6, \tag{6}$$

unde C_5, C_6 sînt de asemenea constante de integrare.

Deci ecuaţiile finite ale geodezicelor unui spaţiu V_3 neeuclidian cu conexiune constantă de genul doi sînt :

$$x = -\,\frac{C_3^2}{m} \ln\,(mt + C_1) + C_5 t + C_6, \tag{7}$$

$$y = \frac{C_3}{m} \ln\,(mt + C_1) + C_4, \tag{8}$$

$$z = \frac{1}{2m} \ln\,(mt + C_1) + C_2. \tag{9}$$

Să căutăm să scriem sub o altă formă aceste ecuaţii. Pentru aceasta din ecuaţia (9) obţinem

$$\ln\,(mt + C_1) = 2\,m\,(z - C_2).$$

Înlocuind în ecuaţiile (7) şi (8) găsim

$$\tag{10} \begin{cases} x = -\,2\,C_3^2\,(z - C_2) + \dfrac{C_5}{m}\,[\mathrm{e}^{2m\,(z - C_2)} - C_1] + C_6, \\ y = 2C_3\,\,(z - C_2) + C_4. \end{cases}$$

Luînd din nou pe t ca parametru în loc de z, obţinem

$$\tag{10'} \begin{aligned} x &= -\,2C_3^2(t - C_2) + \frac{C_5}{m}\,[\mathrm{e}^{2m\,(t - C_2)} - C_1] + C_6, \\ y &= 2C_3\,(t - C_2) + C_4, \\ z &= t, \end{aligned}$$

Se pune problema dacă o geodezică a metricei (1) este o curbă plană. În acest sens trebuie să vedem dacă determinantul

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}$$

este identic egal cu zero. Avem într-adevăr din (10′)

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} -2C_3^2 + 2C_5\, e^{2m(t-C_2)} & 2C_3 & 1 \\ 4m\, C_5\, e^{2m(t-C_2)} & 0 & 0 \\ 8m^2\, C_5\, e^{2m(t-C_2)} & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Putem deci enunţa următorul rezultat :

O geodezică a matricei (1) este o curbă plană.

Acest lucru se poate demonstra folosind direct ecuaţiile diferenţiale ale geodezicelor, deci fără a utiliza ecuaţiile finite. Într-adevăr, avem din (2)

$$\dddot{x} = -4m^2\, \dot{y}^2\, \dot{z},$$

$$\dddot{y} = 8m^2\, \dot{y}\dot{z}^2,$$

$$\dddot{z} = 8m^2\, \dot{z}^3.$$

Înlocuind în expresia lui $\Delta(t)$, obţinem

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ m\dot{y}^2 & -2m\dot{y}\dot{z} & -2m\dot{z}^2 \\ -4m^2\dot{y}^2\dot{z} & 8m^2\dot{y}\dot{z}^2 & 8m^2\dot{z}^3 \end{vmatrix} = 4m^3\dot{y}\dot{z} \begin{vmatrix} \dot{x} & 1 & 1 \\ \dot{y}^2 & -2\dot{z} & -2\dot{z} \\ -\dot{y}^2 & 2\dot{z} & 2\dot{z} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Să luăm acum o geodezică (10) şi să calculăm lungimea acestei geodezice între două din punctele sale P', P''. Avem din (1)

$$s = \int_{P'}^{P''} e^{mz} \sqrt{2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}y^2 + \varepsilon e^{2mz}\,\mathrm{d}z^2} \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Dacă parametrul pe geodezică este z, atunci

$$s = \int_{z'}^{z''} e^{mz} \sqrt{2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 + \varepsilon e^{2mz}}\, \mathrm{d}z$$

iar dacă ţinem seama de (10), obţinem

$$s = \sqrt{\varepsilon + 4C_5\, e^{-2mC_2}} \int_{z'}^{z''} e^{2mz}\, \mathrm{d}z,$$

$$s = \frac{1}{2m}\left(e^{2mz''} - e^{2mz'}\right) \sqrt{\varepsilon + 4C_5\, e^{-2mC_2}}$$

Rezultă deci că distanța geodezică l între două puncte P' și P'' este dată de formula

$$l = \frac{\sqrt{\varepsilon + 4C_5 e^{-2mC_2}}}{2m} (e^{2mz''} - e^{2mz'}).$$

Să găsim acum spațiile V_3 în corespondență geodezică cu spațiul (1). Se știe că componentele a_{ij} ale tensorului metric al spațiului V_3, în corespondență geodezică cu un spațiu dat, satisfac ecuațiile

$$(11) \qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = \begin{vmatrix} s \\ ik \end{vmatrix} a_{sj} + \begin{vmatrix} s \\ jk \end{vmatrix} a_{si}, \; (i, j, k, s = 1, 2, 3)$$

unde $\begin{vmatrix} i \\ jk \end{vmatrix}$ sînt simbolurile lui Christoffel de a doua speță ale spațiului dat.

Ecuațiile (11) au drept condiții de integrabilitate ecuațiile

$$(12) \qquad a_{is} R^s_{jkl} + a_{js} R^s_{ikl} = 0$$

și ecuațiile în care R^i_{jkl} sînt înlocuite prin componentele tensorilor derivați de curbură $R^i_{jkl;p} \ldots$

Ținînd seama de ecuațiile (2), rezultă că acei $\begin{vmatrix} i \\ jk \end{vmatrix}$ care nu sînt nuli, sînt dați de formulele

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 22 \end{vmatrix} = -m, \begin{vmatrix} 2 \\ 23 \end{vmatrix} = m, \begin{vmatrix} 3 \\ 33 \end{vmatrix} = 2m.$$

În ceea ce privește simbolurile lui Riemann de a doua speță, avem

$$R^i_{jkl} = \begin{vmatrix} i \\ sk \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s \\ jl \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} i \\ sl \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s \\ jk \end{vmatrix}.$$

Ținînd seama de (13), găsim că acei R^i_{jkl} care nu sînt nuli sînt dați de formulele

$$(14) \qquad R^1_{223} = -m^2, \; R^2_{323} = m^2.$$

Ecuațiile (11) se mai scriu sumînd în raport cu s:

$$(15) \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = \begin{vmatrix} 1 \\ ik \end{vmatrix} a_{1j} + \begin{vmatrix} 1 \\ jk \end{vmatrix} a_{1i} + \begin{vmatrix} 2 \\ ik \end{vmatrix} a_{2j} + \begin{vmatrix} 2 \\ jk \end{vmatrix} a_{2i} + \begin{vmatrix} 3 \\ ik \end{vmatrix} a_{3j} + \begin{vmatrix} 3 \\ jk \end{vmatrix} a_{3i}$$

Dacă în (15) $i = j$, obținem

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial x^k} = 2\left(\begin{vmatrix} 1 \\ ik \end{vmatrix} a_{1i} + \begin{vmatrix} 2 \\ ik \end{vmatrix} a_{2i} + \begin{vmatrix} 3 \\ ik \end{vmatrix} a_{3i} \right).$$

Făcînd $i = 1, 2, 3$ și avînd în vedere formulele (13), avem

$$(16) \; \frac{\partial a_{11}}{\partial x^k} = 0, \frac{\partial a_{22}}{\partial x^k} = 2\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2k \end{vmatrix} a_{12} + \begin{vmatrix} 2 \\ 2k \end{vmatrix} a_{22} \right), \frac{\partial a_{33}}{\partial x^k} = 2\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 3k \end{vmatrix} a_{23} + \begin{vmatrix} 3 \\ 3k \end{vmatrix} a_{33} \right).$$

Presupunem acum în (15) $i, j = 1, 2, 3$, unde $i \neq j$. Rezultă

$$(17) \qquad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^k} = \left|\begin{matrix}1\\2k\end{matrix}\right| a_{11} + \left|\begin{matrix}2\\2k\end{matrix}\right| a_{21},$$

$$(18) \qquad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^k} = \left|\begin{matrix}2\\3k\end{matrix}\right| a_{21} + \left|\begin{matrix}3\\3k\end{matrix}\right| a_{31},$$

$$(19) \qquad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^k} = \left|\begin{matrix}1\\2k\end{matrix}\right| a_{13} + \left|\begin{matrix}2\\2k\end{matrix}\right| a_{23} + \left|\begin{matrix}2\\3k\end{matrix}\right| a_{22} + \left|\begin{matrix}3\\3k\end{matrix}\right| a_{32}.$$

Să considerăm acum condiţiile de integrabilitate (12), care se mai scriu sumînd în raport cu s, astfel:

$$(20) \qquad a_{i1} R^1_{jkl} + a_{j1} R^1_{ikl} + a_{i2} R^2_{jkl} + a_{j2} R^2_{ikl} + a_{i3} R^3_{jkl} + a_{j3} R^3_{ikl} = 0$$

Avînd în vedere formulele (14), atunci (20) se mai scriu:

$$(20') \qquad a_{i1} R^1_{jkl} + a_{j1} R^1_{ikl} + a_{i2} R^2_{jkl} + a_{j2} R^2_{ikl} = 0.$$

Facem în formulele (20') $k = 2$, $l = 3$ şi obţinem

$$(20'') \qquad a_{i1} R^1_{j23} + a_{j1} R^1_{i23} + a_{i2} R^2_{j23} + a_{j2} R^2_{i23} = 0.$$

Pentru $i = j$, formulele (20'') devin

$$(20''') \qquad a_{i1} R^1_{i23} + a_{i2} R^2_{i23} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pentru $i=1$, formulele (14) ne arată că (20''') se verifică identic, iar pentru $i = 2$ şi $i = 3$, obţinem respectiv

$$(21) \qquad a_{21} = 0 \text{ şi } a_{32} = 0.$$

Considerăm acum formulele (20'') pentru $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Făcînd pe rînd $i = 1$, $j = 2$; $i = 1$, $j = 3$; $i = 2$, $j = 3$, obţinem respectiv

$$a_{11} R^1_{223} + a_{21} R^1_{123} + a_{12} R^2_{223} + a_{22} R^2_{123} = 0,$$

$$a_{11} R^1_{323} + a_{31} R^1_{123} + a_{12} R^2_{323} + a_{32} R^2_{123} = 0,$$

$$a_{21} R^1_{323} + a_{31} R^1_{223} + a_{22} R^2_{323} + a_{32} R^2_{223} = 0,$$

de unde rezultă, ţinînd seama de formulele (14),

$$a_{11} = 0, \ a_{12} = 0, \ a_{22} = a_{13}.$$

Deci din condiţiile de integrabilitate (12) am obţinut

$$(22) \qquad a_{11} = a_{12} = a_{23} = 0, \quad a_{13} = a_{22}.$$

Ţinînd seama de (22), ecuaţiile (16), (17), (18), (19) se mai scriu

$$a_{11} = 0, \ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^k} = 2 \left|\begin{matrix}2\\2k\end{matrix}\right| a_{22}, \ \frac{\partial a_{33}}{\partial x^k} = 2 \left|\begin{matrix}3\\3k\end{matrix}\right| a_{33}, \ \frac{\partial a_{13}}{\partial x^k} = \left|\begin{matrix}3\\3k\end{matrix}\right| a_{13}.$$

Să considerăm ecuaţia

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^k} = 2\left|\begin{matrix} 2 \\ 2k \end{matrix}\right| a_{22}.$$

Din formulele (13), avem

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 2\ m a_{22}.$$

Deci $a_{22} = A\mathrm{e}^{2mx^3}$. Din ecuaţia

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^k} = 2\left|\begin{matrix} 3 \\ 3k \end{matrix}\right| a_{33}$$

obţinem în acelaşi mod

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 4 m a_{33}.$$

Rezultă $a_{33} = B\mathrm{e}^{4mx^3}$. În ceea ce priveşte ecuaţia

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^k} = \left|\begin{matrix} 3 \\ 3k \end{matrix}\right| a_{13},$$

ea este aceeaşi cu

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^k} = 2\left|\begin{matrix} 2 \\ 2k \end{matrix}\right| a_{22},$$

deoarece $\quad a_{13} = a_{22}$ şi $\left|\begin{matrix} 3 \\ 33 \end{matrix}\right| = 2\ m, \ \left|\begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix}\right| = m.$

Am obţinut deci pentru componentele a_{ij} expresiile

$$a_{11} = a_{12} = a_{23} = 0, \ a_{13} = a_{22} = A\mathrm{e}^{2mx^3}, \ a_{33} = B\mathrm{e}^{4mx^3}$$

Metrica lui V_3 se scrie deci

$$\mathrm{d}s^2 = A\left[\mathrm{e}^{2mx^3}(2\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^3 + (\mathrm{d}x^2)^2) + \frac{B}{A}\,\mathrm{e}^{4mx^3}(\mathrm{d}x^3)^2\right].$$

Dacă punem $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ şi luăm $B = \varepsilon A$, $\quad (\varepsilon = \pm 1)$, atunci

$$\mathrm{d}s^2 = A\left[\mathrm{e}^{2mz}(2\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}y^2) + \varepsilon\mathrm{e}^{4mz}\,\mathrm{d}z^2\right].$$

Considerînd că două spaţii V_3 sînt identice dacă metricele lor variază printr-un factor constant, putem enunţa următorul rezultat : Un spaţiu Riemann (1) cu conexiune constantă de genul doi este în corespondenţă geodezică numai cu el însuşi. Rezultă, în particular, că un spaţiu al lui Riemann (1) este determinat de geodezicele sale, abstracţie făcînd de un factor constant.

★

În cele ce urmează vom căuta să extindem rezultatele obţinute în cazul unui spaţiu V_3 neeuclidian cu conexiune constantă de genul doi la cazul unui spaţiu V_n neeuclidian cu conexiune constantă de genul doi.

În lucrarea [1], acad. Gh. Vrănceanu a demonstrat că metrica (1) a unui spaţiu V_3 cu conexiune constantă de genul doi poate fi extinsă la un spaţiu V_n sub forma

$$\text{(23)} \qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{4mx^1}(\mathrm{d}x^1)^2 + \varepsilon \mathrm{e}^{2mx^1}[2\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 + \varepsilon_\alpha\,(\mathrm{d}x^\alpha)^2],$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, $\alpha = 3,4,\ldots, n$, care constituie astfel un exemplu de spaţiu V_n cu conexiune constantă de genul doi.

În ceea ce priveşte ecuaţiile geodezicelor acestui spaţiu, ele se scriu

$$\text{(24)} \qquad \ddot{x}^1 = -2\,m\,(\dot{x}^1)^2,\ \ddot{x}^2 = m\,\varepsilon_\alpha(\dot{x}^\alpha)^2,\ \ddot{x}^\alpha = -2m\dot{x}^1\dot{x}^\alpha$$
$$(i = 1,\, 2, \ldots, n).$$

Să căutăm mai întîi să găsim ecuaţiile finite ale acestor geodezice prin integrarea sistemului (24) de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi.

Considerăm ecuaţia

$$\ddot{x}^1 = -2\,m\,(\dot{x}^1)^2.$$

Prin substituţia $\dot{x}^1 = u$, $\ddot{x}^1 = \dot{u}$, rezultă $u = \dfrac{1}{2\,(mt + C_1)}\cdot$

Deci $\dot{x}^1 = \dfrac{1}{2\,(mt + C_1)}$, care ne dă prin integrare

$$x^1 = \frac{1}{2m}\ln\,(mt + C_1) + D_1.$$

Ţinînd acum seama de expresia lui x^1 în ecuaţia

$$\ddot{x}^\alpha = -2\,m\,\dot{x}^1\,\dot{x}^\alpha,$$

obţinem pentru x^α expresia

$$x^\alpha = \frac{C_\alpha}{m}\ln\,(mt + C_1) + D_\alpha.$$

Considerăm acum ecuaţia

$$\ddot{x}^2 = m\,\varepsilon_\alpha\,(\dot{x}^\alpha)^2,$$

care ne dă, avînd în vedere expresia lui x^α,

$$x^2 = -\,\frac{\varepsilon_\alpha C_\alpha^2}{m}\ln\,(mt + C_1) + C_2\,t + D_2.$$

Deci ecuaţiile finite ale geodezicelor spaţiului V_n sînt următoarele :

$$(25)\quad \begin{cases} x^1 = \dfrac{1}{2m} \ln (mt + C_1) + D_1, \\ x^2 = -\dfrac{\varepsilon_\alpha C_\alpha^2}{m} \ln (mt + C_1) + C_2 t + D_2, \\ x^\alpha = \dfrac{C_\alpha}{m} \ln (mt + C_1) + D_\alpha , \end{cases}$$

unde C_i, D_i sînt constante de integrare, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Să luăm acum o geodezică (25) şi să calculăm lungimea acestei geodezice între două din punctele sale P', P''. Avem din (23)

$$s = \int_{P'}^{P''} e^{mx^1} \sqrt{e^{2mx^1} (dx^1)^2 + \varepsilon [2dx^1 dx^2 + \varepsilon_\alpha (dx^\alpha)^2]}.$$

Dacă parametrul pe geodezică este t, atunci

$$s = \int_{t'}^{t''} e^{mx^1} \sqrt{e^{2mx^1} (\dot{x}^1)^2 + \varepsilon [2\dot{x}^1 \dot{x}^2 + \varepsilon_\alpha (\dot{x}^\alpha)^2]}\, dt,$$

iar dacă ţinem seama de (25) obţinem

$$s = \sqrt{\frac{1}{4} e^{2mD_1} + \varepsilon C_2} \cdot \int_{t'}^{t''} \frac{e^{mx^1}}{\sqrt{mt + C_1}}\, dt.$$

Din prima ecuaţie (25) se obţine însă

$$e^{2mx^1} = e^{2mD_1} (mt + C_1).$$

Deci

$$s = \frac{1}{2} e^{mD_1} \sqrt{4 \varepsilon C_2 + e^{2mD_1}}\, (t'' - t').$$

Dacă ţinem seama de prima formulă din (25), distanţa geodezică între punctele P' (x'^1) şi P'' (x''^1) este dată de formula

$$l = \frac{\sqrt{\varepsilon + 4C_2 e^{-2mD_1}}}{2m} (e^{2mx''^1} - e^{2mx'^1}).$$

Ne punem acum problema de a găsi spaţiile V_n în corespondenţă geodezică cu spaţiul (23). Se ştie că componentele a_{ij} ale tensorului metric al spaţiului V_n în corespondenţă geodezică cu un spaţiu dat, satisfac ecuaţiile

$$(26)\quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = a_{is} \left| \begin{matrix} s \\ jk \end{matrix} \right| + a_{js} \left| \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right|,$$

unde $\left| \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right|$ sînt simbolurile lui Christoffel de a doua speţă ale spaţiului dat. Ecuaţiile (26) au drept condiţii de integrabilitate ecuaţiile

$$(26')\quad a_{is} R^s_{jkl} + a_{js} R^s_{ikl} = 0$$

şi ecuaţiile în care R^i_{jkl} sînt înlocuite prin componentele tensorilor derivaţi de curbură.

Ţinînd seama de ecuaţiile (24), rezultă că acei $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$ care nu sînt nuli, sînt daţi de formulele

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}\right| = 2\, m, \quad \left|\begin{matrix} 2 \\ \alpha\,\alpha \end{matrix}\right| = -\, m\, \varepsilon_\alpha, \quad \left|\begin{matrix} \alpha \\ 1\,\alpha \end{matrix}\right| = m. \tag{27}$$

În ceea ce priveşte simbolurile lui Riemann de a doua speţă, avem

$$R^i_{jkl} = \left|\begin{matrix} i \\ sk \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} s \\ jl \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} i \\ sl \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} s \\ jk \end{matrix}\right|.$$

Ţinînd seama de (27), găsim că acei R^i_{jkl} care nu sînt nuli sînt daţi de formulele

$$R^2_{\beta\beta 1} = -\, m^2\, \varepsilon_\beta,\; R^\beta_{1\beta 1} = m^2, \quad (\beta = 3,\, 4, \ldots, n). \tag{28}$$

Ecuaţiile (26′) se mai scriu sub forma următoare dacă ţinem seama de (28):

$$a_{i2}\, R^2_{jkl} + a_{i\beta}\, R^\beta_{jkl} + a_{j2}\, R^2_{ikl} + a_{j\beta}\, R^\beta_{ikl} = 0. \tag{29}$$

Dacă în ecuaţiile (29) facem $k = \alpha$, $l = 1$, obţinem

$$a_{i2}\, R^2_{j\alpha 1} + a_{i\beta}\, R^\beta_{j\alpha 1} + a_{j2}\, R^2_{i\alpha 1} + a_{j\beta}\, R^\beta_{i\alpha 1} = 0, \quad (\alpha \geqslant 3).$$

Pentru $i = j$ rezultă

$$a_{i2}\, R^2_{i\alpha 1} + a_{i\beta}\, R^\beta_{i\alpha 1} = 0.$$

Facem $i = 1$, apoi $i = \alpha$ şi obţinem respectiv

$$a_{12}\, R^2_{1\alpha 1} + a_{1\beta}\, R^\beta_{1\alpha 1} = 0,$$

$$a_{\alpha 2}\, R^2_{\alpha\alpha 1} + a_{\alpha\beta}\, R^\beta_{\alpha\alpha 1} = 0,$$

de unde rezultă respectiv

$$a_{1\alpha} = 0,$$

$$a_{2\alpha} = 0, \quad (\alpha = 3,\, 4, \ldots, n).$$

Pentru $i = 1$, $j = \alpha$, obţinem

$$a_{\alpha\alpha} = \varepsilon_\alpha\, a_{12}.$$

Pentru $i = 2$, $j = \alpha$, avem

$$a_{22} = 0.$$

Facem $i = \gamma$, $j = 1$, unde $\alpha \neq \gamma$ şi obţinem

$$a_{\alpha\gamma} = 0 \quad (\gamma = 3,\, 4, \ldots, n).$$

Avînd în vedere cele obţinute mai sus, deducem că metrica spaţiului V_n se scrie sub forma

$$ds^2 = a_{11}\, (dx^1)^2 + a_{12}\, [2 dx^1\, dx^2 + \varepsilon_\alpha\, (dx^\alpha)^2].$$

Din ecuaţiile (26) obţinem, pentru $i = j = k = 1$, ecuaţia

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = 4m\, a_{11},$$

iar pentru $i = j = 1$, $k = u \geqslant 2$, ecuaţiile

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^u} = 0.$$

Prin integrare, obţinem

$$a_{11} = K e^{4mx^1},$$

unde K este o constantă de integrare.

Dacă în ecuaţiile (26) facem acum $i = 1$, $j = 2$, $k = 1$, obţinem

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = 2m a_{12},$$

iar pentru $i = 1$, $j = 2$, $k = u \geqslant 2$, obţinem

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^u} = 0.$$

Rezultă că

$$a_{12} = \rho e^{2mx^1},$$

unde ρ este o constantă de integrare. Deci metrica spaţiului V_n se scrie sub forma

$$ds^2 = k\{e^{4mx^1}(dx^1)^2 + \varepsilon e^{2mx^1}[2dx^1\, dx^2 + \varepsilon_\alpha (dx^\alpha)^2]\},$$

unde am pus $\rho = \varepsilon k$.

Considerînd că două spaţii V_n sînt identice dacă metricele lor variază printr-un factor constant, putem enunţa următorul rezultat: un spaţiu Riemann (23) cu conexiune constantă de genul doi este în corespondenţă geodezică numai cu el însuşi.

Rezultă, în particular, că un spaţiu al lui Riemann V_n (23) este determinat de geodezicele sale, abstracţie făcînd un factor constant.

Primită la redacţie la 1 februarie 1965

Inst. Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Vrănceanu, *Asupra spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă*. St. cerc. mat., **XIII**, *2* (1962).
2. Gh. Vrănceanu, *Proprietăţi globale ale spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă*. St. cerc. mat., **XIII**, *4* (1962).
3. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, Vol. I, II, Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1952.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

1966 APR 18

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
N. RANCU şi L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 3, P. 339—480 BUCUREŞTI, 1966

I. P. „Informaţia" – c. 5152 | 43 831 | Lei 12

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

TOMUL 18

1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU — membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1966.
În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție, pe adresa: str. Mihai Eminescu nr. 47, București

F 762

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

TOM. 18, Nr. 4
1966

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

N. DINCULEANU, Reprezentarea integrală a operaţiilor liniare (II) 483

MARIUS I. STOKA, Grupurile de olonomie ale spaţiilor A_3 . . 537

NICOLAE POPESCU, Elemente de teoria fasciculelor (III) . . . 547

DAN BURGHELEA, Spaţii fibrate principale şi sisteme Postnikov 585

N. N. TEODORESCU şi GH. N. RIZESCU, O demonstraţie a unei teoreme privind tensorul de curbură 631

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 4, P. 481–634, BUCUREŞTI 1966

REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERAŢIILOR LINIARE (II)

DE

N. DINCULEANU

În această a doua parte a lucrării se studiază mai întîi cîmpurile p-integrabile şi integrarea acestor cîmpuri în raport cu măsuri vectoriale ; se dau apoi reprezentări integrale ale operaţiilor liniare pe spaţii de cîmpuri de vectori p-integrabile şi pe spaţii de cîmpuri de vectori continue cu suport compact.

CAPITOLUL III

INTEGRAREA CÎMPURILOR DE VECTORI p-INTEGRABILE

1. CÎMPURI DE VECTORI MĂSURABILE

Fie μ o măsură (numărabil aditivă) *pozitivă finită* pe clanul $\mathcal{C}$. Notăm cu $\mathcal{T}(\mu)$ tribul mulţimilor μ-măsurabile şi cu $\sum(\mu)$ semitribul părţilor μ-integrabile. Măsura μ se extinde la o măsură exterioară μ^* pe $\mathcal{T}(\mu)$. Pentru mulţimile μ-integrabile $A \in \sum(\mu)$ notăm $\mu(A) = \mu^*(A)$.

1. DEFINIŢIE. *Se numeşte cîmp etajat μ-măsurabil orice cîmp de vectori de forma*

$$x = \sum \varphi_{A_i} x_i \ (\textit{sumă finită}) \ \textit{cu} \ A_i \in \mathcal{T}(\mu) \ \textit{si} \ x_i \in \mathcal{A}.$$

Mulţimea cîmpurilor etajate μ-măsurabile va fi notată cu $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mu)$.

Un cîmp de vectori etajat μ-măsurabil se poate scrie totdeauna sub forma $\sum \varphi_{A_i} x_i$ cu A_i mulţimi μ-măsurabile disjuncte şi $x_i \in \mathcal{A}$.

2. PROPOZIŢIE. *Dacă x este un cîmp etajat μ-măsurabil, atunci funcţia $|x|$ este μ-măsurabilă.*

Să remarcăm întîi că dacă $x \in \mathcal{A}$, atunci funcţia $|x|$ este μ-măsurabilă. În adevăr, pentru orice mulţime $A \in \mathcal{C}$, funcţia $\varphi_A |x|$ este total

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 4, P. 433–536, BUCUREŞTI, 1966

măsurabilă, deci μ-măsurabilă. Conform principiului localizării, $|x|$ este μ-măsurabilă.

Să considerăm acum cîmpul μ-măsurabil

$$x = \sum \varphi_{A_i} x_i$$

cu A_i mulţimi disjuncte din $\mathcal{T}(\mu)$ şi $x_i \in \mathcal{A}$. Atunci

$$|x| = \sum \varphi_{A_i} |x_i|$$

deci $|x|$ este μ-măsurabilă.

3. DEFINIŢIE. *Spunem că un cîmp $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ este μ -măsurabil dacă pentru orice mulţime $A \in \mathcal{C}$ există o mulţime μ-neglijabilă $N \subset A$ şi un şir (x_n) de cîmpuri etajate μ-măsurabile, care tinde către x pe $A - N$.*

Dacă μ este variaţia unei măsuri vectoriale m, spunem că un cîmp x este m-măsurabil dacă este μ-măsurabil.

Din această definiţie rezultă că mulţimea cîmpurilor μ-măsurabile este un spaţiu vectorial care conţine spaţiul $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mu)$ al cîmpurilor etajate μ-măsurabile.

4. PROPOZIŢIE. (Principiul localizării). *Fie x un cîmp de vectori. Dacă pentru orice mulţime $A \in \mathcal{C}$, cîmpul $\varphi_A\, x$ este μ-măsurabil, atunci cîmpul x este de asemenea măsurabil.*

5. PROPOZIŢIE. *Dacă x este un cîmp μ-măsurabil, atunci $|x|$ este o funcţie μ-măsurabilă.*

În adevăr, cu notaţiile din definiţie, dacă x_n tinde către x pe $A - N$, atunci $|x_n|$ tinde către $|x|$ pe $A - N$ şi $|x_n|$ sînt măsurabile, deci $|x|$ este măsurabilă.

6. PROPOZIŢIE. *Dacă x este un cîmp μ-măsurabil şi φ este o funcţie scalară μ-măsurabilă, atunci φx este un cîmp μ-măsurabil.*

În adevăr, fie $A \in \mathcal{C}$. Există atunci o mulţime μ-neglijabilă $N \subset A$, un şir (x_n) de cîmpuri etajate μ-măsurabile care tinde către x pe $A - N$ şi (φ_n) un şir de funcţii scalare etajate μ-măsurabile care tinde către φ pe $A - N$. Atunci $\varphi_n\, x_n$ sînt cîmpuri etajate μ-măsurabile şi tind către φx pe $A - N$, deci φx este μ-măsurabil.

În particular, $\varphi_A\, x$ este μ-măsurabil, pentru orice $A \in \mathcal{T}(\mu)$.

Fie $\mathcal{S}$ semitribul generat de $\mathcal{C}$.

7. PROPOZIŢIE. *Dacă x este un cîmp μ-măsurabil, atunci pentru orice mulţime μ-măsurabilă $A \subset T$ de măsură σ-finită există o mulţime μ-neglijabilă $N \subset A$ şi un şir (x_n) de cîmpuri $\mathcal{S}$-etajate care tinde către x pe $A - N$.*

Demonstraţia se face ca şi în cazul clasic.

8. TEOREMĂ. (Egorov). *Dacă (x_n) este un şir de cîmpuri μ-măsurabile care tinde μ-aproape peste tot către un cîmp x, atunci :*

a) *cîmpul x este μ-măsurabil* ;

b) *pentru orice mulţime μ-integrabilă A şi orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime $B \subset A$ din semitribul generat de clanul $\mathcal{C}$ astfel încît $\mu(A - B) < \varepsilon$ şi astfel încît pe B şirul (x_n) converge uniform către x.*

Demonstraţia se face ca şi în cazul clasic.

9. COROLAR. *Fie* x *un cîmp. Dacă pentru fiecare mulțime* $A \in \mathcal{C}$ *există o mulțime* μ*-neglijabilă* $N \subset A$ *și un șir* (x_n) *de cîmpuri* μ*-măsurabile care tinde către* x *pe* $A - N$, *atunci* x *este* μ*-măsurabil.*

Se folosește principiul localizării.

10. COROLAR. *Orice cîmp de vectori aproape total* μ*-măsurabil este* μ*-măsurabil.*

2. CÎMPURI DE VECTORI p-INTEGRABILE

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *o măsură* (numărabil aditivă) *cu variație finită* μ. Atunci μ este o măsură pozitivă finită pe $\mathcal{C}$.

11. DEFINIȚIE. *Fie* $1 \leqslant p < \infty$. *Spunem că un cîmp de vectori* $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *este de putere* p μ*-integrabilă, dacă* x *este* μ*-măsurabil și dacă funcția* $|x|$ *este de putere* p μ*-integrabilă.*

Vom nota cu $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ mulțimea cîmpurilor p μ-integrabile.

În loc de „cîmp de putere p μ-integrabilă" vom spune de asemenea „cîmp de putere p m-integrabilă" iar în loc de $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ vom scrie de asemenea $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(m)$.

Mulțimea $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ este un spațiu vectorial. Vom considera pe acest spațiu topologia convergenței în medie de ordin p definită de seminorma

$$N_p(x, \mu) = \left(\int |x(t)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vom scrie de asemenea $N_p(x, m)$ sau $N_p(x)$ sau $\|x\|_p$ în loc de $N_p(x, \mu)$.

Următoarele proprietăți, valabile pentru spațiile $\mathcal{L}^p$ de funcții scalare, rămîn valabile pentru spațiile de cîmpuri de vectori :

1) Dacă $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$, atunci mulțimea $\{t ; x(t) \neq 0\}$ este μ-măsurabilă și are măsura σ-finită.

2) Dacă $x_n \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și dacă $\sum x_n \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$, atunci

$$N_p(\sum x_n) \leqslant \sum N_p(x_n).$$

3) Dacă $x_n \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și dacă $\sum N_p(x_n) < \infty$, atunci seria $\sum x_n(t)$ este absolut convergentă μ-aproape peste tot și orice cîmp x egal cu suma seriei μ-aproape peste tot aparține spațiului $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și avem

$$N_p(x - \sum_{k \leqslant n} x_k) \leqslant \sum_{k > n} N_p(x_n).$$

4) Din orice șir Cauchy din $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ se poate extrage un subșir convergent μ-aproape peste tot și în medie către un cîmp din $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$.

5) Spaţiul $\mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ este complet.

6) Dacă (x_n) este un şir Cauchy din $\mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$, convergent μ-aproape peste tot către un cîmp x, atunci $x \in \mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ iar (x_n) converge în medie de ordin p către x.

7) Spaţiul $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ al cîmpurilor $\mathcal{C}$-etajate este dens în $\mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$.

8) Pentru orice cîmp $x \in \mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ există un şir (x_n) din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ convergent către x μ-aproape peste tot şi în medie de ordin p.

9) $x \in \mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ dacă şi numai dacă $|x|^{p-1} x \in \mathscr{L}^1_{\mathcal{A}}$.

10) *Teorema lui Lebesgue.* Fie (x_n) un şir de cîmpuri din $\mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ convergent μ-aproape peste tot către un cîmp x. Dacă există o funcţie φ din $\mathscr{L}^p(\mu)$ astfel încît să avem $|x_n(t)| \leqslant \varphi(t)$, μ-aproape peste tot, pentru fiecare n, atunci $x \in \mathscr{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ iar (x_n) tinde în medie de ordin p către x.

3. INTEGRALA CIMPURILOR INTEGRABILE

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathscr{L}(\mathcal{A}, F)$ o măsură (numărabil aditivă) cu variaţie finită μ. Să considerăm spaţiul $\mathscr{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ al funcţiilor μ-integrabile, dotat cu seminorma

$$N_1(x) = \int |x| \, \mathrm{d}\mu.$$

Pentru fiecare cîmp $\mathcal{C}$-etajat x, inegalitatea

$$\left| \int x \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |x| \, \mathrm{d}\mu$$

se scrie acum

$$\left| \int x \, \mathrm{d}m \right| \leqslant N_1(x)$$

şi arată că aplicaţia $x \to \int x \, \mathrm{d}m$ a spaţiului $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ în F este continuă pentru seminorma N_1. Cum spaţiul $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ este dens în $\mathscr{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$, această aplicaţie se poate prelungi la o aplicaţie liniară continuă a întregului spaţiu $\mathscr{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ în F.

12. DEFINIŢIE. *Pentru orice cîmp integrabil* $x \in \mathscr{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ *se notează cu* $\int x \, \mathrm{d}m$ *şi se numeşte integrala lui* x *în raport cu* m, *valoarea în* x *a prelungirii la* $\mathscr{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ *a aplicaţiei* $y \to \int y \, \mathrm{d}m$ *a lui* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ *în* F.

Inegalitatea

$$\left|\int x\,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int |x|\,\mathrm{d}\mu$$

rămîne adevărată pentru orice cîmp $x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$.

Dacă x_n converge în medie către x, adică dacă

$$\int |x_n - x|\,\mathrm{d}\mu \to 0$$

atunci

$$\int x_n\,\mathrm{d}m \to \int x\,\mathrm{d}m.$$

În particular, în concluzia teoremei lui Lebesgue pentru spațiul $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \int x_n\,\mathrm{d}m = \int x\,\mathrm{d}m.$$

4. INTEGRALA FUNCȚIILOR SCALARE

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o *măsură* cu *variație finită* μ. Spațiul $\mathcal{L}^1(\mu)$ al funcțiilor scalare μ-integrabile va fi notat de asemenea cu $\mathcal{L}^1(m)$.

Pentru a putea defini integrala funcțiilor din $\mathcal{L}^1(m)$ în raport cu m trebuie impuse anumite restricții familiei $\mathcal{A}$:

Vom nota cu $\mathcal{T}$ *tribul* generat de clanul $\mathcal{C}$ și vom presupune că familia $\mathcal{A}$ verifică axioma următoare:

Pentru orice $A \in \mathcal{T}$ *și orice* $x \in \mathcal{A}$ *avem* $\|x\|_A < \infty$.

Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{T}$, aplicația $x \to \|x\|_A$ este o seminormă pe $\mathcal{A}$, iar în spațiul $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ vom considera și aplicațiile $S : \mathcal{A} \to F$ cu $|S|_A < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$.

Observație. Dacă $E(t) = E$ pentru orice $t \in T$, axioma precedentă este verificată de la sine.

Pentru fiecare funcție $\mathcal{C}$-etajată φ avem

$$\left|\int \varphi\,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int |\varphi|\,\mathrm{d}\mu = N_1(\varphi).$$

Dacă (φ_n) este un șir Cauchy de funcții $\mathcal{C}$-etajate din $\mathcal{L}^1(\mu)$, nule în afara unei mulțimi $A \in \mathcal{T}$, atunci

$$\left|\int \varphi_n\,\mathrm{d}m - \int \varphi_m\,\mathrm{d}m\right| = \left|\int (\varphi_n - \varphi_m)\,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int |\varphi_n - \varphi_m|\,\mathrm{d}\mu$$

deci $\left(\int \varphi_n \, dm\right)$ este un şir Cauchy în spaţiul Banach $\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$ şi deci are o limită în acest spaţiu. Dacă în plus (φ_n) tinde în medie către zero, atunci din inegalitatea

$$\left|\int \varphi_n \, dm\right| \leqslant \int |\varphi_n| \, d\mu$$

rezultă că $\int \varphi_n \, dm \to 0$.

De aici rezultă că dacă (φ_n) şi (ψ_n) sînt două şiruri Cauchy de funcţii $\mathcal{C}$-etajate din $\mathcal{L}^1(\mu)$, convergente către aceeaşi funcţie, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, dm = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n \, dm.$$

Aceste consideraţii ne conduc la următoarea

13. DEFINIŢIE. *Pentru orice funcţie* $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *se defineşte integrala* $\int \varphi \, dm$ *prin egalitatea*

$$\int \varphi \, dm = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, dm,$$

unde (φ_n) *este un şir de funcţii* $\mathcal{C}$*-etajate convergent în* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *către* φ.

14. PROPOZIŢIE. *Dacă* φ *este o funcţie din* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *nulă* μ*-aproape peste tot în afara unei mulţimi* $A \in \mathcal{T}$, *atunci* $\int \varphi \, dm \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$ *şi*

$$\left|\int \varphi \, dm\right|_A = \left|\int \varphi \, dm\right|_B \leqslant \int |\varphi| \, d\mu$$

pentru orice mulţime $B \in \mathcal{T}$ *cu* $A \subset B$.

Fie φ_n un şir de funcţii etajate din $\mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ convergent către φ în $\mathcal{L}^1(\mu)$. Pentru fiecare n avem $\int \varphi_n \, dm \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$ iar şirul $\left(\int \varphi_n \, dm\right)$ tinde către $\int \varphi \, dm$ în spaţiul $\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$. Urmează că

$$\left|\int \varphi_n \, dm\right|_A \to \left|\int \varphi \, dm\right|_A.$$

Cum pentru fiecare funcţie etajată φ_n avem

$$\left|\int \varphi_n \, dm\right|_A \leqslant \int |\varphi_n| \, d\mu$$

deducem prin trecere la limită

$$\left|\int \varphi \, dm\right|_A \leqslant \int |\varphi| \, d\mu < \infty.$$

Pe de altă parte, pentru fiecare φ_n avem

$$\left|\int \varphi_n \, \mathrm{d}m\right|_A = \left|\int \varphi_n \, \mathrm{d}m\right|_B, \text{ dacă } A \subset B$$

deci

$$\left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right|_A = \left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right|_B, \text{ dacă } A \subset B.$$

Observaţie. În continuare vom scrie $\left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right|$ în loc de $\left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right|_A$, dacă $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ se anulează μ-aproape peste tot în afara lui A.

5. q-VARIAŢIA

Fie μ o *măsură pozitivă* (finită) pe clanul $\mathcal{C}$ şi $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o funcţie de mulţime.

Fie $1 \leqslant q \leqslant \infty$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

15. DEFINIŢIE. *Se numeşte q-variaţia lui m funcţia de mulţime* $\overline{m}_q$ *definită pentru orice mulţime* $A \subset T$ *prin egalitatea*

$$\overline{m}_q(A) = \sup \sum |m(A_i)| \, |\alpha_i|,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate funcţiile $\mathcal{C}$*-etajate* $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i$ *din* $\mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ *cu* A_i *disjuncte şi* $N_p(\varphi) \leqslant 1$.

q-variaţia lui m are următoarele proprietăţi:

1) $0 \leqslant \overline{m}_q(A) \leqslant \infty$.

2) $\overline{m}_q(\emptyset) = 0$.

3) $\overline{m}_q(A) \leqslant \overline{m}_q(B)$, dacă $A \subset B$.

4) $\overline{m}_q(A) = 0$ dacă şi numai dacă $m(B) = 0$ pentru orice $B \in \mathcal{C}$ cu $B \subset A$.

5) Dacă pentru o mulţime $A \in \mathcal{C}$ avem $\mu(A) = 0$ şi $m(A) \neq 0$, atunci $\overline{m}_q(A) = \infty$.

6) Dacă $\mu(A) = 0$ şi $\overline{m}_q(A) < \infty$, atunci $\overline{m}_q(A) = 0$.

7) $\overline{m} \leqslant \overline{m}_1$, unde $\overline{m}$ este varianta obişnuită.

8) Fie $A \subset T$. Dacă $m(B) = 0$ pentru orice mulţime $B \subset A$ din $\mathcal{C}$ cu $\mu(B) = 0$, atunci $\overline{m}(A) = \overline{m}_1(A)$.

În particular

8′) Dacă m este absolut continuă în raport cu μ, atunci $\overline{m} = \overline{m}_1$.

9) Pentru $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte, avem

$$\sum |m(A_i)| \, |\alpha_i| \leqslant \overline{m}_q(A) N_p(\varphi)$$

cu excepţia cazului cînd $\overline{m}_q(A) = \infty$ şi $N_p(\varphi) = 0$.

În particular

9′) Pentru orice mulţime $A \in \mathcal{C}$ avem

$$| m(A) | \leqslant \overline{m}_q(A)\, \mu(A)^{\frac{1}{p}}$$

cu excepţia cazului cînd $\mu(A) = 0$ şi $m(A) \neq 0$.

10) Dacă A este μ-integrabilă, cu $\mu(A) > 0$ şi dacă $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$, atunci

$$\mu(A)^{-\frac{1}{r}}\, \overline{m}_r(A) \leqslant \mu(A)^{-\frac{1}{s}}\, \overline{m}_s(A).$$

În particular

11) Dacă A este μ-integrabilă şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci

$$\overline{m}_1(A) \leqslant \mu(A)^{\frac{1}{p}}\, \overline{m}_q(A) \leqslant \overline{m}_\infty(A)\, \mu(A).$$

12) $\overline{m}_{1q} = \overline{m}_q$, unde $\overline{m}_{1q}$ este q-variaţia lui $\overline{m}_1$.

13) Dacă m este aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci $\overline{m}_q$ este subaditivă pe $\mathcal{C}_\lambda$; dacă m este numărabil aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci $\overline{m}_q$ este numărabil subaditivă pe $\mathcal{C}_\lambda$.

13′) Dacă m este aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci $\overline{m}_1$ este aditivă pe $\mathcal{C}_\lambda$; dacă m este numărabil aditivă pe $\mathcal{C}$, atunci $\overline{m}_1$ este numărabil aditivă pe $\mathcal{C}_\lambda$.

14) $\overline{(m + n)}_q \leqslant \overline{m}_q + \overline{n}_q$ şi $\overline{(\alpha m)}_q = | \alpha |\, \overline{m}_q$.

15) *Pentru orice mulţime* $A \subset T$ *avem*

$$\overline{m}_q(A) = \sup \sum | m(A_i)\, x_i |$$

pentru toate cîmpurile $\mathcal{C}$-etajate $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ *din* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *cu* A_i *disjuncte şi* $N_p(x) \leqslant 1$.

6. q-SEMIVARIAŢIA

Fie μ o măsură pozitivă finită pe $\mathcal{C}$ şi $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o funcţie de mulţime.

Fie $1 \leqslant q \leqslant \infty$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

16. DEFINIŢIE. *Se numeşte q-semivariaţia lui m funcţia de mulţime* $\widetilde{m}_q$ *definită pentru orice mulţime* $A \subset T$ *prin egalitatea*

$$\widetilde{m}_q(A) = \sup \left| \sum m(A_i)\, x_i \right|$$

pentru toate cîmpurile etajate $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ *din* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ *cu* A_i *disjuncte şi* $N_p(x) \leqslant 1$.

Observăm că q-semivariația lui m depinde esențial de spațiile $\mathcal{A}$ și F. q-semivariația are următoarele proprietăți :

1) $0 \leqslant \widetilde{m}_q(A) \leqslant \overline{m}_q(A) \leqslant \infty$.

2) $\widetilde{m}_q(\emptyset) = 0$.

3) $\widetilde{m}_q(A) \leqslant \widetilde{m}_q(B)$, dacă $A \subset B$.

4) $\widetilde{m}_q(A) = 0$ dacă și numai dacă $m(B) = 0$ pentru orice $B \subset A$ din $\mathcal{C}$, adică dacă și numai dacă $\overline{m}_q(A) = 0$.

5) Dacă pentru o mulțime $A \in \mathcal{C}$ avem $\mu(A) = 0$ și $m(A) \neq 0$, atunci $\widetilde{m}_q(A) = \infty$.

6) Dacă $\mu(A) = 0$ și $\widetilde{m}_q(A) < \infty$, atunci $\widetilde{m}_q(A) = 0$.

7) $\widetilde{m} \leqslant \widetilde{m}_1$, unde $\widetilde{m}$ este semivariația obișnuită.

8) Fie $A \subset T$. Dacă $m(B) = 0$ pentru orice mulțime $B \subset A$ din $\mathcal{C}$ cu $\mu(B) = 0$, atunci $\widetilde{m}(A) = \widetilde{m}_1(A)$.

În particular

8′) Dacă m este absolut continuă în raport cu μ, atunci $\widetilde{m} = \widetilde{m}_1$.

9) Pentru $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte avem

$$|\sum m(A_i)\, x_i| \leqslant \widetilde{m}_q(A)\, N_p(x)$$

cu excepția cazului cînd $\widetilde{m}_q(A) = \infty$ și $N_p(x) = 0$.

În particular :

9′) Pentru orice mulțime $A \in \mathcal{C}$ avem

$$|m(A)| \leqslant \widetilde{m}_q(A) \mu(A)^{\frac{1}{p}}$$

cu excepția cazului cînd $\mu(A) = 0$ și $m(A) \neq 0$.

10) Dacă A este μ-integrabilă cu $\mu(A) > 0$ și dacă $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$, atunci

$$\mu(A)^{-\frac{1}{r}}\, \widetilde{m}_r(A) \leqslant \mu(A)^{-\frac{1}{s}}\, \widetilde{m}_s(A).$$

11) Dacă A este μ-integrabilă și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci

$$\widetilde{m}_1(A) \leqslant \mu(A)^{\frac{1}{p}}\, \widetilde{m}_q(A) \leqslant \widetilde{m}_\infty(A)\, \mu(A).$$

12) $\widetilde{m}_{1q} = \widetilde{m}_q$, unde $\widetilde{m}_{1q}$ este q-variația lui $\widetilde{m}_1$.

13) Dacă m este aditivă, atunci $\widetilde{m}_q$ este subaditivă ; dacă m este numărabil aditivă, atunci $\widetilde{m}_q$ este numărabil subaditivă.

14) $\widetilde{(m+n)}_q \leqslant \widetilde{m}_q + \widetilde{n}_q$ și $\widetilde{(\alpha m)}_q = |\alpha|\, \widetilde{m}_q$.

15) Dacă $q = \infty$, sau dacă $1 \leqslant q \leqslant \infty$ și $F = C$, avem $\widetilde{m}_q = \overline{m}_q$.

16) Se poate demonstra următoarea egalitate :

Dacă $1 \leqslant q < \infty$ avem :

$$\widetilde{m}_q(A) = \sup_{|z| \leqslant 1} \sup \left(\sum \frac{|m_z(A_i)|^q}{\mu(A_i)^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

și

$$\overline{m}_q(A) = \sup\left(\sum \frac{|m(A_i)|^q}{\mu(A_i)^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

pentru toate familiile finite (A_i) de mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ conținute în A;

$$\widetilde{m}_\infty(A) = \sup_{|z| \leqslant 1} \sup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{C}}} \frac{|m_z(B)|}{\mu(B)} = \sup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{C}}} \frac{|m(B)|}{\mu(B)} = \overline{m}_\infty(A).$$

În relațiile precedente considerăm $\dfrac{m_z(A)}{\mu(A)} = 0$ dacă $\mu(A) = 0$ și $m_z(A) = 0$, și $\dfrac{m_z(A)}{\mu(A)} = \infty$ dacă $\mu(A) = 0$ și $m_z(A) \neq 0$ și aceleași convenții se fac în legătură cu $\dfrac{m(A)}{\mu(A)}$.

17. Propoziție. *Dacă* $1 < q \leqslant \infty$ *și dacă* m *este aditivă și cu* q*-semivariație finită, atunci* m *este numărabil aditivă și absolut continuă în raport cu* μ.

Continuitatea absolută rezultă din proprietatea 6 : dacă A aparține semitribului generat de $\mathcal{C}$, și dacă $\mu(A) = 0$, atunci $\widetilde{m}_q(A) = 0$, deci $\widetilde{m}_1(A)=0$ (proprietatea 11), deci $\widetilde{m}_{1q}(A) = 0$, deci $\widetilde{m}_1(A) = 0$ (proprietatea 7) și deci $\overline{m}(A) = 0$.

Fie acum (A_i) un șir de mulțimi disjuncte din $\mathcal{C}$ cu reuniunea A în $\mathcal{C}$. Din proprietatea 9′) deducem că pentru orice n avem

$$|m(A) - \sum_{i \leqslant n} m(A_i)| = |m(\bigcup_{i > n} A_i)| \leqslant \widetilde{m}_q(A)\, \mu(\bigcup_{i > n} A_i)^{\frac{1}{p}} \cdot$$

Deoarece μ este numărabil aditivă, avem

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\bigcup_{i > n} A_i) = 0$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} |m(A) - \sum_{i \leqslant n} m(A_i)| = 0.$$

Observații. 1°. Dacă $\overline{m}_1(A) < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{C}$ deducem că m este absolut continuă în raport cu μ, dar m nu este în mod necesar numărabil aditivă.

2°. q-semivariația $\widetilde{m}_q$ depinde în mod esențial de spațiile $\mathcal{A}$ și F. Punem în evidență acest fapt scriind $\widetilde{m}_{\mathcal{A}, F, q}$.

Dacă notăm $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$, avem $X = \mathcal{L}(R, X)$ și definim q-semivariația în raport cu spațiile R, X prin egalitatea

$$\widetilde{m}_{R, X, q}(A) = \sup |\sum m(A_i)\, \alpha_i|,$$

unde marginea superioară se ia pentru toate funcțiile $\mathcal{C}$-etajate $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte și $N_p(\varphi) \leqslant 1$.

Se demonstrează că avem inegalitatea

$$\widetilde{m}_{R,X,q} \leqslant \widetilde{m}_{\mathcal{A},F,q}.$$

7. INTEGRAREA CÎMPURILOR DIN $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$

Fie μ o *măsură pozitivă* pe $\mathcal{C}$ și $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o *măsură aditivă*. Fie $1 \leqslant q \leqslant \infty$ și $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

18. Propoziție. *Pentru orice mulțime $A \subset T$ avem*

$$\widetilde{m}_q(A) = \sup \left| \int x \, \mathrm{d}m \right| \quad \textit{pentru } x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A) \textit{ cu } N_p(x) \leqslant 1.$$

Demonstrația este imediată.

19. Corolar. *Pentru orice cîmp $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ avem*

$$\left| \int x \, \mathrm{d}m \right| \leqslant N_p(x) \, \widetilde{m}_q(A) \leqslant \infty.$$

20. Corolar. *Dacă m are variație finită $|m|$, atunci pentru orice cîmp etajat $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ avem*

$$\left| \int x \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |x| \, \mathrm{d}|m| \leqslant N_p(x) \, \overline{m}_q(A) \leqslant \infty.$$

În adevăr, avem $|m| \leqslant \overline{m}_1$ și $\overline{m}_{1q} = \overline{m}_q$, deci

$$\int |x| \, \mathrm{d}|m| \leqslant \int |x| \, \mathrm{d}\overline{m}_1 \leqslant N_p(x) \, \overline{m}_{1q}(A) = N_p(x) \, \overline{m}_q(A).$$

În anumite cazuri se poate extinde integrala în raport cu m, de la cîmpurile etajate din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ la cîmpurile din $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$.

Vom nota cu $\mathcal{T}$ tribul generat de clanul $\mathcal{C}$.

21. Propoziție. *Să presupunem că $1 \leqslant p < \infty$ și că $\widetilde{m}_q(A) < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{T}$.*

1) *Dacă (x_n) este un șir Cauchy în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ format din cîmpuri $\mathcal{C}$-etajate, atunci $\left(\int x_n \, \mathrm{d}m \right)$ este un șir Cauchy în F.*

2) *Dacă (x_n) și (y_n) sînt două șiruri Cauchy din $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ formate din cîmpuri $\mathcal{C}$-etajate și dacă converg μ-aproape peste tot către aceeași limită, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \int x_n \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to \infty} \int y_n \, \mathrm{d}m.$$

Fie $A \in \mathcal{T}$ astfel ca toate cîmpurile x_n și y_n să se anuleze în afara lui A. Avem întîi

$$\left|\int x_n \,\mathrm{d}m - \int x_m \,\mathrm{d}m\right| = \left|\int (x_n - x_m)\,\mathrm{d}m\right| \leqslant N_p(x_n - x_m)\,\widetilde{m}_q(A) < \infty$$

deci $\left(\int x_n \,\mathrm{d}m\right)$ este un șir Cauchy.

Pe de altă parte $(x_n - y_n)$ este un șir Cauchy în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și converge μ-aproape peste tot către 0, deci $N_p(x_n - y_n) \to 0$. Atunci

$$\left|\int x_n \,\mathrm{d}m - \int y_n \,\mathrm{d}m\right| \leqslant N_p(x_n - y_n)\,\widetilde{m}_q(A)$$

deci șirurile $\left(\int x_n \,\mathrm{d}m\right)$ și $\left(\int y_n \,\mathrm{d}m\right)$ au aceeași limită.

Propoziția precedentă conduce la următoarea

22. Definiție. *Fie* $1 \leqslant p < \infty$ *și* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Să presupunem că* $\widetilde{m}_q(A) < \infty$ *pentru orice* $A \in \mathcal{T}$. *Pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ *se definește integrala* $\int x \,\mathrm{d}m$ *prin egalitatea*

$$\int x \,\mathrm{d}m = \lim_{n \to \infty} \int x_n \,\mathrm{d}m,$$

unde (x_n) *este un șir Cauchy în* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ *de cîmpuri* $\mathcal{C}$*-etajate convergent către* x μ*-aproape peste tot.*

Din această definiție rezultă că aplicația $x \to \int x \,\mathrm{d}m$ a lui $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ în F este liniară și că pentru orice mulțime μ-măsurabilă A și orice cîmp x din $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ nul în afara lui A avem

$$\left|\int x \,\mathrm{d}m\right| \leqslant N_p(x)\,\widetilde{m}_q(A).$$

Observație. Dacă $q=1$, am definit deja integrala funcțiilor aproape total μ-măsurabile din $\mathcal{M}^\infty_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ în raport cu o măsură aditivă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu $\widetilde{m}_1(A) < \infty$ pentru $A \in \mathcal{C}$.

23. Propoziție. *Fie* $1 \leqslant p < \infty$ și $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Fie* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *o măsură cu variație finită* $|m|$ *și absolut continuă în raport cu* μ.

Dacă A *este* μ*-măsurabilă și dacă* $\overline{m}_q(A) < \infty$, *atunci* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu, A) \subset \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m, A)$ *și*

$$\left|\int x \,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int |x| \,\mathrm{d}\,|m| \leqslant N_p(x)\,\overline{m}_q(A), \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu, A).$$

Dacă, în plus, $|m| = g\mu$, *atunci* $g\varphi_A \in \mathcal{L}^q(\mu)$ *și* $\overline{m}_q(A) = N_q(g\varphi_A, \mu)$.

Fie $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(A, \mu)$. Fie (x_n) un şir de cîmpuri $\mathcal{C}$-etajate din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ convergent către x μ-aproape peste tot şi în medie în spaţiul $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu, A)$. Deoarece m este absolut continuă în raport cu μ, (x_n) converge către x şi m-aproape peste tot. Pentru cîmpurile etajate $x_n - x_m$ avem

$$\int |x_n - x_m|\, \mathrm{d}\, |m| \leqslant \overline{m}_q(A)\, N_p(x_n - x_m, \mu)$$

deci (x_n) este un şir Cauchy în $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m)$. Urmează că $x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m, A)$. Pentru orice n avem

$$\left| \int x_n \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |x_n|\, \mathrm{d}\, |m| \leqslant \overline{m}_q(A)\, N_p(x_n)$$

şi trecînd la limită obţinem

$$\left| \int x \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |x|\, \mathrm{d}\, |m| \leqslant \overline{m}_q(A)\, N_p(x).$$

Să presupunem acum că $|m| = g\mu$. Pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ avem $\varphi\varphi_A \in \mathcal{L}^p(\mu, A)$, deci $\varphi\varphi_A \in \mathcal{L}^1(|m|, A)$. Deoarece $\varphi\varphi_A$ este $|m|$-integrabilă, $\varphi g \varphi_A$ este μ-integrabilă. Urmează că $g\varphi_A \in \mathcal{L}^q(\mu)$ şi

$$\int \varphi g \varphi_A \, \mathrm{d}\mu = \int \varphi\varphi_A \, \mathrm{d}\, |m| \leqslant \overline{m}_q(A)\, N_p(\varphi).$$

Luînd marginea superioară pentru $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ cu $N_p(\varphi) \leqslant 1$ obţinem

$$N_q(g\varphi_A, \mu) \leqslant \overline{m}_q(A).$$

Pe de altă parte, dacă $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte şi $N_p(\varphi) \leqslant 1$, atunci

$$\sum |m(A_i)|\, |\alpha_i| \leqslant \sum |m|(A_i)\, |\alpha_i| = \int |\varphi|\, d\, |m| =$$

$$= \int |\varphi|\, g\varphi_A \, \mathrm{d}\mu \leqslant N_p(\varphi)\; N_q\, (g\varphi_A) \leqslant N_q\, (g\varphi_A)$$

deci $\overline{m}_q(A) \leqslant N_q(g\varphi_A)$ şi deci

$$\overline{m}_q(A) = N_q(g\, \varphi_A).$$

24. Corolar. *Dacă m este o măsură cu $\overline{m}_q(A) < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{T}$, atunci $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m)$ şi*

$$\left| \int x \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |x|\, \mathrm{d}\, |m| \leqslant \overline{m}_q(A)\, N_p(x)$$

pentru orice $A \in \mathcal{T}$ şi orice $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu, A)$.

8. INTEGRAREA FUNCȚIILOR DIN $\mathcal{L}^p(\mu)$

Fie μ o măsură pozitivă pe $\mathcal{C}$ și $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o măsură aditivă. Fie $1 \leqslant q \leqslant \infty$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Să notăm $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

25. Propoziție. *Pentru orice mulțime* $A \subset T$ *avem*

$$\widetilde{m}_{R,X,q}(A) = \sup \left| \int \varphi \, \mathrm{d}m \right|, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{C}, A) \text{ cu } N_p(\varphi) \leqslant 1.$$

26. Corolar. *Pentru orice funcție* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ *avem*

$$\left| \int \varphi \, \mathrm{d}m \right| \leqslant N_p(\varphi)\, \widetilde{m}_{R,X,q}(A) \leqslant \infty .$$

27. Corolar. *Dacă* m *are variație finită* $|m|$, *atunci pentru orice funcție etajată* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ *avem*

$$\left| \int \varphi \, \mathrm{d}m \right| \leqslant \int |\varphi| \, \mathrm{d}\, |m| \leqslant N_p(\varphi)\, \widetilde{m}_{R,X,q}(A) \leqslant \infty .$$

Pentru a putea extinde integrala $\int \varphi \, \mathrm{d}m$ la funcțiile φ din $\mathcal{L}^p(\mu)$ vom nota cu $\mathcal{T}$ tribul generat de $\mathcal{C}$ și vom presupune verificată următoarea axiomă:

Pentru orice $A \in \mathcal{T}$ *și orice* $x \in \mathcal{A}$, *avem* $\| x \|_A < \infty$.

28. Propoziție. *Să presupunem că* $\widetilde{m}_{R,X,q}(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$.

1) *Dacă* (φ_n) *este un șir Cauchy în* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *format din funcții* $\mathcal{C}$*-etajate, nule în afara unei mulțimi* $A \in \mathcal{T}$, *atunci* $\left(\int \varphi_n \, \mathrm{d}m \right)$ *este un șir Cauchy în* $\mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$.

2) *Dacă* (φ_n) *și* (ψ_n) *sînt două șiruri Cauchy din* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *formate din funcții* $\mathcal{C}$*etajate și dacă converg* μ*-aproape peste tot către o aceeași limită, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to \infty} \int \psi_n \, \mathrm{d}m.$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 21.

Sîntem conduși la următoarea

29. Definiție. *Dacă* $\widetilde{m}_{R,X,q}(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$, *atunci pentru orice funcție* $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *se definește integrala* $\left(\int \varphi \, \mathrm{d}m \right)$ *prin egalitatea*

$$\int \varphi \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, \mathrm{d}m,$$

unde (φ_n) *este un șir Cauchy în* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *de funcții* $\mathcal{C}$*-etajate, convergent* μ*-aproape peste tot către* φ.

30. PROPOZIȚIE. *Dacă o funcție* $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *este nulă* μ*-aproape peste tot în afara unei mulțimi* $A \in \mathcal{T}$, *atunci* $\int \varphi \, \mathrm{d}m \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_A, F)$ *și avem*

$$\left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right|_A = \left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right|_B \leqslant N_p(\varphi)\, \widetilde{m}_{R,X,q}(A)$$

pentru $A \subset B$.

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 14.

31. PROPOZIȚIE. *Dacă* $\overline{m}_q(A) < \infty$ *pentru o mulțime* μ*-măsurabilă* A, *atunci* $\mathcal{L}^p(\mu, A) \subset \mathcal{L}^1(m, A)$ și

$$\left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \int |\varphi| \, \mathrm{d}|m| \leqslant N_p(\varphi)\, \overline{m}_q(A), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu, A).$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 23.

32. COROLAR. *Dacă* $\overline{m}_q(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$, *atunci* $\mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^1(m)$ *și*

$$\left|\int \varphi \, \mathrm{d}m\right| \leqslant \int |\varphi| \, \mathrm{d}|m| \leqslant \overline{m}_q(A)\, N_p(\varphi)$$

pentru orice $A \in \mathcal{T}$ *și orice* $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu, A)$.

CAPITOLUL IV

REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERAȚIILOR PE SPAȚII DE CÎMPURI p-INTEGRABILE

1. OPERAȚII LINIARE PE SPAȚIUL $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$

Fie μ o *măsură pozitivă* (finită) pe clanul $\mathcal{C}$. Fie $1 \leqslant p \leqslant \infty$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Să considerăm spațiul $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$. Pentru fiecare mulțime $A \subset T$ notăm cu $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu, A)$ spațiul cîmpurilor din $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ care se anulează în afara lui A. Spațiul $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(A, \mu)$ al cîmpurilor etajate din $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ este dens în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu, A)$.

Fie $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o operație liniară.

1. DEFINIȚIE. *Pentru orice mulțime* $A \subset T$ *notăm*

$$\| U_A \|_p = \sup | U(x) |$$

și

$$||| U_A |||_p = \sup \sum | U(\varphi_{A_i} x_i) |$$

marginea superioară fiind luată pentru toate cîmpurile etajate $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ *din* $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(A, \mu)$ *cu* A_i *disjuncte și* $N_p(x, \mu) \leqslant 1$.

Deoarece $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(A, \mu)$ este dens în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(A, \mu)$, $\| U_A \|_p$ este norma obișnuită a lui U_A pe spațiul $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(A, \mu)$. Condiția $\| U_A \|_p < \infty$ înseamnă că U_A este continuă pe $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(A, \mu)$. Dacă $A \subset B$, atunci $\| U_A \|_p \leqslant \| U_B \|_p$ și $||| U_A |||_p \leqslant ||| U_B |||_p$.

Vom scrie $||| U |||_p = ||| U_T |||_p$ și $\| U \|_p = \| U_T \|_p$. Avem

$$\| U_A \|_p \leqslant ||| U_A |||_p \leqslant \infty .$$

2. PROPOZIȚIE. *Dacă* $p = 1$ *sau dacă* $F = C$, *avem*

$$\| U_A \|_p = ||| U_A |||_p .$$

Trebuie demonstrată numai inegalitatea

$$||| U_A |||_p \leqslant \| U_A \|_p .$$

Dacă $\| U_A \|_p = \infty$, această inegalitate este adevărată. Vom presupune deci că $\| U_A \|_p < \infty$.

Să considerăm întîi cazul $p = 1$. Fie $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ un cîmp din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(A, \mu)$ cu A_i disjuncte și $N_1(x, \mu) \leqslant 1$. Deoarece $| x | = \sum \varphi_{A_i} | x_i |$, avem

$$N_1(x, \mu) = \int | x | \, d\mu = \sum \int \varphi_{A_i} | x_i | \, d\mu = \sum N_1(x_i, \mu)$$

deci

$$\sum | U(\varphi_{A_i} x_i) | \leqslant \sum \| U_A \|_1 N_1(\varphi_{A_i} x_i) = \| U_A \|_1 N_1(x, \mu) \leqslant \| U_A \|_1$$

deci

$$||| U_A |||_1 \leqslant \| U_A \|_1 .$$

Să considerăm acum cazul $F = C$ și $1 \leqslant p < \infty$. Fie $x = \sum \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(A, \mu)$ cu A_i disjuncte și $N_p(x, \mu) \leqslant 1$. Pentru fiecare i putem găsi un număr complex θ_i cu $| \theta_i | = 1$ și

$$| U(\varphi_{A_i} x_i) | = \theta_i U(\varphi_{A_i} x_i) = U(\varphi_{A_i} \theta_i x_i).$$

Atunci $| x | = | \sum \varphi_{A_i} \theta_i x_i |$ și

$$\sum | U(\varphi_{A_i} x_i) | = U(\sum \varphi_{A_i} \theta_i x_i) \leqslant \| U_A \|_p N_p(\sum \varphi_{A_i} \theta_i x_i) \leqslant \| U_A \|_p$$

deci

$$||| U_A |||_p \leqslant \| U_A \|_p .$$

Observaţie. Dacă $1 < p < \infty$ şi $F \neq C$ putem avea $\| U_A \|_p < ||| U_A |||_p$.

Exemplu. Să luăm $T = R$, μ măsura Lebesgue, $F = \mathcal{L}^p(\mu)$ şi $U : \mathcal{L}^p(\mu) \to F$ aplicaţia identică. Fie A un interval mărginit cu $\mu(A) > 1$. Avem evident $\| U_A \|_p = 1$. Vom arăta că $||| U_A |||_p = \infty$.

În adevăr, pentru fiecare număr natural n alegem n intervale disjuncte $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ cu $\mu(A_i) = \dfrac{1}{n}$ şi n numere $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ cu $| x_i | = 1$. Pentru funcţia etajată

$$x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} x_i$$

avem $N_p(x, \mu) = 1$ şi

$$\sum_{i=1}^{n} | U(\varphi_{A_i} x_i) | = \sum_{i=1}^{n} | \varphi_{A_i} x_i |_p = \sum_{i=1}^{n} [\mu(A_i)]^{\frac{1}{p}} | x_i | = n \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$$

deci $||| U_A |||_p \geqslant n \left(\dfrac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}}$ pentru orice n, deci $||| U_A |||_p = \infty$.

Spunem că o funcţională liniară $L : \mathcal{L}^p(\mu) \to R$ este *pozitivă*, dacă $L(\varphi) \geqslant 0$ pentru orice funcţie $\varphi \geqslant 0$ din $\mathcal{L}^p(\mu)$.

3. PROPOZIŢIE. *Dacă* $L : \mathcal{L}^p(\mu) \to R$ *este o funcţională liniară pozitivă, atunci* $\| L \|_p < \infty$.

În adevăr, să presupunem prin absurd că $\| L \|_p = \infty$. Putem găsi atunci un şir (φ_n) de funcţii pozitive din $\mathcal{L}^p(\mu)$ cu $N_p(\varphi_n, \mu) = 1$ şi $L(\varphi_n) > n^3$ pentru fiecare n. Atunci funcţia

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_n$$

aparţine spaţiului $\mathcal{L}^p(\mu)$ şi avem $L(\varphi) \geqslant \dfrac{1}{n^2} L(\varphi_n) \geqslant n$ pentru fiecare n, deci $L(\varphi) = \infty$ şi am ajuns la o contradicţie, deoarece L are numai valori finite. Aşadar L este continuă.

4. TEOREMĂ. *Există un izomorfism* $U \leftrightarrow m$ *între mulţimea aplicaţiilor liniare* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $\| U_A \|_p < \infty$ *pentru orice* $A \in \mathcal{T}$ *şi mulţimea măsurilor* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\widetilde{m}_q(A) < \infty$ *pentru orice* $A \in \mathcal{T}$, *dat de egalitatea*

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \quad \textit{pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Dacă U *şi* m *sînt în corespondenţă, atunci pentru orice mulţime* $A \in T$ *avem*

$$\| U_A \|_p = \widetilde{m}_q(A)$$

şi

$$||| U_A |||_p = \overline{m}_q(A).$$

Dacă $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ este o măsură cu $\widetilde{m}_q(A) < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$, atunci aplicația $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ definită prin egalitatea

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$$

este liniară. Pentru orice mulțime $A \subset T$ și pentru orice cîmp etajat $x = \sum \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte avem

$$| U(x) | = | \sum m(A_i) x_i |$$

și

$$\sum | U(\varphi_{A_i} x_i) | = \sum | m(A_i) x_i |$$

deci luînd marginea superioară pentru cîmpurile $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte și $N_p(x) \leqslant 1$, deducem

$$\| U_A \|_p = \widetilde{m}_q(A)$$

și

$$||| U_A |||_p = \overline{m}_q(A).$$

În particular, $\| U_A \|_p < \infty$ pentru orice $A \in \mathcal{T}$.

Reciproc, fie $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o aplicație liniară cu $\| U_A \|_p < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$. Pentru fiecare mulțime $A \in \mathcal{C}$ aplicația $m(A) : \mathcal{A} \to F$ definită prin egalitatea

$$m(A) x = U(\varphi_A x), \text{ pentru } x \in \mathcal{A}$$

este liniară și continuă :

$$| m(A) x | = | U(\varphi_A x) | \leqslant \| U_A \|_p N_p(\varphi_A x) \leqslant \| U_A \|_p \| x \|_A N_p(\varphi_A)$$

deci $m(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ și

$$| m(A) | \leqslant \| U_A \|_p N_p(\varphi_A).$$

Aplicația $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ este aditivă și pentru fiecare cîmp $\mathcal{C}$-etajat $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ avem

$$U(x) = \sum U(\varphi_{A_i} x_i) = \sum m(A_i) x_i = \int x \, \mathrm{d}m.$$

Fie $A \subset T$. Dacă în egalitatea

$$| U(\sum \varphi_{A_i} x_i) | = | \sum m(A_i) x_i |$$

luăm marginea superioară pentru toate cîmpurile $\mathcal{C}$-etajate $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu $N_p(x) \leqslant 1$ deducem că

$$\| U_A \|_p = \widetilde{m}_q(A).$$

În particular, pentru $A \in \mathcal{T}$ deducem $\widetilde{m}_q(A) < \infty$.

Fie acum $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și fie $A \in \mathcal{T}$ astfel încît x se anulează în afara lui A. Fie (x_n) un șir de cîmpuri $\mathcal{C}$-etajate nule în afara lui A și convergent către x, μ-aproape peste tot și în $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$. Atunci $U(x_n) \to U(x)$ și $\int x_n \, \mathrm{d}m \to \int x \mathrm{d}m$. Deoarece pentru fiecare n avem

$$U(x_n) = \int x_n \, \mathrm{d}m$$

deducem că

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m.$$

Se verifică ușor că aplicația $m \to U$ este liniară și biunivocă.

5. TEOREMĂ. *Egalitatea*

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \quad \textit{pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$$

stabilește un izomorfism $U \leftrightarrow m$ *între mulțimea aplicațiilor liniare* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $|||U_A|||_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *și mulțimea măsurilor* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\overline{m}_q(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$.

Dacă U *și* m *sînt în corespondență, atunci*

$$\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m)$$

și pentru orice mulțime A *avem*

$$|||U_A|||_p = \overline{m}_q(A).$$

Dacă μ *este localizabilă, atunci*

$$|m| = g\mu$$

și pentru orice mulțime μ*-măsurabilă* $A \subset T$ *cu* $\overline{m}_q(A) < \infty$ *avem* $\varphi_A g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ *și*

$$|||U_A||| = N_q(g\varphi_A, \mu).$$

Se folosește teorema precedentă și propoziția 3, cap. III.

6. COROLAR. *Egalitatea*

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \quad \textit{pentru } x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$$

stabilește un izomorfism $U \leftrightarrow m$ *între mulțimea aplicațiilor liniare* $U : \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $\|U\|_1 < \infty$ *și mulțimea măsurilor* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu variație finită* $|m|$ *astel încît* $|m| \leqslant \alpha\mu$ *pentru un anumit* $\alpha > 0$.

Dacă μ *este localizabilă, atunci*

$$| m | = g \mu$$

și

$$\| U \|_1 = N_\infty (g, \mu).$$

2. OPERAȚII LINIARE PE SPAȚIUL $\mathcal{L}^p$

Fie μ o măsură pozitivă, $1 \leqslant p < \infty$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \cdot$

Vom presupune că familia fundamentală $\mathcal{A}$ este formată din cîmpuri mărginite pe orice mulțime A din tribul $\mathcal{T}$ generat de $\mathcal{C}$.

Fie $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o operație liniară.

7. **Definiție.** *Pentru fiecare mulțime* $A \subset T$ *punem*

$$\| U'_A \|_p = \sup | U(\varphi) |$$

și

$$||| U'_A |||_p = \sup \sum | U(\varphi_{A_i} \alpha_i) |,$$

marginea superioară fiind luată pentru toate funcțiile etajate $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i$ *din* $\mathcal{S}(A, \mu)$ *cu* A_i *disjuncte și* $N_p(\varphi) \leqslant 1$.

Avem

$$\| U'_A \|_p \leqslant ||| U'_A |||_p \leqslant \infty.$$

8. **Teoremă.** *Există un izomorfism* $U' \longleftrightarrow m$ *între mulțimea aplicațiilor liniare* $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\| U'_A \|_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *și mulțimea măsurilor* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\widetilde{m}_{R, X, q}(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$, *dat de egalitatea*

$$U'(\varphi) = \int \varphi \, dm, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Dacă U' *și* m *sînt în corespondență, pentru orice mulțime* $A \in \mathcal{T}$ *avem*

$$\| U'_A \|_p = \widetilde{m}_{R, X, q}(A)$$

și

$$||| U'_A |||_p = \overline{m}_q(A).$$

Demonstrația este aceeași ca și a teoremei 4.

9. **Teoremă.** *Egalitatea*

$$U'(\varphi) = \int \varphi \, dm, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$$

stabilește un izomorfism $U' \longleftrightarrow m$ *între mulțimea aplicațiilor liniare* $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $||| U'_A |||_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *și mulțimea măsurilor* $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\overline{m}_q(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$.

Dacă U' *și* m *sînt în corespondență, atunci*

$$\mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^1(m)$$

și pentru orice $A \subset T$ *avem*

$$|||U'_A|||_p = \overline{m}_q(A).$$

Dacă μ *este localizabilă, atunci*

$$|m| = g\mu$$

și pentru orice mulțime μ*-măsurabilă* A *cu* $\overline{m}_q(A) < \infty$ *avem* $\varphi_A g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ *și*

$$|||U'_A|||_p = N_q(g\varphi_A, \mu).$$

10. TEOREMĂ. *Pentru fiecare aplicație liniară* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $\|U_A\|_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *există o aplicație liniară* $U' : \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\|U'_A\|_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *și numai una astfel încît să avem*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu) \text{ și } x \in \mathcal{A}.$$

Dacă U *și* U' *sînt în corespondență, atunci pentru orice mulțime* $A \in \mathcal{T}$ *avem*

$$\|U'_A\|_p \leqslant \|U_A\|_p$$

și

$$|||U'_A|||_p = |||U_A|||_p$$

și există o măsură $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\widetilde{m}_q(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *astfel încît să avem*

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$$

și

$$U'(\varphi) = \int \varphi \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Fie $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ o operație liniară cu $\|U_A\|_p < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$. Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ măsura cu $\widetilde{m}_q(A) < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$ astfel încît

$$U(x) = \int x \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Fie acum $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ aplicația liniară definită prin egalitatea

$$U'(\varphi) = \int \varphi \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Pentru $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ și $x \in \mathcal{A}$ avem

$$U(\varphi x) = \int \varphi x \, \mathrm{d}m = \int \varphi \, \mathrm{d}m \cdot x = U'(\varphi)x.$$

Unicitatea operației U' este evidentă.

Pentru o funcție $\mathcal{C}$-etajată $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i$ din $\mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte și $N_p(\varphi) \leqslant 1$ și pentru orice $x \in A$ cu $\|x\|_{A_i} \leqslant 1$, avem

$$N_p(\varphi x) \leqslant \|x\|_{\cup A_i} N_p(\varphi) \leqslant 1$$

și

$$|\sum U'(\varphi_{A_i} \alpha_i)| = \sup_{\|x\|_{\cup A_i} \leqslant 1} |\sum U'(\varphi_{A_i}) x| =$$

$$= \sup |\sum U(\varphi_{A_i} \alpha_i x)| \leqslant \| U_A \|_p$$

deci

$$\| U'_A \|_p \leqslant \| U_A \|_p .$$

Pe de altă parte

$$\sum |U'(\varphi_{A_i} \alpha_i)| = \sum |m(A_i)| \, |\alpha_i|$$

deci luînd marginea superioară pentru $\varphi = \sum \varphi_{A_i} \alpha_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte și $N_p(\varphi) \leqslant 1$ obținem

$$||| U'_A |||_p = \overline{m}_q(A) = ||| U_A |||_p .$$

[*Observație*. Există operații liniare $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu $\| U'_A \|_p < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$ care nu corespunde nici unei operații $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$.

11. TEOREMĂ. *Egalitatea*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi) x, \quad \textit{pentru} \quad \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \textit{și} \quad x \in \mathcal{A}$$

stabilește un izomorfism $U \leftrightarrow U'$ [*între mulțimea aplicațiilor liniare* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *cu* $||| U_A |||_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *și mulțimea aplicațiilor liniare* $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(A, F)$ *cu* $||| U'_A |||_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$.

Dacă U *și* U' *sînt în corespondență, atunci*

$$||| U_A |||_p = ||| U'_A |||_p, \quad \textit{pentru orice } A \subset T$$

și există o măsură $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\overline{m}_q(A) < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *astfel încît*

$$U(x) = \int x dm, \quad \textit{pentru} \quad x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$$

și

$$U'(\varphi) = \int \varphi \, dm, \quad \textit{pentru} \quad \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Fie $U' : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o aplicație liniară cu $||| U'_A |||_p < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$. Dacă punem $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ avem $X = \mathcal{L}(R, X)$. Prin teorema

9 operației U' îi corespunde o măsură $m : \mathcal{C} \to X$ cu $\overline{m}_q(A) = |||U'_A|||_p$ pentru $A \subset T$ deci cu $\overline{m}_q(A) < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$ și avem

$$U'(\varphi) = \int \varphi \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Măsurii m îi corespunde o aplicație liniară $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ cu $|||U_A|||_p = \overline{m}_q(A)$ pentru $A \subset T$ și

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Avem apoi

$$U(\varphi x) = \int \varphi x \, \mathrm{d}m = \int \varphi \, \mathrm{d}m \cdot x = U'(\varphi)\, x$$

pentru $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ și $x \in \mathcal{A}$.

Corespondența $U' \to U$ este evident liniară și biunivocă.

3. TEOREMA GENERALIZATĂ LEBESGUE-NIKODYM

Fie $Z \subset F'$ un spațiu normant, adică

$$|y| = \sup_{z \in Z} \frac{|< y, z >|}{|z|}, \text{ pentru orice } y \in F.$$

Atunci F se poate scufunda izometric în dualul Z' al lui Z.

Spunem că o măsură μ pe $\mathcal{C}$ este *localizabilă**), dacă există o familie $\mathcal{D}$ de părți disjuncte μ-integrabile cu reuniunea egală cu T, cu proprietatea că pentru fiecare mulțime $A \in \mathcal{C}$ există o mulțime μ-neglijabilă $N \subset A$ astfel încît mulțimea $A - N$ este intersectată de o mulțime cel mult numărabilă de părți din $\mathcal{D}$.

Măsurile σ-finite, în particular măsurile mărginite, sînt localizabile.

Măsurile boreliene regulate pe un spațiu local compact sînt de asemenea localizabile.

Teorema Lebesgue-Nikodym rămîne valabilă pentru măsuri pozitive localizabile.

Vom presupune că teorema Lebesgue-Nikodym rămîne adevărată în următoarea formă generală.

12. TEOREMĂ (Lebesgue-Nikodym). *Fie μ o măsură scalară localizabilă și $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o măsură cu variație finită $|m|$ și absolut continuă în raport cu μ. Există atunci o funcție $t \to V_m(t) \in \mathcal{L}(E(t), Z')$ definită pe T cu următoarele proprietăți :*

1) *Funcția $t \to |V_m(t)|$ este local μ-integrabilă și*

$$\int \varphi \mathrm{d}\, |m| = \int |V_m|\, \varphi \, \mathrm{d}\, |\mu|, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

---

*) Segol [1] folosește denumirea de „măsură cu proprietatea sumei directe", denumirea de „măsură localizabilă" fiind folosită pentru altă noțiune.

2) *Pentru orice* $x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ *și orice* $z \in Z$, *funcția scalară* $< V_m x, z >$ *este local* μ*-integrabilă și*

$$< \int x \, \mathrm{d}m, \, z > = \int < V_m(t) \, x(t), \, z > \mathrm{d}\mu(t).$$

3) *Dacă* $|m| = |\mu|$, *atunci se poate alege* $|V_m(t)| \equiv 1$.

Sub această formă, teorema este adevărată în următoarele cazuri :

a) $F(t) = E$ pentru orice $t \in T$;

b) T este un spațiu local compact, μ este regulată, $\mathcal{A}$ este o familie fundamentală de cîmpuri continue care verifică axioma lui Godement : există o mulțime numărabilă $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ astfel încît pentru fiecare $t \in T$, mulțimea $\{x(t) \, ; \, x \in \mathcal{A}_0\}$ este densă în $F(t)$.

c) T este un spațiu local compact, μ este regulată, spațiul $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ are proprietatea de ridicare tare, iar $\mathcal{A}$ este o familie fundamentală de cîmpuri continue (fără vreo condiție de numărabilitate).

4. REPREZENTAREA INTEGRALĂ ÎN RAPORT CU O MĂSURĂ SCALARĂ A OPERAȚIILOR PE $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$

Fie $Z \subset F'$ un spațiu normant, $1 \leqslant p < \infty$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

13. TEOREMĂ. *Fie* μ *o măsură scalară localizabilă cu variație finită pe* $\mathcal{C}$ *și* $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to F$ *o aplicație liniară. Dacă* $|||U_A|||_p < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{T}$ *și dacă are loc teorema Lebesgue-Nikodym, atunci există o funcție* $t \to G(t) \in \mathcal{L}(E(t), Z')$ *definită pe* T, *cu următoarele proprietăți :*

1) *Pentru orice mulțime* μ*-măsurabilă* $A \subset T$ *cu* $|||U_A|||_p < \infty$ *avem* $|G| \, \varphi_A \in \mathcal{L}^q(\mu)$ *și*

$$N_q(G \, \varphi_A, \, \mu) = |||U_A|||_p .$$

2) *Pentru orice* $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ *și orice* $z \in Z$, *funcția scalară* $< G x, z >$ *este* μ*-integrabilă și avem*

$$< U(x), \, z > = \int < G(t) \, x(t), \, z > \mathrm{d}\mu(t).$$

Fie $m : \mathcal{C} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ măsura cu $\overline{m}_q(A) < \infty$ pentru $A \in \mathcal{T}$ corespunzătoare lui U prin teorema 5. Avem deci

$$\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m)$$

și

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Măsura m are variație finită $|m|$, absolut continuă în raport cu μ, deci după teorema lui Lebesgue clasică, $|m| = g\,\mu$ și pentru orice mulțime μ-măsurabilă A avem $g\,\varphi\,A \in \mathcal{L}^q(\mu)$ și

$$N_q(g\varphi_A, \mu) = |||U_A|||_p.$$

Fie acum funcția $t \to V_m(t) \in \mathcal{L}(E(t), Z')$ corespunzătoare măsurilor m și μ prin teorema generalizată Lebesgue-Nikodym. Avem $|m| = |V_m|\;|\mu|$, deci $|V_m(t)| = g(t)$, μ-aproape peste tot, deci dacă A este μ-măsurabilă și $|||U_A|||_p < \infty$, avem $|V_m|\;\varphi_A \in \mathcal{L}^q$ și

$$N_q(V_m\,\varphi_A, \mu) = N_q(g, \mu) = |||U_A|||_p.$$

Dacă luăm $G = V_m$, teorema este demonstrată.

Observații. 1°. Funcția G depinde de spațiul Z.

2°. Funcția V_m poate să nu aibă valori în $\mathcal{L}(E(t), F)$ ci doar în $\mathcal{L}(E(t), Z')$.

3°. Dacă familia $\mathcal{A}$ verifică axioma lui Godement și dacă există o mulțime numărabilă normantă $S \subset Z$, atunci funcția G este unic determinată μ-aproape peste tot.

4°. Dacă Z' este de tip numărabil, atunci pentru orice cîmp $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ funcția $G\,x$ este μ-integrabilă și avem

$$U(x) = \int G(t)\,x(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Teorema următoare este într-un anumit sens reciprocă celei precedente.

14. TEOREMĂ. *Fie* μ *o măsură scalară pe* $\mathcal{C}$ *și* $t \to G(t) \in \mathcal{L}(E(t), F)$ *o funcție astfel încît* $|G|\;\varphi_A \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *pentru orice* $A \in \mathcal{T}$ *și astfel încît funcția* $< Gx, z >$ *să fie* μ*-măsurabilă pentru orice* $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ *și* $z \in Z$.

Există atunci o aplicație liniară $U : \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \to Z'$ *astfel încît*

$$< U(x), z > = \int < G(t)\,x(t), z > \mathrm{d}\mu(t), \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu) \text{ și } z \in Z$$

și

$$|||U_A|||_p \leqslant N_q(G\,\varphi_A, (\mu)$$

pentru orice mulțime μ*-măsurabilă* A *cu* $|G|\;\varphi_A \in \mathcal{L}^q(\mu)$.

Observăm întîi că pentru orice $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și orice $z \in Z$, funcția $< G\,x, z >$ este μ-integrabilă. În adevăr, fie $A \in \mathcal{T}$ o mulțime în afara căreia se anulează x. Atunci $|G|\;\varphi_A \in \mathcal{L}^q(\mu)$ și $|x| \in \mathcal{L}^q(\mu)$, deci $|G|\;|x| = |G|\;\varphi_A\;|x| \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Pe de altă parte $< Gx, z >$ este μ-măsurabilă și $|< Gx, z >| \leqslant |z|\;|G|\;|x|$, deci $< Gx, z >$ este μ-integrabilă. Să punem

$$U_z(x) = \int < G\,x, z > \mathrm{d}\mu.$$

Aplicația $U(x) : z \to U_z(x)$ este o funcțională liniară continuă pe Z :

$$| U_z(x) | \leqslant | z | \int | G | \, | x | \, \mathrm{d} \, | \mu |$$

deci $U(x) \in Z'$ și

$$| U(x) | \leqslant \int | G | \, | x | \, \mathrm{d} \, |\mu| \leqslant N_p(x) N_q(G\varphi_A).$$

Aplicația $U : x \to U(x)$ a lui $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ în Z' este liniară și

$$< U(x), z > = U_z(x) = \int < G x, z > \mathrm{d}\mu$$

pentru orice $x \in \mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}(\mu)$ și $z \in Z$.

Fie acum A o mulțime μ-măsurabilă astfel încît $| G | \varphi_A \in \mathcal{L}^q$ $(\mu$ și fie $x = \sum \varphi_{A_i} x_i \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, A)$ cu A_i disjuncte și $N_p(x) \leqslant 1$. Avem atunci

$$\sum | U(\varphi_{A_i} x_i) | \leqslant \sum \int | G | \, \varphi_{A_i} \, |x_i| \, \mathrm{d} \, | \mu | =$$

$$= \int | G | \, \varphi_A \sum \varphi_{A_i} \, | x_i | \, \mathrm{d} \, | \mu | \leqslant N_q(G\varphi_A) N_p(| x |) \leqslant N_q(G \varphi_A)$$

deci

$$||| U_A |||_p \leqslant N_q(G \varphi_A).$$

Observații. Avem egalitatea

$$||| U_A |||_p = N_q(G \varphi_A, \mu)$$

pentru orice mulțime μ-măsurabilă A cu $| G | \varphi_A \in \mathcal{L}^q(\mu)$ în fiecare din cazurile următoare :

α) există o ridicare ρ a lui $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ și $\rho[G] = G$;

β) $\mathcal{A}$ verifică axioma lui Godement și există o mulțime numărabilă normantă $S \subset Z$;

γ) $\mathcal{A}$ verifică axioma lui Godement și funcția $t \to G(t)\, x(t)$ este μ-măsurabilă pentru orice $x \in A$;

δ) Funcția G este μ-măsurabilă în raport cu o familie de cîmpuri de operații convenabilă.

CAPITOLUL V

REPREZENTAREA INTEGRALĂ A OPERAȚIILOR PE SPAȚII DE CÎMPURI DE VECTORI CONTINUE

1. CÎMPURI DE VECTORI CONTINUE

În acest paragraf T este un spațiu local compact iar clanul $\mathcal{C}$ va fi înlocuit cu semitribul $\mathcal{B}$ al părților boreliene relativ compacte. Vom presupune că familia fundamentală $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ verifică în loc de axioma 1) din § 2, Cap. I, axioma următoare

1′) *Pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{A}$, *funcția* $|x|$ *este continuă.*

Este ușor de verificat că 1′) implică 1), deci toate rezultatele precedente rămîn valabile pentru o familie fundamentală care verifică axioma 1′). O asemenea familie fundamentală va fi numită *familie fundamentală de cîmpuri de vectori continue.*

1. Definiție. *Spunem că un cîmp* $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *este continuu într-un punct* $t_0 \in T$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există o vecinătate* V *a lui* t_0 *și un cîmp* $y \in \mathcal{A}$ *astfel încît să avem*

$$| x(t) - y(t) | < \varepsilon, \text{ pentru orice } t \in V.$$

Rezultă că orice cîmp din $\mathcal{A}$ este continuu. Mulțimea cîmpurilor continue este un spațiu vectorial. Dacă $x \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ este continuu iar φ este o funcție continuă, atunci φx este un cîmp continuu.

Vom nota cu $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ spațiul cîmpurilor continue cu suport compact. Pentru fiecare mulțime $A \subset T$ vom nota cu $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T, A)$ mulțimea cîmpurilor din $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ nule în afara lui A.

Pe spațiile $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T, A)$ vom considera topologia convergenței uniforme definită de norma

$$\| x \| = \sup_{t \in T} | x(t) |$$

2. Propoziție. *Pentru orice cîmp* $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ *și pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există o familie finită* $(\varphi_i)_{i \in I}$ *de funcții din* $\mathcal{K}_+(T)$, *o familie* $(x_i)_{i \in I}$ *de cîmpuri din* $\mathcal{A}$ *și o familie* $(V_i)_{i \in I}$ *de mulțimi deschise care acoperă suportul lui* x, *avînd următoarele proprietăți :*

1) $\sum \varphi_i(t) = 1$ *dacă* $x(t) \neq 0$ și $\sum \varphi_i(t) \leqslant 1$ *pentru* $t \in T$.

2) $\| x_i \|_{V_i} \leqslant \| x \| + \varepsilon$.

3) $\| x - \sum \varphi_i x_i \| \leqslant \varepsilon$.

Fie K suportul lui x și fie $t_0 \in K$. Deoarece $\{ x(t_0) ;\ x \in \mathcal{A} \}$ este densă în $E(t_0)$, există $x_0 \in \mathcal{A}$ cu

$$| x(t_0) - x_0(t_0) | < \varepsilon.$$

Deoarece $x - x_0$ este continuu există o vecinătate deschisă V_0 a lui t_0 cu

$$| x(t) - x_0(t) | < \varepsilon, \text{ pentru } t \in V_0.$$

Deoarece K este compact există o familie finită $(V_i)_{i \in I}$ de mulțimi deschise din $\mathcal{B}$ care acoperă pe K și o familie $(x_i)_{i \in I}$ de cîmpuri din $\mathcal{A}$ astfel ca pentru fiecare i să avem

$$| x(t) - x_i(t) | < \varepsilon, \text{ pentru } t \in V_i.$$

Fie $(\varphi_i)_{i \in I}$ o partiție continuă a unității subordonată acoperirii (V_i). Avem $\varphi_i \in \mathcal{K}_+(T, V_i)$,

$$\sum \varphi_i(t) = 1, \text{ pentru } t \in K \text{ și } \sum \varphi_i(t) \leqslant 1 \text{ pentru } t \in T.$$

Atunci

$$| x(t) - \sum \varphi_i (t)\, x_i (t) | < \varepsilon, \text{ pentru orice } t \in T$$

și

$$\| \varphi_i\, x_i \| \leqslant \| x_i \|_{V_i} \leqslant \| x \| + \varepsilon, \text{ pentru orice } i \in I.$$

3. **Corolar.** *Fie K o mulțime compactă și $G \supset K$ o mulțime deschisă. Orice cîmp $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T, K)$ se poate aproxima uniform cu cîmpuri de forma $\sum \varphi_i\, x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T, G)$ și $x_i \in \mathcal{A}$.*

4. **Propoziție.** *Orice cîmp continuu cu suport compact este total $\mathcal{B}$-măsurabil :*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(B).$$

Fie $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ și fie $\varepsilon > 0$. Fie atunci familia finită $(V_i)_{i \in I}$ de mulțimi deschise care acoperă pe K, o familie de cîmpuri (x_i) din $\mathcal{A}$ și familia de funcții (φ_i) din $\mathcal{K}_+(T)$ corespunzînd lui x și ε prin propoziția 2.

Să notăm $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_1 = V_1$ și $A_k = V_k - \bigcup_{i<k} A_i$ pentru $2 \leqslant k \leqslant n$. Atunci mulțimile A_i sînt disjuncte, aparțin lui $\mathcal{B}$, $A_i \subset V_i$ și $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Avem atunci

$$| x(t) - \sum \varphi_{A_i}(t)\, x_i (t) < \varepsilon, \text{ pentru orice } t \in T,$$

deci x se poate aproxima uniform prin cîmpuri $\mathcal{B}$-etajate.

2. MĂSURI REGULATE

Fie $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o măsură *aditivă*.

5. **Definiție.** *Spunem că m este regulată dacă pentru orice mulțime $A \in \mathcal{B}$ și orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă $K \subset A$ și o mulțime deschisă $G \supset A$ astfel încît oricare ar fi $A' \in \mathcal{B}$ cu $K \subset A' \subset G$ să avem*

$$| m(A) - m(A') | < \varepsilon.$$

Măsurile aditive sînt caracterizate de propoziția următoare.

6. **Propoziție.** *Măsura aditivă m este regulată dacă și numai dacă pentru orice mulțime $A \in \mathcal{B}$ și orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime compactă $K \subset A$ și o mulțime deschisă $G \supset A$ astfel încît pentru orice $B \in \mathcal{B}$ cu $B \subset G - K$ să avem*

$$| m(B) | < \varepsilon.$$

Variația și semivariația măsurilor regulate pot fi definite numai cu ajutorul mulțimilor compacte.

7. **Propoziție.** *Dacă m este regulată, atunci pentru orice mulțime $A \subset T$ avem*

$$\overline{m}(A) = \sup \sum | m(K_i) | \; (\textit{sume finite}),$$

unde K_i sînt mulţimi compacte disjuncte conţinute în A,

$$\widetilde{m}(A) = \sup |\sum m(K_i)\, x_i|$$

şi

$$\overline{m}(A) = \sup \sum |m(K_i)\, x_i|,$$

unde $x_i \in \mathcal{A}$ şi K_i sînt mulţimi compacte (disjuncte respectiv arbitrare) cu $\sum \varphi_{K_i} |x_i| \leqslant \varphi_A$.

Fie $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie de mulţimi din $\mathcal{B}$ şi $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie de cîmpuri din $\mathcal{A}$ astfel încît $\sum \varphi_{A_i} \leqslant \varphi_A$ respectiv $\sum \varphi_{A_i} |x_i| \leqslant \varphi_A$ şi fie $\varepsilon > 0$. Deoarece m este regulată, pentru fiecare i există o mulţime compactă $K_i \subset A_i$ astfel încît

$$|m(A_i) - m(K_i)| < \frac{\varepsilon}{n}$$

respectiv

$$|m(A_i) - m(K_i)|\, \|x_i\|_{A_i} < \frac{\varepsilon}{n}$$

deci

$$|m(A_i)\, x_i - m(K_i)\, x_i| < \frac{\varepsilon}{n}\cdot$$

Avem atunci

$$\sum \varphi_{K_i} \leqslant \sum \varphi_{A_i} \leqslant \varphi_A$$

respectiv

$$\sum \varphi_{K_i} |x_i| \leqslant \sum \varphi_{A_i} |x_i| \leqslant \varphi_A$$

şi

$$\sum |m(A_i)| \leqslant \sum |m(K_i)| + \varepsilon$$

respectiv

$$\sum |m(A_i)\, x_i| \leqslant \sum |m(K_i)\, x_i| + \varepsilon$$

de unde rezultă egalităţile referitoare la variaţia $\overline{m}$.

Avem de asemenea

$$|\sum m(A_i)\, x_i - \sum m(K_i)\, x_i| \leqslant \sum |m(A_i)\, x_i - \sum m(K_i)\, x_i| < \varepsilon$$

deci

$$|\sum m(A_i)\, x_i| \leqslant |\sum m(K_i)\, x_i| + \varepsilon$$

de unde rezultă egalitatea referitoare la semivariaţia $\widetilde{m}$.

8. PROPOZIŢIE. *Dacă m este regulată, atunci pentru orice mulţime deschisă $G \subset T$ avem*

$$\overline{m}(G) = \sup \sum |m(G_i)|,$$

unde G_i sînt mulţimi deschise disjuncte din $\mathcal{B}$ conţinute în A şi

$$\overline{m}(G) = \sup \sum |m(G_i)\, x_i|,$$

$$\widetilde{m}(G) = \sup |\sum m(G_i)\, x_i|,$$

unde $x_i \in \mathcal{A}$ *și* G_i *sînt mulțimi deschise (disjuncte respectiv arbitrare) din* $\mathcal{B}$ *cu* $\sum \varphi_{G_i} \mid x_i \mid \leqslant \varphi_G$.

Fie $(K_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie de mulțimi compacte disjuncte conținute în G și $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie din $\mathcal{A}$ cu $\sum \varphi_{K_i} \leqslant \varphi_G$ și $\| y_i \|_{K_i} \leqslant 1$ și fie $\varepsilon > 0$. Deoarece m este regulată, pentru fiecare i există o mulțime deschisă $G_i \in \mathcal{B}$ cu $K_i \subset G_i \subset G$ și

$$| m(G_i) - m(K_i) | < \frac{\varepsilon}{n(1+\varepsilon)} \cdot$$

Deoarece K_i sînt disjuncte, putem alege mulțimile G_i de asemenea disjuncte. Avem atunci $\sum \varphi_{G_i} \leqslant \varphi_G$ și

$$\sum | m(K_i) | \leqslant \sum | m(G_i) | + \varepsilon,$$

de unde rezultă prima egalitate pentru $\overline{m}(G)$.

Pentru fiecare i există $x_i \in \mathcal{A}$ cu $\varphi_{K_i} x_i = \varphi_{K_i} y_i$ și $\| x_i \|_{G_i} \leqslant \| y_i \|_{K_i} + \varepsilon \leqslant 1 + \varepsilon$. Atunci $m(K_i) x_i = m(K_i) y_i$, deci

$$| m(G_i) x_i - m(K_i) y_i | = | m(G_i) x_i - m(K_i) x_i | \leqslant$$

$$\leqslant | m(G_i) - m(K_i) | \, \| x_i \|_{G_i} < \frac{\varepsilon}{n} \cdot$$

Urmează că

$$| m(K_i) y_i | \leqslant \sum | m(G_i) x_i | + \frac{\varepsilon}{n}$$

deci

$$\sum | m(G_i) y_i | \leqslant \sum | m(G_i) x_i | + \varepsilon \leqslant \sup \sum | m(G_i) x_i | (1+\varepsilon) + \varepsilon$$

pentru $\sum \varphi_{G_i} | x_i | \leqslant \varphi_G$ (cu G_i disjuncte sau arbitrare), de unde rezultă a doua egalitate pentru $\overline{m}(G)$.

Avem apoi

$$| \sum m(G_i) x_i - \sum m(K_i) y_i | \leqslant \sum | m(G_i) x_i - m(K_i) x_i | \leqslant \varepsilon$$

deci

$$| \sum m(K_i) y_i | \leqslant | \sum m(G_i) x_i | \leqslant \sup | \sum m(G_i) x_i | (1+\varepsilon) + \varepsilon$$

pentru $\sum \varphi_{G_i} | x_i | \leqslant \varphi_G$ de unde rezultă egalitatea pentru $\widetilde{m}(G)$.

9. PROPOZIȚIE. *O măsură aditivă cu variație finită este regulată dacă și numai dacă variația sa este regulată.*

Demonstrația este dată de N. Dinculeanu [4].

10. **Propoziție.** *Fie* $m, n : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *două măsuri cu variație finită. Avem* $m = n$ *dacă și numai dacă*

$$\int x \,\mathrm{d}m = \int x \,\mathrm{d}n, \text{ pentru orice } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Demonstrația este dată de N. Dinculeanu [4].

3. OPERAȚII LINIARE PE $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$

Fie $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ o operație liniară.

11. **Definiție.** *Pentru fiecare funcție* $f \geqslant 0$ *punem*

$$\| U_f \| = \sup | U(x) |, \text{ pentru } | x | \leqslant f, \ x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T),$$

și

$$||| U_f ||| = \sup \sum | U(x_i) |, \text{ pentru } \sum | x_i | \leqslant f, \ x_i \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Dacă $f = \varphi_A$ vom scrie

$$\| U_A \| = \| U_{\varphi_A} \| \text{ și } ||| U_A ||| = ||| U_{\varphi_A} |||.$$

Din definiția 11 rezultă imediat următoarele proprietăți :

1) $| U(x) | \leqslant \| U_A \| \ \| x \|$ dacă $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T, A)$;

2) $\sum | U(x_i) | \leqslant ||| U_A ||| \ \| \sum | x_i | \|$, pentru $\sum | x_i | \leqslant \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T, A)$;

3) $\| U_f \| \leqslant \| U_g \|$ și $||| U_f ||| \leqslant ||| U_g |||$ dacă $f \leqslant g$;

4) $\| U_f \| \leqslant ||| U_f ||| \leqslant \infty$.

12. **Propoziție.** *Dacă* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to C$ *este o funcțională liniară, atunci*

$$\| U_f \| = ||| U_f |||, \text{ pentru orice } f \geqslant 0.$$

Demonstrația este aceeași ca a propoziției 2, § 2.

Fie acum $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ o operație liniară.

13. **Definiție.** *Pentru fiecare funcție* $f \geqslant 0$ *punem*

$$\| U'_f \| = \sup | U(\varphi) |, \text{ pentru } | \varphi | \leqslant f, \ \varphi \in \mathcal{K}(T),$$

și

$$||| U'_f ||| = \sup \sum | U(\varphi_i) |, \text{ pentru } \sum | \varphi_i | \leqslant f, \ \varphi_i \in \mathcal{K}(T).$$

Și în acest caz, pentru fiecare mulțime $A \subset T$ vom scrie

$$\| U'_A \| = \| U'_{\varphi_A} \| \text{ și } ||| U'_A ||| = ||| U'_{\varphi_A} |||.$$

Avem

$$\| U'(\varphi,\| \leqslant \| U'_A \| \cdot \| \varphi \| \text{ dacă } \varphi \in \mathcal{K}(T, A)$$

şi

$$\sum | U'(\varphi_i) | \leqslant ||| U'_A ||| \; \| \sum | \varphi_i | \, \| \text{ dacă } \sum | \varphi_i | \in \mathcal{K}(T, A).$$

Avem de asemenea

$$\| U'_f \| \leqslant ||| U'_f ||| \leqslant \infty .$$

Studiul operaţiilor U pe $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ poate fi redus la cel al operaţiilor U' pe $\mathcal{K}(T)$.

14. TEOREMĂ. *Pentru orice operaţie liniară* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *cu* $\| U_A \| < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{B}$ *există o operaţie liniară* $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu* $\| U'_A \| < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{B}$ *şi numai una, astfel încît să avem*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)\, x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ şi } x \in \mathcal{A}.$$

Corespondenţa $U \to U'$ *este liniară şi biunivocă şi pentru orice funcţie* $f \geqslant 0$ *avem*

$$\| U'_f \| \leqslant \| U_f \| \leqslant \infty$$

şi

$$||| U'_f ||| = ||| U_f ||| \leqslant \infty .$$

Pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ şi orice cîmp $x \in \mathcal{A}$ să punem

$$U'(\varphi)\, x = U(\varphi x).$$

Pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ fixată, aplicaţia $U'(\varphi) : x \to U'(\varphi)\, x$ a lui $\mathcal{A}$ în F este liniară şi continuă şi dacă φ se anulează în afara unei mulţimi $A \in \mathcal{B}$ avem

$$| U'(\varphi)\, x | = | U(\varphi x) | \leqslant \| U_A \| \; \| \varphi \| \; \| x \|_A$$

deci $U'(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ şi

$$| U'(\varphi) | \leqslant \| U_A \| \; \| \varphi \| < \infty .$$

Aplicaţia $U' : \varphi \to U'(\varphi)$ a lui $\mathcal{K}(T)$ în $\mathcal{L}(A, F)$ este liniară.

Fie acum $f \geqslant 0$ şi să arătăm că $\| U'_f \| \leqslant \| U_f \|$. Pentru aceasta fie $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ cu $| \varphi | \leqslant f$ şi fie $\varepsilon > 0$. Dacă φ se anulează în afara unei mulţimi $A \in \mathcal{B}$, avem $| U'(\varphi) |_A < \infty$ deci există un cîmp $x \in \mathcal{A}$ cu $\| x \|_A \leqslant 1$ şi

$$| U'(\varphi) | \leqslant | U'(\varphi)\, x | + \varepsilon .$$

Atunci $| \varphi x | \leqslant | \varphi | \; \| x \|_A \leqslant f$, deci

$$| U'(\varphi) | - \varepsilon \leqslant | U'(\varphi)\, x | = | U(\varphi x) | \leqslant \| U_f \|$$

şi deci

$$\| U'_f \| \leqslant \| U_f \| \leqslant \infty .$$

În particular, pentru $f = \varphi_A$ cu $A \in \mathcal{B}$ avem

$$\| U'_A \| \leqslant \| U_A \| < \infty .$$

Să arătăm că $||| U'_f ||| = ||| U_f |||$. Pentru aceasta fie $\sum\limits_{i=1}^{n} | \varphi_i | \leqslant f$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T)$ şi fie $\varepsilon > 0$. Dacă $\sum | \varphi_i |$ se anulează în afara unei mulţimi $A \in \mathcal{B}$, atunci pentru fiecare i putem găsi $x_i \in \mathcal{A}$ cu $\| x_i \|_A \leqslant 1$ şi

$$| U'(\varphi_i) |_A < | U'(\varphi_i)\, x_i | + \frac{\varepsilon}{n} .$$

Atunci

$$\sum | \varphi_i x_i | = \sum | \varphi_i | \, | x_i | \leqslant \sum | \varphi_i | \leqslant f$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} | U'(\varphi_i) |_A - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} | U'(\varphi_i)\, x_i | = \sum | U(\varphi_i x_i) | \leqslant ||| U_f |||$$

deci

$$||| U'_f ||| - \varepsilon \leqslant ||| U_f |||$$

de unde, ε fiind arbitrar,

$$||| U'_f ||| \leqslant ||| U_f ||| .$$

Pentru a demonstra inegalitatea inversă, fie $\sum\limits_{i=1}^{n} | x_i | \leqslant f$ cu $x_i \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ şi fie $\varepsilon > 0$. Fie $G = \{ t ; \sum | x_i(t) | \neq 0 \}$ şi fie $\eta > 0$ astfel ca $2n\eta \| U_G \| < \varepsilon$.

Pentru fiecare i mulţimea $K_i = \{ t ; | x_i(t) | \geqslant \eta \}$ este compactă şi conţinută în mulţimea deschisă $G_i = \{ t ; x_i(t) \neq 0 \}$. Fie V_i o mulţime deschisă cu $K_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset G_i$ şi fie $\varphi_i : T \to [0,1]$ o funcţie continuă cu suport compact egală cu 1 pe K_i şi nulă în afara lui V_i. Să punem

$$y_i(t) = \begin{cases} \dfrac{x_i(t)\ \varphi_i(t)}{| x_i(t) |} & \text{dacă } x_i(t) \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x_i(t) = 0. \end{cases}$$

Atunci $y_i \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, $\| y_i \| \leqslant 1$ şi avem $x_i \varphi_i = | x_i | \, y_i$ şi

$$\| x_i - \varphi_i x_i \| \leqslant \eta\, \varphi_{G_i - K_i}$$

deci

$$\| x_i - | x_i | \, y_i \| \leqslant \eta\, \varphi_{G_i - K_i}$$

de unde

$$| U(x_i) - U(|x_i| y_i) | \leqslant \eta \, \| U_G \| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Urmează că

$$| U(x_i) | \leqslant | U(|x_i| y_i) | + \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Pe de altă parte din propoziția 3 rezultă că putem găsi o familie $(\varphi_{ij})_{j \in J_i}$ din $\mathcal{K}_+(T)$, o familie $(y_{ij})_{j \in J_i}$ din $\mathcal{A}$ și o familie $(V_{ij})_{j \in J_i}$ de mulțimi deschise astfel ca

$$\sum_j \varphi_{ij} \leqslant 1, \quad \| y_{ij} \| \leqslant \| y_i \| + \varepsilon \leqslant 1 + \varepsilon$$

și

$$| y_i - \sum_j \varphi_{ij} \, y_{ij} | \leqslant \delta \, \varphi_G ,$$

unde $\delta > 0$ este astfel ca $2n \| x_i \| \, \delta \, \| U_G \| < \varepsilon$. Atunci

$$| x_i | \, y_i - \sum_j | x_i | \, \varphi_{ij} \, | y_{ij} | \leqslant \| x_i \| \, \delta \, \varphi_G$$

deci

$$| U(|x_i| y_i) - U(\sum_j |x_i| \varphi_{ij} \, y_{ij}) | \leqslant \| x_i \| \, \delta \, \| U_G \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n}$$

de unde

$$| U(x_i) | \leqslant | U(|x_i| y_i) | + \frac{\varepsilon}{2n} \leqslant | U(\sum_j |x_i| \varphi_{ij} \, y_{ij}) | + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Deoarece $\sum_{i,j} | x_i | \, \varphi_{ij} \leqslant \sum | x_i | \leqslant \varphi$, urmează că

$$\sum_i | U(x_i) | - \varepsilon \leqslant \sum_i | U(\sum_j |x_i| \varphi_{ij} \, y_{ij}) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i | \sum_j U'(|x_i| \varphi_{ij} \, y_{ij}) | \leqslant \sum_{i,j} | U'(|x_i| \varphi_{ij} \, y_{ij}) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j} | U'(|x_i| \varphi_{ij}) | \, \| y_{ij} \|_{V_{ij}} \leqslant (1 + \varepsilon) \sum_{i,j} | U'(|x_i| \varphi_{ij}) | \leqslant (1 + \varepsilon) \, ||| U'_f |||$$

deci

$$||| U_f ||| - \varepsilon \leqslant (1 + \varepsilon) \, ||| U'_f |||$$

de unde, ε fiind arbitrar,

$$||| U_f ||| \leqslant ||| U'_f |||$$

și deci

$$||| U'_f ||| = ||| U_f ||| .$$

Să presupunem acum că pentru o operaţie liniară $V : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ cu $\| V_A \| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{B}$ avem de asemenea

$$V(\varphi x) = U'(\varphi)\, x, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ şi } x \in \mathcal{A}.$$

Atunci

$$U(\textstyle\sum \varphi_i x_i) = V(\textstyle\sum \varphi_i x_i), \text{ pentru } \varphi_i \in \mathcal{K}(T) \text{ şi } x_i \in \mathcal{A}.$$

Fie acum $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ şi fie G o vecinătate deschisă a suportului lui x. Există atunci un şir (y_n) de combinaţii liniare de forma $\sum \varphi_i x_i$ cu $\varphi_i \in \mathcal{K}(T, G)$ şi $x_i \in \mathcal{A}$ uniform convergent către x. Deoarece U_G şi V_G sînt continue pe $\mathcal{K}(T, G)$, avem $U(y_n) \to U(x)$ şi $V(y_n) \to V(x)$. Cum pentru fiecare n avem $U(y_n) = V(y_n)$, prin trecere la limită deducem $U(x) = V(x)$. Aşadar $U = V$, deci corespondenţa $U \to U'$ este biunivocă.

4. OPERAŢII LINIARE MAJORATE PE $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$

Fie $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ o operaţie liniară.

15. Definiţie. *Spunem că U este o operaţie liniară majorată dacă există o măsură pozitivă regulată μ pe $\mathcal{B}$ astfel încît să avem*

$$|U(x)| \leqslant \int |x|\, d\mu, \quad \textit{pentru orice } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Spunem că U este majorată de μ sau că μ majorează pe U.

Vom arăta că există o cea mai mică măsură pozitivă regulată care majorează pe U, notată μ_U.

16. Teoremă. *Există un izomorfism $U \longleftrightarrow m$ între mulţimea operaţiilor liniare majorate $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ şi mulţimea $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ a măsurilor regulate cu variaţie finită, dată de egalitatea :*

$$U(x) = \int x\, dm, \quad \textit{pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Dacă U şi m sînt în corespondenţă, atunci

$$\mu_U = |m|,$$

pentru orice mulţime A avem

$$\| U_A \| \leqslant \widetilde{m}(A)$$

şi

$$||| U_A ||| \leqslant \overline{m}(A)$$

iar pentru orice mulțime deschisă G avem

$$\| U_G \| = \widetilde{m}(G)$$

și

$$||| U_G ||| = \overline{m}(G) = | m |^*(G).$$

Fie $m : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ o măsură regulată cu variație finită și fie operația liniară $U^* : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \to F$ definită prin egalitatea

$$U^*(x) = \int x \,\mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}).$$

Să considerăm restricția U a lui U^* la $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$:

$$U(x) = \int x \,\mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Din teorema 4, § 2, rezultă că pentru orice $A \subset T$ avem

$$\| U_A \| \leqslant \| U_A^* \| = \widetilde{m}(A)$$

și

$$||| U_A ||| \leqslant ||| U_A^* ||| = \overline{m}(A).$$

Avem apoi

$$| U(x) | = \left| \int x \,\mathrm{d}m \right| \leqslant \int | x | \,\mathrm{d}\, | m |, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$$

și $|m|$ este o măsură regulată, deci U este majorată. Corespondența $m \to U$ este evident liniară. Ea este și biunivocă, după cum rezultă din propoziția 9.

Reciproc, fie $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ o operație liniară majorată și fie μ o măsură pozitivă regulată pe $\mathcal{B}$ astfel ca

$$| U(x) | \leqslant \int | x | \,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Această inegalitate arată că U este continuă pe $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ pentru topologia spațiului $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ și deci poate fi prelungită prin continuitate la o aplicație liniară și continuă a lui $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ în F, notată tot U. Avem încă

$$| U(x) | \leqslant \int | x | \,\mathrm{d}\mu \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu).$$

Pentru $A \in \mathcal{B}$ și $x \in \mathcal{A}$ avem $\varphi_A x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$. Să punem

$$m(A)\, x = U(\varphi_A x).$$

Pentru $A \in \mathcal{B}$ fixat aplicaţia $m(A) : x \to U(\varphi_A x)$ a lui $\mathcal{A}$ în F este liniară şi continuă :

$$|m(A)\, x| = |U(\varphi_A x)| \leqslant \|x\|_A\, \mu(A),$$

deci

$$m(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$$

şi

$$|m(A)|_A \leqslant \mu(A).$$

Dacă $\varphi_A x = \varphi_A y$ rezultă imediat că

$$m(A)\, x = m(A)\, y.$$

Rezultă de asemenea că m este aditivă pe $\mathcal{B}$. Din inegalitatea $|m(A)| \leqslant \mu(A)$ rezultă că m este numărabil aditivă şi cu variaţie finită şi că $|m| \leqslant \mu$.

Pentru orice cîmp etajat $x = \sum \varphi_{A_i} x_i$ cu $A_i \in \mathcal{B}$ şi $x_i \in \mathcal{A}$ avem

$$U(x) = \sum U(\varphi_{A_i} x_i) = \sum m(A_i)\, x_i = \int x \,\mathrm{d}m.$$

Din inegalitatea $|m| \leqslant \mu$ deducem că $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu) \subset \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m)$ şi

$$\left|\int x \,\mathrm{d}m\right| \leqslant \int |x| \,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$$

şi deci aplicaţia $x \to \int x \,\mathrm{d}m$ a lui $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ în F este continuă. Cum aplicaţiile liniare $U(x)$ şi $\int x \,\mathrm{d}m$ sînt continue pe $\mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ şi coincid pe subspaţiul dens $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$, deducem că

$$U(x) = \int x \,\mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(\mu).$$

În particular, egalitatea are loc pentru $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$. Deoarece U este majorată de $|m|$ şi deoarece pentru măsura majorantă μ aleasă arbitrar avem $|m| \leqslant \mu$, deducem că $|m|$ este cea mai mică măsură pozitivă regulată care majorează pe U, adică

$$\mu_U = |m|.$$

Fie acum G o mulţime deschisă. Fie $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie de mulţimi deschise disjuncte conţinute în G şi $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie din $\mathcal{A}$ cu $\sum \varphi_{G_i} |x_i| \leqslant \varphi_G$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\mu = |m|$ este o măsură regulată, pentru fiecare i există o mulţime compactă $K_i \subset G_i$ cu $\mu(G_i - K_i) < \dfrac{\varepsilon}{n} \cdot$

Pentru fiecare i alegem o funcţie $\varphi_i : T \to [0, 1]$ din $\mathcal{K}_+(T)$ cu $\varphi_i(t) = 1$ pentru $t \in K_i$ şi nulă în afara lui G_i. Atunci $\varphi_{G_i} - \varphi_i \leqslant \varphi_{G_i - K_i}$ deci

$$\left| \sum_{i=1}^{n} U(\varphi_{G_i} x_i) - \sum_{i=1}^{n} U(\varphi_i x_i) \right| = \left| \sum \int (\varphi_{G_i} - \varphi_i)\, x_i \mathrm{d}m \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum \int | \varphi_{G_i} - \varphi_i |\, \mathrm{d}\mu \leqslant \sum \int \varphi_{G_i - K_i}\, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(G_i - K_i) < \varepsilon$$

deci

$$| \sum m(G_i)\, x_i | = | \sum U(\varphi_{G_i} x_i) | \leqslant \sum | U(\varphi_i x_i) | + \varepsilon \leqslant \| U_G \| + \varepsilon$$

de unde

$$\widetilde{m}(G) \leqslant \| U_G \| + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar deducem

$$\widetilde{m}(G) \leqslant \| U_G \|$$

şi deci

$$\| U_G \| = \widetilde{m}(G).$$

Avem apoi

$$| U(\varphi_{G_i} x_i) - U(\varphi_i x_i) | = \left| \int (\varphi_{G_i} - \varphi_i)\, x_i\, \mathrm{d}m \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int | \varphi_{G_i} - \varphi_i |\, \mathrm{d}\mu \leqslant \mu(G_i - K_i)$$

deci

$$| m(G_i)\, x_i | = | U(\varphi_{G_i} x_i) | \leqslant | U(\varphi_i x_i) | + \frac{\varepsilon}{n}$$

de unde

$$\sum | m(G_i)\, x_i | \leqslant \sum | U(\varphi_i x_i) | + \varepsilon \leqslant ||| U_G ||| + \varepsilon.$$

Urmează că

$$\overline{m}(G) \leqslant ||| U_G ||| + \varepsilon$$

şi deci

$$\overline{m}(G) \leqslant ||| U_G |||$$

de unde

$$||| U_G ||| = \overline{m}(G).$$

Se demonstrează la fel următoarea

17. TEOREMĂ. *Există un izomorfism $U' \leftrightarrow m$ între mulţimea operaţiilor liniare majorate $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ şi mulţimea măsurilor regulate $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ cu variaţie finită, dat de egalitatea*

$$U'(\varphi) = \int \varphi\, \mathrm{d}m, \ \textit{pentru} \ \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Dacă U' *şi* m *sînt în corespondenţă, avem*

$$\mu_{U'} = |\, m \,|,$$

pentru orice mulţime A *avem*

$$\| U'_A \| \leqslant \widetilde{m}_{R,\, X}(A) \leqslant \infty$$

unde $X = \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *şi*

$$||| U'_A ||| \leqslant \overline{m}(A) \leqslant \infty$$

şi pentru orice mulţime deschisă G *avem*

$$\| U'_G \| = \widetilde{m}_{R,\, X}(G)$$

şi

$$||| U'_G ||| = \overline{m}(G).$$

Vom da acum o caracterizare intrinsecă a operaţiilor majorate.

18. **Teoremă.** *O operaţie liniară* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *este majorată dacă şi numai dacă*

$$||| U_A ||| < \infty, \text{ pentru orice } A \in \mathcal{B}.$$

Dacă U este majorată, atunci din teorema 15 rezultă că

$$||| U_A ||| \leqslant \mu_U(A) < \infty, \text{ pentru } A \in \mathcal{B}.$$

Reciproc, să presupunem că $||| U_A ||| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{B}$. Fie $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ aplicaţia care corespunde lui U prin teorema 13 :

$$U'(\varphi)\, x = U(\varphi\, x), \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \text{ şi } x \in \mathcal{A}.$$

Avem $||| U'_A ||| = ||| U_A ||| < \infty$ pentru $A \in \mathcal{B}$. Pentru orice mulţime deschisă $G \in \mathcal{B}$ să punem

$$\mu(G) = ||| U'_G |||.$$

Funcţia de mulţime μ definită pe clasa $\mathcal{G}$ a mulţimilor deschise este evident pozitivă şi crescătoare. Vom arăta că ea este subaditivă, aditivă şi regulată :

a) μ *este subaditivă.* Fie $G', G'' \in \mathcal{G}$ şi $\varepsilon > 0$. Există o familie finită $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de funcţii din $\mathcal{K}(T)$ cu $\sum |\, \varphi_i \,| \leqslant \varphi_{G' \cup G''}$ şi

$$\mu(G' \cup G'') < \sum_{i=1}^{n} |\, U'(\varphi_i) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot$$

Fie $\eta > 0$ astfel încît $2n\eta\, \mu(G' \cup G'') < \varepsilon$. Pentru fiecare i mulţimea $K_i = \{t\, ;\ |\, \varphi_i(t) \,| \geqslant \eta\}$ este compactă şi conţinută în $G' \cup G''$. Există atunci o partiţie continuă a unităţii (ψ'_i, ψ''_i) cu $\psi'_i \in \mathcal{K}_+(T, G')$, $\psi''_i \in \mathcal{K}_+(T, G'')$ şi $\psi'_i(t) + \psi''_i(t) \leqslant 1$ pentru $t \in T$, $\psi'_i(t) + \psi''_i(t) = 1$ pentru $t \in K_i$. Atunci

$$\| \varphi_i \psi'_i + \varphi_i \psi''_i - \varphi_i \| < \eta$$

deci

$$|U'(\varphi_i \psi_i' + \varphi_i \psi_i'') - U'(\varphi_i)| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

deci

$$|U'(\varphi_i)| \leqslant |U(\varphi_i \psi_i')| + |U(\varphi_i \psi_i'')| + \frac{\varepsilon}{2n}\cdot$$

Deoarece $\sum |\varphi_i \psi_i'| \leqslant \varphi_{G'}$ şi $\sum |\varphi_i \psi_i''\| \leqslant \varphi_{G''}$, deducem că

$$\mu(G' \cup G'') \leqslant \sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_i \psi_i')| + \sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_i \psi_i'')| + \varepsilon \leqslant \mu(G') + \mu(G'') + \varepsilon$$

de unde, ε fiind arbitrar,

$$\mu(G' \cup G'') \leqslant \mu(G') + \mu(G'').$$

b) μ *este aditivă*. Fie $G', G'' \in \mathcal{G}$ două mulţimi disjuncte. Dacă (φ_i') şi (φ_i'') sînt două familii finite de funcţii din $\mathcal{K}(T)$ cu $\sum |\varphi_i'| \leqslant \varphi_{G'}$, $\sum |\varphi_i''| \leqslant \varphi_{G''}$, atunci $\sum |\varphi_i'| + \sum |\varphi_i''| \leqslant \varphi_{G'} + \varphi_{G''} = \varphi_{G' \cup G''}$, deci

$$\sum |U'(\varphi_i')| + \sum |U'(\varphi_i'')| \leqslant \mu(G' \cup G'')$$

de unde

$$\mu(G') + \mu(G'') \leqslant \mu(G' \cup G'')$$

şi deci μ este aditivă.

c) μ *este regulată*. Fie $G \in \mathcal{G}$ şi $\varepsilon > 0$. Fie $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie din $\mathcal{K}(T)$ cu $\sum |\varphi_i| \leqslant \varphi_G$ şi

$$\mu(G) < \sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_i)| + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Fie $\eta > 0$ astfel ca $2n\eta\mu(G) < \varepsilon$. Pentru fiecare i mulţimea $K_i = \{t;\ |\varphi_i(t)| \geqslant \eta\}$ este compactă şi conţinută în G. Mulţimea $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ este de asemenea compactă şi conţinută în G. Fie acum $G' \in \mathcal{G}$ cu $K \subset G' \subset G$ şi să arătăm că $\mu(G) < \mu(G') + \varepsilon$. Pentru aceasta fie $\varphi' : T \to [0, 1]$ o funcţie din $\mathcal{K}_+(T, G')$ cu $\varphi'(t) = 1$ pentru $t \in K$. Funcţia $\varphi_i \varphi'$ aparţine lui $\mathcal{K}(T, G)$ şi avem $\sum |\varphi_i \varphi'| \leqslant \varphi_{G'}$ deci

$$\sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_i \varphi')| \leqslant \mu(G').$$

Pe de altă parte $\|\varphi_i \varphi' - \varphi_i\| < \eta$, deci

$$|U'(\varphi_i \varphi') - U'(\varphi_i)| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

deci

$$|U'(\varphi_i)| \leqslant |U(\varphi_i \varphi')| + \frac{\varepsilon}{2n}$$

de unde

$$\mu(G) < \sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_i)| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |U'(\varphi_i \varphi')| + \varepsilon \leqslant \mu(G') + \varepsilon$$

şi deci μ este regulată.

În aceste condiţii μ poate fi prelungită la o măsură pozitivă regulată pe $\mathcal{B}$, notată tot μ.

d) Vom arăta că avem

$$|U'(\varphi)| \leqslant \int |\varphi| \, d\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Fie întîi φ o funcţie pozitivă din $\mathcal{K}(T)$ şi fie $\varepsilon > 0$. Fie $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \|\varphi\|$ astfel ca $\alpha_i - \alpha_{i-1} < \varepsilon$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Mulţimile

$$G_i = \{t ; \varphi(t) > \alpha_i\}, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

sînt deschise şi $G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = \emptyset$. Fie $u \in \mathcal{K}_+(T)$ astfel ca $u(t) = 1$ pentru $t \in G_0$. Funcţiile

$$h_i = \frac{\varphi - \alpha_{i-1} u}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

aparţin lui $\mathcal{K}(T)$, deci funcţiile $\varphi_i = \inf(1, h_i)$ aparţin de asemenea lui $\mathcal{K}(T)$ şi avem

$$\varphi_i(t) = 1 \text{ dacă } t \in G_i,$$

$$\varphi_i(t) = \frac{\varphi(t) - \alpha_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}}, \text{ dacă } t \in G_{i-1} - G_i$$

$$\varphi_i(t) = 0, \text{ dacă } t \notin G_{i-1}.$$

Avem

$$\varphi_n \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \varphi_1$$

şi

$$\varphi_{G_i} \leqslant \varphi_i \leqslant \varphi_{G_{i-1}}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Avem de asemenea

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \varphi_i.$$

În adevăr, dacă $t \notin G_0$, atunci $\varphi(t) = 0$ şi $\varphi_i(t) = 0$. Dacă $t \in G_{j-1} - G_j$ pentru un anumit j, atunci

$$\varphi_i(t) = 1, \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, j-1,$$

$$\varphi_j(t) = \frac{\varphi(t) - \alpha_{j-1}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}},$$

$$\varphi_i(t) = 0, \text{ pentru } i = j+1, \ldots, n,$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)\, \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{j} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) + \varphi(t) - \alpha_{j-1} = \varphi(t).$$

Deducem atunci că

$$| U'(\varphi) | \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\, | U'(\varphi_i) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\, \mu(G_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mu(G_{i-1} - G_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} + \varepsilon)\, \mu(G_{i-1} - G_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\, \mu(G_{i-1} - G_i) + \varepsilon\mu(G_0) =$$

$$= \int \varphi_\varepsilon\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(G_0),$$

unde am pus

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{G_{i-1} - G_i}\, \alpha_{i-1}.$$

Avem $\varphi_\varepsilon \leqslant \varphi$, deci

$$| U'(\varphi) | \leqslant \int \varphi\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon\mu(G_0)$$

de unde, ε fiind arbitrar,

$$| U'(\varphi) | \leqslant \int \varphi\, \mathrm{d}\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}_+(T).$$

Dacă $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ este o funcție oarecare, atunci

$$| U'(\varphi) | \leqslant | U'(\varphi^+) | + | U'(\varphi^-) | \leqslant \int \varphi^+\, \mathrm{d}\mu + \int \varphi^-\, \mathrm{d}\mu = \int | \varphi |\, \mathrm{d}\mu$$

și deci U' este majorată de μ.

e) Fie $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ măsura regulată cu variație finită care corespunde lui U' prin teorema 17 :

$$U'(\varphi) = \int \varphi\, \mathrm{d}m, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

și

$$||| U'_A ||| \leqslant \overline{m}(A) < \infty, \text{ pentru } A \in \mathcal{B}.$$

Să considerăm acum operația majorată $V : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ care corespunde măsurii m prin teorema 14 :

$$V(x) = \int x \,\mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$$

și

$$|||V_A||| \leqslant \overline{m}(A) < \infty, \text{ pentru } A \in \mathcal{B}.$$

Pentru $\varphi \in \mathcal{K}(T)$ și $x \in \mathcal{A}$ avem

$$V(\varphi x) = \int \varphi x \,\mathrm{d}m = \int \varphi \,\mathrm{d}m \cdot x = U'(\varphi)\, x = U(\varphi x)$$

deci $V = U$ și deci U este majorată.

19. Corolar. *O funcțională liniară* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to C$ *este majorată dacă și numai dacă*

$$\| U_A \| < \infty \textit{ pentru orice mulțime } A \in \mathcal{B}.$$

Din demonstrație a rezultat și următoarea

20. Teoremă. *O operație liniară* $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *este majorată dacă și numai dacă*

$$|||U'_A||| < \infty \textit{ pentru orice } A \in \mathcal{B}.$$

Corespondența $U \to U'$ poate fi acum precizată.

21. Teoremă. *Egalitatea*

$$U(\varphi x) = U'(\varphi)\, x, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T) \textit{ și } x \in \mathcal{A}$$

stabilește un izomorfism $U \longleftrightarrow U'$ *între mulțimea operațiilor liniare majorate* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *și mulțimea operațiilor liniare majorate* $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

Dacă U *și* U' *sînt în corespondență, există o măsură regulată* $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *cu variație finită astfel încît să avem*

$$U(x) = \int x \,\mathrm{d}m, \textit{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$$

și

$$U'(\varphi) = \int \varphi \,\mathrm{d}m, \textit{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T)$$

și avem

$$\mu_U = \mu_{U'} = |m|.$$

22. Teoremă. *Fie* $Z \subset F'$ *un spațiu normant. Să presupunem că are loc teorema Lebesgue-Nikodym. Atunci pentru orice operație liniară*

majorată $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *există o funcție* $t \to G(t) \in \mathcal{L}(E(t), Z')$ *astfel încît*

$$| G(t) | = 1, \ \mu\text{-}\textit{aproape peste tot}$$

și

$$< Ux, z > = \int < G(t)\, x(t), z > \mathrm{d}\mu_U \ \textit{pentru} \ x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \ \textit{și} \ z \in Z.$$

În adevăr, fie $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ măsura regulată cu variație finită, astfel ca

$$U(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \ \text{pentru} \ x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Folosind teorema lui Lebesgue-Nikodym, putem scrie

$$< \int x \, \mathrm{d}m, z > = \int < G(t)\, x(t), z > \mathrm{d} | m |,$$

pentru $x \in \mathcal{L}^1_{\mathcal{A}}(m)$ și $z \in Z$, unde $| G(t) | = 1$ m-aproape peste tot. Deoarece $\mu_U = | m |$, deducem

$$< U(x), z > = \int < G(t)\, x(t), z > \mathrm{d}\mu_U, \ \text{pentru} \ x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \ \text{și} \ z \in Z.$$

Avem și o teoremă reciprocă:

23. TEOREMĂ. *Fie* $Z \subset F'$ *un spațiu normant,* μ *o măsură scalară regulată pe* $\mathcal{B}$ *și* $t \to G(t) \in \mathcal{L}(E(t), F)$ *o funcție cu* $| G(t) | = 1$ *astfel ca* $< Gx, z >$ *să fie* μ*-integrabilă pentru orice* $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ *și* $z \in Z$.

Există atunci o operație liniară majorată $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *astfel încît*

$$< U(x), z > = \int < G(t)\, x(t), z > \mathrm{d}\mu, \ \textit{pentru} \ x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \ \textit{și} \ z \in Z$$

și

$$\mu_U \leqslant | \mu |.$$

5. FUNCȚIONALE LINIARE POZITIVE

Spunem că o funcțională L pe $\mathcal{K}(T)$ sau pe $\mathcal{K}_+(T)$ este *pozitivă* dacă

$$L(\varphi) \geqslant 0, \ \text{pentru orice funcție} \ \varphi \geqslant 0 \ \text{din} \ \mathcal{K}_+(T),$$

și că este *crescătoare* dacă

$$L(\varphi) \leqslant L(\psi), \ \text{pentru} \ \varphi \leqslant \psi.$$

Se arată ușor că o funcțională aditivă pe $\mathcal{K}(T)$ sau pe $\mathcal{K}_+(T)$ este pozitivă dacă și numai dacă este crescătoare.

24. **Propoziție.** *Orice funcțională liniară pozitivă L pe $\mathcal{K}(T)$ este majorată.*

Fie $A \in \mathcal{B}$ și fie $\varphi_0 \in \mathcal{K}(T)$ astfel încît să avem $\varphi_0(t) = 1$ pentru $t \in \bar{A}$. Pentru orice funcție $\varphi \in \mathcal{K}(T, A)$ avem atunci

$$-\|\varphi\|\, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \|\varphi\|\, \varphi_0 .$$

Deoarece L este crescătoare, avem

$$-\|\varphi\|\, L(\varphi_0) \leqslant L(\varphi) \leqslant \|\varphi\|\, L(\varphi_0)$$

deci

$$|L(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|\, L(\varphi_0)$$

de unde

$$\|L_A\| \leqslant L(\varphi_0) < \infty$$

și deci L este majorată.

25. **Teoremă** (Riesz-Kakutani). *Există un izomorfism $L \longleftrightarrow \mu$ între mulțimea funcționalelor liniare pozitive L pe $\mathcal{K}(T)$ și mulțimea măsurilor pozitive regulate μ pe $\mathcal{B}$, dat de egalitatea*

$$L(\varphi) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu, \ \textit{pentru} \ \ \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Dacă L și μ sînt în corespondență, atunci

$$\mu_L = \mu,$$

pentru orice mulțime μ-măsurabilă A avem

$$\|L_A\| \leqslant \mu^*(A)$$

și pentru orice mulțime deschisă G avem

$$\|L_G\| = \mu^*(G).$$

26. **Corolar.** *O operație liniară $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ este majorată dacă și numai dacă există o funcțională liniară pozitivă L pe $\mathcal{K}(T)$ astfel ca*

$$|U(x)| \leqslant L(|x|), \ \textit{pentru} \ x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

În mod asemănător :

27. **Corolar.** *O operație liniară $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ este majorată, dacă și numai dacă există o funcțională liniară pozitivă L pe $\mathcal{K}(T)$ astfel ca*

$$|U'(\varphi)| \leqslant L(|\varphi|), \ \textit{pentru} \ \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Există o cea mai mică funcţională liniară pozitivă L care majorează pe U, respectiv pe U', care va fi notată respectiv cu $|U|$ sau $|U'|$. Această cea mai mică funcţională pozitivă corespunde celei mai mici măsuri pozitive μ_U respectiv $\mu_{U'}$, care majorează pe U.

Se poate da o caracterizare intrinsecă a funcţionalei $|U|$.

28. Teoremă. *Dacă* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *este majorată, atunci pentru orice funcţie* $\varphi \geqslant 0$ *din* $\mathcal{K}_+(T)$ *avem*

$$|U|(\varphi) = \sup \sum |U(x_i)|, \textit{ pentru } \sum |x_i| \leqslant \varphi,\ x_i \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Observăm că membrul drept al egalităţii este $|||U_\varphi|||$. Operaţia U este majorată dacă şi numai dacă

$$|||U_\varphi||| < \infty, \text{ pentru orice } \varphi \in \mathcal{K}_+(T).$$

În adevăr, pentru orice mulţime $A \in \mathcal{B}$ există o funcţie $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ cu $\varphi_A \leqslant \varphi$, deci cu $|||U_A||| \leqslant |||U_\varphi|||$ şi reciproc, dacă $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ se anulează în afara unei mulţimi $A \in \mathcal{B}$, atunci $|||U_\varphi||| \leqslant \|\varphi\|\, |||U_A|||$.

Să presupunem că U este majorată. Să arătăm că $\|U_\varphi\|$ este aditivă pe $\mathcal{K}_+(T)$.

Fie $\varphi', \varphi'' \in \mathcal{K}_+(T)$ şi fie $\varepsilon > 0$. Există două familii (x_i') şi (x_i'') din $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ cu

$$\sum |x_i'| \leqslant \varphi' \text{ şi } \sum |x_i''| \leqslant \varphi''$$

astfel încît

$$|||U_{\varphi'}||| < \sum |U(x_i')| + \frac{\varepsilon}{2}$$

şi

$$|||U_{\varphi''}||| < \sum |U(x_i'')| + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Atunci $\sum |x_i'| + \sum |x_i''| \leqslant \varphi' + \varphi''$ şi

$$|||U_{\varphi'}||| + |||U_{\varphi''}||| < \sum |U(x_i')| + \sum |U(x_i'')| + \varepsilon \leqslant |||U_{\varphi'+\varphi''}||| + \varepsilon.$$

Deoarece ε este arbitrar, deducem

$$|||U_{\varphi'}||| + |||U_{\varphi''}||| \leqslant |||U_{\varphi'+\varphi''}|||\,.$$

Pentru a demonstra inegalitatea contrară, fie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o familie finită din $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \varphi' + \varphi''$ şi fie $\varepsilon > 0$. Fie $G = \{t\,; \varphi'(t) + \varphi''(t) > 0\}$ şi fie $\eta > 0$ astfel ca $n\eta\, \|U_G\| < \varepsilon$. Pentru fiecare i mulţimea $K_i = \{t\,; |x_i(t)| \geqslant \eta\}$ este compactă. Mulţimea $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ este compactă şi conţinută în mulţimea deschisă G. Fie G_1 o mulţime deschisă cu $K \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset G$ și fie $\psi : T \to [0, 1]$ o funcție din $\mathcal{K}_+(T)$ cu $\psi(t) = 1$ pentru $t \in K$ și nulă în afara lui G_1. Atunci funcția

$$\chi(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi(t)}{\varphi'(t) + \varphi''(t)} & \text{dacă } \varphi'(t) + \varphi''(t) \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } \varphi'(t) + \varphi''(t) = 0 \end{cases}$$

este continuă și se anulează în afara lui G_1.

Funcțiile $\psi' = \chi\varphi'$ și $\psi'' = \chi\varphi''$ sînt continue cu suport compact și

$$\psi'(t) + \psi''(t) \leqslant 1 \text{ pentru } t \in T \text{ și } \psi'(t) + \psi''(t) = 1 \text{ pentru } t \in K.$$

Atunci

$$\sum |x_i \psi'| = \sum |x_i| \psi' \leqslant (\varphi' + \varphi'')\psi' \leqslant \varphi'\psi \leqslant \varphi'$$

și

$$\sum |x_i \psi''| = \sum |x_i| \psi'' \leqslant (\varphi' + \varphi'')\psi'' \leqslant \varphi''\psi \leqslant \varphi''.$$

Pentru orice i avem

$$\|x_i \psi' + x_i \psi'' - x_i\| < \eta$$

deci

$$|U(x_i \psi' + x_i \psi'') - U(x_i)| < \frac{\varepsilon}{n}$$

de unde

$$|U(x_i)| \leqslant |U(x_i \psi')| + |U(x_i \psi'')| + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Urmează că

$$\sum |U(x_i)| \leqslant \sum |U(x_i \psi')| + |U(x_i \psi'')| + \varepsilon \leqslant |||U_{\varphi'}||| + |||U_{\varphi''}||| + \varepsilon$$

deci

$$|||U_{\varphi' + \varphi''}||| \leqslant |||U_{\varphi'}||| + |||U_{\varphi''}||| + \varepsilon.$$

ε fiind arbitrar, deducem

$$|||U_{\varphi' + \varphi''}||| \leqslant |||U_{\varphi'}||| + |||U_{\varphi''}|||$$

deci $|||U_\varphi|||$ este aditivă pe $\mathcal{K}_+(T)$. Atunci $|||U_\varphi|||$ poate fi prelungită la o funcțională liniară pozitivă pe $\mathcal{K}(T)$, notată de asemenea cu $|||U_\varphi|||$. Fie μ măsura corespunzătoare :

$$|||U_\varphi||| = \int \varphi \, d\mu, \text{ pentru } \varphi \in \mathcal{K}(T).$$

Din definiţia lui $|||U_\varphi|||$ rezultă că

$$|U(x)| \leqslant |||U_{|x|}||| = \int |x|\,\mathrm{d}\mu, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$$

deci μ majorează pe U şi deci $\mu_U \leqslant \mu$.

Pe de altă parte pentru orice funcţie $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ şi orice familie (x_i) din $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$ cu $\sum |x_i| \leqslant \varphi$, avem

$$\sum |U(x_i)| \leqslant \sum \int |x_i|\,\mathrm{d}\mu_U = \int \sum |x_i|\,\mathrm{d}\mu_U \leqslant \int \varphi\,\mathrm{d}\mu_U$$

deci

$$\int \varphi\,\mathrm{d}\mu = |||U_U||| \leqslant \int \varphi\,\mathrm{d}\mu_U$$

şi deci $\mu \leqslant \mu_U$. Urmează că $\mu_U = \mu$ şi deci $|U|(\varphi) = |||U_\varphi|||$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$.

În mod asemănător se demonstrează următoarea

29. TEOREMĂ. *Dacă* $U' : \mathcal{K}(T) \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ *este o operaţie liniară majorată, atunci pentru orice funcţie pozitivă* $\varphi \in \mathcal{K}_+(T)$ *avem*

$$|U'|(\varphi) = \sup \sum |U'(\varphi_i)|, \text{ pentru } \sum |\varphi_i| \leqslant \varphi, \ \varphi_i \in \mathcal{K}(T).$$

30. COROLAR. *Dacă* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to C$ *este o funcţională liniară majorată, atunci pentru orice funcţie* $\varphi \geqslant 0$ *din* $\mathcal{K}_+(T)$ *avem*

$$|U|(\varphi) = \sup |U(x)|, \text{ pentru } |x| \leqslant \varphi, \ x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

6. OPERAŢII LINIARE CONTINUE

Vom da acum o reprezentare integrală în raport cu măsuri aditive ale operaţiilor liniare continue dar nemajorate.

31. TEOREMĂ. *Fie* $Z \subset F'$ *un subspaţiu normant. Pentru orice operaţie liniară* $U : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to F$ *cu* $\|U_A\| < \infty$ *pentru* $A \in \mathcal{B}$ *există o măsură aditivă* $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, Z')$ *cu semivariaţie finită* $\widetilde{m}$ *astfel încît să avem*

$$U(x) = \int x\,\mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Dacă U *şi* m *sînt în corespondenţă, atunci*

$$\|U_A\| \leqslant \widetilde{m}(A), \text{ pentru orice } A \subset T$$

şi

$$\|U_G\| = \widetilde{m}(G), \text{ pentru orice mulţime deschisă } G.$$

Pentru orice $z \in Z$ să considerăm funcţionala liniară $U_z : \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \to C$ definită prin

$$U_z(x) = < U(x),\ z >, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T).$$

Pentru orice $A \in \mathcal{B}$ şi orice $x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T,\ A)$ avem

$$| U_z(x) | \leqslant | U(x) |\, |z| \leqslant \| U_A \| \| x \|\, |z|$$

deci

$$\| U_{zA} \| \leqslant \| U_A \|\, |z| < \infty.$$

Pentru fiecare U_z există o măsură $m_z : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A},\ C)$ cu variaţie finită μ_z astfel ca

$$U_z(x) = \int x \,\mathrm{d}m_z, \text{ pentru } x \in K_{\mathcal{A}}(T).$$

Avem apoi pentru $A \in \mathcal{B}$ şi pentru orice mulţime deschisă $G \in \mathcal{B}$ cu $A \subset G$

$$| m_z(A) | \leqslant \mu_z(A) \leqslant \mu_z(G) = \| U_{zG} \| \leqslant \| U_G \|\, |z|.$$

Pentru $A \in \mathcal{B}$ şi $x \in \mathcal{A}$ fixate, aplicaţia $m(A)\,x : z \to m_z(A)\,x$ este o funcţională liniară pe Z; dacă $G \in \mathcal{B}$ este deschisă şi $A \subset G$, atunci

$$| < m(A)\,x,\ z > | = | m_z(A)\,x | \leqslant | m_z(A) |\ \| x \|_A \leqslant \| U_G \|\ \| x \|_A\, |z|$$

deci $m(A)\,x \in Z'$ şi

$$| m(A)\,x | \leqslant \| U_G \|\ \| x \|_A.$$

Pentru $A \in \mathcal{B}$ fixat, aplicaţia $m(A) : x \to m(A)\,x$ lui $\mathcal{A}$ în Z' este liniară şi continuă, deci $m(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{A},\ Z')$ şi

$$| m(A) | \leqslant \| U_G \|, \text{ pentru } G \text{ deschis cu } A \subset G.$$

Se verifică uşor că funcţia de mulţime $m : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{A}, Z')$ este aditivă şi avem

$$m_z(A)\,x = < m(A)\,x,\ z >, \text{ pentru } x \in \mathcal{A},\ A \in \mathcal{B} \text{ şi } z \in Z.$$

Dacă $A \in \mathcal{B}$ şi dacă $G \in \mathcal{B}$ este deschisă şi $A \subset G$, atunci

$$\widetilde{m}(A) = \sup_{|z| \leqslant 1} \overline{m}_z(A) \leqslant \| U_G \| < \infty$$

deci m are semivariaţie finită. Deoarece $\overline{m}_z$ sînt numărabil aditive, deducem că $\widetilde{m}$ este numărabil subaditivă pe $\mathcal{B}_\lambda$.

Să considerăm spaţiul $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ al cîmpurilor total $\mathcal{B}$-măsurabile şi aplicaţia $U^* : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \to Z'$ definită prin

$$U^*(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}).$$

Avem

$$\| U^*_A \| = \widetilde{m}(A) < \infty, \text{ pentru } A \in \mathcal{B}.$$

Pentru orice $x \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ şi $z \in Z$ avem

$$< U^*(x), z > = \int x \, \mathrm{d}m_z .$$

În adevăr, această egalitate se verifică întîi pentru cîmpuri etajate din $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ şi apoi prin trecere la limită pentru orice cîmp din $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$. Avem de asemenea

$$< U(x), z > = U_z(x) = \int x \, \mathrm{d}m_z, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \text{ şi } z \in Z$$

deci

$$< U(x), z > = < U^*(x), z >, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T) \text{ şi } z \in Z.$$

Urmează că

$$U(x) = U^*(x) = \int x \, \mathrm{d}m, \text{ pentru } x \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(T)$$

şi

$$\| U_A \| \leqslant \| U^*_A \| \leqslant \widetilde{m}(A), \text{ pentru } A \subset T.$$

Dacă G este o mulţime deschisă, avem

$$\begin{aligned} \widetilde{m}(G) &= \sup_{|z| \leqslant 1} \overline{m}_z(G) = \sup_{|z| \leqslant 1} \| U_{zG} \| = \\ &= \sup_{|z| \leqslant 1} \sup_{|x| \leqslant \varphi_G} | U_z(x) | = \sup_{|x| \leqslant \varphi_G} \sup_{|z| \leqslant 1} | < U(x), z > | = \\ &= \sup_{|x| \leqslant \varphi_G} | U(x) | = \| U_G \| . \end{aligned}$$

Observaţie. Măsura aditivă m poate să nu fie nici numărabil aditivă, nici regulată şi nici cu variaţie finită.

Exemplu. Fie K un spațiu compact, $\mathcal{C}(K)$ spațiul funcțiilor reale continue definite pe K, $F = \mathcal{C}(K)$ și operația liniară $U : \mathcal{C}(K) \to F$ definită prin egalitatea

$$U(f) = f, \text{ pentru } f \in \mathcal{C}(K).$$

Pentru orice mulțime boreliană $A \subset K$, avem evident $\| U_A \| = 1$. Dar pentru orice mulțime deschisă $G \subset K$ avem $|||U_G||| = \infty$. În adevăr, pentru fiecare n găsim n funcții $f_1, f_2, \ldots, f_n$ din $\mathcal{C}(K, G)$ cu $\|f_i\| = 1$ și $|f_i|\,|f_j| = 0$ dacă $i \neq j$. Atunci

$$\Sigma\,|U(f_i)| = \Sigma \|f_i\| = n$$

deci $|||U_G||| > n$ și deci $|||U_G||| = \infty$.

Spațiul conjugat al lui $\mathcal{C}(K)$ este izomorf cu spațiul M al măsurilor boreliene regulate. Pentru orice măsură $\mu \in M$ avem

$$U_\mu(f) = < U(f), \mu > = < f, \mu > = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Pe de altă parte, există o măsură aditivă $m : \mathcal{B} \to M'$ cu semivariație finită, astfel că pentru orice $\mu \in M$, funcția m_μ este o măsură regulată și avem

$$U_\mu(f) = \int f \,\mathrm{d}m_\mu, \text{ pentru } f \in \mathcal{C}(K).$$

Urmează că

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}m_\mu, \text{ pentru } f \in \mathcal{C}(K)$$

deci $m_\mu = \mu$, pentru orice $\mu \in M$.

Pentru orice mulțime $A \in \mathcal{B}$ avem

$$|m(A)| = \sup_{\|\mu\| \leqslant 1} |m_\mu(A)| = \sup_{\|\mu\| \leqslant 1} |\mu(A)| = 1.$$

Urmează că m nu poate fi nici regulată, nici cu variație finită ($\overline{m}(A) = \infty$, pentru orice mulțime infinită $A \subset K$) și nici numărabil aditivă.

Pentru orice $A \in \mathcal{B}$ avem

$$\widetilde{m}(A) = \sup_{\|\mu\| \leqslant 1} \overline{m}_\mu(A) = \sup_{\|\mu\| \leqslant 1} |\mu|(A) = 1.$$

Primită la redacție la 18 noiembrie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

Alexiewicz A., 1. *Linear operations among bounded measurable functions I, II*, Ann. Soc. Polon. Math., **19**, 140—161, 161—164 (1946).

Banach S., 1. *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, 1932.

Bartle R. G., 1. *A general bilinear vector integral*, Studia Math., **15**, 337—352 (1956).

Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J., 1. *Weak compactness and vector measures*, Canadian J. Math., **7**, 289—305 (1955).

Birkhoff G., 1. *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., **38**, 357—378 (1935).

Bochner S., 1.*Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind*, Fund. Math. **20**, 262—276 (1933).

Bochner S., Taylor A. F., 1. *Linear functionals on certain spaces of abstractly valued functions*, Ann. of Math., (**2**) **39**, 913—944 (1938).

Bourbaki N., 1. *Topologie générale*, chap. I—X, Hermann, Paris 1940—1949.
2. *Espaces vectoriels topologiques* chap. I—V, Hermann, Paris, 1953, 1955.
3. *Intégration*, chap. I—VI, Hermann, Paris, 1952, 1956, 1959.

Colojoară I., Dinculeanu N., Marinescu Gh., 1. *Measures with values in locally convex spaces*, Bull. Sci. Math. R.P.R. **5** (**53**), 167—180 (1961).

Cristescu R., 1.*O teoremă asupra reprezentării operațiilor liniare*. Comunicările Acad. R.P.R., **5**, 655—659 (1955).
2. *Integrali vettoriali di Stieltjes ed operatori lineari*, Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **27**, 31—34 (1959).
3. *Intégrales vectorielles et représentation de certains opérateurs linéaires*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **3** (**51**), 7—15 (1959).

Daniell P. J., 1. *A general form of integral*, Ann. of Math., (**2**) **19**, 279—294 (1917—1918).

Dieudonné J., 1. *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym*, Ann. of. Math., (**2**) **42**, 547—555 (1941).
2. *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym II*, Bull. Soc. Math, France, **72**, 193—239 (1944).
3. *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym III*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **23**, 25—53 (1947—1948).
4. *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym IV*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), **15**, 77—86 (1951).
5. *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym V*, Canadian J. Math., **3**, 129—139 (1951).

Dinculeanu N., 1. *Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, **245**, 1203—1205 (1957).
2. *Mesures vectorielles et opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, **246**, 2328—2331 (1958).
3. *Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires II*. Compositio Math., **14**, 1—22 (1959).
4. *Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires III*, Proc. Amer. Math. Soc., **10**, 59—68 (1959).
5. *Mesures vectorielles sur les espaces localement compacts*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R. **2** (**50**), 137—164 (1958).
6. *Remarks on the integral representation of vector measures and linear operations on* $\mathcal{L}^p_{\mathcal{A}}$, Revue Math. pures et appl., **7**, 287—300 (1962).
7. *Despre seminormele* N_p, Analele Universității din București, **11**, 155—163 (1962).
8. *On the regular vector measures*, Acta Sci. Math. Szeged, **24**, 236—243 (1963).
9. *Linear operations on spaces of totally measurable functions*. Revue Roumaine Math. **10**, 1493—1524 (1965).

Dinculeanu N., Foiaș C., 1. *Mesures vectorielles et opérations linéaires sur* $L^p_{\mathcal{C}}$, C.R. Acad. Sci. Paris, **248**, 1759—1762 (1959).
2. *Sur la représentation intégrale des certaines opérations linéaires IV*, Canad. J. Math., **13**, 529—556 (1961).

Dunford N., 1. *Uniformity in linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **44**, 305—356 (1938).
2. *Integration in general analysis*, Trans. Amer. Math. Soc., **37**, 441—453 (1935).
3. *Integration and linear operations*, Trans. Amer. Math. Soc., **40**, 474—494 (1936).

Dunford N., Pettis B. J., 1. *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 323–392 (1940).

Dunford N., Schwartz J., 1. *Linear Operators*, Part. I, New York, 1958.

Fichtenholz G., 1. *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions continues*, Bull. Acad. Roy. Belg., **22**, 26–33 (1936).

Fichtenholz G., Kantorovitch L. V., 1. *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées*, Studia Math., **5**, 69–98 (1934).

Foiaş C., 1. *Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérations qui sortent de l'espace hilbertien*, Acta Sci. Math. Szeged, **20**, 117–154 (1959).

Foiaş C., Singer I., 1. *Some remarks on the representation of linear operators in spaces of vector valued continuous functions*, Revue Math. pures et appl., **5**, 729–752 (1960).

Fullerton R. E., 1. *The representation of linear operators from* L^p t_0 L. Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 689–696 (1954).

Gelfand I., 1. *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sbornik, **4** (**46**), 235–284 (1938).

Godement R., 1. *Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach*, C.R. Acad. Sci. Paris, **228**, 1321–1323 (1949).
2. *Sur la théorie des représentations unitaires*. Annals of Math., (**2**) **53**, 68–124 (1951).

Gowurin M., 1. *Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen*, Fund. Math., **27**, 255–268 (1936).

Grothendieck A., 1. *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type C(K)*, Canad. J. Math., **5**, 129–173 (1953).

Halmos P. R., 1. *Measures Theory*, New York, 1950.

Hewitt E., 1. *Linear functionals on spaces of continuons functions*, Fund. Math., **37**, 161–189 (1950).
2. *Integral representation of certain linear functionals*, Ark. för Mat., **2**, 269–282 (1952).

Hildebrandt T. H., 1. *Integration in abstract spaces*. Bull. Amer., Math. Soc., **59**, 111–139 (1953).

Hille E., Phillips R., 1. *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1957.

Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C., 1. *On the decomposition and integral representation of continuous linear operators*, Annali di Mat, pura ed appl., **53**, 63–87 (1961).
2. *On the lifting property (I)*, J. Math. Analysis and Appl., **3**, 537–546 (1961).
3. *On the lifting property II*, J.Math. Mech., **11**, 773–795 (1962).

Ionescu Tulcea C., 1. *Spaţii Hilbert*, Bucureşti, 1956.
2. *Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs*, Bull. Sci. Math., **79**, 106–111 (1955).

Kakutani S.,1. *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Annals of Math., (**2**) **42**, 523–537 (1941).
2. *Concrete representation of abstract (M)-spaces (A characterisation of the space of continuous functions)*, Annals of Math., (**2**) **42**, 994–1024 (1941).

Kolmogoroff A., 1. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin, 1933.

Lorentz G. G., Wertheim D. G., 1. *Representation of linear functionals on Köthe spaces*, Canadian J. Math., **5**, 568–575 (1953).

Marinescu G., 1. *Spaţii vectoriale normate*, Bucureşti, 1956.
2. *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*, Bucureşti, 1959.
3. *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

Morse M., Transue W., 1. *C-bimeasures* $\wedge$ *and their superior integrals*, Rendiconti Circolo Mat. Palermo, **4**, 270–300 (1955).
2. *Products of a C-measure and a locally integrable mapping*, Canad. J. Math., **9**, 475–486 (1957).

Nagy B. von Sz., 1. *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, Ergebnisse der Math. Berlin, 1942.

Naimark M., 1. *Novmirovannie Kolţa*, Moskva, 1956.

Nicolescu M., 1. *Analiza Matematică*, vol. I, II, III, Bucureşti, 1957, 1958, 1960.
2. *Funcţii reale şi analiză funcţională*, Bucureşti, 1962.

Nikodym O., 1. *Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon*, Fund. Math., **15**, 131—179 (1930).

Onicescu O., 1. *Asupra unei integrale şi aplicaţiile ei*, Analele Univ. C. I. Parhon Bucureşti, **13**, 9—10 (1957).

2. *Fonctions somme sur une b-algèbre*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **3** (**51**), 73—91 (1959).

3. *Note asupra b-algebrelor*, Analele Univ. ,,C.I. Parhon'', Bucureşti, **22**, 17—22 (1959).

Onicescu O., Mihoc G., Ionescu Tulcea C., 1. *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii*, Bucureşti, 1956.

Pettis B. J., 1. *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **44**, 277—304 (1938).

2. *Linear functionals and completely additive set functions*, Duke Math. J., **4**, 552—565 (1938).

Phillips R. S., 1. *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 114—145 (1940).

2. *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., **48**, 516—541 (1940).

Radon J., 1. *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen*, S. — B. Akad. Wiss. Wien, **122**, 1295—1438 (1913).

Rickart C. E., 1. *Integration in a convex linear topological space*. Trans. Amer. Math. Soc., **52**, 498—521 (1942).

2. *An abstract Radon-Nikodym theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **56**, 50—66 (1944).

3. *Decomposition of additive set functions*, Duke Math. J., **10**, 653—665 (1943).

Riesz F., 1. *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, **149**, 974—977 (1909).

2. *Sur la représentation des opérations fonctionnelles linéaires par des intégrales de Stieltjes*, Roy. Phisiog. Soc. Lund, **21**, *16*, 145—151 (1952).

3. *Sur la convergence en moyenne I, II*, Acta Sci. Math. Szeged, **4**, 58—64, 182—185 (1928—1929) .

Riesz F., Sz-Nagy B., 1. *Léçons d'Analyse fonctionnelle*, Budapest, 1952.

Saks S., 1. *Theory of integral*, Warsaw, 1937.

Segal I. E., 1. *Invariant measures on locally compact spaces*, J. Indian Math. Soc. (N. S), **13**, 105—130 (1949).

2. *A non-commutative extension of abstract integration*. Annals of Math., **57**, 401—457 (1953).

Simboan G., 1. *Vectorial measures*, Revue de Math. pures et appl., **7**, 383—415 (1962).

2. *Asupra măsurilor compacte*, Comunicările Acad. R.P.R., **9**, 105—110 (1959).

Singer I., 1. *Lineinie funcţionalî na prostranstve neprerîvnîh otobrajenii bikompaktnogo hausdorfogo prostranstva v prostranstvo Banaha*, Revue Math. pures appl., **2**, 301—315 (1957).

2. *Les duals de certains espaces de Banach de champs de vecteurs, I, II*, Bull. Sci. Math., **82**, 29—40 (1958) ; **83**, 73—96 (1959).

3. *Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues, I*, Revue Math. pures appl., **4**, 391—401 (1959).

4. *Sur les applications linéaires majorées des espaces de fonctions continues*, Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **27**, 35—41 (1959).

5. *Sur la représentation intégrale des applications linéaires continues des espaces L_F^p* ($1 \leqslant p < \infty$), Rendiconti Accad. Naz. Lincei, **29**, 28—32 (1960).

6. *Sur une classe d'applications linéaires continues des espaces L_F^p* ($1 \leqslant p < \infty$). Ann. Ecole Norm. Sup., **77**, 235—256 (1960).

7. *Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues à valeurs vectorielles*. Acta Sci. Math. Acad. Sci. Hung., **11**, 3—13 (1960).

Swong K. 1. *A representation theory of continuous linear maps*. Math. Ann., **155**, 270—291 (1964).

Szasz-Felten I. 1., *Eine unmittelbare Definition des Modulus einer Radonschen Masse*. Revue Roumaine de Math. pures et appl., **10** (1965).

GRUPURILE DE OLONOMIE ALE SPAȚIILOR A_3

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină grupurile de olonomie omogene ale spațiilor cu conexiune afină cu trei dimensiuni.

A. Liber a făcut clasificarea spațiilor A_2 după grupurile de olonomie omogene pe care le au [1]. Această clasificare a fost reluată și completată de G. Vrănceanu [2] [1].

În această lucrare ne vom ocupa de spațiile cu conexiune afină A_3, determinîndu-le grupurile lor de olonomie omogene.

Fie A_n un spațiu cu conexiune afină raportat la un sistem de congruențe $\mathrm{d}s^a = \lambda_i^a\, \mathrm{d}x^i$. Dacă notăm cu γ_{bc}^a componentele conexiunii afine ale spațiului A_n față de sistemul de congruențe (λ), atunci componentele conexiunii infinitezimale ale spațiului sînt $\mathrm{d}s_b^a = \gamma_{bc}^a\, \mathrm{d}s^c$.

Considerînd un vector V^i în spațiul A_n, ecuațiile transportului paralel ale acestui vector sînt

$$\frac{\mathrm{d}v^a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s_b^a}{\mathrm{d}t}\, v^b, \tag{1}$$

unde $v^a = \lambda_i^a\, V^i$ sînt componentele vectorului față de sistemul de congruențe. Integrînd acest sistem se obține grupul de olonomie omogen al spațiului A_n.

Presupunînd $n = 3$, sistemul (1) se scrie

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\, v^1 + \frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\, v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^1}{\mathrm{d}t}\, v^3, \\ \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\, v^1 + \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, v^3, \\ \frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\, v^1 + \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\, v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\, v^3. \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

---

1) Pag. 408.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 4, P. 537–545, BUCUREȘTI, 1966

Să considerăm întîi cazul în care $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = 0$.
Din prima ecuație (1′) rezultă

$$v^1 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1}$$

Cu această valoare, ultimele două ecuații (1′) devin

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\, v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\, v^3 + c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}, \\ \frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\, v^2 + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\, v^3 + c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dacă $\mathrm{d}s_3^2 = 0$, soluția acestui sistem este

$$v^2 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_2^2}\left[c^1 \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2 + c^2\right],$$

$$v^3 = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_3^3}\Bigg(c^1\left[\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_1^3 + \int_0^t \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2\right) \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_2^3\right] + \\ + c^2 \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_2^3 + c^3\Bigg).$$

De aici rezultă că grupul de olonomie omogen al spațiului A_3 este în acest caz

$$\left\{\begin{aligned} v'^1 &= \alpha\, v^1, \\ v'^2 &= \beta\gamma v^1 + \beta v^2, \\ v'^3 &= \lambda\mu v^1 + \lambda\nu v^2 + \lambda v^3, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

unde am notat

$$\alpha = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_1^1},\ \beta = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_2^2},\ \gamma = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2,\ \lambda = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_3^3},$$

$$\mu = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_1^3 + \int_C \left(\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_1^1 - \mathrm{d}s_2^2)}\, \mathrm{d}s_1^2\right) \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_2^3, \tag{3′}$$

$$\nu = \int_C \mathrm{e}^{\int_0^t (\mathrm{d}s_2^2 - \mathrm{d}s_3^3)}\, \mathrm{d}s_2^3,$$

C fiind o curbă închisă oarecare.

Deci, dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_3^2 = 0$, spațiul A_3 are ca grup de olonomie omogen grupul (3) sau un subgrup al acestuia.

Un rezultat analog se obține dacă $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^3 = 0$.

Grupul (3) lasă invariant varietățile liniare $v^1 = 0$ și $v^1 = v^2 = 0$.

Ținînd seama că

$$\mathrm{d}s_b^a = \Gamma_{bc}^a\, \mathrm{d}x^c,$$

Γ^a_{bc} fiind componentele conexiunii într-un sistem de variabile, din relațiile $\mathrm{d}s^1_2 = \mathrm{d}s^1_3 = \mathrm{d}s^2_3 = 0$ rezultă

$$\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^2_{3i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Deci :

Spațiile A_3 pentru care $\Gamma^1_{2i} = \Gamma^1_{3i} = \Gamma^2_{3i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$ admit ca grup de olonomie omogen grupul (3) sau un subgrup al lui.

Să presupunem acum că $\mathrm{d}s^2_3 \neq 0$, $\mathrm{d}s^3_2 \neq 0$. În acest caz, din prima ecuație (2) deducem

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t}\, v^2 - c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1} \dfrac{\mathrm{d}s^2_1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}},$$

care înlocuită în a doua ecuație (2) ne dă

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^2}{\mathrm{d}t^2} - p\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - qv^2 = rc^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1}, \tag{4}$$

unde am pus

$$p = \frac{\mathrm{d}\,(s^2_2 + s^3_3)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t},$$

$$q = \frac{\mathrm{d}^2 s^2_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^2_2}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^3_3}{\mathrm{d}t},$$

$$r = \frac{\mathrm{d}^2 s^2_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}s^3_1}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s^2_1}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\,(s^1_1 - s^3_3)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s^2_1}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{\mathrm{d}s^2_3}{\mathrm{d}t}.$$

Notînd cu Φ_1 și Φ_2 două soluții independente ale ecuației diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}t^2} - p\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - q\Phi = 0,$$

și cu Φ_0 o soluție particulară a ecuației

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} + \left(2\,\frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t} - p\right)\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \left[\frac{\mathrm{d}^2 s^1_1}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}s^1_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 - p - q\right]\Phi = r,$$

soluția generală a ecuației (4) este

$$v^2 = c^1\, \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s^1_1}\, \Phi_0 + c^2\, \Phi_1 + c^3\, \Phi_2.$$

Cu această valoare a lui v^2 deducem

$$v^3 = c^1 \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{d}s_1^1} \frac{\frac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t}\Phi_0 + \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^2 \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_1}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3 \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_2}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t^3}}.$$

Presupunînd că funcțiile Φ_0, Φ_1, Φ_2 satisfac condițiile

$$\Phi_0(0) = \Phi_2(0) = 0,\ \Phi_1(0) = 1, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0$$

și notînd

$$\alpha = \mathrm{e}^{\int_C \mathrm{d}s_1^1},\ \beta = \Phi_0,\ \gamma = \Phi_1,\ \delta = \Phi_2,$$

$$\lambda = \frac{\frac{\mathrm{d}(s_1^1 - s_2^2)}{\mathrm{d}t}\Phi_0 + \frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},\ \mu = \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_1}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

$$\nu = \frac{\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}\Phi_2}{\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C, atunci grupul de olonomie omogen al spațiului A_3 este

$$(5) \qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha v^1, \\ v'^2 = \alpha\beta v^1 + \gamma v^2 + \delta v^3, \\ v'^3 = \alpha\lambda v^1 + \mu v^2 + \nu v^3. \end{cases}$$

Deci, dacă $\mathrm{d}s_2^1 = \mathrm{d}s_3^1 = 0$, $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, $\mathrm{d}s_2^3 \neq 0$, grupul de olonomie omogen al spațiului A_3 este grupul (5) sau un subgrup al acestuia.

Grupul (5) lasă invariantă varietatea liniară $v^1 = 0$.

Într-un sistem de variabile, condițiile de mai sus devin

$$\Gamma_{2i}^1 = \Gamma_{3i}^1 = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(\Gamma_{31}^2)^2 + (\Gamma_{32}^2)^2 + (\Gamma_{33}^2)^2 \neq 0, \ (\Gamma_{21}^3)^2 + (\Gamma_{22}^3)^2 + (\Gamma_{23}^3)^2 \neq 0.$$

Rezultate analoage se obțin dacă $\mathrm{d}s_1^2\,\mathrm{d}s_3^2 = 0$ sau $\mathrm{d}s_2^3 = \mathrm{d}s_2^3 = 0$. Să presupunem acum că

$$(\mathrm{d}s_2^1)^2 + (\mathrm{d}s_3^1)^2 \neq 0, \ (\mathrm{d}s_1^2)^2 + (\mathrm{d}s_3^2)^2 \neq 0, \ (\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 \neq 0.$$

Să considerăm întîi cazul $\mathrm{d}s_2^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_3^1 = 0$. Din prima ecuație (1) deducem

$$v^2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,v^1}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}} \tag{6}$$

care înlocuită în a doua ecuație (1′) ne dă

$$\frac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - q_1 v^1 = \frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\,v^3, \tag{7}$$

unde am pus

$$p_1 = \frac{\mathrm{d}(s_1^1 + s_2^2)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}, \quad q_1 = \frac{\mathrm{d}^2 s_1^1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_1^2}{\mathrm{d}t} - \\ - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}s_2^2}{\mathrm{d}t}.$$

Dacă $\mathrm{d}s_3^2 = 0$, rezultă $\mathrm{d}s_1^2 \neq 0$, iar din (7) deducem

$$v^1 = c^1\,\Phi_1 + c^2\,\Phi_2,$$

unde Φ_1 și Φ_2 sînt două soluții independente ale ecuației diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - p_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - q_1\,\Phi = 0.$$

Cu aceasta, relația (6) ne dă

$$v^2 = c^1\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}} + c^2\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\,\Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}}.$$

Înlocuind pe v^1 și v^2 în a treia ecuație (1′) obținem

$$\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\,v^3 = \frac{\mathrm{d}s_1^3}{\mathrm{d}t}\,(c^1\,\Phi_1 + c^2\,\Phi_2) + \frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t}\left(c^1\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}} + \right. \\ \left. + c^2\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2\dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}} \right),$$

a cărei soluție este

$$v^3 = c^1 \overline{\Phi}_1 e^{\int_0^t ds_3^3} + c^2 \overline{\Phi}_2 e^{\int_0^t ds_3^3} + c^3 e^{\int_0^t ds_3^3},$$

unde am notat

$$\overline{\Phi}_1 = \int_0^t e^{-\int_0^t ds_3^3} \Phi_1 \, ds_1^3 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_3^3} \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \Phi_1 \dfrac{ds_1^1}{dt}}{\dfrac{ds_2^1}{dt}} ds_2^3,$$

$$\overline{\Phi}_2 = \int_0^t e^{-\int_0^t ds_3^3} \Phi_2 \, ds_2^3 + \int_0^t e^{-\int_0^t ds_3^3} \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2 \dfrac{ds_1^1}{dt}}{\dfrac{ds_2^1}{dt}} ds_2^3.$$

Presupunînd că funcțiile Φ_1 și Φ_2 satisfac condițiile

$$\Phi_1(0) = 1, \quad \Phi_2(0) = 0, \quad \left(\frac{d\Phi_1}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_1^1}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{d\Phi_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{ds_2^1}{dt}\right)_0$$

și notînd

$$\alpha_1 = \Phi_1, \quad \beta_1 = \Phi_2, \quad \alpha_2 = \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \Phi_1 \dfrac{ds_1^1}{dt}}{\dfrac{ds_2^1}{dt}}, \quad \beta_2 = \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2 \dfrac{ds_1^1}{dt}}{\dfrac{ds_2^1}{dt}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C și

$$\alpha_3 = \int_C e^{-\int_0^t ds_3^3} \Phi_1 \, ds_1^3 + \int_C e^{-\int_0^t ds_3^3} \frac{\dfrac{d\Phi_1}{dt} - \Phi_1 \dfrac{ds_1^1}{dt}}{\dfrac{ds_2^1}{dt}} ds_2^3,$$

$$\beta_3 = \int_C e^{-\int_0^t ds_3^3} \Phi_2 \, ds_1^3 + \int_C e^{-\int_0^t ds_3^3} \frac{\dfrac{d\Phi_2}{dt} - \Phi_2 \dfrac{ds_1^1}{dt}}{\dfrac{ds_2^1}{dt}} ds_2^3,$$

$$\gamma = e^{\int_C ds_3^3},$$

atunci grupul de olonomie omogen al spațiului A_3 este

$$(8) \qquad \begin{cases} v'^1 = \alpha_1 v^1 + \beta_1 v^2, \\ v'^2 = \alpha_2 v^1 + \beta_2 v^2, \\ v'^3 = \alpha_3 v^1 + \beta_3 v^2 + \gamma v^3. \end{cases}$$

Deci, dacă $\mathrm{d}s_3^1 = \mathrm{d}s_3^2 = 0$, $\mathrm{d}s_2^1 \neq 0$, $\mathrm{d}s_1^2 \neq 0$, $(\mathrm{d}s_1^3)^2 + (\mathrm{d}s_2^3)^2 \neq 0$, spaţiul A_3 are ca grup de olonomie omogen grupul (8) sau un subgrup al acestuia.

Grupul (8) lasă invariantă varietatea liniară $v^1 = v^2 = 0$.

Într-un sistem de variabile, condiţiile de mai sus se scriu

$$\Gamma_{3i}^1 = \Gamma_{3i}^2 = 0, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\sum_{k=1}^{3} (\Gamma_{2k}^1)^2 \neq 0,\ \sum_{k=1}^{3} (\Gamma_{1k}^2)^2 \neq 0,\ \sum_{k=1}^{3} [(\Gamma_{1k}^3)^2 + (\Gamma_{2k}^3)^2] \neq 0.$$

Dacă $\mathrm{d}s_3^2 \neq 0$, din (7) deducem

$$v^3 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - q_1 v^1}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}, \tag{9}$$

care înlocuită în ultima ecuaţie (1′) ne dă

$$\frac{\mathrm{d}^3 v^1}{\mathrm{d}t^3} - p_2 \frac{\mathrm{d}^2 v^1}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}v^1}{\mathrm{d}t} - r_2 v^1 = 0, \tag{10}$$

unde

$$p_2 = \frac{\mathrm{d}\,(s_1^1 + s_2^2 + s_3^3)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left[\left(\frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right],$$

$$q_2 = q_1 + \frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - p_1 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^3}{\mathrm{d}t}\right],$$

$$r_2 = \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_2^3}{\mathrm{d}t} - q_1 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \left(\frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right].$$

Notînd cu Φ_1, Φ_2, Φ_3 trei soluţii independente ale ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\mathrm{d}^3\Phi}{\mathrm{d}t^3} - p_2 \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}t^2} - q_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} - r_2 \Phi = 0,$$

din (10) rezultă

$$v'^1 = c\Phi_1 + c^2 \Phi_2 + c^3 \Phi_3.$$

Cu această valoare, din (6) și (9) deducem

$$v^2 = c^1 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1 \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}} + c^2 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2 \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}} + c^3 \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \Phi_3 \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}}$$

$$v^3 = c^1 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - q_1 \Phi_1}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} + c^2 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - q_1 \Phi_2}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}} +$$

$$+ c^3 \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2} - p_1 \dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - q_1 \Phi_3}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}}.$$

Presupunînd că funcțiile Φ_1, Φ_2 și Φ_3 satisfac condițiile

$$\Phi_1(0) = 1,\ \Phi_2(0) = \Phi_3(0) = 0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(p_1 \frac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t} + q_1\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(p_1 \frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}\right)_0, \left(\frac{\mathrm{d}^2\Phi_3}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}s_3^2}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

și notînd

$$\alpha_1 = \Phi_1,\ \beta_1 = \Phi_2,\ \gamma_1 = \Phi_3,\ \alpha_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} - \Phi_1 \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}},$$

$$\beta_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} - \Phi_2 \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}},\ \gamma_2 = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} - \Phi_3 \dfrac{\mathrm{d}s_1^1}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}s_2^1}{\mathrm{d}t}},$$

$$\alpha_3 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_1}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_1}{dt} - q_1 \Phi_1}{\dfrac{ds_2^1}{dt}\,\dfrac{ds_3^2}{dt}}, \quad \beta_3 = \frac{\dfrac{d^2\Phi_2}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_2}{dt} - q_1 \Phi_2}{\dfrac{ds_2^1}{dt}\,\dfrac{ds_3^2}{dt}}, \quad \gamma_3 = $$

$$= \frac{\dfrac{d^2\Phi_3}{dt^2} - p_1 \dfrac{d\Phi_3}{dt} - q_1 \Phi_3}{\dfrac{ds_2^1}{dt}\,\dfrac{ds_3^2}{dt}},$$

unde punctul $P(t)$ parcurge o curbă închisă oarecare C, atunci grupul de olonomie al spațiului A_3 este

$$v'^i = \alpha_i v^1 + \beta_i v^2 + \gamma_i v^3, \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{11}$$

Deci, dacă $ds_3^1 = 0$, $ds_2^1 \neq 0$, $ds_3^2 \neq 0$, $(ds_1^3)^2 + (ds_2^3)^2 \neq 0$, spațiul A_3 are ca grup de olonomie omogen grupul (11) sau un subgrup al acestuia.

Grupul (11) nu are nici o varietate invariantă.

Într-un sistem de variabile, condițiile de mai sus se scriu

$$\Gamma_{3i}^1 = 0,\ (i = 1,\ 2,\ 3),\ \sum_{k=1}^{3} (\Gamma_{2k}^1)^2 \neq 0,\ \sum_{k=1}^{1} (\Gamma_{3k}^2)^2 \neq 0,\ \sum_{k=1}^{3} [(\Gamma_{1k}^3)^2 + (\Gamma_{2k}^3)^2] \neq 0.$$

Dacă $ds_j^i \neq 0$, $(i \neq j = 1,\ 2,\ 3)$ obținem grupurile (8) sau (11).

Primită la redacție la 3 octombrie 1965

Centrul de statistică
matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. A. Liber, *La classification des espaces à connexion affine à deux dimensions.* Mat. Sbornik, **27** (1950).
2. G. Vrănceanu, *Leçons de géométrie différentielle.* vol. III, Bucarest, 1964.

ELEMENTE DE TEORIA FASCICULELOR (III)

DE

NICOLAE POPESCU

CAPITOLUL IV

TOPOLOGII ȘI FASCICULE

Capitolul de față, cel de-al patrulea din seminarul „Elemente de teoria fasciculelor", conține conceptul de topologie Grothendieck și de fascicule. Pentru studiul acestor noțiuni se folosește printre altele și conceptul de localizare pentru poziții. Prezentarea materialului cît și multe din rezultate sînt originale.

INTRODUCERE

Conceptul de topologie într-o categorie a fost degajat de Grothendieck cu ocazia unor studii de geometrie algebrică. Astfel, noțiunea de morfism plat în categoria inelelor dă naștere la o topologie. În cursul expunerii cititorul va face cunoștință cu multe exemple de topologii. Dezvoltarea conceptului de topologie a fost făcută de elevii lui Grothendieck, în special Mike Artin și Jean Louis Verdier. În capitolul de față vom dezvolta în detaliu conceptele fundamentale ale noțiunilor de topologie și fascicul. Se dau exemple și multe aplicații ale acestor concepte. Expunerile acestui capitol au fost făcute în cadrul seminarului de către Duma Andrei, Niță Constantin și Bădescu Lucian. Redactarea în versiunea de față aparține autorului.

§ 1. CIURURI

Ca peste tot, fixăm un univers U, convenabil; toate categoriile sînt U-categorii pînă la mențiunea contrarie. Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ functorul canonic; conform propoziției 1.11, h este deplin fidel și comută

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 4, P. 547–533, BUCUREȘTI, 1966

cu limitele proiective reprezentabile din $\mathcal{C}$; h stabilește o echivalență între $\mathcal{C}$ și o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}^\wedge$; dacă $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, notînd încă cu X obiectul $hX \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\wedge$, vom spune : X este un obiect al lui $\mathcal{C}$ și vom înțelege simultan pe X în $\mathcal{C}$ și în $\mathcal{C}^\wedge$.

Categoria $\mathcal{C}^\wedge$ este foarte apropiată de categoria Ens ; reamintim că în $\mathcal{C}^\wedge$ se pot face limite inductive și proiective oarecare ; tehnica de lucru în $\mathcal{C}^\wedge$ este „pe componente".

DEFINIȚIA 4.1. *Fie* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; *numim ciur peste* X, *sau încă ideal drept al lui* X, *un subobiect al functorului* X $(= h\,X)$.

A descrie un ciur peste X revine la a da o subcategorie plină R' a lui $\mathcal{C}/X$, astfel că dacă $(Y, f) \in \mathrm{Ob}\,R'$, și $g : Z \to Y$, este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci $(Z, f \circ g) \in \mathrm{Ob}\,R$; într-adevăr, dacă $i : R \to X$ este un ciur peste X, atunci considerăm categoria : $\mathcal{C}/R$; pentru orice obiect $(Y, f) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/R$, $(Y, i \circ f) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/X$; e clar că obiectele (X', g) din $\mathcal{C}/X$ pentru care g se poate factoriza prin R formează o subcategorie plină în $\mathcal{C}/X$, astfel că dacă $(Y, f) \in \mathrm{Ob}\ \mathrm{R}'$, și $g : Z \to Y$, este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci $(Z, f \circ g)$ Ob R. Invers, dacă $\mathcal{C}_1$ este o subcategorie plină în $\mathcal{C}/X$, astfel că dacă $(Y, f) \in \mathrm{Ob}\,R'$, și $g : Z \to Y$, este un morfism din $\mathcal{C}$, $(Z, f \circ g) \in \mathrm{Ob}\,R'$, atunci putem considera subfunctorul $i : R \to X$ definit astfel : pentru orice $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $R\,(Z)$ este submulțimea lui $X(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ formată din toate morfismele de la Z la X care se pot factoriza prin $\mathcal{C}_1$ (sau din $\mathcal{C}_1$).

Ciururile peste un obiect X le vom nota cu litere mari R, J, I. Vom spune că R este un ciur peste X (sau încă, o rafinare a lui X) și vom nota aceasta astfel : $R \to X$; vom spune că $(X, f) \in R$, R fiind un ciur peste X, dacă $f : Y \to X$ și încă (Y, f) este un obiect al subcategoriei pline a lui $\mathcal{C}/X$, definită de R.

Fie $i : R \to X$ un ciur peste X ; evident că R coincide cu limita inductivă a subcategoriei pline notată încă R a lui $\mathcal{C}/X$; cu alte cuvinte, $R = \varinjlim X_\alpha$, cu $(X_\alpha, f) \in \mathcal{C}/R$.

DEFINIȚIA 4.2. *Fie* $R \to X$ *un ciur peste* X; *vom spune că* R *este generat de familia* $(X_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ *de obiecte din* $\mathcal{C}/X$ *dacă și numai dacă pentru orice* $(X, g) \in R$, $g = f_\alpha \circ g$ *cu* $g_1 : Y \to X_\alpha$, *pentru un* α *convenabil.*

Dacă I este formată dintr-un singur element, atunci R se zice un ciur principal. În acest caz, orice obiect $(Y, g) \in R$, se factorizează prin f. R este generat de (X, f) adică $g = f \circ g_1$ cu $g_1 : Y \to X$. Evident, în acest caz, R este un obiect cît al lui X (privit în categoria $\mathcal{C}^\wedge$) și dacă $p : X \to R$ este aplicația cît, atunci $i \circ p = f$ este o descompunere a lui f_1 în $\mathcal{C}^\wedge$, ca un produs între un monomorfism urmat de un epimorfism.

Evident, fiind dată o familie $(X_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ de obiecte din $\mathcal{C}/X$, există un ciur, cel mai mic, care conține toate aceste obiecte și anume ciurul generat de aceste obiecte.

Din interpretarea care se dă ciururilor peste un obiect, observăm că are sens noțiunea de reuniune și intersecție de ciururi. De asemenea, dacă $R \to X$ este un ciur peste X și $f : Y \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci notăm cu $(R : f)$ ciurul $X\Pi_X R \to Y$ (produsul fibrat făcîndu-se în $\mathcal{C}^\wedge$. Evident că $(R : f)$ este ciurul peste Y format din toate obiectele (Z, g), cu

$(Z, g) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/Y$ şi astfel că $(Z, f \circ g) \in R$. Vom numi $(R : f)$ *desantul* sau *coborîrea* lui R relativ la f.

Evident că obiectul X din $\mathcal{C}$ este conul final al diagramei $\mathcal{C}/X$, deoarece aceasta conţine pe $(X, 1_X)$; există şi alte ciururi $R \to X$ astfel încît X să fie conul final al diagramei respective ; un astfel de ciur se numeşte *strict*. Dacă $R \to X$ este un ciur astfel că pentru orice $f : Y \to X$ morfism din $\mathcal{C}$, $(R : f) \to Y$ este un ciur strict, atunci R se zice *strict universal*.

Fie $p : X \to Y$ un morfism din $\mathcal{C}$; vom spune că p este un epimorfism efectiv, dacă există în $\mathcal{C}$ produsul fibrat :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "p"] & \\ X\Pi_Y X \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

iar p este conucleul cuplului (u, v). De aici se deduce că p este un epimorfism, iar pătratul din (*) este simultant cartezian şi cocartezian.

Morfismul $p : X \to Y$ se zice *epimorfism efectiv universal*, dacă pentru orice morfism $f : X' \to Y$ produsul fibrat $X\Pi_Y X'$ există şi morfismul canonic : $f : X\Pi_Y X' \to X'$ este un *epimorfism efectiv*.

Ciurul generat de un epimorfism efectiv este evident un ciur strict şi invers, dacă $p : X \to Y$ este astfel că $X\Pi_Y X \rightrightarrows X$ există, iar ciurul generat de p este efectiv, atunci p este un epimorfism efectiv. La fel se întîmplă lucrurile pentru un *epimorfism efectiv universal*.

§ 2. TOPOLOGII

DEFINIŢIA 4.3. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Admitem că pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ s-a dat o familie $J(X)$ de ciururi peste X, astfel că următoarele axiome sînt verificate.*

T_1. *Pentru orice $X \in Ob\,\mathcal{C}$, $J(X) \neq \emptyset$.*

T_2. Pentru orice $R \in J(X)$ *şi $f : Y \to X$ morfism din $\mathcal{C}$, $(R : f) \in J(Y)$ oricare ar fi $f \in \mathrm{Fl}\,\mathcal{C}$.*

T_3. *Dacă R_1, $R_2 \in J(X)$ şi dacă $(R_2 : f) \in J(Y)$ pentru orice $(Y, f) \in R_1$, atunci $R_2 \in J(X)$.*

Vom spune atunci că asocierea : $X \rightsquigarrow J(X)$ dă o topologie Grothendieck pe $\mathcal{C}$, sau simplu o topologie. Vom nota cu τ o topologie pe $\mathcal{C}$, iar o pereche $(\mathcal{C}, \tau)$ formată dintr-o categorie şi o topologie pe $\mathcal{C}$ se zice o poziţie sau sit. Dacă $\mathcal{C}$ este U-categorie mică, se zice că $(\mathcal{C}, \tau)$ este U-sit-mic, sau un sit aparţinînd lui U.

Iată cîteva consecinţe ale conceptului de topologie mai sus definit.

CONSECINŢA 1. *Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ o poziţie şi $X \in Ob\,\mathcal{C}$; notăm cu $J_\tau(X)$ sau $J(X)$ toate ciururile peste X din topologia respectivă ; un obiect din $J(X)$ se va numi τ-acoperitor sau acoperitor. Dacă R_1, R_2 sînt două ciururi peste X, τ-acoperitoare, atunci $R_1 \cap R_2$ este încă τ-acoperitor.*

Demonstraţie. Fie $R = R_1 \cap R_2$; atunci pentru orice $(Y, f) \in R_1$, $(R : f) = (R_2 : f)$ deoarece dacă $(Z, g) \in (R : f)$, atunci $(Z, f \circ g) \in R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$.

Invers, dacă $(Z, g) \in (R_2 : f)$, atunci $(Z, f \circ g) \in R$ şi $(Z, f \circ g) \in R_2$, deci $(Z, f \circ g) \to R$. Aşadar, conform cu T_3, $R \in J(X)$.

CONSECINŢA 2. *Dacă* $(\mathcal{C}, \tau)$ *este un sit şi* $R \to X$ *este o* τ*-rafinare a lui* X, *iar* $R' \subseteq R$ *este un ciur peste* X, *atunci* R' *este o* τ*-rafinare.*

Demonstraţia, este imediată, deoarece, pentru orice $(Y, f) \in R$, $(R' : f) = (R : f)$.

DEFINIŢIA 4.4. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie şi* τ_1, τ_2 *două topologii pe* $\mathcal{C}$; *fie pentru* $X \in Ob\,\mathcal{C}$, $J_i(X)$ *rafinările lui* X *în topologia* τ_i $i = 1, 2$. *Vom spune că* $\tau_1 \leqslant \tau_2$ *dacă pentru orice* $X \in Ob\,\mathcal{C}$, $J_1(X) \subseteq J_2(X)$.

Relaţia introdusă în familia topologiilor lui $\mathcal{C}$ este evident de ordine parţială. Remarcăm ca cea mai puţin fină topologie, ca fiind cea pentru care singura rafinare a lui X este ciurul generat de 1_X pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; cea mai fină topologie este cea pentru care orice ciur este acoperitor. Prima se zice topologia grosieră, iar ultima topologia discretă sau haotică. Dacă excludem conceptul de topologie haotică, atunci intervine conceptul de topologie maximală sau ultratopologie. Cu o variantă mai tare a lemei lui Zorn putem dovedi că orice topologie ce nu este cea haotică este conţinută într-o ultratopologie.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ o familie de topologii pe $\mathcal{C}$ indexată de un element al lui U. Notăm cu $\tau = \bigcap \tau_\alpha$, topologia pentru care rafinările unui obiect X sînt $\bigcap\limits_{\alpha \in I} J_\alpha(X)$, cu $J_\alpha(X) = J_{\tau_\alpha}(X)$, rafinările lui X în topologia τ_α. Evident, τ, în felul acesta, este o topologie şi ea este cea mai fină topologie pe $\mathcal{C}$, mai puţin fină ca toate topologiile $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$ date. Cu ajutorul conceptului de intersecţie de topologii, putem defini topologia generată de o familie arbitrară de ciururi; mai precis, fie că, pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$, s-a dat o familie nevidă $J'(X)$ de ciururi; atunci există o cea mai puţin fină topologie pentru care $J'(X)$ sînt rafinări pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Tot cu ideea de intersecţie de topologii, există o cea mai puţin fină topologie, mai fină ca toate topologiile $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in I}$, date pe $\mathcal{C}$.

§3. EXEMPLE DE TOPOLOGII

a) Fie categoria Ens şi pentru orice obiect X fie $J'(X)$ toate epimorfismele de adresă X şi $J(X)$ familia generată de epimorfismele de adresă X. Asocierea $X \rightsquigarrow J(X)$ dă o topologie pe Ens. Pentru a dovedi aceasta, observăm că în Ens există produse fibrate reprezentabile şi desantul unui epimorfism este încă un epimorfism. Dacă $R \to X$ este un ciur peste X şi $\overline{R} = \varinjlim R$ (limita inductivă făcută în Ens), atunci $f : \overline{R} \to X$ este un epimorfism, şi ciurul principal generat de f este egal cu ciurul R. Acest fapt este valabil într-o categorie oarecare în care există limite inductive.

b) Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$ multiplicativ stabil (adică S conţine toate izomorfismele lui $\mathcal{C}$ şi compunerea a două morfisme din S este încă în S, dacă are sens). Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, notăm cu $J_S(X)$ toate ciururile $R \to X$, astfel că pentru orice $f : Y \to X$, morfism din $\mathcal{C}$, există $s \in S$, astfel că $s : Z \to Y$ şi $(Z, f \circ s) \in R$. Asocierea $X \rightsquigarrow J_S(X)$

dă o topologie pe $\mathcal{C}$, numită topologia multiplicativă asociată cu S. Pentru a dovedi aceasta observăm că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $J_S(X)$ este nevidă; fie apoi $R \to X$ un ciur peste X astfel că $R \in J_S(X)$ şi $f: Y \to X$; atunci $(R:f) \in J_S(Y)$. Pentru aceasta fie $g: Z \to Y$. Atunci există $s: T \to Z$, $s \in S$ cu $(T, f \circ g \circ s) \in R$. Dar atunci $(T, g \circ s) \in (R: f)$. Fie, pentru a isprăvi, că $R \in J_S(X)$ şi $R_1 \to X$ este un ciur peste X cu $(R:f) \in J_S(Y)$, pentru orice $(Y, f) \in R$ şi fie $g: Z \to X$ un morfism din $\mathcal{C}$. Există $s_1 \in S$. $s: T \to Z$ cu $(T, g \circ s_1) \in R$. Dar atunci $(R_1 : g^\circ\ s_1) \in J_S(T)$. Atunci există $s_2 \in S$, $s_2 : K \to T$, cu $(K, 1_T \circ s_2) \in (R: g \circ s)$. Dar atunci $(K, g \circ s_1 \circ s_2) \in R_1$ şi $s_1 \cdot s_2 \in S$.

Observăm că orice ciur din topologia mai sus construită conţine un ciur principal generat de un element din S (deoarece pentru $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi $R \to X$, $R \in J_S(X)$, există $s \in S$, $s: Y \to X$, cu $(Y, 1_X \circ s) = (Y, s) \in R$); faptul invers nu-i adevărat în general; avem însă următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 4.5. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi S un sistem multiplicativ stabil al său; următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

a) *pentru orice $s \in S$, $s: Y \to X$, ciurul peste X generat de (Y, s) este acoperitor în topologia τ_S (descrisă mai sus).*

b) *Pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ şi orice ciur peste X ce conţine un morfism din S, este acoperitor în topologia τ_S.*

c) *Sistemul S este permutabil.*

Demonstraţie. Implicaţiile a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) sînt imediate. Fie a); atunci pentru orice $f: Y \to X$ şi $s: Z \to X$, există $s_1 \in S$, $s_1 : T \to Y$ cu $f \circ s_1 = s \circ g$, $g: T \to Z$; aşadar a) $\Rightarrow$ c).

Fie c); atunci pentru $s: Y \to X$, $s \in S$ şi $f: Z \to X$, există $s_1 : T \to Z$, $s_1 \in S$ şi $g: T \to Y$, cu $f \circ s_1 = s \circ g$ de unde rezultă că ciurul generat de (Y, s) este acoperitor în topologia τ_S.

c) DEFINIŢIA 4.6. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie. O pretopologie pe $\mathcal{C}$ se obţine prin a se da pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ un ansamblu $Cov(X)$ de familii de morfisme de adresă X, astfel că următoarele axiome sînt verificate.*

P.T.0) *Pentru orice obiect X al lui C, şi orice $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \in Cov(X)$, morfismele f_α, sînt quarabile; aceasta înseamnă că pentru orice $f: Y \to X$ morfism din C, există produsul fibrat $Y \Pi_X X_\alpha$ în $\mathcal{C}$ cu $f_\alpha : X_\alpha \to X$, pentru orice $\alpha \in I$.*

P.T. 1) *Pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ şi orice familie $(f_\alpha : X_\alpha \to X)$ din $Cov(X)$, şi orice morfism $f: Y \to X$ din $\mathcal{C}$, familia canonic construită $(X_\alpha \Pi_X Y \to Y)_{\alpha \in I}$ este în $Cov(Y)$.*

Această axiomă exprimă stabilitatea în raport cu schimbarea bazei.

P.T. 2) *Dacă $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ este în $Cov(X)$, $f_\alpha : X_\alpha \to X$, şi dacă pentru orice $\alpha \in I$, $(f_{\beta_\alpha} : X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha)_{\beta_\alpha \in I_\alpha}$ este în $Cov(X_\alpha)$, atunci familia $(g_{\beta_\alpha} : X_{\beta_\alpha} \to X)$, cu $g_{\beta_\alpha} = f_{\beta_\alpha} \circ f_{\beta_\alpha}$ este în $Cov(X)$.*

Această axiomă exprimă caracterul local sau stabilitatea la compunere.

P.T. 3) *Familia $\{1_X\}$ este în $Cov(X)$ pentru orice $X \in Ob\ \mathcal{C}$.*

Observaţie. Axioma P.T. 3) *se poate înlocui cu aceea că $Cov(X)$ este nevidă pentru orice $X \in Ob\ \mathcal{C}$.*

PROPOZIŢIA 4.7. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi E o pretopologie pe $\mathcal{C}$. Notăm, pentru orice X din $Ob\ \mathcal{C}$, cu $J(X)$ toate ciururile peste X care conţin un ciur* *generat de o familie* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *din Cov* (X). *Asocierea* $X \rightsquigarrow J(X)$ *dă o topologie pe* $\mathcal{C}$, *cea mai puțin fină topologie în care toate ciururile generate de familiile din Cov* (X) *pentru orice* $X \in Ob\ \mathcal{C}$ *sînt acoperitoare.*

Demonstrație. Trebuie să verificăm axiomele topologiei. Verificarea lui T_1) rezultă din P.T. 3).

Fie $R \to X$ un ciur din $J(X)$ și $\{f_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$ un element din Cov (X) astfel că R conține ciurul $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ generat de morfismele $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in I$. Dacă $f : Y \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci ciurul $(R : f)$ conține ciurul generat de familia $\{f'_\alpha : Y\ \Pi_X\ X_\alpha \to Y\}_{\alpha\in I}$, care este în Cov (Y).

Fie acum $R \in J(X)$ și $R_1 \to X$ un ciur peste X astfel că $(R_1 : f) \in J(Y)$, pentru orice $(Y, f) \in R$.

Dacă $\{f_\alpha : X_\alpha \to X\}_{\alpha\in I}$ este un element din Cov (X) conținut în ciurul R, atunci $\{R_1 : f_\alpha\} \in J(X_\alpha)$ pentru orice $\alpha \in I$ și deci există $\{f_{\beta_\alpha} : X_{\beta_\alpha} \to X_\alpha\}_{\beta_\alpha \in I_\alpha}$ un element din Cov (X) conținut în $\{R : f\}$ pentru orice $\alpha \in I$. Atunci $(X_{\beta_\alpha}, f_\alpha \circ f_{\beta_\alpha}) \in R_1$ și deci familia $\{X_{\beta_\alpha}, f_\alpha \circ f_{\beta_\alpha}\}_{\beta_\alpha \in \underset{\alpha\in I}{\Pi} I_\alpha}$ este în R_1. Deci R_1 este în $J(X)$.

E clar că dacă într-o topologie τ pe $\mathcal{C}$ toate ciururile generate de familiile din Cov(X) sînt acoperitoare pentru orice $X \in$ Ob $\mathcal{C}$, atunci această topologie este cel puțin mai fină ca cea de mai sus.

d) Cu ajutorul celor de mai sus sîntem în măsură să punem în evidență foarte multe topologii în diverse categorii. Fie, spre exemplu, $\mathcal{C}$ categoria Top; pentru $X \in$ Ob $\mathcal{C}$ notăm cu Cov (X) ansamblul format din perechi $f : E \to X$, cu proprietatea că pentru orice $x \in E$, există o vecinătate U a lui x astfel că restricția lui f la U să fie un omeomorfism. O astfel de pereche definește un fascicul de mulțimi peste X, mai precis, spațiul etalat al oricărui fascicul este de tipul de mai sus. Evident, verificarea axiomelor PT.0) — P.T. 3) este imediată și deci, în felul acesta, noi obținem o topologie pe Top.

e) Fie din nou categoria Top; pentru $X \in$ Ob Top notăm cu Cov (X) toate morfismele $f : Y \to X$ care sînt fibrări Serre; aceasta înseamnă că pentru orice poliedru finit K și orice subpoliedru al său, K', în diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

în care i este incluziunea canonică, există un morfism $\alpha : K \to Y$ în Top cu $f \circ \alpha = p$ și $\alpha \circ i = q$. Fibrările Serre se pot defini în raport cu o clasă de spații topologice, și se poate ușor dovedi valabilitatea axiomelor P.T. 0)—P.T. 3). Să verificăm spre exemplu P.T.1. Fie deci $f : Y \to X$, cu $(f : Y \to X) \in$ Cov (X) și $p : Z \to X$. Considerăm diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "i"'] & Z\Pi_X Y \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "f'"] & Y \arrow[d, "f"] \\
K \arrow[r, "q"] & Z \arrow[r, "p"] & X
\end{tikzcd}$$

în care K este un poliedru şi K' un subpoliedru al său iar i incluziunea canonică. Fie $u : K \to Y$ cu $f \circ u = p \circ q$ şi $p' \circ q' = u \circ i$; există $u_1 : K \to Z\Pi_X Y$, cu $f' \circ u = q$ şi $p' \circ u = u$. Atunci $u \circ i = p' \circ u_1 \circ i = p' \circ q$, dar q' şi $u_1 \circ i$ sînt două morfisme de la K' în $Z\Pi_X Y$ cu proprietatea că $p' \circ q' = p' \circ u_1 \circ i$ şi $f' \circ u_1 \circ i = q \circ i = f' \circ g'$. Aşadar din definiţia produsului fibrat avem că $u_1 \circ i = q'$.

f) Fie $\mathcal{C}$ categoria inelelor comutative şi cu element identitate; pentru orice $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, notăm cu $P(A)$ toate morfismele de sursă A şi plate: un obiect (f, B) se află în $P(A)$ dacă şi numai dacă functorul $? \otimes_A B : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$ este exact. (Mod A este categoria modulelor unitare peste A). Dacă $(f, B) \in P(A)$ şi $g : A \to C$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci în diagrama cocarteziană:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"] & C \otimes_A B
\end{tikzcd}$$

avem că $(f', C \otimes_A B) \in P(B)$. Într-adevăr, dacă a este un ideal din C, şi $i : a \to C$ este monomorfismul canonic, avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
(B \otimes_A C) \otimes_C a \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\wr"'] & (B \otimes_A C) \otimes_C C \arrow[d, "\wr"'] \\
B \otimes_A (C \otimes a) \arrow[r] & B \otimes_A (C \otimes_A C)
\end{tikzcd}$$

de unde deducem că $i = C \otimes_A B \otimes i$ este un monomorfism.

Din faptul că compunerea a două morfisme plate este un morfism plat, deducem următoarele:

Fie Sc h categoria schemelor afine; un obiect din Sc h este o pereche $(\mathrm{Spec}\, A, \tilde{A})$ cu $\mathrm{Spec}\, A$ spectrul prim al inelului A dotat cu topologia lui Zariski iar $\tilde{A}$ fasciculul structural, morfismele din categoria Sc h sînt cele locale, adică perechi (f, g) cu f aplicaţie continuă şi g morfism de fascicule ale cărui componente pe fibre sînt morfisme de inele locale. Din faptul că categoria inelelor este duală cu categoria schemelor afine, deducem că asocierea $A \rightsquigarrow P(A)$, de mai sus, defineşte în categoria schemelor afine o pretopologie.

g) Fie X un spaţiu topologic; notăm cu $\mathcal{D}$ sau cu $\mathcal{D}(X)$ dacă nu este pericol de confuzie, categoria ale cărui obiecte sînt deschişi lui X iar drept morfisme incluziunile; mai precis, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, V) = 0$ dacă $U \not\subset V$ şi este formată dintr-un element dacă $U \subset V$. În categoria $\mathcal{D}$ există limite inductive oarecare şi limite proiective finite (respectiv, reuniunea şi intersecţia de mulţimi deschise). Pentru orice $U \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$ notăm cu $\mathrm{Cov}(U)$ toate familiile de obiecte $\{V_\alpha \to U\}_{\alpha \in I}$ cu $\sup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha = U$. Imediat, se dovedeşte că asocierea $U \rightsquigarrow \mathrm{Cov}(U)$ defineşte o pretopologie pe $\mathcal{D}$. Importanţa acestei pretopologii va fi evidenţiată în cele ce urmează.

Mai observăm că conceptul de topologie Grothendieck este substanţial diferit de cel de „topologie" definit în mod curent în matematică; conceptul de topologie conduce la conceptul de topologie Grothendieck, şi aceasta rezidă în aceea că importante în topologia algebrică sînt acoperirile cu mulțimi deschise, fapt care este bine evidențiat în definiția topologiei Grothendieck de mai sus. Din faptul că în $\mathcal{D}$ există limite inductive oarecare, pentru a descrie o topologie Grothendieck din $\mathcal{D}$, este suficient ca în $\mathcal{D}$ să se pună în evidență pentru orice deschis U, o mulțime de deschiși $C(U) = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ astfel că pentru orice $V \subset U$, $U_\alpha \cap V \in C(V)$, pentru orice $\alpha \in I$ și din aceea că pentru $V_\alpha \in C(U)$, $V \subset U$, $V \cap U_\alpha \in C(V)$ să deducem că $V \in C(U)$.

Alte multe exemple vom vedea la momentul oportun precum și în paragraful ce urmează.

§ 4. FASCICULE DE MULȚIMI

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit; în toate cele ce urmează prin ciur vom înțelege ciur acoperitor în topologia τ a lui $\mathcal{C}$.

DEFINIȚIA 4.8. *Fie* (C, τ) *un sit. Un prefascicul* F *peste* $\mathcal{C}$ *se zice separat dacă pentru orice ciur acoperitor* $i : R \to X$, *aplicația canonică, indusă de* i:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F)$$

este pentru orice $X \in Ob\ \mathcal{C}$ *un monomorfism din Ens. Vom spune că* F *este un fascicul dacă* i *este, pentru orice* $X \in Ob\ \mathcal{C}$, *o bijecție.*

Subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ ale cărei obiecte sînt fascicule se va numi categoria fasciculelor de mulțimi peste $(\mathcal{C}, \tau)$.

PROPOZIȚIA 4.9. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie și* $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *o familie de obiecte din* $\mathcal{C}$. *Notăm, pentru orice obiect* X *al lui* $\mathcal{C}$, *prin* $J(X)$ *ansamblul tuturor ciururilor* $i : R \to X$ *astfel că pentru orice* $f : Y \to X$ *morfisme din* $\mathcal{C}$, *morfismul canonic* $i : (R : f) \to Y$ *are proprietatea că aplicația indusă*

$$\bar{i} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y, F_\alpha) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}((R : f), F)$$

este bijectivă (injectivă), pentru orice $\alpha \in I$.

În aceste condiții, asocierea : $X \rightsquigarrow J(X)$ *dă o topologie pe* $\mathcal{C}$, *topologie în raport cu care toate prefasciculele* F_α, $\alpha \in I$ *sînt fascicule (prefascicule separate).*

Demonstrație. E vorba de verificat axiomele $T_1) - T_3)$ din definiția topologiei. Verificarea lui T_1 și T_2 este imediată, căci, dacă $R \in J(X)$ și $f : Y \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci $(R : f) \in J(Y)$ deoarece dacă $g : Z \to Y$ este un alt morfism din $\mathcal{C}$, atunci $((R : f) : g) = (R : f \circ g) \in J(Z)$.

Fie acum R și R' două ciururi peste X cu $R \in J(X)$, și pentru orice $(Y, f) \in R$, $(R' : f) \in J(Y)$; trebuie dovedit că $R' \in J(X)$. Dovedim mai întîi că $R \cap R' = R_1 \in J(X)$ și apoi dovedim că dacă $R_1 \subset R'$ și $R_1 \in J(X)$, atunci neapărat $R' \in J(X)$. Fie deci $f : Y \to X$, $(X, f) \in R_1 \subseteq R$. Atunci $(R_1 : f) = (R' : f) \in J(X)$. Observăm că $R_1 = \varinjlim_{(Y,f) \in R} [(Y, f)]$, unde cu (Y, f)

am notat ciurul generat de f; așadar, pentru orice $\alpha \in I$, avem $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim_{(Y,f)\in R} (R : f), F_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim_{(Y,f)\in R} (R' : f), F_\alpha) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(Y,f)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}((R' : f), F_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F_\alpha)$, deci $R_1 \in J(X)$.

Avem în $\mathcal{C}^\wedge$ diagrama :

$$\begin{tikzcd}
(R_1 : f) \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "f"] & \\
R_1 \arrow[r, "j"] & R' \arrow[r, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

în care $(Y, f) \in R'$. Atunci, deoarece $(R_1 : f) \in J(Y)$, deducem că pentru orice $\alpha \in I$ și orice h, g: $R' \to F_\alpha$, din aceea că $h \circ j = g \circ j$, deducem că $h \circ f' = g \circ f'$, pentru orice $(Y, f) \in R'$. Atunci, deoarece $R' = \varinjlim_{(Y,f)\in R'} (Y, f)$, avem că $h = g$. Atunci deoarece pentru orice $\alpha \in I$, avem diagrama :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F_\alpha) \xrightarrow{\bar{i}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R', F_\alpha), \xrightarrow{\bar{j}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F_\alpha)$$

în care $\bar{j} \circ \bar{i}$ este izomorfism ; deducem că $\bar{j}$ este epimorfism și din cele de mai sus, este monomorfism. Așadar $\bar{j}$ este izomorfism și încă, i este. Aceste fapte rămîn stabile de schimbarea bazei, deoarece limitele inductive din $\mathcal{C}^\wedge$ sînt universale c.c.t.d.

Din cele de mai sus obținem un prețios procedeu de a pune în evidență topologii într-o categorie. Vom vedea la momentul oportun că de fapt orice topologie într-o categorie este de tipul celei indicate de propoziția de mai sus.

Din cele demonstrate putem deduce ușor următoarea :

PROPOZIȚIA 4.10. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie și pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$, fie dat ansamblul $K(X)$ de ciururi peste X. Admitem că asocierea $X \rightsquigarrow K(X)$ este stabilă la schimbarea bazei. Pentru ca un prefascicul F să fie fascicul (respectiv prefascicul separat) pentru topologia generată de familiile $K(X)$ de mai sus, este necesar și suficient ca pentru orice X din $\mathcal{C}$ și orice $R \to X$, ciur peste X cu $R \in K(X)$, aplicația canonică :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F)$$

să fie o injecție (respectiv bijecție).

Demonstrație. Fie $J(X)$ ciururile acoperitoare ale lui X în topologia generată de ciururile date. Deoarece este necesar ca $K(X) \sqsubseteq J(X)$, condiția este în mod evident necesară. Pentru a proba suficiența vom considera $R \in J(X)$ și fie $R' \in K(X)$. Atunci $R \cap R' = R \Pi_X R' = (\varinjlim_{(Y,f)\in R} Y) \Pi_X R' = \varinjlim_{(Y,f)\in R} (Y \Pi_X R')$.

Așadar:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R\cap R', F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim_{(Y,f)\in R}(Y\Pi_X R'), F) \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(Y,f)\in R'} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}((Y\Pi_X R'), F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(E,f)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y, F) \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim_{(Y,f)\in R} Y, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F).$$

Așadar, este suficient să dovedim că $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F)$ pentru orice ciur din $J(X)$ ce este conținut într-un ciur din $K(X)$. Fie deci $R_1 \in K(X)$ și $R \in J(X)$, $R \subseteq R_1$. Dar $R = \varinjlim_{(Y,f)\in R} Y$ și încă $R\Pi_X R_1 = R$.

Așadar

$$R = R\,\Pi_X R_1 = (\varinjlim_{(Y,f)\in R} Y)\,\Pi_X R_1 = \varinjlim_{(Y,f)\in R}(Y\,\Pi_X R_1) = \varinjlim_{(Y,f)\in R}(R_1 : f).$$

Deci

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim_{(Y,f)\in R}(R_1 : f), F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(Y,f)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}((R_1 : f), F) \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(Y,f)\in R} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F).$$

Aceasta deoarece, pentru orice $(Y, f) \in R_1$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}((R_1 : f), F)$. q.e.d.

Propoziția de mai sus este direct legată de faptul că pentru fasciculele clasice, putem să definim un fascicul doar pe o bază de deschiși. Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie dotată cu o pretopologie E și fie τ topologia generată. Prefasciculul F este fascicul pentru topologia τ dacă și numai dacă, orice ar fi $(X_\alpha \to X)$ din Cov (F), diagrama:

$$F(X) \to \prod_{\alpha\in I} F(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta)\in I\times I} F(X_\alpha \Pi_X X_\beta)$$

construită canonic, este exactă. Într-adevăr, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F) = F(X)$ și în plus, pentru orice $R \to X$ ciur din τ generat de un element din Cov (X), $(f_\alpha : X_\alpha \to X)$ avem că $R = \varinjlim X_\alpha$. Dar în categoria R/X (privim pe R ca o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}/X$) sînt îndeplinite cerințele propoziției 1.42. Așadar, avem izomorfismul:

$$\varprojlim F(X_\alpha) = \mathrm{Ker}\,(\prod_{\alpha\in I} F(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha,\beta)\in I\times I} F(X_\alpha \Pi_X X_\beta))$$

și

$$\varprojlim F(X_\alpha) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim X_\alpha, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F).$$

§ 5. TOPOLOGIA CANONICĂ

Definiția 4.11. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Numim topologia canonică pe $\mathcal{C}$, cea mai fină topologie pentru care functorii reprezentabili sînt fascicule.* Un ciur acoperitor pentru topologia canonică îl vom numi epimorfic strict universal. O familie de morfisme care generează un ciur acoperitor în topologia canonică se va numi familie epimorfică strict universală; dacă, în plus, morfismele familiei sînt şi quarabile, atunci familia se zice epimorfică efectiv universală.

Evident, un ciur $R \to X$ este epimorfic strict, dacă X este conul final al diagramei dată de R: $R \to X$ este epimorfic strict universal dacă pentru orice $f : Y \to X$ morfism din $\mathcal{C}$, $(R : f) \to Y$ este un ciur epimorfic strict. Un ciur generat de o familie epimorfică efectiv universală se zice epimorfic efectiv universal.

Propoziția 4.12. *Pentru ca ciurul $R \to X$ să fie epimorfic efectiv universal, este necesar și suficient ca aplicația canonică*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightleftarrows \varprojlim_{(A, f) \in R} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(Y \Pi_X A, Z)$$

(pentru (A, f) din familia ce generează pe R) să fie o bijecție.

Demonstrația este imediată.

Din cele de mai sus se deduce că ciurul generat de un epimorfism efectiv universal este efectiv strict universal.

§ 6. TOPOLOGII ÎN CATEGORII SPECIALE

Fie $\mathcal{D}$ o categorie concretă şi $S : \mathcal{D} \to \mathrm{Ens}$, functorul subiacenţă; admitem că acest functor admite un adjunct la stînga, functorul „structură liberă''. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu $\mathcal{D}$-structură (Cap. II, definiţia 2.4). Admitem că functorul canonic $l : \mathcal{C} \to \mathrm{Fonct}\ (\mathcal{C}^0, \mathcal{D})$ este deplin fidel, adică $\mathcal{C}$ este o categorie cu $\mathcal{D}$-structură forte. Admitem de asemenea că $\mathcal{D}$ este o categorie cu limite inductive şi proiective. În aceste condiţii, observăm că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, un ciur peste X se defineşte ca fiind un subobiect al lui $l\,X \in \mathrm{Ob}\ \overline{\mathcal{C}}\ (\overline{\mathcal{C}} = \mathrm{Fonct}\ (\mathcal{C}^0, \mathcal{D}))$. Putem să dezvoltăm în categorii cu $\mathcal{D}$-structură, multe din conceptele de mai sus. De fiecare dată însă vom indica precis natura faptelor. Să considerăm spre exemplu un inel A cu element identitate şi ca de obicei fie $\mathcal{C}_A$ categoria A-modulelor drepte şi unitare. Un ciur peste A este un subobiect al lui A_d, adică un ideal drept. O topologie Grothendieck pe A constă în a se da o familie F de ideale drepte ce satisfac axiomele $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_3$ din definiţia topologiei. Un astfel de sistem este numit de Pierre Gabriel „sistem topologizant şi indepotent''; rezervînd denumirea de sistem topologizant pentru un sistem F ce satisface axiomele T_1, T_2 şi axioma : $T'_3 \cdot F$ conţine o dată cu un ideal şi orice supra ideal al său şi odată cu două ideale şi intersecţia lor.

După cum vom vedea mai departe, există o strînsă legătură între „topologiile'' ordinare pe inelul A (faţă de care A este inel topologic) şi topologiile Grothendieck pe A.

Observație. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu $\mathcal{D}$-structură; noi putem considera categoria $\mathcal{C}^\wedge$ și putem face toate considerațiile de mai sus, rămîne însă să observăm că subobiectele lui $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ în categoria $\mathcal{C}^\wedge$ nu sînt aceleași cu cele din categoria $\overline{\mathcal{C}}$. Așa spre exemplu dacă A este un inel cu identitate, atunci categoria $A^\wedge$ este categoria mulțimilor pe care A acționează contravariant (A considerat ca un monoid) și atunci un ciur din A este un ideal drept al lui A considerat ca un monoid Q, adică o submulțime a lui A stabilă la multiplicare și stabilă la multiplicarea în dreapta cu elementele din A. Diferența este evidentă. Remarcăm încă că în cazul categoriilor cu $\mathcal{D}$-structură, apar multe chestiuni de ordin special. Nu vom dezvolta o teorie generală, ci vom căuta să prezentăm fiecare fapt în detaliu atunci cînd va fi cazul.

§ 7. MORFISME ACOPERITOARE ȘI BIACOPERITOARE

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit, $\mathcal{C}^\wedge$ categoria prefasciculelor peste $\mathcal{C}$ și $m : N \to K$ un morfism din $C^\wedge$.

DEFINIȚIA 4.13. a) *Morfismul* m *se zice* acoperitor *dacă morfismul* $\mathrm{Im}\ m \to K$, *are proprietatea că pentru orice* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, *și pentru orice morfism* $f : X \to K$, *subobiectul* $\mathrm{Im}\ m\ \Pi_K X$ *al lui* X *este un ciur acoperitor.*

b) *Morfismul* m *se zice* biacoperitor *dacă* m *este acoperitor și în plus morfismul diagonal*:

$$\Delta : H \to H\ \Pi_K\ H$$

este acoperitor.

PROPOZIȚIA 4.14. *Fie* $m : H \to K$ *din* $\mathcal{C}^\wedge$ *și* $p : L \to K$ *morfisme din* $\mathcal{C}^\wedge$; *fie* $m' : L\ \Pi_K\ H \to L$ *desantul lui* m. *În aceste condiții dacă* m *este acoperitor atunci și* m' *este*; *dacă* m *este biacoperitor atunci și* m' *este biacoperitor.*

Demonstrație. Fie diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Im}\ m\ \Pi_K\ Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
H\ \Pi_K\ L \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & \mathrm{Im}\ m\ \Pi_K\ L \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & L \arrow[d] \\
H \arrow[r, "j"] & \mathrm{Im}\ m \arrow[r, "i"] & K
\end{tikzcd}$$

cu $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Evident, raționînd ca și în Ens, $i' \circ j' = m'$ și aceasta este o descompunere a lui m' într-un monomorfism precedat de un epimorfism și deci $\mathrm{Im}\ m\ \Pi_K\ L = \mathrm{Im}\ m'$. Mai observăm că $(\mathrm{Im}\ m\ \Pi_K\ L)\ \Pi_L\ Y = \mathrm{Im}\ m\ \Pi_K Y$ și deci m' este acoperitor. Fie acum că $m : H \to K$ este biacoperitor și fie $h : L \to K$ un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$. Avem diagrama comutativă, canonic construită:

$$\begin{tikzcd}
H\ \Pi_K\ L \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "I"] & (H\ \Pi_K\ L)\ \Pi_{H\Pi_K L}\ (H\ \Pi_K\ L) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & H\ \Pi_K\ L \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, "h"] \\
H \arrow[r, "\Delta"] & H\ \Pi_K\ H \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & H \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

în care Δ este acoperitor şi Δ' este diagonala lui $H\Pi_K L$. Pentru a termina demonstraţia rămîne să dovedim că pătratul I este cartezian. Pentru aceasta vom observa că Δ este nucleul cuplului de săgeţi (u, v) ; acest fapt este valabil în Ens şi deci şi în $C^\wedge$. Un mic calcul justifică totul.

Noţiunile de morfism acoperitor şi biacoperitor joacă un rol important în teoria fasciculelor, vom da acum criterii de recunoaştere ale acestor morfisme, precum şi unele proprietăţi ale lor.

PROPOZIŢIA 4.15. *Fie $m : H \to K$ un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :*

i) *m este acoperitor ;*

ii) pentru orice $X \in Ob\ \mathcal{C}$ şi orice morfism $X \to K$ din $C^\wedge$, există diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[r] & X \arrow[d] \\
G \arrow[ur] \arrow[r] & H \arrow[r, "m"] & K
\end{tikzcd}$$

cu $R \to X$ ciur acoperitor al lui X şi $G \to R$ epimorfism în $\mathcal{C}^\wedge$.

Avem de asemenea echivalenţa :

i') *m este biacoperitor ;*

ii'') *m este acoperitor şi pentru orice cuplu de săgeţi $u, v : G \rightrightarrows H$, cu $mu = mv$ există morfismul acoperitor $i : R \to G$ cu $u \circ i = v \circ i$ (fapt echivalent cu aceea că nucleul cuplului (u, v) este acoperitor).*

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii), este imediat din definiţia morfismului acoperitor. Pentru a dovedi implicaţia ii) $\Rightarrow$ i), considerăm diagrama comutativă, canonic construită :

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{Im}\ m\Pi_K X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dd, "g"] & & X \arrow[dd, "f"] \\
G \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[rrr, "\beta"] \arrow[dr, "a"'] & & & R \arrow[ur, "\alpha"] & \\
& H \arrow[r, "p"] & \mathrm{Im}\ m \arrow[rr, "i"] & & K
\end{tikzcd}$$

Cum $f \circ \alpha \circ \beta = m \circ a$, implică că există unic φ cu : $pa = g\varphi$ şi $\psi \circ \varphi = \alpha \circ \beta$. Deci $\mathrm{Im}\ \psi\varphi = \mathrm{Im}\ \alpha\beta = \mathrm{Im}\ \alpha = R$ căci β este epimorfism şi R este ciur acoperitor (deci subfunctor al lui h_X). Rezultă : $\mathrm{Im}\ \psi \supseteq R$; deci şi $\mathrm{Im}\ \psi$ este acoperitor, dar cum ψ e monomorfism implică : $\mathrm{Im}\ m\Pi_K X \to X$ este acoperitor.

i) $\Rightarrow$ ii). Fie m biacoperitor, deci şi acoperitor.

Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] & H\Pi_K H \arrow[r] \arrow[ddr, "v"'] & H \arrow[dr, "m"] & \\
& & & K \\
H\Pi G \arrow[uu] \arrow[r, "i"] & G \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[uur, "u"] \arrow[r] & H \arrow[ur, "m"'] & \\
H\Pi_K H & & &
\end{tikzcd}$$

Observăm că Δ este monomorfism acoperitor ceea ce implică : i monomorfism şi acoperitor.

ii) $\Rightarrow$ i). Într-adevăr, diagrama

$$H \xrightarrow{\Delta} H\,\Pi_K\,H \rightrightarrows H \xrightarrow{m} K$$

este exactă, căci pentru orice morfism $f : A \to B$ din Ens avem diagrama exactă :

$$A \xrightarrow{\Delta} A \Pi_B A \rightrightarrows A$$

fapt ce se dovedeşte imediat. Deci Δ este acoperitor şi astfel propoziţia este demonstrată.

Observaţie. Am folosit constant următoarele fapte :

a) Dacă $R \supseteq R'$ şi R' este un ciur acoperitor, atunci şi R este.

b) Diagonala face diagrama de mai sus exactă, proprietate caracteristică lui Ens (şi în general categoriile concrete), falsă în general.

Exemplu. Fie $\mathcal{C}$ o categorie în care produsele fibrate sînt reprezentabile şi $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Fie $m : H \to X$ un morfism biacoperitor din $\mathcal{C}^\wedge$, pentru o topologie pe $\mathcal{C}$. Fie $H = \varinjlim_{\alpha\in I} X_\alpha$ cu $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Atunci familia $(m \circ v_\alpha : X_\alpha \to X)$ este acoperitoare. Într-adevăr, ciurul generat de ea în $\mathcal{C}^\wedge$ coincide cu imaginea lui m în X şi deci este acoperitor. Deducerea acestui fapt este următoarea : fie $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ şi $R \to X$ imaginea lui m în X care este un ciur acoperitor : dacă $f : Y \to X$ este în R, atunci deoarece R este un cît al lui H se deduce că există în $H(Y)$ un element g, cu $v(g) = f$,

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "u"'] & & X \\
& R \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Dar există şi un $\alpha \in I$, cu $\varphi_\alpha : X_\alpha(Y) \to H(Y)$ şi $h : Y \to X$, cu $\varphi_\alpha(h) = g$; adică $f = \mu \circ \varphi_\alpha(h)$, $h : Y \to X_\alpha$. Dar din felul cum este definit i, avem că $f = (m \circ v_\alpha)(h) = u_\alpha \circ h$, unde $u_\alpha : X_\alpha \to X$ sînt canonic date de $m \circ v_\alpha$.

Mai mult, m fiind biacoperitor, nucleul cuplului

$$X_\alpha \Pi_X X_\beta \rightrightarrows H \to X$$

este un ciur acoperitor al lui $X_\alpha \Pi_X X_\beta$ după proprietatea anterioară şi deci biacoperitor, căci un monomorfism acoperitor este, evident, şi biacoperitor. Aşadar ciurul sus-numit este generat de o familie

$$s_{\alpha\beta\gamma} : X_{\alpha\beta\gamma} \to X_\alpha \Pi_X X_\beta$$

(adică este limita lor inductivă).

Notăm $w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\alpha} = pr_\alpha \circ s_{\alpha\beta\gamma} : X_{\alpha\beta\gamma} \to X_\alpha$.

Aşadar am construit următoarele, pentru m :

a) O familie de obiecte X_α.

b) Pentru orice cuplu (α, β), o familie de morfisme :

$$\begin{tikzcd}
& X_\alpha \\
X_{\alpha\beta\gamma} \arrow[ur, "w_{\alpha\beta\gamma,\alpha}"] \arrow[dr, "w_{\alpha\beta\gamma,\beta}"'] & \\
& X_\beta
\end{tikzcd}$$

c) Pentru orice α, un morfism : $v_\alpha : X_\alpha \to H$.

În aceste condiții sînt valabile următoarele afirmații : $v_\alpha \circ w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\alpha} = v_\beta \circ w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\beta}$.

2) H este limita inductivă a obiectelor (și morfismelor) $(X_\alpha, X_{\alpha\beta\gamma}, w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\alpha}, w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\beta})$ căci $H = \varinjlim X_\alpha$.

3) Familia $(m \circ v_\alpha : X_\alpha \to X)$ este acoperitoare (fapt arătat mai sus).

4) Pentru orice cuplu (α, β), familia $(X_{\alpha\beta\gamma} \to X_\alpha \Pi_X X_\beta)$ este acoperitoare (de asemenea, din cele de mai sus).

Invers, admitem că se dau următoarele :

1′) O familie acoperitoare : $(u_\alpha : X_\alpha \to X)$.

2′) Pentru orice cuplu (α, β), o familie de morfisme

$$\begin{tikzcd}
 & X_\alpha \\
Y_{\alpha\beta\gamma} \arrow[ur, "w_{\alpha\beta\gamma,\alpha}"] \arrow[dr, "w_{\alpha\beta\gamma,\beta}"'] & \\
 & X_\beta
\end{tikzcd}$$

cu $u_\alpha \circ w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\alpha} = u_\beta \circ w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\beta}$ și astfel că $X_{\alpha\beta\gamma} \to X_\alpha \Pi_X X_\beta$, dedusă canonic, să fie acoperitoare.

În aceste condiții, morfismul canonic de la limita inductivă a familiei $(X_\alpha, X_{\alpha\beta\gamma}, w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\alpha}, w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\beta})$ în X este biacoperitor.

Într-adevăr, fie H limita inductivă sus-numită și $m : H \to X$ morfismul canonic. Evident că Im m este chiar ciurul generat de $\{X_\alpha \overset{v_\alpha}{\to} X\}$ (căci observăm că $\varinjlim X_\alpha = \varinjlim (X_\alpha, X_{\iota\beta\gamma}, w_{\alpha\beta\gamma\,.\,\iota})$ este acoperitor. Rămîne să dovedim că $\Delta : H \to H \Pi_X H$ este acoperitor. Dar mai avem șirul exact

$$H \xrightarrow{\Delta} H \Pi_X H \overset{i}{\underset{j}{\rightrightarrows}} H.$$

Pentru $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ și $l : Y \to H \Pi_X H$, există diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \Pi_X Y \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, dashed, "\gamma_\alpha"] & H \Pi_{H\Pi_X H} Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "l"] & X_\alpha \Pi_X Y \arrow[r, "\gamma_\alpha"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[d, "l"] \\
X_\alpha \arrow[r, "v_\alpha"] & H \arrow[r, "\Delta"] & H \Pi_X H \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & H \arrow[r, "m"] & X \\
 & & & & X_\alpha \arrow[ul, "v_\alpha"] \arrow[u, "u_\alpha"']
\end{tikzcd}$$

$i \circ \Delta = j \circ \Delta = 1_H$ și $r = m \circ i \circ l = j m \circ j \circ l$

Dar familia $X_\alpha \Pi_X Y \to Y$ este acoperitoare și $r \circ v_\alpha = m \circ i \circ l \circ \gamma_\alpha = u_\alpha \circ p_\alpha = m \circ v_\alpha \circ p_\alpha = m \circ i \circ \Delta \circ v_\alpha \circ p_\alpha$.

Dar putem considera pe m ca fiind monomorfism și deci i, j sînt monomorfisme, așadar $m \circ i$ este monomorfism. Deci $l \circ \gamma_\alpha = \Delta \circ v_\alpha \circ p_\alpha$. Fie $h_\alpha : X_\alpha \Pi_X Y \to H \Pi_{H\Pi_X H} Y$, definit prin compunerea morfismelor $X_\alpha \Pi_X Y \to X_\alpha \Pi_{H\Pi_X H} Y \to Y$.

Deoarece familia $\{\gamma_\alpha : X_\alpha \Pi_X Y \to Y\}$ este acoperitoare, se deduce că imaginea lui $H \Pi_X Y \to Y$ este acoperitoare, căci conține imaginea familiei $(X_\alpha \Pi_X Y \to Y)$.

Exemplu concret. Fie E un spațiu topologic; considerăm categoria, notată încă E, ale cărei obiecte sînt deschișii lui E; dacă U, V sînt două obiecte din E, $\mathrm{Hom}_E(U, V)$ este format dintr-un element dacă și numai dacă $U \subseteq V$. În restul cazurilor, este mulțimea vidă. Categoria E este evident cu produse filtrate reprezentabile; produsul fibrat $U_1 \to V \leftarrow U_2$ este, după cum se vede imediat, $U_1 \cap U_2$. A da deci o topologie pe E, este suficient ca pentru orice $V \in \mathrm{Ob}\, E$ să definim o familie de submulțimi (evident deschise) care sînt ereditare și cu proprietatea că dacă $V_1 \subset V$ și $U_i \to V$ este un astfel de „ciur", atunci $U_i \cap V$ este încă un ciur. Cititorul va putea automat verifica că în E orice morfism este un monomorfism iar o bijecție este izomorfism. Mai mult, a da pentru orice obiect $V \in \mathrm{Ob} E$ familia tuturor „acoperirilor" sale, revine la a descrie de fapt topologia canonică a lui E. Mai precis formulat (în contextul de mai sus), pentru a da un morfism acoperitor de la H la U, $U \in \mathrm{Ob}\, E$, revine la a da:

1) O familie de submulțimi deschise ale lui U astfel că ele generează un ciur „acoperitor" în U (adică reuniunea lor este o rafinare a lui U în topologia în cauză).

2) Pentru orice U_α, U_β din familia respectivă, $U_\alpha \cap U_\beta$ este acoperită de familia de deschiși și $U_{\alpha\beta\gamma}$.

Atunci în E, morfismul de la $\varinjlim U_\alpha \to U$ este biacoperitor etc.

Trecem acum la a studia cîteva chestiuni foarte importante legate de morfismele acoperitoare și biacoperitoare.

PROPOZIȚIA 4.16. *Ansamblul morfismelor acoperitoare din* $\mathcal{C}^\wedge$ *posedă următoarele proprietăți*:

a) *Morfismele acoperitoare sînt stabile la schimbarea bazei.*

b) *Ansamblul morfismelor acoperitoare este stabil la compunerea morfismelor.*

c) *Izomorfismele sînt acoperitoare.*

Demonstrație. Este suficient să dovedim b). Într-adevăr, fie $u : F \to G$ și $v : G \to H$ două morfisme acoperitoare.

Să dovedim că $v \circ u$ este acoperitor.

Deoarece monomorfismele sînt stabile la schimbarea bazei, putem admite de la început că u este un monomorfism. De asemenea dacă scriem $v = i \circ p$ cu i = monomorfism, p epimorfism, atunci p este acoperitor. Într-adevăr, fie diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "p"] & & H \\
& A \arrow[ur, "i"] & \\
G\Pi_A X \arrow[uu] \arrow[r, "p'"] & X \arrow[u, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

Afirmăm că $G\,\Pi_A X = G\,\Pi_H X$. Într-adevăr, dacă avem diagrama $G \xleftarrow{f} K \xrightarrow{g} X$, cu $vf = i \circ \alpha \circ g$, avem și $i \circ p \circ f = i \circ \alpha \circ g$, deci $pf = \alpha \circ g$, adică există un unic $h : K \to G\,\Pi_A X$ etc. Deci Im $(G\,\Pi_H X \to X)$ este acoperitor. Să considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & G \arrow[r, "v"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & H \\
F \arrow[u] \arrow[r, "u'"'] & G\Pi_H X \arrow[u] \arrow[r, "v'"'] & X \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

în care pătratul I și întregul dreptunghi este cartezian. Rezultă că pătratul II este încă cartezian. Evident că v' este epimorfism și u' este monomorfism. Dar Im v' este acoperitoare și u' un monomorfism acoperitor. Este suficient pentru a termina să observăm că $v' \circ u'$ este acoperitor. Am redus deci problema la cazul : H obiect al lui $\mathcal{C}$ u monomorfism și v epimorfism. Fie atunci diagrama :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] & G \arrow[d, shift left, "v"] \\ R \arrow[u] \arrow[r] & H \arrow[u, shift left, "s"] \end{tikzcd}, \qquad H \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$$

în care s este o secțiune a lui v ($v \circ s = 1_H$). Existența lui s : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}$ $(H, H) \xleftarrow{\overline{v}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}$ (H, G) este imediată : deoarece v este epimorfism, $\overline{v} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}$ (H, v) este un epimorfism și deci există $s : H \to G$ cu $v(s) = = v \circ s = 1_H$. Atunci $p = v \circ u \circ g$ și deci : Im $v \circ u \supseteq$ Im p. Deci Im uv este acoperitor. Totul e gata.

Propoziția 4.17. *Ansamblul morfismelor biacoperitoare din $\mathcal{C}^\wedge$ posedă proprietățile a), b), c) din propoziția precedentă și încă proprietatea : d) Dacă în diagrama comutativă :*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, "u"'] & & G \arrow[dl, "v"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

morfismele u și v sînt biacoperitoare, atunci morfismul w este biacoperitor.

Demonstrație. a) și c) sînt evidente (din cele de mai sus). Dovedim b). Fie v, u biacoperitoare cu $v : G \to H$, $u : F \to G$. Atunci $v \circ u$ este acoperitor. Fie $m, n : K \to F$ cu $v \circ u \circ m = v \circ u \circ n$. Avem deci diagrama :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\,(m \circ i, n \circ i) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i'"'] & \mathrm{Ker}\,(m, n) \arrow[d] & & & \\ \mathrm{Ker}\,(um, un) \arrow[r, "i"] & K \arrow[r, shift left, "m"] \arrow[r, shift right, "n"'] & F \arrow[r, "u"] & G \arrow[r, "v"] & H \end{tikzcd}$$

în care i este acoperitor căci v este biacoperitor.

Deoarece și u este biacoperitor și Ker $(m \circ i, n \circ i) \to$ Ker (um, un) este acoperitor. Rezultă că $i \circ i'$ este acoperitor, adică Ker (m, n) este acoperitor, căci Ker $(m, n) \supseteq$ Im $(i \circ i')$; adică j este monomorfism. Să dovedim condiția d). Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dr, "v"] & \\ F \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "w"] & & G \\ R \arrow[u, "n"] \arrow[rr] & & Y \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd} \qquad Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$$

în care $R = F \Pi_H Y$, deci p este acoperitor (biacoperitor). Avem $v \circ m \circ p = u \circ n = v \circ w \circ n$. Deci Ker (wn, mp) este acoperitor, căci v este biacoperitor : de aici (Ker $(wm, mp) \to R \to Y$) ca o compunere de morfisme acoperitoare este acoperitor. Dar conform propoziției 4.15 de mai sus, se deduce că w este acoperitor (se ia : Ker $(wm, mp) \to X$ pentru *ii*)).

Fie acum $m, n : K \rightrightarrows F$ cu : $w \circ n = w \circ m$. Atunci $vwn = vwm$ și deci $um = un$. Adică Ker $(m, n) \to K$ este acoperitor, căci u este biacoperitor.

Observație. Fie diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u"'] \arrow[d, phantom, shift left=3, "("] & G \arrow[d, "v"] \arrow[dl, "f"'] \\ K \arrow[r, "g"] & L \end{tikzcd}$$

în care u, v sînt biacoperitoare. Atunci w este acoperitor. (Vom folosi ulterior această observație), f este acoperitor căci :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "w"] & G \arrow[r, "f"] & K \\ T_1 \arrow[u] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "epi"] & T_2 \arrow[r] & X \arrow[u] \end{tikzcd}$$

pentru $f \circ w$ avem diagrama anterioară cu $(T_1 \to T_2)$ epimorfism și T_2 ciur acoperitor. f este biacoperitor, căci, fie $T \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} G$ cu $f \circ \alpha = f \circ \beta$; deci $g \circ f \circ \alpha = g \circ f \circ \beta$ adică $v \circ \alpha = v \circ \beta$. Prin urmare Ker $(\alpha, \beta) \to T$ este acoperitor.

Din cele de mai sus deducem că ansamblul B al morfismelor biacoperitoare din $\mathcal{C}^{\wedge}$ permite calculul la dreapta al fracțiilor și este un sistem saturat.

Fie acum $H \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^{\wedge}$; notăm cu $J(H)$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^{\wedge}/H$ formată din monomorfismele acoperitoare de adresă H. Observăm că orice monomorfism acoperitor este și biacoperitor. Dacă notăm cu $J^2(H)$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^{\wedge}/H$ formată din toate morfismele acoperitoare de adresă H, atunci $J(H)$ este o subcategorie plină și cofinală în $J(H)$; într-adevăr, pentru orice $(G, f) \in \mathrm{Ob}\, J^2(H)$ avem diagrama :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & H \\ & \mathrm{Im}\, f \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

cu $(\mathrm{Im}\, f, i) \in J(H)$.

PROPOZIȚIA 4.18. *Categoriile* $J(H)$ *și* $J^2(H)$ *sînt pseudofiltrate la stînga și conexe.*

Demonstrație. Faptul că $J(H)$ și $J^2(H)$ sînt conexe, se deduce din aceea că desantul oricărui monomorfism este un monomorfism și desantul oricărui morfism biacoperitor este încă biacoperitor. Din aceste observații și cu un calcul simplu se deduce complet propoziția 4.18.

Observații. $J^2(H)$ nu este în general o U-categorie, chiar dacă $\mathcal{C}$ este o U-categorie (caz în care considerăm că sîntem totdeauna) ; în schimb $J(H)$ este o U-categorie, deoarece, pentru (H_1, i_1), $(H_2, i_2) \in$

$\in \mathrm{Ob}\ J(H)$, $A = \mathrm{Hom}_{(JH)}((H_1, i_1)\,(H_2, i_2))$ constă din toate morfismele $f : H_1 \to H_2$ cu $i_1 \circ f = i_2$; dar deoarece i este monomorfism, se deduce că mulţimea A este formată dintr-un singur element sau este vidă. Mai mult, dacă $\mathcal{C}$ este un element al lui U, atunci $J(H)$ este U-categorie mică pentru orice $H \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^{\wedge}$. Într-adevăr, în acest caz, obiectele X, $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ formează o mulţime de generatori ai lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ şi deci familia subobiectelor unui obiect este o mulţime (conform cu (1), cap. I) (în cazul de faţă, element al lui U). În cazul că $\mathcal{C}$ este element al lui U, atunci şi $J^2(H)$ este o U-categorie, deoarece $\mathcal{C}^{\wedge}$ este o U-categorie şi deci $C^{\wedge}/H$ este încă o U-categorie, iar $J^2(H)$ este o subcategorie a lui $C^{\wedge}/H$.

§ 8. FASCICULUL ASOCIAT UNUI PREFASCICUL

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit. Ca de obicei, noţiunile de morfism acoperitor, biacoperitor şi fascicul se referă tot timpul la acest sit.

PROPOZIŢIA 4.19. *Fie* $F \in Ob\ \mathcal{C}^{\wedge}$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente.*

i) F *este un fascicul* (*prefascicul separat*);

ii) *Pentru orice morfism biacoperitor* (*acoperitor*) $u : G \to H$, *aplicaţia*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(u, F) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(\mathrm{H}, \mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(\mathrm{G}, \mathrm{F})$$

este o bijecţie de mulţimi (*injecţie*).

Demonstraţie. ii) $\Rightarrow$ i). Într-adevăr, dacă $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi $i : R \to X$ este un ciur acoperitor pentru X, atunci morfismul i este biacoperitor, şi deci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(i, F)$ este o bijecţie de mulţimi (injecţie). Aşadar F este un fascicul.

i) $\Rightarrow$ ii). Putem descompune pe u sub forma $u = u_1 \circ u_2$ cu u_1 monomorfism şi u_2 epimorfism; vom dovedi rezultatul în cauză pentru monomorfism şi epimorfism separat. Fie deci u monomorfism. Fie că $H = \varinjlim_{\alpha \in I} X_\alpha$, cu $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, i fiind o U-categorie mică. Fie şi $\varphi_\alpha :$ $: X_\alpha \to H$ morfismele structurale; atunci avem diagrama comutativă, canonic construită,

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \Pi_H G \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] \arrow[d] & G \arrow[d, "u"] \\
X_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & H
\end{tikzcd}$$

Dar : $\varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha \Pi_H G) = (\varinjlim_{\alpha \in I} X_\alpha)\ \Pi_H G = H\, \Pi_H G = G$. Aşadar :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(G, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(G\, \Pi_H\, H, F) \xrightarrow{\sim}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}((\varinjlim_{\alpha \in I} X_\alpha)\ \Pi_H G, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}\ (\varinjlim_{\alpha \in I} (X_\alpha\, \Pi_H G), F) \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\alpha \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(X_\alpha\, \Pi\, G, F) \to \varprojlim_{\alpha \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(X_\alpha, F)$$

deoarece $X_\alpha \Pi_H G \to X_\alpha$ sînt, pentru orice α, ciururi acoperitoare. Așadar, avem, încă :

$$\varprojlim \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X_\alpha, F) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim_{\alpha \in I} X_\alpha, F) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(H, F).$$

Evident că compunerea tuturor izomorfismelor de mai sus este un izomorfism și egal exact cu $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(u, F)$.

Admitem acum că u este un epimorfism biacoperitor. Atunci avem diagrama exactă :

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} G \Pi_H G \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & G \arrow[r] & H \end{tikzcd}$$

cu α și β proiecțiile canonice. Din diagrama exactă (*) deducem diagrama exactă :

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(H, F) \arrow[r, "\bar{u}"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(G, F) \arrow[r, shift left, "\bar{\alpha}"] \arrow[r, shift right, "\bar{\beta}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(G \Pi_H G, F) \end{tikzcd}$$

cu $\bar{u}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ canonic construiți.

Deoarece u este acoperitor, morfismul diagonal $\Delta : G \to G \Pi_H G$ este un monomorfism acoperitor și deci $\bar{\Delta} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\Delta, F)$ este un izomorfism, conform celor de mai sus ; așadar $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$, deoarece $\bar{\Delta} \circ \bar{\alpha} = \bar{\Delta} \circ \bar{\beta}$. De aici rezultă că $\bar{u}$ este un izomorfism ca nucleul unui cuplu de morfism egale. q.e.d.

În toate cele ce urmează, $(\mathcal{C}, \tau)$ este un sit aparținînd lui U ; $\mathcal{C}^\wedge$ este deci o U-categorie și pentru orice $H \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^\wedge$, $J(H)$ este o categorie element al lui U. Dacă $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, și $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^\wedge$, functorul $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(?, F) \circ I_X$, (unde $I_X : J(X) \to \mathcal{C}^\wedge$ este functorul canonic) este un functor de la o categorie element al lui U în categoria U-Ens și deci există limita sa inductivă pe care o vom nota :

$$LF(X) = \varinjlim_{R \in J(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F)$$

Asocierea $X \rightsquigarrow LF(X)$ este functorială în X și F ; într-adevăr, dacă $u : F \to G$ este un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$, atunci morfismele $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, u)$, $R \in J(X)$, definesc un morfism unic $L(X)(u) : LF(X) \to LG(X)$; dacă $g : X \to X'$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci functorul $g^* : J(X') \to J(X)$ definit în mod canonic și numit functorul „desant" sau schimbarea bazei, definește, conform diagramei comutative :

$$\begin{tikzcd} R' \Pi_{X'} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "g_{R'}"'] & X \arrow[d, "g"] \\ R \arrow[r] & X' \end{tikzcd}$$

un morfism $g_{R'}$ și morfismele $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(g_{R'}, F)$ definesc un morfism unic $LF(g) : LF(X') \to LF(X)$.

Pentru orice $R \in J(X)$ notăm cu Z_R morfismul structural

$$Z_R : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F) \longrightarrow LFX = \varinjlim_{R' \in J(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R', F).$$

În particular, pentru $R = X$, notăm $Z_X = l(F)(X)$. Morfismele $l(F)(X)$ definesc un morfism functorial $l(F) : F \to LF$. În concluzie asocierea :

$$F \rightsquigarrow LF$$

este un functor covariant de la $\mathcal{C}^\wedge$ la $\mathcal{C}^\wedge$, iar morfismele $l(F)$, definesc un morfism functorial $l : \mathrm{Id}\ \mathcal{C}^\wedge \to L$.

Pentru cele ce urmează avem nevoie de următoarele considerații : pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și $R \in J(X)$, morfismul canonic Z_R asociază oricărui morfism $u : R \to F$, elementul $Z_R(u) \in LF(X)$, care de fapt este un morfism de la X la LF, ținînd cont de teorema Yoneda-Grothendieck.

Fie $R \to X$ o rafinare a lui X, și $f : Y \to X$ un morfism ; atunci, următoarea diagramă :

(*)

$$\begin{tikzcd}
Z_R : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, LF) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(f, LF)"] \\
Z_{(R:f)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}((R : f), F) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y, LF)
\end{tikzcd}$$

în mod canonic construită, este comutativă. Mai mult, morfismele Z_R și $l(F)$ verifică cerințele următoarei leme.

LEMĂ. 1) *Pentru orice rafinare* $i_R : R \to X$ *și orice* $u : R \to F$, *diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "l(F)"] & LF \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_R"] & X \arrow[u, "Z_R(u)"']
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

2) *Pentru orice morfism* $v : X \to LF$, *există o rafinare* R *a lui* X *și un morfism* $u : R \to F$ *astfel că* $Z_R(u) = v$.

3) *Fie* $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *și* $u, v : Y \rightrightarrows F$ *două morfisme astfel încît* $l(F) \circ u = l(F) \circ v$. *Atunci nucleul cuplului* (u, v) *este o rafinare a lui* Y.

4) *Fie* R, R' *două rafinări ale lui* X, $u : R \to F$ *și* $u' : R' \to F$ *două morfisme. Pentru ca* $Z_R(u) = Z_{R'}(u')$, *e necesar și suficient ca* u *și* u' *să coincidă pe o rafinare* $R'' \to R \,\Pi_X\, R'$ *(a lui* X*).*

Demonstrație. 1) Fie $f : Y \to R$ cu $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, deci $f : Y \to X$ și $f \in R$, adică $f = i_R \circ g$, cu $g : Y \to R$ un morfism în $\mathcal{C}^\wedge$. Avem diagrama

(*)

$$\begin{tikzcd}
R \Pi Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "g"'] \\
R \arrow[r, "i_R"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "Z_R(u)"] \\
F \arrow[r, "l(F)"] & LFX
\end{tikzcd}$$

deoarece i_R este monomorfism și i' este monomorfism $g \circ i' = g'$ și deci i' este izomorfism. Avem deci :

$Z_R(u) \circ f \circ i' = Z_R(u) \circ i_R \circ g' = Z_R(u) \circ i_R \circ g \circ i'$ adică $Z_R(u) \circ f = Z_R(u) \circ i_R \circ g$, $u \circ g' = u \circ g : \; Y \to F$; din diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y,F) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(i,F)"] \arrow[dr, "l(F)"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R\Pi_X Y, F) \arrow[dl, "Z_{R\Pi_X Y}"] \\
& LF &
\end{tikzcd}$$

deducem .

$$Z_{R\Pi_Y Y} \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(i', F)\,(u \circ g) = Z_{R\Pi_X Y}(u \circ g \circ i') =$$

$$= Z_{R\Pi_X Y}(u \circ g') = l(F)\,(u \circ g) = l(F) \circ u \circ g.$$

Dar din diagrama (*), avem

$$Z_R(u) \circ f = Z(R:f)\,(u \circ g') = Z(R:f)\,(u \circ g) = l(F) \circ u \circ g.$$

deci: $Z_R(u) \circ i_R \circ g = l_F \circ u \circ g$, pentru orice $g : Y \to R$.

În concluzie, deoarece $R = \varinjlim\,(Y \to R)$ avem că $Z_R(u) \circ i_R = l(F) \circ u$.

2) Din definiţia lui $LF(X)$ ca $\varinjlim\limits_{R \in J(X)} \mathrm{Hom}\,(R, F)$, rezultă că există $R \xrightarrow{i_R} X$, şi $\alpha : R \to F$, cu $Z_R(\alpha) = v$; avem deci diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "i_R"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \arrow[d, "v"] \\
F \arrow[r, "l(F)"] & LR
\end{tikzcd}$$

3) Dacă $u, \; v : \; Y \rightrightarrows F$, cu $l(F) \circ u = l(F) \circ v$, atunci există $i_R : R \to Y$, şi $\alpha : \; R \to F$, cu $Z_R(\alpha) = l(F) \circ u = l(F) \circ v$. Prin urmare $Z_R(u \circ i_R) = Z_R(v \circ i_R) = Z_R(\alpha)$. Există R' cu: $u \circ i_R = v \circ i_R$, (folosind diagrama comutativă):

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & LF \\
R \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "i_R"'] & Y \arrow[u, "Z_R(\alpha)"'] \arrow[ul, shift left, "u"] \arrow[ul, shift right, "v"']
\end{tikzcd}$$

4) Evident, din definiţia lui $LF(Y)$ ca limita inductivă a aplicaţiilor $Z_R : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F) \to \varinjlim\limits_{R \in J(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F)$.

PROPOZIŢIA 4.20. 1) *Pentru orice prefascicul* F, *morfismul* $l(F) : F \to LF$ *este biacoperitor.*

2) *Functorul* L *comută cu limitele proiective finite.*

3) LF *este un prefascicul separat.*

4) *Dacă* F *este separat, atunci morfismul* $l(F) : F \to LF$ *este un monomorfism şi* LF *este fascicul.*

De asemenea dacă $l(F): F \to LF$ *este un monomorfism,* F *este un prefascicul separat și* LF *este un fascicul.*

5) *Următoarele proprietăți sînt echivalente :*

i) $l(F): F \to LF$ *este izomorfism.*

ii) F *este un fascicul.*

Demonstrație. 1) Este suficient să dovedim că $l(F)$ este acoperitor și să aplicăm punctul 3) din propoziția 4.19, căci, fie $H \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} F \xrightarrow{l(F)} LF$ cu $l(F) \circ u = l(F) \circ v$; să probăm că morfismul canonic : $\mathrm{Ker}\,(u, v) \to H$ este acoperitor. Observăm că $H = \varinjlim X_\alpha$, $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ și deci

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\,(u \circ f_\alpha, v \circ f_\alpha) \arrow[r, "\theta_\alpha"] \arrow[dr] & X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & H \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & F \arrow[r, "l(F)"] & LF \\
& \mathrm{Ker}\,(u, v) \arrow[ur, "\theta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Cum θ_α este acoperitor conform punctului 3) din lemă, rezultă că : $\varinjlim \theta_\alpha$ este morfism acoperitor și deci θ este acoperitor. Dar dacă $u: X \to LF$ este un morfism în $\mathcal{C}^\wedge$, atunci, din punctul 2) al lemei deducem că avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "l(F)"] & LF \\
R \arrow[u, "v"] \arrow[r, "i_R"'] & X \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

și deci un morfism $\alpha: R \to F \Pi_{LF} X$ ceea ce arată că $F \Pi_{LF} X \to X$ este acoperitor.

2) Rezultă din faptul că functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, ?)$ comută cu limitele proiective și din aceea că în U-Ens limitele inductive filtrate și conexe sînt exacte (comută cu produsul fibrat sau, ceea ce e același lucru, cu limitele proiective finite) iar $J(X)$ este filtrată și conexă, conform propoziției 4.18.

3) Fie $i_R : R \to X$ o rafinare a lui X; să arătăm că $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, LF) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, LF)$ este o injecție. Fie $f, g: X \rightrightarrows LF$ cu $f \circ i_R = g \circ i_R$. Există (conf. lemei, punctul 2)) R', o rafinare a lui X și $u, v: R' \rightrightarrows F$ cu $Z_{R'}(u) = f, Z_{R'}(v) = g$ și $l(F) \circ u = Z_{R'}(u) \circ i_{R'}$, $l(F) \circ v = Z_{R'}(v) \circ i_{R'}$. Deci diagrama următoare este comutativă :

$$\begin{tikzcd}
i_R : R \arrow[r] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & LF \\
i_{R''} : R'' \arrow[r, "i_{R''}"] & R' \arrow[u, "i_{R'}"] \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & F \arrow[u, "l(F)"']
\end{tikzcd}$$

Așadar $l(F)\circ u = l(F)\circ v$ și prin urmare cum $l(F)$ este biacoperitor, rezultă că $R'' = \mathrm{Ker}\,(u, v) \to R'$ este acoperitor, deci : R'' este o rafinare a lui X și conform lemei, punctul 4), avem : $f = g$.

4) Fie F separat ; atunci :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F)$$

este, pentru orice $i_R : R \to X$ rafinare a lui X, monomorfism. La limită :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, LF)$$

este un monomorfism. Așadar $l(F) : F \to LF$ este un monomorfism (căci limitele inductive filtrate și conexe sînt exacte în Ens).

Să dovedim că LF este un fascicul. Fie $R \to X$ o rafinare a lui X, și $u : R \to LF$ un morfism. Trebuie dovedit că u se factorizează prin X, adică că avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "i_R"] \arrow[dr, "u"'] & & X \arrow[dl, "v"] \\
& LF &
\end{tikzcd}$$

Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[rr, "l(F)"] & & LF & \\
F \Pi_{LF} R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & R' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "\beta"] & & R \arrow[u, "u"'] \arrow[r, "i"] & X \arrow[ul, dashed, "v"']
\end{tikzcd}$$

Avem : $u\circ\beta = l(F)\circ\alpha$ (β este monomorfism și R' este ciur acoperitor pentru X). Fie $v : X \to LF$ cu $v\circ i\circ\beta = l(F)\circ\alpha = u\circ\beta$. Dar LF este separat și deci $v\circ i = u$. LF este deci fascicul.

Fie $l(F)$ monomorfism. Atunci, deoarece LF este separat, rezultă F (ca un subprefascicul al unui prefascicul separat) este încă separat. Așadar LF este fascicul.

5) i) $\Rightarrow$ ii) evident din 4) ; ii) $\Rightarrow$ i) conform definiției lui L.

Observație. Fie $J'(X)$ un subansamblu cofinal din $J(X)$; atunci

$$LF(X) = \varinjlim_{R\in J'(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F).$$

Acest fapt este evident, căci familia ciururilor acoperitoare pentru un obiect X al lui $\mathcal{C}$ este filtrată inferior.

În particular, dacă topologia pe $\mathcal{C}$ este definită de o pretopologie $X \rightsquigarrow \mathrm{Cov}\,(X)$, functorul L se poate descrie doar de familiile acoperitoare din $\mathrm{Cov}\,(X)$. Cititorul poate să refacă în felul acesta construcția clasică a fasciculelor.

Notăm în cele ce urmează cu $\mathcal{C}^\sim$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^\wedge$ formată din fascicule (evident relativ la situl $(\mathcal{C}, \tau)$ în jurul căruia se fac toate considerațiile). Fie $i : \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}^\wedge$ functorul „incluziune” de la subcategoria plină a fasciculelor la categoria prefasciculelor.

PROPOZIȚIA 4.21. *Fie* $(\mathcal{C}, \tau)$ *un sit aparținînd lui* U ; *atunci functorul* $i : \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ *admite un adjunct la stînga, notat* a *și care comută cu limitele proiective finite. Functorul* $i \circ a$ *este canonic izomorf cu functorul* $L \circ L$. *Pentru orice obiect* X *din* $\mathcal{C}$, *există un izomorfism functorial în* F *și* X :

$$(i \circ a F)(X) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{Y \in J^2(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(Y, F)$$

care dă o nouă descriere a lui $L \circ L$.

Pentru orice $F \in \mathcal{C}^{\wedge}$, *obiectul* $i \circ a F$ *din* $\mathcal{C}^{\wedge}$ *se va numi „fasciculul asociat cu prefasciculul* F".

Demonstrație. Primele 3 afirmații rezultă imediat din propoziția precedentă. Rămîne deci de demonstrat ultima afirmație. Morfismul de adjuncție $\psi : \operatorname{Id} \mathcal{C}^{\wedge} \to i \circ a$ ne furnizează pentru orice $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\wedge}$ un morfism functorial :

$$\underset{? \in J^2(X)}{\underset{\rightsquigarrow}{\lim}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(?, F) \to \underset{? \in J^2(X)}{\underset{\rightsquigarrow}{\lim}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(?, i \circ \alpha F)$$

Există un univers V care conține pe U și astfel că în V-Ens, cei doi functori de mai sus sînt reprezentabili. Notăm ca de obicei prin $\varinjlim_{? \in J^2(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(?, F)$ și $\varinjlim_{? \in J^2(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(?, i \circ a F)$ mulțimile ce reprezintă acești functori (care nu sînt necesar U-mulțimi însă sînt sigur V-mulțimi). Există și aplicația :

$$p : \varinjlim_{? \in J^2(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(?, F) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(X, i \circ aF)$$

definită canonic.

a) p este surjectivă ; într-adevăr, morfismul de adjuncție ψ_F este biacoperitor. Fie deci $X \to i \circ aF$ un morfism

Avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \psi_F : F \arrow[r] & i \circ aF \end{tikzcd} , \quad H = X \Pi_{i \circ aF} F$$

cu $H \to X$ biacoperitor, ceea ce arată că p este epimorfism, din definiția lui $\varinjlim_{? \in J^2(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(?, F)$.

b) p este injectivă. Fie u_1, u_2 două morfisme biacoperitoare de la două obiecte H_1, H_2 astfel încît să avem diagrama :

$$\begin{tikzcd} & & H_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[dl, "u_1"] & X \arrow[dd, "v"] \\ H_2 \arrow[urrr, "\alpha_2"'] \arrow[dr, "u_2"'] & & & \\ & F \arrow[rr] & & i \circ aF \end{tikzcd}$$

cu $\psi_F \circ u_1 = v \circ \alpha_1$, $\psi_F \circ u_2 = v \circ \alpha_2$. Din ea obținem diagrama :

$$\begin{tikzcd}
H_3 = H_1 \Pi_X H_2 \arrow[r] \arrow[d, shift right, "u'_1"'] \arrow[d, shift left, "u'_2"] & X \arrow[d, "v"] \\
\psi_F : F \arrow[r] & i \circ aF
\end{tikzcd}$$

cu $\psi_F \circ u'_1 = \psi_F \circ u'_2$.

Deoarece ψ_F este biacoperitor, Ker (u'_1, u'_2) este acoperitor. Avem deci diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
H_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_1 \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
& H_2 \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[d] \\
& \psi_F : F \arrow[rr] & & i \circ aF
\end{tikzcd}$$

cu $(H_i \to X)$, $i = 1, 2, 3$ morfisme biacoperitoare. Așadar u_i au aceeași imagine în limita inductivă $\varinjlim\limits_{? \in J^2(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(?, F)$. Restul rezultă imediat.

PROPOZIȚIA 6.25. *Fie* $\mathcal{C}$ *un sit aparținînd lui* U *și* $u : G \to H$ *un morfism din* $\mathcal{C}^\wedge$. *Afirmațiile următoare sînt echivalente* :

i) u *este biacoperitor.*

ii) *Pentru orice fascicul* F *aplicația* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(u, F) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(H, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(G, F)$ *este bijecție.*

iii) $a(u)$ *este izomorfism.*

Demonstrație. Noi știm că functorul $i : \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}^\wedge$ este deplin fidel, ceea ce arată direct (grație adjuncției lui i cu a) că ii) $\Leftrightarrow$ iii). Pentru a dovedi că iii) $\Rightarrow$ i), considerăm diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "u"] \arrow[d] & H \arrow[d] \\
i \circ aG \arrow[r, "\sim"] & i \circ aH
\end{tikzcd}$$

în care săgețile verticale sînt biacoperitoare. Deducem direct din propoziția 4.19 că u este un morfism biacoperitor.

Rămîne de dovedit i) $\Rightarrow$ ii). Aceasta rezultă de altfel dintr-o propoziție anterioară. Vom da și o demonstrație directă. Fie deci $f \circ g : H \rightrightarrows F$ cu $f \circ u = g \circ u$. Putem admite că u este un monomorfism. Fie $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și $h : X \to H$. Atunci $G \Pi_H X \overset{u'}{\to} X$ este un ciur biacoperitor și $f \circ h \circ u' = g \circ h = u'$. Dar F fiind fascicul, se deduce imediat că $f \circ h = g \circ h$. Dar X este arbitrar și de asemenea h. Deducem deci ($H = \varinjlim X_\alpha$, $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$) că $g = f$.

Fie acum $f : G \to F$ un morfism și $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

Fie $h : X \to M$ și $u' : G \Pi_H X \to X$. Atunci, dacă $v : G \Pi_H X \to G$ este morfismul canonic, avem, din faptul că u' este biacoperitor, că există $v' : X \to F$ (deoarece F este fascicul) astfel că $v' \circ u' = f \circ v$. Dacă $h : X \to H$

şi $p : X \to X'$ cu $h' \circ p = h$, atunci, din diagrama comutativă, canonic construită.

$$\begin{tikzcd}
G\Pi_H X \arrow[rrr, "u'"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "v"'] & & & X \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "h"] \arrow[dddll, dashed, "v'"] & \\
& G\Pi_H X' \arrow[rrr, "u''"] \arrow[dl, "v''"'] & & & X \arrow[dl, "h'"] \arrow[ddlll, dashed, "v_1'"'] \\
G \arrow[rrr, "u"] \arrow[dr] & & & H & \\
& F & & &
\end{tikzcd}$$

deducem că există δ, unic, cu $u'' \circ \delta = p \circ u'$ şi $v'' \circ \delta = v$. Dar atunci, notînd $v_1' : X' \to F$ unicul morfism astfel că $v_1' \circ u'' = f \circ v''$, avem $v_1' \circ p \circ u' = v_1' \circ u'' \circ \delta = f \circ v'' \circ \delta = f \circ v'' = v' \circ u'$. Din unicitatea lui v' deducem: $v_1' \circ p = v'$. Aşadar morfismele v' definesc un morfism de la diagrama al cărei con final este H, în F. Există deci un unic morfism $f' : H \to F$ cu $f' \circ u = f$.

§ 9. CARACTERIZAREA TOPOLOGIILOR PE O CATEGORIE

DEFINIŢIA 4.22. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie şi $\mathcal{C}'$ o subcategorie a sa; $\mathcal{C}'$ se zice subcategorie strict plină, dacă este plină şi în plus, o dată cu un obiect ea conţine orice exemplar izomorf cu el din $\mathcal{C}$.*

Fie $\mathcal{C}$ categorie element al lui U. Notăm prin Caf familia tuturor subcategoriilor strict pline din $\mathcal{C}^\wedge$, pentru care functorul incluziune admite un adjunct la stînga ce comută cu limitele proiective finite. Din propoziţia 4.20 deducem că există o aplicaţie $\alpha : \tau \to$ Caf, unde τ este familia tuturor topologiilor pe $\mathcal{C}$, definită în mod canonic; într-adevăr, pentru orice topologie pe $\mathcal{C}$, categoria fasciculelor respectivă este o subcategorie strict plină din $\mathcal{C}^\wedge$ element al lui Caf. Invers, fie $\mathcal{C}'$ un element din Caf; atunci functorul $i' : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}^\wedge$ are un adjunct la stînga ce comută cu limitele proiective finite notat a. Fie, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $J(X)$ familia ciururilor $i_R : R \to X$, pentru care $a(i_R)$ este un izomorfism. Asocierea $X \rightsquigarrow J(X)$ defineşte o topologie pe $\mathcal{C}$; pentru aceasta este suficient să uzăm de faptul că functorul a are un adjunct la dreapta, adică comută cu limitele inductive. Mai mult, dacă τ' este această topologie, atunci categoria fasciculelor asociată cu situl $(\mathcal{C}, \tau)$ este canonic izomorfă cu $\mathcal{C}'$. Pentru a verifica aceasta, observăm că morfismele biacoperitoare definite de $(\mathcal{C}, \tau')$ în $\mathcal{C}^\wedge$ permit calculul la dreapta al fracţiilor, iar $\mathcal{C}'$ este canonic izomorfă cu categoria de fracţii respectivă a lui $\mathcal{C}^\wedge$. Cititorul este invitat, ca un exerciţiu, să detalieze demonstraţiile de mai sus. În concluzie, am definit o aplicaţie $\beta :$ Ca$f \to \tau$.

PROPOZIŢIA 4.23. *Fie $\mathcal{C}$ o U-categorie mică.*

Funcţiile α şi β mai sus definite sînt aplicaţii biunivoce, una inversa celeilalte.

§ 10. LOCALIZAREA ÎN SITURI

Fie $\mathcal{C}$ un sit aparţinînd lui U, $\mathcal{C}^\wedge$ categoria prefasciculelor iar $\mathcal{C}^\sim$ categoria fasciculelor, $a : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{C}^\sim$ functorul canonic şi i un adjunct al său la dreapta; functorul $i \circ a$ se mai zice functorul fascicul asociat. Vom scrie, pentru simplitate, pentru $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^\wedge$, $i \circ a(F) = \overline{F}$, cu $\psi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C}^\wedge \to i \circ a$ vom nota morfismul de adjuncție. Notăm cu $\overline{\mathcal{C}}$ categoria ale cărui obiecte sînt obiectele lui $\mathcal{C}$ (mai precis pentru $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ notăm cu $\overline{X}$ obiectul corespunzător din $\mathcal{C}^\sim$). Pentru $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathrm{Ob}\ \overline{\mathcal{C}}$, avem :

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{X}, \overline{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\sim}(\overline{X}, \overline{Y}),$$

unde X, $\overline{Y}$ au și semnificația de a fi fasciculele asociate :

Definim un functor $h : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ astfel : $h(X) = \overline{X}$, $h(f) = \bar{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$. Verificarea că $\overline{h}$ astfel definit este un functor este redondantă.

Fie $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^\wedge$ și F fasciculul asociat. Notăm cu $\gamma(aF) = \gamma(\overline{F})$ prefasciculul peste $\overline{\mathcal{C}}$ definit astfel :

$$\gamma(\overline{F})(X) = \overline{F}(X).$$

Pentru definiția lui $\gamma(\overline{F})(f)$, $f : \overline{Y} \to \overline{X}$ procedăm astfel : fie $y \in \overline{F}(X) = \gamma(\overline{F})(X)$ și $\varphi_y : Y \to \overline{F}$ un morfism functorial de clasă fundamentală y. Fie $\overline{\varphi}_y : \overline{Y} \to F$ un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$ astfel că $\overline{\varphi}_y \circ \psi_Y = \varphi_y$. Definim $\gamma(\overline{F})(f) = \overline{\varphi}_y(f)$. Verificarea că $\gamma(\overline{F})$ astfel definit este un prefascicul pentru $\overline{\mathcal{C}}$ este imediată.

Se deduce imediat că $\overline{h}^\wedge \circ \gamma = i$. Am dovedit deci propoziția :

Propoziția 4.24. *Fie $\mathcal{C}$ un sit aparținînd lui U ; considerăm subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^\wedge$ formată din prefasciculele asociate prefasciculelor X, $X \in Ob\ \mathcal{C}$. Există doi functori : $\overline{h} : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ și $\gamma : \mathcal{C}^\sim \to \overline{\mathcal{C}}^\wedge$ astfel că $\overline{h}^\wedge \circ \gamma = i$, $\overline{h}^\wedge : \overline{\mathcal{C}}^\wedge \to \mathcal{C}^\wedge$*

Propoziția 4.25. *Fie F un obiect din $\mathcal{C}^\wedge$ și G un obiect din $\mathcal{C}^\wedge$. Aplicația $\overline{h}^\wedge(G, \gamma(\overline{F})) : Hom_{\overline{\mathcal{C}}^\wedge}(G, \gamma(\overline{F})) \to Hom_{\mathcal{C}^\wedge}(\overline{h}(G), \overline{F})$ este o bijecție.*

(Am notat $\overline{F} = h^\wedge \circ \gamma(\overline{F}) = i(F)$; vom mai folosi această notație, adică vom identifica pe $\mathcal{C}^\sim$ cu o subcategorie plină a lui $C^\wedge$).

Demonstrație. Deoarece $\overline{h}^\wedge$ este un functor restricție, el este fidel. Este deci suficient să dovedim că aplicația în cauză este surjectivă. Fie deci $f : \overline{h}^\wedge(G) \to F$ un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$, $g : \overline{X} \to \overline{Y}$ un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$ și $y \in G(\overline{Y})$. Considerăm morfismele functoriale

$$\varphi_1, \varphi_2 : \overline{Y} \to \overline{F}$$

definite astfel :

$$\varphi_1(\bar{X})(g) = f_{\overline{X}} \circ G(g)(y),$$
$$\varphi_2(\overline{X})(g) = \overline{F}(g) \circ f_Y(y).$$

Lăsăm cititorului să verifice că aceste morfisme sînt functoriale.

Dacă $g = \bar{l}$ cu $l : X \to Y$, atunci evident $\varphi_1(X)(g) = \varphi_2(X)(g)$ (deoarece f este un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$). Ambele morfisme φ_1, φ_2 fac comutativă diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\psi_Y : Y \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_y"'] & Y \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left, "{\varphi_1, \varphi_2}"] \\
\overline{h}^\wedge(G) \arrow[r, "f"'] & F
\end{tikzcd}$$

φ_y este un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$ de clasă fundamentală y. Deoarece $\overline{F}$ este un fascicul, deducem că $\varphi_1 = \varphi_2$. Așadar pentru orice $g : \overline{X} \to \overline{Y}$, avem că $f_{\overline{X}}\, G(g)\,(y) = \overline{F}(g)\, f_Y\,(y)$, oricare ar fi $y \in G(\overline{Y})$. Deci f este și un morfism din $\overline{\mathcal{C}}^\wedge$ q.e.d.

PROPOZIȚIA 4.26. *Functorul* $a \circ \overline{h}^\wedge$ *este un adjunct la stînga pentru* γ.

Demonstrație. Fie într-adevăr $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^\sim$ și $G \in \operatorname{Ob} \overline{\mathcal{C}}^\wedge$; atunci :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\sim} (a \circ \overline{h}^\wedge)\ (G),\ F) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge} (\overline{h}^\wedge\, G),\, iF) =$$

$$= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge} (\overline{h}^\wedge\, G,\, \overline{h}^\wedge_\gamma\, F) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge} (G, \gamma F).$$

(egalitățile sînt izomorfisme functoriale).

PROPOZIȚIA 4.27. *Functorul* γ *este deplin fidel.*

Demonstrație. Evidentă din cele de mai sus. Deducem de asemenea din cele de mai sus că γ identifică pe $\mathcal{C}^\sim$ cu o subcategorie strict plină a lui $\overline{\mathcal{C}}^\wedge$. Mai mult, functorul incluziune γ posedă un adjunct la stînga exact și există deci o topologie τ pe $\overline{\mathcal{C}}$ astfel că $\mathcal{C}^\sim$ să fie echivalentă cu categoria fasciculelor pentru această topologie.

Categoria $\overline{\mathcal{C}}$ de care ne-am folosit în considerațiile de mai sus se zice categoria de localizare a sitului $\mathcal{C}$; categoria $\overline{\mathcal{C}}$ dotată cu topologia $\overline{\tau}$ se zice situl de localizare al sitului $\mathcal{C}$.

Din cele de mai sus se desprinde următorul rezultat :

PROPOZIȚIA 4.28. *Fie* $\mathcal{C}$ *un sit aparținînd lui* U *și* $\mathcal{C}^\sim$ *categoria fasciculelor peste* $\mathcal{C}$. *Fie* $\overline{\mathcal{C}}$ *subcategoria plină a lui* $\mathcal{C}^\wedge$ *formată din fasciculele* $\overline{X}$ *asociate prefasciculelor* X, $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ *și* $\overline{h} : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ *functorul canonic. Există o topologie* $\overline{\tau}$ *pe* $\overline{\mathcal{C}}$, *astfel că* $\mathcal{C}^\sim$ *se identifică cu categoria fasciculelor peste situl* $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\tau})$. *Dacă* $\overline{h}^\wedge : \overline{\mathcal{C}}^\wedge \to \mathcal{C}^\wedge$ *este functorul restricție, atunci un obiect* F *din* $\overline{\mathcal{C}}^\wedge$ *este un fascicul pentru* $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\tau})$ *dacă și numai dacă* $\overline{h}^\wedge\, F$ *este un fascicul pentru situl* $\mathcal{C}$. $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\tau})$ *este un sit aparținînd lui* U).

PROPOZIȚIA 4.29. *Fie* $\mathcal{C}$ *un sit aparținînd lui* U, $a : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{C}^\sim$ *functorul fascicul asociat și* i *un adjunct la dreapta al său (functorul ,,injecție'' de la fascicule la prefascicul). Admitem că functorul* i *sau* $i \circ a$ *comută cu limitele inductive finite. Admitem încă, pentru orice* $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, $J(X)$, *că familia ciururilor acoperitoare pentru* X *din topologia în cauză, conține un sistem cofinal de ciururi principale,* $G(X)$. *Fie* $\overline{\mathcal{C}}$ *subctegoria de localizare a lui* $\mathcal{C}$ *și* $\overline{h} : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ *functorul canonic. Fie* $\overline{h}^\wedge$ *functorul restricție și* α *un adjunct la stînga pentru* $\overline{h}^\wedge$. *În aceste condiții, functorul* $i \circ a$ *este izomorf cu functorul* $\overline{h}^\wedge \circ \gamma$ *și* $\overline{\mathcal{C}}^\wedge$ *se identifică canonic cu* $\mathcal{C}^\sim$.

Demonstrație. Observăm că $\overline{h}^\wedge$ este un functor exact iar α este exact la dreapta. Cu notațiile de mai sus considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\overline{h}"'] & \mathcal{C}^\wedge \arrow[r, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "\alpha"] & \mathcal{C}^\sim \arrow[l, shift right, "i"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
\overline{\mathcal{C}} \arrow[r, "h_1"] & \overline{\mathcal{C}}^\wedge \arrow[u, shift left, "\overline{h}^\wedge"]
\end{tikzcd}$$

Aici h şi h_1 sînt functori canonici; în plus putem alege pe α astfel că $\alpha \circ h = h_1 \circ \overline{h}$. Din egalitatea $\overline{h}^{\wedge} \circ \gamma = i$, deducem că $i \circ a = \overline{h}^{\wedge} \circ \gamma \circ a$. Dacă $i \circ a$ comută cu sumele directe finite, atunci γ comută, de unde rezultă că $\alpha = \gamma \circ \mathrm{a}$, deoarece $\gamma \circ a \circ h = h_1 \circ h$. Pentru a termina demonstraţia folosim următoarea:

LEMĂ. *Fie F un obiect din $\mathscr{C}^{\wedge}$; admitem că există un morfism $f : X \to F$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$ astfel că pentru orice morfism $g : Y \to F$, $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$, există un morfism $t : Y \to X$ astfel că $f \circ t = g$. În aceste condiţii functorul $Hom_{\mathscr{C}^{\wedge}}(F, ?)$ comută cu sumele directe (indexate de elemente din U).*

Demonstraţie. Fie $G = \coprod_{\alpha \in I} G_\alpha$ (Card $I \in U$) o sumă directă din $\mathscr{C}^{\wedge}$. Fie $u : F \to G$ un morfism din $\mathscr{C}^{\wedge}$ şi $x = f(l_X) \in F(X)$ clasa fundamentală a lui f. Fie $\alpha \in I$ astfel că $u_X(x) = h_X^\alpha(y)$, $y \in G_\alpha(X)$, ($h^\alpha : G_\alpha \to G$ sînt morfismele de structură ale sumei directe).

Definim $u_\alpha : X \to G_\alpha$, un morfism din $\mathscr{C}^{\wedge}$ de clasă fundamentală y. Atunci avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "u"] & G \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u_\alpha"] & G_\alpha \arrow[u, leftrightarrow, "h^\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Definim un morfism $v_\alpha : F \to G_\alpha$ din $\mathscr{C}^{\wedge}$ astfel că $h^\alpha \circ v = u$. Pentru aceasta fie $Z \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$ şi $z \in F(Z)$. Fie $\varphi_z : Y \to F$ un morfism din $\mathscr{C}^{\wedge}$ de clasă fundamentală z. Dacă $p : Z \to X$ este astfel că $f \circ p = \varphi_Z$, atunci definim $v_\alpha(Z)(z) = u_\alpha(Y)(p)$. Dacă $f \circ p_1 = \varphi_z$, atunci $u_\alpha(Z)(p) = u_\alpha(Y)(p_1)$. Se vede imediat că $h^\alpha \circ v_\alpha = u$. Aşadar morfismul canonic:

$$\coprod_{\alpha \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\wedge}}(F, G_\alpha) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\wedge}}(F, \coprod_{\alpha \in I} G_\alpha)$$

este un epimorfism. El este de asemenea un monomorfism şi deci bijecţie.

Fie acum $F = \coprod_{\alpha \in I} F_\alpha$, sumă directă de obiecte din $\mathscr{C}^{\wedge}$; atunci, cu notaţiile obişnuite:

$$LF = \varinjlim_{R \in G(X)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\wedge}}(R, F) = \varinjlim_{R \in G(X)} \coprod_{\alpha \in I} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\wedge}}(R, F) =$$

$$= \coprod_{\alpha \in I} \varinjlim_{R \in G(X)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\wedge}}(R, F) = \coprod_{\alpha \in I} LF_\alpha.$$

Iterînd obţinem:

$$LLF = \coprod_{\alpha \in I} LL\,F_\alpha; \text{ deci } i \circ a\,F = \coprod_{\alpha \in I} i \circ a\,F_\alpha$$

Dovedim acum că $\overline{h}^{\wedge}$ este un adjunct pentru $\gamma \circ a$. Într-adevăr, un adjunct la dreapta pentru $\gamma \circ a$ este functorul:

$$\varepsilon : \overline{\mathscr{C}}^{\wedge} \to \mathscr{C}^{\wedge}$$

care este definit astfel: pentru orice prefascicul H al lui $\overline{C}^{\wedge}$, $\varepsilon(H)$ este prefasciculul:

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathscr{C}}^{\wedge}}(\gamma \circ a \circ hX, \ H) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\wedge}}((h_1 \circ \overline{h})(X), H) = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathscr{C}}}(\overline{X}, \ H)$$

ceea ce arată că $\overline{h}^{\wedge}$ este un adjunct la dreapta pentru $\gamma \circ a$. Pentru a termina demonstrația arătăm că h este deplin fidel. Pentru aceasta dovedim că γ stabilește o echivalență între $\mathcal{C}^{\sim}$ și $\overline{\mathcal{C}}$. Fie $H \in \operatorname{Ob} \overline{\mathcal{C}}$. Atunci $H = \varinjlim_{\alpha \in I} \overline{X}_{\alpha}$, $(\operatorname{Card} I \in U)$, $\overline{X}_{\alpha} \in \operatorname{Ob} \overline{\mathcal{C}}$, pentru orice $\alpha \in I$. Dar $X_{\alpha} = \gamma \circ a(X_{\alpha})$. Fie $H' = \varinjlim_{\alpha \in I} a(X_{\alpha})$. Atunci $H = \varinjlim_{\alpha \in I} X_{\alpha} = (\varinjlim_{\alpha \in I} \gamma \circ a(X_{\alpha})) = \gamma \circ a$ $(\varinjlim X_{\alpha}) = \gamma (\varinjlim a(X_{\alpha})) = \gamma(H')$. Așadar orice obiect H din $\mathcal{C}^{\wedge}$ este izomorf cu un obiect de tipul $\gamma(H')$ cu $H' \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\sim}$; deoarece γ este și deplin fidel, demonstrația este terminată.

Iată o aplicație a rezultatelor de mai sus, aplicație care stabilește o strînsă legătură între topologii și categoriile de fracții.

PROPOZIȚIA 4.30. *Fie* $\mathcal{C}$ *o* U*-categorie mică și* S *un sistem multiplicativ stabil din* $\mathcal{C}$. *Notăm prin* τ *topologia lui* $\mathcal{C}$ *indusă de* S *și considerăm situl astfel obținut.*

Notăm cu $\overline{\mathcal{C}}_S$ *situl de localizare al sitului de mai sus și* $\overline{h}_S : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}_S$ *functorul canonic. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) *Sistemul* S *permite calculul fracțiilor la dreapta.*

b) $h_S(s)$ *este izomorfism pentru orice* $s \in S$.

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b). Fie $\mathcal{C}_S$ categoria fracțiilor lui $\mathcal{C}$ relativ la S și $h_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ functorul canonic. Atunci functorul $h^{\wedge} : \mathcal{C}_S^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ este exact și deplin fidel. Dacă α este un adjunct la stînga al lui $h^{\wedge}$, atunci arătăm că el este exact. Observăm că pentru un ciur acoperitor $R \to X$ al topologiei τ, există un morfism $s \in S$, astfel că $s \in R$. Ne putem limita în construcția „fasciculului asociat" la ciururile de tipul (s), unde $s \in S$. Începem prin a demonstra că $\gamma \circ a$ este un functor exact, adică este exact la dreapta. Fie deci diagrama exactă din $\mathcal{C}$:

$$(*) \qquad \overline{F}_1 \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \overline{F}_2 \xrightarrow{p} H,$$

unde $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ sînt fascicule. Arătăm că H este de asemenea un fascicul. Pentru aceasta arătăm că

$$H(X) = \varinjlim_{R \in G(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R, H),$$

unde prin $G(X)$ notăm ciururile acoperitoare ale lui X $(X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C})$ de forma (s), $s \in S$. Pentru orice $R \in G(X)$, $i_R : R \to X$, notăm $\varphi_R : H(X) \to \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R, H)$ morfismul canonic indus de i_R. Notăm prin:

$\varphi : H(X) \to \varinjlim_{R \in G(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R, H)$ morfismul canonic, deoarece $(l_X \in S)$.

φ este un izomorfism. Pentru aceasta arătăm că pentru orice $R \in G(X)$. $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, diagrama:

$$(**) \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R, \overline{F}_1) \overset{\overline{u}}{\underset{\overline{v}}{\rightrightarrows}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R, \overline{F}_2) \xrightarrow{\overline{p}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R, H)$$

indusă în mod canonic de diagrama $(*)$ este exactă (în U-Ens).

Fie deci $f : R \to H$, $R = (s)$, $s : Y \to X$, $s \in S$ (aici X, Y, $Z, \ldots$ sînt obiecte din $\mathcal{C}$).

Pentru orice $q : Z \to R$, avem $q = s \circ q_1$ ($q_1 : Z \to X$ și $(Z, q) \in R$).

Fie $f_Y(s) = y \in H(Y)$, $s \in R(Y)$.

Fie $y_2 \in \overline{F}_2(Y)$ așa ca $p_Y(y_2) = y$ și fie $\varphi_2 = \varphi_{y2} : Y \to \overline{F}_2$ un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$ de clasă fundamentală y_2. φ_2 induce un morfism din $C^\wedge$, $\varphi_1 : R \to \overline{F}_2$ așa ca $p \circ \varphi_1 = f$. Fie deci $(Z, q) \in R$; atunci $q = sq_1$, $q_1 : Z \to Y$. Definim $\varphi_1(Z)(q) = \varphi_2(Z)(q_1)$. Fie q_1, q_2 așa ca $sq_1 = sq_2$; rezultă că $\varphi_2(Z)(q_1) = \varphi_2(Z)(q_2)$.

Prin definiție avem: $\varphi_2(Z)(q_i) = \overline{F}_2(q_i)(y_2)$, $i = 1, 2$. Fie $t \in S$, $t : Z_1 \to Z$ așa ca $q_1 \cdot t = q_2 \cdot t$, atunci $\overline{F}_2(q_1 t)(y_2) = \overline{F}_2(q_2 t)(y_2)$ de unde $(\overline{F}_2(t). \overline{F}_2)(q_1)(y_2) = (\overline{F}_2(t). \overline{F}_2)(q_2)(y_2)$. Fie $a_i = \overline{F}_2(q_i)(y_2)$ $(i = 1, 2)$ și $\gamma_i : Z \to \overline{F}_2$ morfisme din $\mathcal{C}^\wedge$ de clase fundamentale $a_i (i = 1,2)$. Dacă $i : (t) \to Z$ este morfismul canonic, atunci $\gamma_1 \circ i = \gamma_2 \circ i$ deci $\gamma_1 = \gamma_2$, deoarece F_2 este un fascicul.

Fie φ_1, $\varphi_2 : R \to \overline{F}_2$ două morfisme ale lui $\mathcal{C}^\wedge$ așa ca $p \circ \varphi_1 = p \circ \varphi_2$.

Fie $a = \varphi_1(X)(s)$, $b = \varphi_2(Y)(s)$. Atunci $p_Y(a) = p_Y(b)$; există deci $c \in \overline{F}_1(X)$ așa că $u(X)(c) = a$, $v(X) = b$. Definim $\gamma : R \to \overline{F}$ astfel: $\varphi(X)(x) = c$, și $\varphi(Z)(q) = \overline{F}_1(q_1)(c)$ ($q = sq_1$, $q : Z \to X$, $q_1 : Z \to Y$).

Dacă $sq_1 = sq_2$, atunci printr-un argument deja utilizat, deducem că $\overline{F}_1(q_1)(c) = \overline{F}_1(q_2)(c)$ ($\overline{F}_1$ este un fascicul). Evident $u \circ \gamma = \varphi_1$ și $v \circ \gamma = \varphi_2$.

Am arătat că diagrama $(^{**})$ este exactă.

În concluzie H este un fascicul (deoarece limita inductivă în U-Ens este un functor exact la dreapta). Fie $s \in S$ un morfism al lui $\mathcal{C}$, $s : X \to Y$. Atunci $\overline{h}_S(s) : X \to \overline{Y}$ (notăm prin X fasciculul asociat lui X) este un izomorfism. Pentru aceasta fie diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\
& R \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

așa ca $R = (s)$, i este monomorfismul canonic al lui R în X (morfism din $\mathcal{C}^\wedge$). p este definit după cum urmează: pentru $Z \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, $pZ(f) = s \cdot f$, $f : Z \to X$. Evident $i \cdot p = s$ și p este un epimorfism. Avem în $\mathcal{C}^\wedge$ diagrama

$(^{***})$

$$\begin{tikzcd}
\overline{X} \arrow[rr, "\overline{s}"] \arrow[dr, "\overline{p}"'] & & \overline{Y} \\
& R \arrow[ur, "\overline{i}"'] &
\end{tikzcd}$$

(prin aplicarea functorului $i_S \circ a$). În $(^{***})$ $\overline{i}$ este un izomorfism și p un epimorfism ($i_S \circ a$ este exact la dreapta), atunci $\overline{s}$ este un epimorfism.

Fie $s_1 : \overline{Y} \to \overline{X}$ o secțiune a lui $\overline{s} : \overline{s}s_1 = 1_{\overline{Y}}$. Dacă $\psi : 1 \to i' \circ a$ este un morfism de adjuncție a lui a cu i, atunci avem $\overline{s} \circ \psi_X = \psi_Y \circ s$.

Fie $f = s_1 \circ \psi_Y \circ s : X \to \overline{X}$. Există $t \in S$, așa ca diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi_X"] & X \\
(t) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "i"] & X \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă ($t : Z \to X$).

Deci $\overline{s} \circ \overline{f} \circ i = \overline{s} \circ \psi_X \circ \alpha$, unde $\overline{s} \circ s_1 \circ \psi_Y \circ s \circ i = \overline{s} \circ \psi_X \circ \alpha$, de unde $\psi_Y \circ s \circ i = \psi_Y \circ s \circ \alpha$.

Dacă $p : Z \to (t)$ este epimorfismul canonic $i \circ p = t$, atunci $\psi_Y \circ s \circ t = = \psi_Y \circ s \circ \alpha \circ p$. ψ_Y este un morfism biacoperitor, deci $\operatorname{Ker}(s \circ p,\ s \circ t)$ este acoperitor. Fie $t_1 : Z_1 \to Z$, așa ca $s \circ \alpha \circ p \circ t_1 = s \circ t \circ t_1$ și fie $t_2 : : Z_2 \to T$ așa ca $\alpha \circ p \circ t_1 \circ t = t \circ t_1 \circ t_2$.

Notăm $t_1 \circ t_2 = t_1'$; atunci $\alpha \circ p \circ t_1' = t \circ t_1'$, unde $t \circ t_1' \in S$. Dacă $j_1 \circ p_1 = t\, t_1'$ este descompunerea canonică a morfismului $t \circ t_1'$, atunci avem $\psi_X \circ \alpha \circ p \circ t_1 \circ t_2 = \psi_X \circ i \circ p \circ t_1 \circ t_2$ sau $\psi_X \circ j_1 \circ p_1 = f \circ j_1 \circ p_1$, unde $f \circ j_1 = \psi_X \circ j_1$ Însă $j_1 : (t \circ t_1') \to X$ este un ciur acoperitor așa ca $\varphi_X = f \circ s' \cdot \overline{s} = 1_{\overline{X}}$ deoarece $s' \cdot \overline{s} \cdot \psi_X = 1_{\overline{X}} \cdot \psi_X$. Prin urmare $s' \cdot \overline{s} = 1_{\overline{X}}$.

Din propoziția 4.29 deducem că functorul canonic $\gamma : \mathcal{C}_S^{\wedge} \to \overline{\mathcal{C}}_S^{\wedge}$ este o echivalență de categorii.

b) $\Rightarrow$ a). Pentru aceasta arătăm că cuplul $(\overline{\mathcal{C}}_S,\ \overline{h}_S)$ satisface la condițiile a), b), c) ale propoziției 3.26. Observăm pentru aceasta că h este biunivoc pentru obiecte.

a) Fie $u, v : X \rightrightarrows Y$ morfisme din $\mathcal{C}$ cu $\overline{h}_S(u) = \overline{h}_S(v)$. Atunci avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] \arrow[d, "\psi_X"'] & Y \arrow[d, "\psi_Y"] \\
\overline{X} \arrow[r, "\overline{f}"] & \overline{Y}
\end{tikzcd} \quad \text{cu } \overline{f} = \overline{h}_S(u) = \overline{h}_S(v).$$

în care $\psi_Y \circ u = \psi_Y \circ v \cdot \psi_Y$ este un morfism biacoperitor, deci $\operatorname{Ker}(u, v) \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}^{\wedge}$ biacoperitor. Fie $s \in S$, astfel că $(s) \subseteq \operatorname{Ker}(u, v) \cdot$ ((s) este ciurul generat de s, $s : Z \to X$). Atunci $us = vs$.

b) Evident

c) Fie $f : X \to \overline{Y}$ un morfism din $\overline{\mathcal{C}}_S$. Notăm $\varphi = f \circ \varphi_X : X \to \overline{Y}$. Există atunci diagrama comutativă :

(*)

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\psi_Y"] & \overline{Y} \\
Z \arrow[u, "g"] \arrow[r, "s"] & X \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

(construcția acestei diagrame se face raționînd ca mai sus (implicația a) $\Rightarrow$ b) a acestei propoziții). Aplicînd functorul fascicul asociat diagramei ($*$), deducem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\overline{Y} \arrow[r, "\bar{\bar{\psi}}_Y"] & \overline{\overline{Y}} \\
Z \arrow[u, "\overline{g}"] \arrow[r, "\overline{s}"] & X \arrow[u, "\overline{\varphi}"']
\end{tikzcd}$$

în care $\overline{\varphi} = f \circ \overline{\psi}_Y$ și deci $f \circ \overline{\psi}_X \circ s = \psi_Y \circ g$. Dar cum $f \circ \psi_X = \overline{\varphi}_Y \circ f$, avem $f \circ \overline{s} = \overline{g}$ ($\overline{\psi}_Y$ este un izomorfism). Așadar $f = \overline{g} \circ \overline{s}^{\,-1}$ c.c.t.d.

Din propoziția precedentă se deduce că dacă într-o categorie $\mathcal{C}$ se dă un sistem de morfisme S care permite calculul la dreapta al fracțiilor, atunci categoria fasciculelor pentru topologia indusă de sistemul S este echivalentă cu categoria prefasciculelor peste categoria de fracții a lui $\mathcal{C}$ în raport cu S.

§ 11. PROPRIETĂȚI DE EXACTITUDINE IN CATEGORIA FASCICULELOR

Ne propunem în cele ce urmează să studiem categoria fasciculelor pentru un sit dat, mai precis să studiem ceea ce se numesc proprietăți de exactitate din categoria fasciculelor.

PROPOZIȚIA 4.31. *Fie $\mathcal{C}$ un sit aparținînd lui U și $\mathcal{C}^{\sim}$ categoria fasciculelor, $a : \mathcal{C}^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\sim}$ functorul fascicul asociat și $i : \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ un adjunct la dreapta al său.*

1) *Functorul a comută cu limitele inductive și cu limitele proiective finite. Functorul i comută cu limitele proiective.*

2) *U-limitele inductive în $\mathcal{C}^{\wedge}$ sînt reprezentabile pentru orice categorie I element al lui U și pentru orice functor $F : I \to \mathcal{C}^{\sim}$ morfismul canonic*

$$\underset{\longrightarrow}{\lim}\, F \to a\,(\underset{\longrightarrow}{\lim}\, i \circ F)$$

ste un izomorfism.

3) *U-limitele proiective din $\mathcal{C}^{\sim}$ sînt reprezentabile. Pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$, functorul definit pe $C^{\sim}$ cu valori în Ens : $F \rightsquigarrow FX$ comută cu liəmitele proiective.*

Dovedirea acestor fapte rezultă imediat din construcția functorului fascicul asociat, precum și din faptul că a este adjunct la stînga cu i. Așadar în categoria prefasciculelor există spre exemplu produse directe, și produse fibrate (care se fac pe componente) există sume directe și sume fibrate etc.

PROPOZIȚIA 4.32. *$\mathcal{C}^{\sim}$ este perfectă.*

Demonstrație. Fie $u : G \to H$ un bimorfism din $\mathcal{C}^{\sim}$. Fie $K = iH \underset{iG}{\amalg} iH$ suma fibrată în categoria $\mathcal{C}^{\wedge}$. Pentru a obține suma fibrată în categoria $\mathcal{C}^{\sim}$, trebuie să aplicăm acestei sume functorul a. Deoarece u este un epimorfism, deducem că morfismele canonice :

$$i_1,\ i_2 : iH \rightrightarrows K$$

precum și codiagonala $\nabla : K \to iH$ sînt biacoperitoare. Într-adevăr, ele devin izomorfisme aplicînd pe a, căci avem suma fibrată

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] & H \arrow[r, shift left, "a(i_1)"] \arrow[r, shift right, "a(i_2)"] & aK \end{tikzcd}$$

în care $a(i_1) \circ u = a(i_2) \circ u$ deci $a(i_1) = a(i_2) = \varphi$ și $a(\nabla) \circ \varphi = 1$. De asemenea $\varphi \circ a(\nabla) \circ \varphi$, deci $\varphi \circ a(\nabla) = 1$ (din unicitate); dar $i(u)$ este un monomorfism și evident $i(u)$ este nucleul cuplului (i_1, i_2) (fapt valabil în categoria mulțimilor : orice monomorfism $u : A \to B$ este nucleul cuplului $B \rightrightarrows B \amalg_A B$ construit în mod canonic).

Așadar, deoarece ∇ este biacoperitor $i(u)$ este un monomorfism acoperitor și deci $(a \circ i)(u) \simeq u$ este izomorfism.

Observație. Fie $\mathcal{C}$ o categorie cu produse fibrate, $p : X \to Y$ un morfism din $\mathcal{C}$ care este epimorfism efectiv universal și monomorfism, atunci el este un izomorfism; într-adevăr, fie diagrama

$$\begin{tikzcd} X \Pi_Y X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"] & X \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

în care $p = \operatorname{coker}(u, v)$ și $u = v$, deci p este un izomorfism. De aici găsim o nouă demonstrație pentru teorema precedentă.

Din cele de mai sus se deduce că $\mathcal{C}^\sim$ este o bicategorie, adică orice morfism se factorizează în mod unic prin un monomorfism și un epimorfism, care sînt efective.

Înainte de a dezvolta considerațiile noastre, facem o mică digresiune.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie și X un obiect din $\mathcal{C}$. Un cuplu de morfisme :

$$p_1, p_2 : R \rightrightarrows X$$

se zice cuplu de echivalență în $\mathcal{C}$, de adresă X și de sursă R, dacă pentru orice obiect T din $\mathcal{C}$, aplicațiile canonice induse de p_1 și p_2 :

$$\bar{p}_1, \bar{p}_2 : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, R) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$$

definesc un cuplu de echivalență în Ens. Un cuplu $u, v : A \rightrightarrows B$ de morfism din Ens se zice cuplu de echivalență, dacă imaginea morfismului canonic, indus de u și v :

$$h : A \to B \times B,$$

este o relație de echivalență pe B.

Dacă în categoria $\mathcal{C}$ există produsul $X \Pi X$, a da o relație de echivalență de adresă X echivalează cu a da un subobiect R al lui $X \Pi X$, astfel că pentru orice $T \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ submulțimea $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, R)$ a lui $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}$ $(T, X \Pi X)$ este o relație de echivalență pe $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$.

Fie $p_1, p_2 : R \to X$ un cuplu de echivalență; definim conucleul acestui cuplu ca obiectul Y din $\mathcal{C}$ care reprezintă functorul covariant în Z :

$$T(Z) = \operatorname{Hom}_{p_1, p_2}(X, Z)$$

în care $T(Z)$ înseamnă toate morfismele u de la X la Z cu $u \circ p_1 = u \circ p_2$. Vom nota cu X/R sau cu $X/(p_1, p_2)$ cîtul unei relații de echivalență; evident cîtul unei relații de echivalență nu este altceva decît conucleul cuplului de morfisme (p_1, p_2).

Vom spune că cuplul de morfisme $p_1, p_2 : R \rightrightarrows X$ este un cuplu de echivalență efectiv, dacă:

i) conucleul $X/(p_1, p_2) = Y$ există;

ii) produsul fibrat $X \Pi_Y X$ există;

iii) morfismul canonic indus de p_1 și $p_2 : R \to X \Pi_Y X$ este un izomorfism.

În aceste condiții, cuplul (p_1, p_2) este un cuplu de echivalență. Vom spune atunci că relația de echivalență respectivă este o relație de echivalență efectivă.

Relația de echivalență $p_1, p_2 : R \rightrightarrows X$ se zice efectiv universală dacă este o relație de echivalență efectivă și morfismul canonic $f : X \to X/(p_1, p_2)$ este un epimorfism efectiv universal.

Observăm că, în Ens, orice epimorfism este efectiv universal și orice familie epimorfică este efectiv universală; același lucru este valabil și în $\mathscr{C}^\wedge$, pentru o categorie $\mathscr{C}$ dată. Mai mult, pentru categoriile de fascicule în raport cu un sit dat avem următoarea propoziție.

PROPOZIȚIA 4.33. *Fie* $(\mathscr{C}, \tau)$ *un sit aparținînd lui* U; *pentru categoria* $\mathscr{C}^\sim$ *a fasciculelor în raport cu acest sit sînt valabile următoarele afirmații:*

1) *Limitele inductive din* $\mathscr{C}^\sim$ *sînt reprezentabile și universale.*

2) *Orice familie epimorfică de morfisme este epimorfic efectiv universală.*

3) *Orice relație de echivalență este efectiv universală.*

4) *U-limitele inductive pseudofiltrate și conexe comută cu limitele proiective finite.*

Demonstrație. Afirmație 1) rezultă din aceea că în $\mathscr{C}^\wedge$ limitele inductive sînt universale și în plus, functorul $a : \mathscr{C}^\wedge \to \mathscr{C}^\sim$ comută cu limitele inductive și proiective finite.

2) Fie $\{f_\alpha : F_\alpha \to F\}_{\alpha \in I}$ o familie epimorfică din $\mathscr{C}^\sim$; aceasta înseamnă că morfismul canonic $u : \varinjlim\limits_{\alpha} F_\alpha \to F$ este un izomorfism. Dar, $\varinjlim\limits_{\alpha} F_\alpha = a\,(\varinjlim i\,F_\alpha)$ conform construcției limitelor inductive din $C^\sim$. Dacă $v : \varinjlim i\,F_\alpha \to i\,F$ este morfismul canonic, atunci $a\,(v) = u$ este un izomorfism și deci v este un morfism biacoperitor. Deoarece limitele inductive din $\mathscr{C}^\wedge$ sînt universale, se deduce că pentru orice $f : G \to F$ familia $\{G\, \Pi_F F_\alpha \to G\}_{\alpha \in I}$ este epimorfică.

3) Fie $p_1, p_2 : R \rightrightarrows F$ o relație de echivalență din $\mathscr{C}^\sim$. Atunci, coker (p_1, p_2) există și este egal cu a (coker $i\,(p_1)$, $i\,(p_2)$).

Dacă $\varphi : i\,F \to$ coker $(i\,(p_1), i\,(p_2))$ este epimorfismul canonic, atunci φ este efectiv universal. Mai mult, pentru orice $H \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}^\wedge$, avem: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\wedge}(H, i\,F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\sim}(a\,H, F)$ din care deducem că cuplul $(i\,(p_1), i\,(p_2)) : i\,R \rightrightarrows i\,F$ este un cuplu de echivalență în $\mathscr{C}^\wedge$. Restul se deduce folosind proprietățile functorului a și observația de mai sus.

4) Fie I o categorie pseudofiltrată și conexă și $K : I \to \mathcal{C}^{\sim}$ un functor covariant (I este o U-categorie mică); proprietatea respectivă rezultă din aceea că $\varinjlim K$ în categoria $\mathcal{C}^{\sim}$ este a ($\varinjlim i \circ k$) și din proprietățile lui a.

Din cele dovedite putem demonstra următoarea afirmație:

PROPOZIȚIA 4.34. *Fie, cu notațiile de mai sus,* $u : G \to H$ *un morfism din* $\mathcal{C}^{\wedge}$. *Următoarele afirmații sînt echivalente.*

i) u *este acoperitor.*

ii) *Pentru orice fascicul* F, *aplicația canonică* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(u, F)$ *este injectivă.*

iii) *Morfismul* $a(u)$ *este un epimorfism.*

Demonstrație. Evident, orice epimorfism din $\mathcal{C}^{\wedge}$ este un morfism acoperitor; deci orice morfism din $\mathcal{C}^{\wedge}$ se factorizează sub forma $f = i \circ p$ cu i monomorfism și p epimorfism deci, acoperitor. Dacă f este acoperitor, atunci se deduce imediat că i este monomorfism acoperitor și deci biacoperitor. De aici rezultă direct că i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii).

Pentru a dovedi că iii) $\Rightarrow$ i), observăm că functorul a păstrează epimorfismele și dacă $a(f) = a(i) \circ a(p)$ este un epimorfism, atunci $a(i)$ este epimorfism; cum $a(i)$ este și monomorfism, el este un izomorfism, deci i este biacoperitor și f este acoperitor, fiind o compunere de morfisme acoperitoare. q.e.d.

O mare parte din rezultatele privind topologiile și fasciculele vor fi expuse în partea a II-a a capitolului IV. Tot acolo vom da și aplicații.

Primită la redacție la 4 august 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. VERDIER, JEAN LUIS, *Topologies et faisceaux.* vol. II., I.E.H.S., Paris, 1964.
2. NICOLAE POPESCU, *La localisation pure des sites.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées. 7 (1965).
3. ALEXANDRU RADU, *Quelques observations sur des topologies et faisceaux.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, (1966).

SPAȚII FIBRATE PRINCIPALE ȘI SISTEME POSTNIKOV

DE

DAN BURGHELEA

Se studiază spațiile fibrate principale cu grup structural și conexiune în contest semisimplicial și se dau teoreme de clasificare pentru acestea.
Se reia teoria lui Postnikov, obținîndu-se descompuneri cu fibrări principale de grupuri structurale $K(G, n)$-uri și se obțin diverse rezultate de teoria omotopiei, folosindu-se aceste descompuneri.

INTRODUCERE

Obiectivul principal al acestei lucrări este teoria sistemelor Postnikov, sisteme complete de invarianți ai tipului de omotopie. Aceste sisteme obținute de Postnikov și Zilber (nepublicate) admit o prezentare sistematică și elegantă în contextul combinatoriu al complexelor semisimpliciale minimale Kan, lucru arătat de Moore încă din 1954. Aceste sisteme constau dintr-un șir de complexe semisimpliciale... $X^n \xrightarrow{p_{n,n-1}} X^{n-1} \xrightarrow{p_{n-1,n-2}} X^{n-2} \to \to X^{n-3} \to \ldots$, unde $p_{n,n-1}$ sînt fibrări Kan de fibră complexe Eilenberg-Mc. Lane și clasele caracteristice ale acestor fibrări. Șirul ... $X^n \to X^{n-1} \to \to X^{n-2} \to \ldots$ îl vom numi descompunere P.Z.M. (inițialele numelor celor trei). Într-o descompunere P.Z.M. a unui complex minimal Kan, fibrarea $X^n \xrightarrow{p_{n,n-1}} X^{n-1}$ este local trivială iar $K(\Pi_n(X), n)$, fibra sa, este un complex minimal.

În lucrare, punînd în evidență structura de grup a lui $K(\Pi_n(X), n)$, arătăm că $p_{n,n-1}\ X^n \to X^{n-1}$ este fibrare principală avînd pe $K(\Pi_n(X), n)$ ca grup structural, ceea ce ne permite să punem în evidență într-un mod elementar clasa sa caracteristică (fără a folosi teoria obstrucțiilor). Obținem de asemenea un rezultat mai tare ca al lui Moore relativ la functorialitatea sistemelor Postnikov, arătînd că această functorialitate are loc la nivelul fibrărilor principale, adică $(f^n, f^{n-1}) : (X^n \xrightarrow{p^X_{n,n-1}} X^{n-1}) \rightsquigarrow (Y^n \xrightarrow{p^Y_{n,n-1}} Y^{n-1})$ este un morfism de fibrări principale. Pentru aceasta am găsit necesar să

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 4, P. 585–630, BUCUREȘTI, 1966

prezentăm într-un capitol teoria spaţiilor fibrate semisimpliciale principale de grup structural şi echivalentul semisimplicial al teoremei lui Steenrod de clasificare a spaţiilor fibrate. În linii mari am urmărit pentru această demonstraţie ideile din seminarul Cartan 1955—1956.

Contextul semisimplicial pentru fibrări deşi are la bază aceleaşi definiţii cu cel geometric, pune în evidenţă anumite elemente ale cărei semnificaţii geometrice nu sînt clare, spre exemplu *funcţia tordantă*. În cazul fibrărilor principale urmînd sugestia lui C. Teleman, noi arătăm că noţiunea de funcţie tordantă poate fi înlocuită cu noţiunea de conexiune, căpătînd astfel o semnificaţie geometrică.

Relativ la clasificarea fibrărilor cu conexiune, dăm aici un echivalent semisimplicial al teoremei lui Narasimhahn.

Deşi nu este dezvoltată aici, este transparentă posibilitatea reconsiderării teoriei fibrărilor principale de semigrup semisimplicial, cu rezultate paralele (corect, cvasifibrate principale).

În încheiere doresc să exprim vii mulţumiri seminarului omotopic de la Institutul de matematică în cadrul căruia am expus aceste chestiuni şi în mod personal tov. C. Teleman conducătorul ştiinţific şi moral al acestei lucrări, A. Deleanu, I. Bucur, N. Popescu, V. Udrescu pentru interesul arătat acestor expuneri.

CAPITOLUL I

În acest capitol se reamintesc definiţiile clasice din topologia semisimplicială şi se enumeră unele leme şi propoziţii fundamentale pentru cele ce urmează. Capitolul nu conţine demonstraţii, ele putînd fi găsite în orice expunere de topologie semisimplicială elementară spre exemplu ,,Seminarul omotopic Strasburg'', ,,Seminarul Moore'' sau ,,Seminarul Cartan''.

Vom desemna prin Δ categoria ale cărei obiecte sînt sistemele ordonate de numere întregi de forma $(0,1,\ldots,n)$ notate $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$(Δ_0 fiind sistemul (0), Δ_1 fiind (0,1) şi aşa mai departe), iar morfisme, aplicaţii crescătoare. Este uşor de remarcat că orice morfism este o compunere finită de morfisme de tip :

i) Identitate

ii) $\partial_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n+1)$

iii) $\sigma_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n \ (0 \leqslant i \leqslant n)$ unde

∂_i este aplicaţia strict crescătoare care nu ia valoarea i şi σ_i este aplicaţia surjectivă care ia de 2 ori valoarea i.

Dacă ,,Ens'' este categoria mulţimilor şi a aplicaţiilor de mulţimi, vom numi categoria complexelor semisimpliciale, categoria Fonct ctv (Δ, Ens), adică categoria al cărei obiect sînt functorii contravarianţi de la Δ în Ens şi ale cărei morfisme sînt morfismele functoriale între astfel de functori.

Un astfel de functor X asociază fiecărui obiect Δ_n mulţimea $X(\Delta_n)$ pe care o vom nota ulterior cu X_n, fiecărei $\partial_i : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ o aplicaţie de mulţimi : $d_i = X(\partial_i) : X_{n+1} \to X_n \ (0 \leqslant i \leqslant n+1)$ şi fiecărei aplicaţii $\sigma_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$ o aplicaţie de mulţimi $s_i = X(\sigma_i) : X_n \to X_{n+1} \ (0 \leqslant i \leqslant n)$.

Cu alte cuvinte, un complex semisimplicial determină un sistem de mulţimi $X_0, X_1, \ldots, X_n$ şi de funcţii $d_i : X_{n+1} \to X_n$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ numite „operatori de frontieră" şi $s_i : X_n \to X_{n+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ numite „operatori de degenerare" pentru care sînt verificate

$$
\begin{aligned}
& d_i\, d_j = d_{j+1}\, d_i && i < j \\
& s_i\, s_j = s_{j+1}\, s_i && \text{pentru} \quad i \leqslant j \\
& d_i\, s_j = s_{j-1}\, d_i && \text{pentru} \quad i < j \\
& d_i\, s_i = d_{i+1}\, s_i = \mathrm{Id} && \\
& d_i\, s_j = s_j\, d_{i-1} && i > j+1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

relaţii ce rezultă din proprietăţile funcţiilor ∂_i şi σ_i.

Reciproc, fiind dat un sistem de mulţimi $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$ şi de funcţii $d_i : X_{n+1} \to X_n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ şi $s_i : X_n \to X_{n+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ pentru care sînt verificate condiţiile (1), există un functor contravariant $F : \Delta \to \mathrm{Ens}$ care le determină.

Vom numi *n-simplex* orice element al mulţimii X_n.

DEFINIŢIA 1.1. Vom numi n-simplex *standard*, complexul semisimplicial definit prin $\Delta[n]_p = \mathrm{Hom}(\Delta_p, \Delta_n)$:

$$
\begin{aligned}
d_i &: \Delta[n]_{p+1} \to \Delta[n]_p \text{ este } \mathrm{Hom}[\partial_i, \Delta_n], \\
s_i &: \Delta[n]_p \to \Delta[n]_{p+1} \text{ este } \mathrm{Hom}[s_i, \Delta_n].
\end{aligned}
$$

Dacă $\Delta[n]$ este un n-simplex standard, vom nota cu $\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}$, 0-simplexele date de următoarele aplicaţii :

$\{0\}$ este aplicaţi
$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 0 \\ & 1 \\ 0 \arrow[uur] & 2 \\ & \vdots \\ & n \end{tikzcd}$$

$\{1\}$ este aplicaţia
$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 0 \\ & 1 \\ 0 \arrow[ur] & 2 \\ & \vdots \\ & n \end{tikzcd}$$

$\{2\}$ este aplicaţia
$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 0 \\ & 1 \\ 0 \arrow[r] & 2 \\ & \vdots \\ & n \end{tikzcd}$$

. . . .

$$\{k\} \text{ este aplicația } \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \\ & 1 \\ & \vdots \\ 0 \arrow[rd] & \\ & k \\ & \vdots \\ & n \end{tikzcd}$$

Definiția 1.2. Un complex semisimplicial Y este subcomplex al lui X, dacă $Y_n \subset X_n$ pentru orice n, $d_i^Y = d_i^X|_Y$ și $s_{ij}^Y = s_i^X|_Y$.

Remarcă. Pentru orice sistem de mulțimi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, $Y_1 \subset X_1, \ldots, \ldots, Y_n \subset X_n$, X fiind complex semisimplicial, definim subcomplexul semisimplicial generat, ca fiind cel mai mic subcomplex care îl conține (totdeauna există).

Prin abuz vom numi subcomplex generat de familia A de n simplexe ale lui X, subcomplexul generat de sistemul de mulțimi $\emptyset, \emptyset, \ldots, A, \emptyset, \ldots \emptyset$.

Desemnăm încă prin $\{i\}$ subcomplexul semisimplicial generat de 0-simplexul i.

a) Desemnăm prin :

$\Delta^i[n]$ subcomplexul semisimplicial al n-simplexului standard generat de $n-1$-simplexul $d_i\,\delta_n$, unde δ_n este unicul n-simplex al lui $\Delta\,[n]$.

b) $\Lambda^k\,[n]$ subcomplexul semisimplicial al n-simplexului standard generat de $n-1$ simplexele

$$d_0\,\delta_n,\ \ldots\ d_{k-1}\,\delta_n,\ d_{k+1}\,\delta_n,\ \ldots\ d_n\,\delta_n.$$

c) $\dot{\Delta}\,[n]$ subcomplexul semisimplicial al n-simplexului standard generat de $n-1$ simplexele $d_0\,\delta_n, d_1\,\delta_n, \ldots, d_n\,\delta_n$.

d) $\ddot{\Delta}\,[n]$ subcomplexul semisimplicial generat de $n-2$ simplexele $d_i\,d_j\,\delta_n$ ale n-simplexului fundamental δ_n.

Transpunînd ansamblist morfismul de complexe semisimpliciale $(f: X \to Y)$, obținem un sistem de funcții $f_n : X_n \to Y_n$ pentru care $f_n\,s_i = s_i\,f_{n-1}$ și $f_n\,d_i = d_i\,f_{n+1}$.

Desemnăm prin :

a) i^k injecția semisimplicială $\Delta^k\,[n] \xrightarrow[k_i]{i_k} \Delta\,[n]$;

b) i_k injecția semisimplicială $\Lambda^k[n] \to \Delta\,[n]$;

c) i injecția semisimplicială $\dot{\Delta}\,[n] \to \Delta[n]$;

d) j injecția semisimplicială $\ddot{\Delta}\,[n] \to \Delta\,[n]$.

Propoziția 1.3. *În categoria complexelor semisimpliciale* C = Fonct ctv (Δ, Ens) *există produse fibrate* (*deci și produse directe*).

Propoziția 1.4. *În categoria complexelor semisimpliciale* C *există sume cofibrate* (*deci și sume directe*).

Dacă X este un complex semisimplicial și Y un altul, produsul direct $(X \times Y)$ are următoarea descriere : $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$ $s_i^{X \times Y}: (X \times Y)_n \to (X \times Y)_{n+1}$ este definit prin $s_i^X \times s_i^Y : X_n \times Y_n \to X_{n+1} \times Y_{n+1}$ și $d_i^{X \times Y}$ $Y : (X \times Y)_n \to (X \times Y_{n+1})$ este definit prin $d_i^X \times d_i^Y : X_n \times Y_n \to X_{n-1} \times Y_{n-1}$.

Dacă X este un complex semisimplicial și Y un altul, suma directă $X \cup Y$ are următoarea descriere

$$(X \cup Y)_n = X_n \cup Y_n, \; d_i^{X \cup Y}|_{X_n} = d_i^X, \; d_i^{X \cup Y}|_{Y_n} = d_i^Y, \; s_i^{X \cup Y}|_{X_n} = s_i^X \; s_i^{X \cup Y}|_{Y_n} = s_i^Y.$$

Fie complexul semisimplicial $\Delta[1] \times X$ și $i_0 : X \to \Delta[1] \times X$ aplicația semisimplicială definită prin $i_0(x) = s_0^q \, \{0\} \times x$ pentru orice q-simplex x al lui X_q și analog $i_1 : X \to \Delta[1] \times X$ definită prin $i_1(x) = s_0^q \{1\} \times x$ pentru orice q-simplex x al lui X_q.

Desemnăm prin $\{0\} \times X$ subcomplexul lui X generat de

$$Y_0 = \{y \in \Delta[1] \times X \mid y = \{0\} \times x, \quad x \in X_0\}$$

. . . .

$$Y_k = \{y \in \Delta[1] \times X \mid y = s_0^k \; \{0\} \times x, \quad x \in X_k\}$$

și analog $\{1\} \times X$; este evident faptul că i_0 stabilește un izomorfism între X și $\{0\} \times X$ și i_1 între X și $\{1\} \times X$.

DEFINIȚIA 1.5. a) Două aplicații semisimpliciale f și $g : X \to Y$ se zic omotope dacă există aplicația semisimplicială $h : \Delta[1] \times X \to Y$, astfel încît $h \circ i_0 = f$ și $h \circ i_1 = g$. (Convenim să notăm $h \circ i_0$ prin $h|_{\{0\} \times X}$ și $h \circ i_1$ prin $h|_{\{1\} \times X}$

b) f, g două aplicații semisimpliciale de la (X, A) în (Y, B), A și B fiind subcomplexe semisimpliciale ale lui X respectiv Y iar $f(A) \subset B$, $g(A) \subset B$, se zic omotope relativ la A dacă sînt verificate condițiile de la a) și în plus $h(\Delta[1] \times A) \subset B$.

DEFINIȚIA 1.6. Vom numi n- simplex singular al lui X o aplicație semisimplicială f a lui Δ $[n]$ în X.

Oricărui n-simplex singular i se poate asocia un n-simplex al lui X_n și anume $x = f(\delta_n)$ (δ_n fiind unicul n-simplex al lui $\Delta[n]$ și fiecărui n-simplex x al lui X_n îi putem asocia un n-simplex singular punînd $f(\delta_n) = x, f(s_{i_1} \ldots s_{i_k} d_{j_i} d_{j_2} \ldots \delta_n) = s_{i_1} \ldots s_{i_k} d_{j_1} d_{j_k} \ldots f(\delta_n)$. f astfel definit constituie o aplicație semisimplicială a lui $\Delta[n]$ în X. Este evident că asocierile simplex $\rightsquigarrow$ simplex singular și simplex singular $\rightsquigarrow$ simplex, sînt reciproce.

DEFINIȚIA 1.7. Tripletul (X, Y, p), X, Y complexe semisimpliciale, p aplicație semisimplicială de la X în Y, se numește fibrare Kan dacă fiind date n-simplexele $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ cu $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pentru $i < j$ pentru care există un $n+1$-simplex y astfel încît $p(x_i) = d_i y$, există un $n+1$-simplex x astfel încît $p(x) = y$ și $d_i x = x_i$ oricare ar fi n și k.

Definiția 1.7′. Același triplet este fibrare Kan dacă oricare ar fi diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & Y \\
\Lambda^k[n] \arrow[u, "u"] \arrow[r, "k_i"] & \Delta[n] \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

există aplicația semisimplicială $w : \Delta[n] \to X$ astfel încît diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p"] & Y \\
\Lambda^k[n] \arrow[u, "u"] \arrow[r, "k_i"] & \Delta[n] \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, "w"']
\end{tikzcd}$$

să fie comutativă.

Definiția 1.7″. Același triplet este fibrare Kan dacă oricare ar fi diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "p"] & Y \\
\Delta[1]\times\dot{\Delta}[n]\cup\{e\}\times\Delta[n] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \Delta[1]\times\Delta[n] \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

$\{e\}$ fiind $\{0\}$ sau $\{1\}$, există un w care face diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, "p"] & Y \\
\Delta[1]\times\dot{\Delta}[n]\cup\{e\}\times\Delta[n] \arrow[ur, "u"'] \arrow[rr] & & \Delta[1]\times\Delta[n] \arrow[u, "v"'] \arrow[ul, "w"']
\end{tikzcd}$$

comutativă. Este clară echivalența definițiilor 1.7 și 1.7′. Puțin mai delicat de demonstrat este echivalența lor cu 1.7″.

Definiția 1.8. Complexul semisimplicial X se numește Kan dacă oricare ar fi n-simplexele $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ cu $d_i x_j = d_{j-1} x_i$, $i < j$, există un $n+1$ simplex x astfel că $d_{ix} = x_i$.

Definiția 1.8′. Complexul semisimplicial X se numește Kan dacă tripletul $(X, \Delta[0], p)$ unde p este unică aplicație semisimplicială de la X în $\Delta[0]$, este fibrare Kan.

Definiția 1.8″. Complexul X se zice Kan dacă orice aplicație semisimplicială $f : \Delta[1] \times \dot{\Delta}[n] \cup \{e\} \times \Delta[n] \to X$ admite o extensie $\tilde{f} : \Delta[1] \times \times \Delta[n] \to X$ (e fiind 0 sau 1).

Propoziția 1.9. *Dacă tripletul* (E, B, p) *este fibrare Kan și* B *este complex semisimplicial Kan, atunci* E *este complex semisimplicial Kan.*

Propoziția 1.10. *Dacă tripletul* (E, B, p) *este fibrare Kan,* E *este complex semisimplicial Kan și* p *este surjectivă, atunci* B *este complex semisimplicial Kan.*

Fie $p : E \to B$ o aplicație semisimplicială de la complexul semisimplicial E în complexul semisimplicial B și b_0 un 0-simplex al lui B. Fie $\bar{b}_0$ complexul semisimplicial generat de b_0; $p^{-1}(\bar{b}_0)$ este un complex semisimplicial și se numește fibra deasupra lui b_0.

PROPOZIȚIA 1.11. *Dacă* (E, B, p) *este o fibrare Kan și* b_0 *un* 0*-simplex al lui* B, $p^{-1}(\bar{b}_0)$ *este un complex semisimplicial Kan.*

Fie X un complex Kan și x_0 un 0-simplex al lui X.

Fie $\Gamma_n(X, x_0)$ mulțimea n-simplexelor x pentru care $d_i x \in (\bar{x}_0)_{n-1}$ adică $d_i x = s_0^{n-1} x_0$.

DEFINIȚIA 1.12. n-simplexele x și $x' \in \Gamma_n(X, x_0)$ se zic omotope dacă există un $n+1$ simplex z astfel că $d_0 z, \dots, d_{n-1} z \in (\bar{x}_0)_n$ adică $d_0 z = \dots = d_{n-1} z = s_0^n x_0$, $d_n z = x$, $d_{n+1} z = x'$.

Relația de omotopie între simplexele lui $\Gamma_n(X, x_0)$ pentru X complex Kan este o relație de echivalență pe care o vom nota cu R.

Fie $\Pi_n(X, x_n) = \Gamma_n(X, x_n)/R$. Definim pe $\Pi_n(X, x_0)$ o multiplicare punînd $[x] \cdot [y] = [z]$, unde $[x]$ este R — clasa lui x, $[y]$ este R — clasa lui y și $[z]$ este R — clasa lui z, dacă există $n+1$ simplexul u pentru care $d_0 u = d_1 u = \dots = d_{n-2} u = s_0^q x_0$, $d_{n-1} u = x$, $d_n u = z$, $d_{n+1} u = y$.

Cu această operație, mulțimea $\Pi_n(X, x_0)$ $n \geqslant 1$ devine grup care este abelian dacă $n \geqslant 2$.

Fie acum grupul liber $C_n(X)$ generat de n-simplexele lui X_n; definim pe generatori operatorul $d : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ punînd $dx = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n d_i x$.

Este clar că d este un operator de derivare. Putem construi atunci cu ajutorul lui grupurile de omologie $H_n(X)$. Există evident un omomorfism $h_n : \Pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$, numit omomorfismul lui Hourewicz.

TEOREMA 1.13. *Dacă X este un complex semisimplicial Kan cu un singur* 0*-simplex, și dacă* $\Pi_k(X, x_0) \approx 0$ *pentru* $k \leqslant n-1$, *atunci* $H_k(X) \approx 0$ *pentru* $k \leqslant n-1$, $h_n : \Pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ *este izomorfism și* $h_{n+1} : \Pi_{n+1}(X, x_0) \to H_{n+1}(X)$ *epimorfism.*

TEOREMA 1.14. *Dacă* $f : X \to Y$ *este o aplicație semisimplicială între* 2 *complexe semisimpliciale cu un singur* 0*-simplex, atunci*

1) $f_* : \Pi_k(X, x_0) \to \Pi_k(Y, f(x_0))$ *este izomorfism pentru* $k \leqslant n$, *atrage* $f_\# : H_k(X) \to H_k(Y)$ *izomorfism pentru* $k \leqslant n$;

2) *dacă* f_* *este izomorfism pentru* $k \leqslant n$ *și epimorfism pentru* $k = n+1$, $f_\#$ *este epimorfism pentru* $k = n+1$.

3) *dacă X și Y sînt simplu conexe, atunci «*$f_\#$ *izomorfism pentru* $k \leqslant n$ *și epimorfism pentru* $n+1$*» atrage «*f_* *izomorfism pentru* $k \leqslant n$ *și epimorfism pentru* $n+1$*».*

TEOREMA 1.15. *Dacă* $f : X \to Y$ *este o aplicație care induce izomorfism pentru grupurile de omotopie adică* $\Pi_n(X, x_0) \approx \Pi_n(Y, f(x_0))$, *și dacă X și Y sînt conexe, X și Y au același tip de omotopie semisimplicial.*

TEOREMA 1.16. *Dacă* $F \to E \to B$ *este fibrare Kan cu B complex Kan, atunci E este Kan și există șirul exact de omotopie*

$$\dots \to \Pi_n(F, x_0) \to \Pi_n(E, x_0) \to \Pi_n(B, p(x_0)) \to \Pi_{n-1}(F, x_0) \to \dots$$

PROPOZIȚIA 1.17. *Există omotopiile* ω_n :

$\omega_n : (\Delta[1] \times \Delta[n], \{0\}) \to (\Delta[n], 0)$ *pentru care* :

i) $\omega_n(\Delta[1] \times \{0\}) = \{0\}$;

ii) $\omega_n \circ i_1 = \mathrm{Id}$, $\omega_n \circ i_0 = 0$;

iii) $i^k \circ \omega_{n-1} = \omega_n(\mathrm{Id} \times i^k)$ pentru $i > 0$.

Demonstrație. Punem $\omega_n(a_0) = \omega_n(a_1) = s_0\,\delta_n$, $\omega_n(a_i) = s_{i-1} \ldots \ldots s_0 d_1 \ldots d_{i-1}\,\delta_n$, $i > 0$, unde $a_i = (s_n \ldots s_{i+1} s_{i-1} \ldots s_0\,\delta_1,\ s_i \cdot \delta_n)$ pentru celelalte simplexe ω_n este definit prin compatibilitate.

Remarcă. $\omega_n(\Delta[1] \times \Lambda^\circ[n]) \subset \Lambda^\circ[n]$.

Fie acum $\widetilde{\Pi}_n(X, x_0)$ mulțimea claselor de omotopie de aplicații semisimpliciale $f : (\dot{\Delta}[n+1], \{0\}) \to (X, x_0)$ (relația de omotopie fiind o relație de echivalență dacă X este complex Kan).

Există o aplicație naturală $j_1 : \Pi_n(X, x_0) \to \widetilde{\Pi}_n(X, x_0)$

LEMA 1.18. *Fie f, f', 2 aplicații semisimpliciale $(\dot{\Delta}[n+1], \Lambda^\circ[n+1]) \to (X, x_0)$. Dacă există o omotopie între f și f' relativ la $\{0\}$, există una și relativ la $\Lambda^0[n+1]$.*

Fiecărei aplicații $f : (\dot{\Delta}[n+1], \{0\}) \to (X, x_0)$ îi putem asocia o aplicație omotopă cu ea $\tilde{f} : (\dot{\Delta}[n+1], \Lambda^0[n+1]) \to (X, x_0)$ căreia i se asociază un n-simplex σ ale cărui frontiere $d_i\,\sigma$ sînt $s_0^{n-1} x_0$.

Pentru aceasta vom construi o omotopie $F : (\Delta[1] \times \dot{\Delta}[n+1], \Delta[1] \times \{0\}) \to (X, x_0)$ astfel încît $F \mid \{0\} \times \dot{\Delta}[n+1] = \tilde{f}$, $F \mid \{1\} \times \dot{\Delta}[n+1] = f$ și $F \mid \Delta[1] \times \{0\} = x_0$. Definim $F \mid \Delta[1] \times \Lambda^0[n+1] = f_{|\Lambda^0[n+1]} \cdot \omega_{n+1}$ unde ω_{n+1} este omotopia afirmată de 1.17; punem $F \mid \{1\} \times \Delta^0[n+1] = f \mid \Delta^0[n+1]$ și avem în acest fel definit F pe $\Delta[1] \times \dot{\Delta}^0[n+1] \cup \{1\} \times \Delta^\circ[n+1]$ și conform definiției complexului Kan putem extinde această aplicație semisimplicială la o aplicație semisimplicială $F : \Delta[1] \times \Delta^0[n+1]$ q.e.d.

Punem $\sigma = F \mid \{0\} \times \Delta^0[n+1]$. Este clar că σ nu este univoc definit, dar f definește evident în mod univoc o clasă de omotopie de elemente σ în $\Pi_n(X, x_0)$ conform lemei 1.18. Mai mult, dacă f este omotop cu f', atunci clasa de omotopie pusă în evidență de un σ respectiv un σ' este aceeași (tot datorită lemei 1.18). Rezultă un $j_2 : \widetilde{\Pi}_n(X, x_0) \to \Pi_n(X, x_0)$. Se verifică ușor că $j_1 \circ j_2 = \mathrm{Id}$ și $j_2 \circ j_1 = \mathrm{Id}$.

Avînd structura de grup a lui $\Pi_n(X, x_0)$, o putem transporta pe $\widetilde{\Pi}_n(X, x_0)$.

Fie acum $\ddot{\Delta}[n+2]$ subcomplexul generat de toate simplexele $d_i\, d_j\, \delta_{n+2}$ ale lui $\Delta[n+2]$.

Notăm cu l_i incluziunea $\Delta^i_{[n+1]} \xrightarrow{l_i} \ddot{\Delta}[n+2]$, mai precis $(\Delta^\circ)^i_{[n+2]} \to \ddot{\Delta}[n+2]$.

Dacă $f : (\ddot{\Delta}[n+2], d_2 \ldots d_{n+2}\,\delta_{n+2}) \to (X, x_0)$ este o aplicație semisimplicială, desemnăm prin $\hat{f}_i$ clasa lui $f \circ l_i$ în $\widetilde{\Pi}_n(X, x_0)$.

PROPOZIȚIA 1.19. $\sum\limits_{i=0}^{n+2} (-1)^i \hat{f}_i = 0$ *pentru* $n > 1$ *și* $\hat{f}_3 + \hat{f}_1 - \hat{f}_2 - f_0 = 0$ *pentru* $n = 1$.

PROPOZIȚIA 1.20. *O aplicație semisimplicială $f : (\dot{\Delta}[n+1], \{0\}) \to (X, x_0)$ admite o extensie $f : (\Delta[n+1], \{0\}) \to (X, x_0)$ dacă și numai dacă $\hat{f} = 0$.*

DEFINIȚIA 1.21. Fibrarea (E, B, p) se zice minimală dacă oricare ar fi diagrama comutativă.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[r, "p"] & B & \\
\dot{\Delta}[n] \arrow[ur, "\bar{a}"] & & & \Delta[n] \arrow[ul] \\
 & \Delta[1]\times\dot{\Delta}[n] \arrow[ul, "pr"] \arrow[uu, "a"] \arrow[r, "\Delta[1]\times i"] & \Delta[1]\times\Delta[n] \arrow[ull, "h"] \arrow[uu, "b"] \arrow[ur, "pr"'] &
\end{tikzcd}
, \quad h \mid \{0\} \times \Delta[n] = h \mid \{1\} \times \Delta[n].$$

TEOREMA 1.22. (Criteriul Gabriel-Zisman). *Fibrarea* (E, B, p) *se zice minimală, dacă și numai dacă pentru orice diagramă comutativă*

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, "p"] & B \\
\Lambda[1]\times\dot{\Delta}[n]\cup\{e\}\times\Delta[n] \arrow[ur, "v"] \arrow[rr, "i"] & & \Delta[1]\times\Delta[n] \arrow[ul, shift right, "H_2"'] \arrow[ul, shift left, "H_1"] \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}$$

unde $\{e\}$ *este* $\{0\}$ *sau* $\{1\}$, *avem* $H_1 \mid \{1-e\} \times \Delta[n] = H_2 \mid \{1-e\} \times \Delta[n]$.

TEOREMA 1.23. *Două fibrări minimale* (E, B, p) *și* (E', B, p') *cu același tip de omotopie sînt izomorfe.*

DEFINIȚIA 1.24. Un complex semisimplicial Kan se zice minimal dacă fibrarea $(X, \Delta[0]\ p)$, p fiind unica aplicație semisimplicială de la X în $\Delta[0]$, este fibrare minimală.

Definiția 1.25. a) Un complex semisimplicial Kan se zice minimal dacă fiind date x și x', două n-simplexe cu $d_i\, x = d_i\, x'$, există un $n+1$-simplex z pentru care

$$\begin{aligned}
d_0 z &= s_{n-1} d_0 x \\
d_1 z &= s_{n-1} d_1 x \\
&\cdots\cdots\cdot \\
d_{n-1} z &= s_{n-1} d_{n-1} x \\
d_n z &= x \\
d_{n+1} z &= x' \qquad \text{pentru orice } n.
\end{aligned}$$

b) Un complex semisimplicial X se zice n-minimal, dacă condiția a) este verificată pentru n aprioric dat.

PROPOZIȚIA 1.26. *Un complex semisimplicial minimal conex are un singur* 0-*simplex.*

TEOREMA 1.27. *Două complexe semisimpliciale minimale ce au același tip de omotopie sînt izomorfe.*

TEOREMA 1.28. *Dacă* X *este minimal*, $\Gamma_n(X, x_0) = \Pi_n(X, x_0)$ *ca mulțime*

TEOREMA 1.29. *Dacă X este complex semisimplicial minimal și conex, orice 2 aplicații* $f, g : (\dot{\Delta}[n+1], \{0\}) \to (X, x_0)$ *pentru care* $f \mid \Lambda^0 [n+1] = g \mid \Lambda^0 [n+1]$ *și fomotop cu g relativ al* $\{0\}$ *atrag în mod necesar* $f = g$ (consecință a lemei 1.13).

TEOREMA 1.30. *Dacă X este un complex semisimplicial minimal și* $f : (\ddot{\Delta}[n+2], \{0\}) \to (X, x_0)$ *o aplicație semisimplicială pentru care (notînd* $f \mid \dot{\Delta}^i [n+2] = t^i$), $t^3 = t^4 = \dots t^{n+1} = 0$, $\hat{t}_0 - \hat{t}_1 + \hat{t}_2 = 0$.

ANEXĂ

*Demonstrația lemei 1.18**). Notăm cu ω_n omotopiile construite la 1.7. Păstrăm notația ω_{n+1} pentru aplicația $\omega_{n+1} \mid \Delta [1] \times \Lambda^0 [n+1] \to \Lambda^0 [n+1]$.

Să considerăm acum aplicația compusă $K : \Delta [1] \times \Delta [1] \times \Lambda^0 [n+1] \to X$ definită prin $\Delta [1] \times (\Delta [1] \times \Lambda^0 [n+1]) \xrightarrow{\mathrm{Id} \times \omega_{n+1}} \Delta [1] \times \Lambda^\circ [n+1] \xrightarrow{k} X$, unde k este omotopia dată.

Este clar că $K \mid \Delta [1] \times \{0\} \times \Lambda^0 [n+1]$ este egală cu $k \mid \Lambda^\circ [1] \times \Lambda^0 [n+1]$.

Fie atunci $\bar{K}$ aplicația lui $\Delta [1] \times \Delta [1] \times \Lambda^0 [n+1] \cup \Delta [1] \times \{0\} \times \dot{\Delta} [n+1]$ care este egală cu K pe $\Delta [1] \times \Delta [1] \times \Lambda^\circ [n+1]$ iar pe $\Delta [1] \times \{0\} \times \dot{\Delta} [n+1]$ este k.

Cum X este complex Kan, există o aplicație de extensie $H : \dot{\Delta} [1] \times \Delta [1] \times \dot{\Delta} [n+1]$ (ce se construiește din aproape în aproape folosind proprietatea de a fi Kan a lui X) care prelungește pe $\bar{K}$.

Punem

$$f_1 = H \mid \{0\} \times \{1\} \times \dot{\Delta} [n+1]$$

$$f_1' = H \mid \{1\} \times \{1\} \times \dot{\Delta} [n+1]$$

f_1, f_1' au proprietatea că aplică $(\dot{\Delta} [n+1], \Lambda^0 [n+1])$ în (X, x_0).

Atunci $H \mid \Delta [1] \times \{1\} \times \dot{\Delta} [n+1]$ este omotopia lui f_1 cu f_1' și aplică pe $\Delta [1] \times \Lambda^0 [n+1]$ în x_0.

$H \mid \{0\} \times \Delta [1] \times \dot{\Delta} [n+1]$ este o omotopie între f_1 și f iar $H \mid \{1\} \times \Delta [1] \times \dot{\Delta} [n+1]$ este o omotopie între f_1' și f', ambele aplicînd pe $\Delta [1] \times \Lambda^0 [n+1]$ în x_0.

Cum complexul semisimplicial X este Kan, f omotop cu f_1, f_1 omotop cu f_1' și f_1' omotop cu f', rezultă f omotop cu f' (evident printr-o omotopie ce aplică $\Delta [1] \times \Lambda^0 [n+1]$ în x_0.

---

*) În teza lui M. Zisman demonstrația lemei 1.18 este eronată. M. Zisman a avut amabilitatea să ne transmită însă o demonstrație corectă a acestei leme, demonstrație ce ne-am permis s-o reproducem aici.

CAPITOLUL II

Fie F un grup semisimplicial*) care operează la stînga pe un complex semisimplicial X, adică există o aplicaţie semisimplicială $g : F \times X \to X$ astfel încît :

1) $g(e_n, x) = x$, unde x este un n-simplex al lui X iar e_n este n-unitatea lui F.

2) $g(u, g(v, x)) = g(uv, x)$, ude u, v sînt n-simplexe ale lui F iar x este un n-simplex al lui X.

3) $g(u, x) = x$ atrage în mod necesar $u = e_n$ pentru orice n-simplex u al lui F şi x n-simplex al lui X.

Fie acum B mulţimea claselor de F echivalenţă de simplexe din X şi fie p proiecţia canonică de la X pe B.

Este uşor de remarcat că B este încă complex semisimplicial şi p este o aplicaţie semisimplicială.

DEFINIŢIA 2.1. Un sistem (F, X, B, p) constituit dintr-un grup semisimplicial F, un complex semisimplicial X pe care F operează conform cu 1), 2), 3), un complex semisimplicial B şi o aplicaţie p, unde B se identifică cu mulţimea orbitelor lui X (claselor de F echivalenţă) iar p cu proiecţia canonică, se numeşte *fibrare principală* (vom nota prescurtat (F, X, B)).

Pentru a justifica numele de fibrare vom arăta că

PROPOZIŢIA 2.2. *Orice fibrare principală este o fibrare Kan* (*adică* $p : X \to B$ *este o fibrare Kan*).

Fie deci date $b \in B_n$ şi $x_i \in X_{n-1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq k)$ astfel ca $p(x_i) = d_i b$, $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pentru $i < j$.

Alegem $x \in X_n$ astfel ca $p(x) = b$; atunci x_i şi $d_i x$ au aceeaşi imagine prin p, deci există pentru fiecare $i \neq k$ un unic $u_i \in F_{n-1}$ astfel că $d_i x = g(u_i, x_i)$ (consecinţă imediată a axiomelor 1), 2), 3)). Pentru i, j avem $d_i\, g(u_j, x_j) = d_{j-1} g(u_i, x_i)$, de unde $g(d_i u_j, d_i x_j) = g(d_{j-1} u_i, d_{j-1} x_i)$ şi în virtutea unicităţii afirmate de 3), $d_i u_j = d_{j-1} u_i$.

Fie atunci n-simplexul v al lui F pentru care $d_i v = u_i$, pentru $i \neq k$; un astfel de n-simplex există datorită faptului că F este complex Kan (F fiind grup semisimplicial).

Fie atunci $y = v^{-1} x$. Avem $d_i y = x_i$ pentru $i \neq k$ şi $p(y) = b$. Cu aceasta proprietatea de a fi fibrare Kan e dovedită.

COROLAR. *Dacă X este un complex Kan, B este şi el complex Kan, p fiind epimorfism.*

Fie acum $p : X \to B$ o fibrare în sensul lui Kan.

DEFINIŢIA 2.3. O aplicaţie $\rho : B \to X$ se numeşte „ridicare" dacă satisface condiţiile următoare.

$$(1) \qquad p\rho = Id_B, \quad s_i \rho = \rho s_i, \quad d_{i+1}\rho = \rho d_{i+1} \quad \text{pentru } i \geqslant 0.$$

Remarcă. ρ nu este aplicaţie semisimplicială, pentru că $d_0 \rho \neq \rho d_0$ (în general).

PROPOZIŢIA 2.4. *Dacă $p : X \to B$ este fibrare Kan surjectivă şi dacă B este conex, există „ridicări". Mai precis, fie B' un subcomplex semisim-*

---

*) F este grup semisimplicial dacă F_n sînt grupuri iar d_i şi s_i omomorfisme de grupuri.

plicial al lui B și fie $\rho' : B' \to p^{-1}(B')$ o „ridicare", atunci există o „ridicare" $\rho : B \to X$ care prelungește pe ρ'.

Demonstrație. Ipoteza (R_n). Există pentru fiecare $q \leqslant n$ o aplicație $\rho : B_q \to X_q$ care prelungește pe ρ' și îndeplinește condițiile :

$$p\rho(b) = b \text{ pentru } b \in B_q,\ q \leqslant n.$$

$$\rho d_i b = d_i \rho b \text{ pentru } i \geqslant 1,\ b \in B_q,\ 1 \leqslant q \leqslant n.$$

$$\rho s_i b = s_i \rho b \text{ pentru } i \geqslant 0,\ b \in B_q,\ q < n.$$

Din ipoteza (R_n) vom obține ca concluzie ipoteza R_{n+1}.

Definim ρb, $b \in B_{n+1}$, astfel : Dacă $b \in B'_{n+1}$ punem $\rho b = \rho' b$, dacă $b \notin B'_{n+1}$ avem :

Cazul 1. b este degenerat.

Avem atunci $b = s_i y$, cu $y \in B_n$. Cum trebuie să avem $\rho s_i b = s_i \rho b$, punem această relație ca definiție. Definiția este bună căci dacă $s_i y = s_j z$ avem și $s_i \rho y = s_j \rho z$.

Într-adevăr, dacă $i = j$, relația $s_i y = s_i z$ atrage $y = z$. Dacă $i < j$, $s_i y = s_j z$ atrage $z = s_i d_j y$ (prin aplicarea lui d_{j+1}), de unde $s_i y = s_j s_i d_j y = s_i s_{j-1} d_j y$, de unde

$$y = s_{j-1} d_j y \text{ (prin aplicarea lui } d_i\text{)};$$

atunci $s_j \rho z = s_j \rho s_i d_i y = s_j s_i \rho d_i y = s_i s_{j-1} \rho d_i y = s_i \rho s_{j-1} d_i y$ și, ținînd cont de relația anterior obținută,

$$s_i \rho s_{j-1} d_i y = s_i \rho y .$$

Cazul 2. b nu este degenerat. După condiția lui Kan, există un $x \in X_{n+1}$ pentru care $px = b$ și $d_i x = p d_i b$ pentru $i \geqslant 1$. Punem $\rho b = x$. Relațiile de comutare cu d_i și s_i sînt automat verificate.

Ipoteza R_0 este banal verificată, și conform principiului inducției propoziția este demonstrată.

DEFINIȚIA 2.5. Un sistem (F, E, B, p) constituit din 3 complexe semisimpliciale F, E, B și o aplicație semisimplicială $p : E \to B$ este numit „produs torsionat" dacă :

1) $E_q = F_q \times B_q$.

2) Pentru orice 0-simplex $b \in B_0$ aplicațiile $i_b : F \to E$ definite prin $i_b(\alpha) = (\alpha, s^n b)$ (α este un n-simplex al lui F) sînt injecții semisimpliciale.

3) $p(\alpha, b) = b$.

4) $d_i(\alpha, b) = (d_i \alpha, d_i b)$, $0 < i \leqslant n$

$s_i(\alpha, b) = (s_i \alpha, s_i b)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, unde α și b sînt n simplexe ale lui F respectiv B.

Remarcă. Avem :

$$d_0(\alpha, b) = (\tau(\alpha, b), d_0 b).$$

Demonstrație. $d_0(\alpha, b) = (\gamma, c)$; cum $p(d_0(\alpha, b)) = c$ și $p(d_0(\alpha, b)) = d_0 p(\alpha, b) = d_0 b$ avem $d_0(\alpha, b) = (\tau(\alpha, b), d_0 b)$, de unde $(\gamma = \tau(\alpha, b))$.

PROPOZIŢIA 2.6. *Funcţia* $\tau : E_{q+1} \to F_q$ *verifică proprietăţile următoare :*

i) $\tau\,(d_1\alpha,\ d_1 b) = \tau\,(\tau\,(\alpha,\ b),\ d_0 b)$,
ii) $\tau\,(d_{i+1}\,\alpha,\ d_{i+1}\,b) = d_i\,(\tau\,(\alpha,\ b))$ pentru $i > 0$,
iii) $\tau\,(s_0\,\alpha,\ s_\theta b) = \alpha$,
iv) $\tau\,(s_{i+1}\ \alpha,\ s_{i+1}\ b) = s_i\,\tau\ (\alpha,\ b)$,
v) $\tau\,(\alpha,\ s_0^q\,b) = d_0\,\alpha$ pentru b un 0-simplex al lui B.

Demonstraţie. i) Pornim de la egalitatea

$$d_0\ d_1\ (\alpha,\ b) = d_0\ d_0\ (\alpha,\ b).$$

Pentru membrul stîng considerăm şirul de egalităţi $d_0 d_1\ (\alpha,\ b) = d_0\,(d_1\ \alpha,\ d_1 b) = (\tau\ (d_1\ \alpha,\ d_1 b),\ d_0 d_1 b) = (\tau\,(d_1\ \alpha,\ d_1 b),\ d_0 d_0 b)$.

Pentru membrul drept considerăm

$$d_0 d_0\,(\alpha,\ b) = d_0\ (\tau\,(\alpha,\ b),\ d_0 b) = (\tau\,(\tau\,(\alpha,\ b),\ d_0 b),\ d_0 d_0 b).$$

Din compararea egalităţilor finale ale celor 2 şiruri rezultă *i*).

ii) Pornim de la egalitatea

$$d_i\ d_0\,(\alpha,\ b) = d_0\,d_{i+1}\ (\alpha,\ b).$$

Pentru partea stîngă considerăm şirul de egalităţi

$$d_i\ d_0\,(\alpha, b) = d_i\ (\tau\,(\alpha,\ b),\ d_0 b) = (d_i\ \ \tau\,(\alpha,\ b),\ d_i\ d_0\,b)$$

iar pentru cea dreaptă

$$d_0\,d_{i+1}\,(\alpha, b) = d_0\,(d_{i+1}\ \ \alpha,\ d_{i+1}\,b) = (\tau\ (d_{i+1}\,\alpha,\ d_{i+1}\ b),\ d_0\,d_{i+1}\,b) =$$
$$= (\tau\ (d_{i+1}\ \alpha,\ d_{i+1}\ b),\ d_i\ d_0\,b)$$

Comparînd rezultatele finale obţinem ii)

iii) Pornim de la egalitatea

$$d_0\,s_0\,(\alpha,\ b) = (\alpha,\ b).$$

Considerăm la fel

$$d_0\,s_0\,(\alpha, b) = d_0\ (s_0\,\alpha, s_0\,b) = (\tau\,(s_0\,\alpha, s_0\,b), d_0\,s_0\,b) = (\tau\ (s_0\ \alpha,\ \ s_0\,b), b).$$

Comparînd obţinem

$$\tau\,(s_0\ \alpha,\ s_0\ b) = \alpha.$$

iv) Pornim de la egalitatea

$$d_0\,s_{i+1}\,(\alpha, b) = s_i\ d_0\ (\alpha, b).$$

Considerăm egalităţile :

$$d_0\ s_{i+1}\,(\alpha,\ b) = d_0\ (s_{i+1}\,\alpha,\ s_{i+1}\,b) = (\tau\ \ (s_{i+1}\ \ \alpha,\ s_{i+1}\,b),\ d_0\,s_{i+1}\ \ b) =$$
$$= (\tau\,(s_{i+1}\ \alpha, s_{i+1}\,b),\ \ s_i\ d_0\,b).$$

Şi de asemenea

$$s_i\ d_0\ (\alpha,\ b) = s_i\ (\tau\ (\alpha,\ b), d_0 b) = (s_i\ \ \tau\,(\alpha,\ \ b),\ s_i\,d_0\,b)$$

de unde obţinem comparînd rezultatele finale iv)

v) Ținînd cont că $i_b(\alpha) = (\alpha, s_0^q b)$ pentru $\alpha \in F_q$, avem $d_0 i_b(\alpha) = i_b(d_0\alpha)$. Cum $d_0 i_b(\alpha) = (\tau(\alpha, s_0^q b), d_0 s_0^q b) = (\tau(\alpha, s_0^q b), s_0^{q-1} b)$ și $i_b(d_0\alpha) = (d_0\alpha, s_0^{q-1} b)$ obținem $\tau(\alpha, s_0^q b) = d_0\alpha$, deci v).

PROPOZIȚIA 2.7. *Dacă F și B sînt complexe semisimpliciale și τ este o aplicație de la $E_{q+1} = F_{q+1} \times B_{q+1}$ în F_q verificînd* i), ii), ..., v), *există un singur produs torsionat care are pe τ ca funcție de torsiune.* (Demonstrația este evidentă).

Cu alte cuvinte *fibra F, baza B, și funcția τ determină complet structura de produs torsionat.*

PROPOZIȚIA 2.8. *Dacă (F, E, B, p) este o fibrare principală, atunci (F, E, B, p) admite o structură de produs torsionat, adică putem identifica printr-o bijecție ansamblistă $\widetilde{\rho}$, $F \times_\tau B \to E$ astfel încît*

i) $p\widetilde{\rho} = \mathfrak{p}$ (proiecția produsului torsionat);

ii) $g(\alpha, \widetilde{\rho}(\beta, b)) = \widetilde{\rho}(\alpha\beta, b)$.

Demonstrație. Dacă (F, E, B, p) este o fibrare principală, conform cu 2.2 este și o fibrare Kan surjectivă și conform cu 2.4 admite o „ridicare”. Definim atunci aplicația $\widetilde{\rho} : F \times B \to E$ punînd $\widetilde{\rho}(\alpha, b) = g(\alpha, \rho(b))$.

i) Aplicația $\widetilde{\rho}$ este bijectivă:

Aplicația $\widetilde{\rho}$ este injectivă: dacă $\widetilde{\rho}(\alpha, b) = \widetilde{\rho}(\alpha', b')$ adică $g(\alpha, \rho(b)) = g(\alpha', \rho(b')$, aplicînd pe p rezultă $pg(\alpha, \rho(b)) = pg(\alpha', \rho(b')$ sau încă $p\rho(b) = p\rho(b')$ și atunci, deoarece $p\rho = \mathrm{Id}_B$, $b = b'$. Deci $g(\alpha, \rho(b)) = g(\alpha', \rho(b'))$, se scrie $g(\alpha, \rho(b)) = g(\alpha', \rho(b))$. Dar din axiomele fibrării principale, rezultă $\alpha = \alpha'$.

Aplicația $\widetilde{\rho}$ este surjectivă.

Fie $x \in E_q$ și $\rho p(x) \in E_q$. Există în mod evident un element $\alpha \in F_q$ astfel încît $g(\alpha, \rho p(x)) = x$, deoarece $p(x) = p\rho p(x)$.

Vom identifica E cu $\widetilde{\rho}(F \times B)$ și introducem pe $F \times B$ o structură semisimplicială punînd: $d_i(\alpha, b) = \widetilde{\rho}^{-1} d_i \widetilde{\rho}(\alpha, b)$ respectiv $s_i(\alpha, b) = \widetilde{\rho}^{-1} s_i \widetilde{\rho}(\alpha, b)$. În acest fel $F \times B$ devine complex semisimplicial, iar $\widetilde{\rho}$ un izomorfism semisimplicial.

Pentru orice 0-simplex $b \in B_0$ aplicația $i_b(\alpha) = (\alpha, s_0^q(b))$ este o injecție semisimplicială.

Pentru a arăta că este semisimplicială este suficient să verificăm că $\widetilde{\rho}\, i_b$ este semisimplicială.

Dar

$$\widetilde{\rho}\, i_b(\alpha) = g(\alpha, \rho(s_0^q b)) = g(\alpha, s_0^q \rho(b)) \text{ (pentru } \alpha, q\text{-simplex).}$$

Atunci

$$s_i \widetilde{\rho}\, i_b(\alpha) = s_i g(\alpha, s_0^q \rho(b)) = g(s_i \alpha, s_i s_0^q \rho(b)) =$$

$$= g(s_i \alpha, s_0^{q+1} \rho(b)) = \widetilde{\rho}\, i_b(s_i \alpha)$$

$$d_i \widetilde{\rho}\, i_b(\alpha) =$$

$$= d_i g(\alpha, s_0^q \rho(b)) = g(d_i \alpha, d_i s_0^q \rho(b)) = g(d_i \alpha, s_0^{q-1} \rho(b)) = \rho i_b(d_i \alpha).$$

Injectivitatea aplicației $\widetilde{\rho}\, i_b$, este și ea ușor verificabilă căci din $\widetilde{\rho}\, i_b(\alpha) = \widetilde{\rho}\, i_b(\alpha')$ rezultă $g(\alpha, s_0^q \rho(b)) = g(\alpha', s_0^q \rho(b))$ care atrage $\alpha = \alpha'$:

$p(\alpha, a) = a$ este semisimplicială.

Datorită definiției este suficient să verificăm egalitatea (i) $\mathfrak{p} = p\bar{\rho}$.

Într-adevăr, $p\,(\alpha, a) = a$ iar $p\,\tilde{\rho}\,(\alpha, a) = pg\,(\alpha, \rho\,(a)) = p\rho\,(a) = a$.

Verificăm acum

$$\begin{cases} d_i\,(\alpha, b) = (d_i\,\alpha, d_i\,b) \text{ pentru } 0 < i \leqslant n \\ s_i\,(\alpha, b) = (s_i\,\alpha, s_i\,b) \text{ pentru } 0 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că $\tilde{\rho}\,d_i\,(\alpha, b) = \tilde{\rho}\,(d_i\,\alpha, d_i\,b)$ respectiv $\tilde{\rho}s_i\,(\alpha, b) = \tilde{\rho}\,(s_i\,\alpha, s_i\,b)$. Dar $\tilde{\rho}\,d_i\,(\alpha, b) = \tilde{\rho}\,\tilde{\rho}^{-1}\,d_i\,\tilde{\rho}\,(\alpha, b) = d_i\,\tilde{\rho}\,(\alpha, b) = d_i\,g\,(\alpha, \rho\,(b)) = g\,(d_i\,\alpha, d_i\,\rho\,(b)) = g\,(d_i\,\alpha, \rho\,(d_i\,b)) = \tilde{\rho}\,(d_i\,\alpha, d_i\,b)$. La fel pentru cealaltă egalitate.

Egalitatea ii) rezultă din egalitățile :

$$\tilde{\rho}\,(\alpha\beta, b) = g\,(\alpha\beta, \rho\,(b))\,.$$

$$g\,(\alpha, \tilde{\rho}\,(\beta, b)) = g\,(\alpha, g\,(\beta, \rho\,(b)) = g\,(\alpha\beta, \rho\,(b)\,).$$

PROPOZIȚIA 2.9. *Dacă* (F, E, B, p) *este o fibrare principală, atunci funcția de torsiune a produsului torsionat, asociată ridicării* ρ, *este de forma*

$$\tau\,(\alpha, b) = d_0\alpha \cdot \tau\,(e_q\,, b).$$

Demonstrație. Avem

$$d_0\,(\alpha, b) = (\tau\,(\alpha, b), d_0 b),$$

$$d_0\,(\alpha, b) = d_0\,\tilde{\rho}^{-1}\,g\,(\alpha, \tilde{\rho}\,(e_q\,, b)) = \tilde{\rho}^{-1}\,d_0 g\,(\alpha, \tilde{\rho}\,(e_q\,, b)) =$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\,g\,(d_0\alpha, d_0\,\tilde{\rho}\,(e_q\,, b)) = \tilde{\rho}^{-1}\,g\,(d_0\,\alpha, \tilde{\rho}\,d_0\,(e_q\,, b)) =$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\,g\,(d_0\alpha, \tilde{\rho}\,(\tau\,(e_q\,, b), d_0 b)) \text{ conform cu remarca de la } 2.5 =$$

$$= \tilde{\rho}^{-1}\,\tilde{\rho}\,(d_0\,\alpha \cdot \tau\,(e_q\,, b), d_0 b) \text{ (conform cu 2.8) } = (d_0\alpha \cdot \tau\,(e_q\,, b), d_0 b),$$

de unde $\tau\,(\alpha, b) = d_0\,\alpha \cdot \tau\,(e_q\,, b)$.

Notînd $\tau\,(e, b) = \tau'\,(b)$ pe care o vom numi funcție *tordantă*, avem

PROPOZIȚIA 2.10. τ' *are următoarele proprietăți* :

i) $\tau'\,(d_1 b) = d_0\,\tau'\,(b) \cdot \tau'(d_0 b)$,

ii) $\tau'\,d_{i+1} = d_i\,\tau'$, $i > 0$,

iii) $\tau'\,(s_0\,(b)) = e_q$ pentru $b \in B_q$,

iv) $\tau'\,s_{i+1} = s_i\,\tau'$.

(*Verificarea este imediată*).

PROPOZIȚIA 2.11. *Dat fiind* F, *grup semisimplicial*, B *complex semisimplicial și pentru fiecare* q *o funcție* $\tau' : B_{q+1} \to F_q$ *care să verifice proprietățile* i), ii), iii), iv) din 2. 10,

a) *există un unic produs torsionat a cărei funcție de torsiune* τ *să fie* $d_0\,\alpha \cdot \tau'\,(b)$;

b) *acest produs torsionat este o fibrare principală*.

Demonstrație. Fie $E_q = F_q \times B_q$, unde d_i și s_i sînt definite conform cu 2.5. Vom defini acțiunea lui F pe E punînd $g\,(\alpha, (\beta, b)\,) = (\alpha\beta, b)$. Trebuie să arătăm mai întîi că această acțiune este semisimplicială, adică $d_i\, g\, (\alpha,\ (\beta,\ b)) = g\, (d_i\, \alpha,\ d_i\ (\beta,\ b))$ și $s_i\, g\ (\alpha,\ (\beta,\ b)) = g\ (s_i\ \alpha,\ s_i\ (\beta,\ b))$. Prima egalitate (pentru $i \geqslant 1$) și a doua se verifică „tip" după cum urmează :

$$g\, (d_i\ \alpha,\ d_i\, (\beta,\ b)) = g\, (d_i\ \alpha,\ (d_i\ \beta,\ d_i\ b)) = g\, (d_i\ \alpha\ d_i\ \beta,\ d_i\ b) =$$
$$= g\, (d_i\ (\alpha\, \beta), d_i\, b) = d_i g\, (\alpha\, \beta,\ b) = d_i\ g\ (\alpha\, (\beta,\ b)).$$

Prima egalitate pentru $i = 0$ se verifică după cum urmează :

$$g\, (d_0\ \alpha, d_0\, (\beta,\ b)) = g\, (d_0\ \alpha, (d_0\, \beta \cdot \tau'\ (b), d_0\, b)) = (d_0\ \alpha \cdot d_0\ \beta \cdot \tau'\ (b),$$
$$d_0 b) = (d_0\ (\alpha\beta) \cdot \tau'\ (b),\ d_0 b) = d_0\ (\alpha\beta,\ b) = d_0\, g\ (\alpha,\ (\beta,\ b)).$$

Proprietățile cerute de 2.1 sînt automat verificate.

MORFISME DE FIBRĂRI PRINCIPALE

Fie $(E_1,\ B_1,\ F_1)$, $(E_2,\ B_2,\ F_2)$ două fibrări principale de grupuri semisimpliciale F_1 respectiv F_2.

Definiția 2.12. O aplicație $\tilde{f}\ : E_1 \to E_2$ și un omomorfism f^* de grupuri semisimpliciale, definesc un morfism de fibrări principale dacă diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[d, "f^*"] & [-2em] \times E_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & E_1 \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
F_2 & \times E_2 \arrow[r, "g_2"] & E_2
\end{tikzcd}$$

este comutativă

Remarcă. Un astfel de morfism definește o aplicație semisimplicială $f : B_1 \to B_2$.

Convenție. Cînd vom vorbi de un morfism de fibrări principale vom preciza un triplet $(f^*, \tilde{f}, f)$ din motive pur estetice, deși f este complet determinat de f^* și $\tilde{f}$.

Definiția 2.13. Un morfism de fibrări principale de grup structural F va fi un morfism pentru care $f^* = \mathrm{Id}_F$.

Consecință. În categoria fibrărilor principale de grup structural F, obiectele $(F,\ E_1,\ B_1)$ și $(F_1,\ E_2,\ B_2)$ sînt izomorfe dacă și numai dacă f este bijectivă.

Teorema 2.14. *Fie $(F,\ E,\ B)$ o fibrare principală și $f : B' \to B$ o aplicație semisimplicială ; atunci în diagrama comutativă*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] & B \\
F \arrow[u, "\mathrm{id}_F"] \arrow[r] & E \underset{B'}{\times} B' \arrow[u, "\tilde{f}"] \arrow[r, "\tilde{p}"] & B' \arrow[u, "f"]
\end{tikzcd}$$

a) *$\tilde{p}$ este fibrare principală, $(Id,\ \tilde{f}, f)$ constituind un morfism de fibrări principale.*

b) *Dacă* ρ *este o ridicare pentru* p, *atunci există o ridicare* ρ', *unic determinată pentru* p *astfel încît* $\tilde{f}\,\rho' = \rho f$.

c) *Dacă* τ' *este funcţia ,,tordantă'' asociată ridicării* ρ, *atunci* $\tau' \cdot f$ *este funcţia ,,tordantă'' asociată ridicării* ρ'.

d) *Orice morfism de fibrări principale* $(f_1^*, \tilde{f}_1, f) : (F', E', B') \to (F, E, B)$ *se factorizează unic prin morfismul* $(Id, \tilde{f}, f) \colon (F, E \underset{B}{\times} B', B') \to (F, E, B)$.

Demonstraţia lui a), d) este aceeaşi ca în contextul geometric, ea fiind o consecinţă a existenţei produselor fibrate în categoria complexelor semisimpliciale.

Demonstraţia lui b). ρ' se construieşte conform diagramei

$$\begin{tikzcd}
 & E_q \arrow[rr, "p_q"] & & B_q \\
 & (E \underset{B}{\times} B')_q \arrow[u, "f_q"] \arrow[rr, "\bar{p}_q"] & & B'_q \arrow[u, "f_q"] \\
B'_q \arrow[uur, "\rho f_q"] \arrow[ur, dashed, "\rho'"] \arrow[urrr, "Id"'] & & &
\end{tikzcd}$$

ţinînd cont că $(E \underset{B}{\times} B')_q$ este produsul fibrat în categoria mulţimilor, a lui p_q şi f_q.

Deoarece $\rho \cdot f$ şi Id comută cu d_i $0 < i \leqslant n$ şi s_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, atunci p' va comuta cu d_i, $0 < i \leqslant n$ şi s_i, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Demonstraţia lui c). Existenţa lui ρ' cît şi egalitatea $\tilde{f} \cdot \rho' = \rho f$, atrag comutativitatea diagramei

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[rr, "\rho"] & & B \\
 & & F \times B \arrow[u, "\tilde{\rho}"] \arrow[urr] & & \\
E \underset{B}{\times} B' \arrow[uurr, "\tilde{f}"] \arrow[rrr, "\tilde{p}"] & & & B' \arrow[uur, "f"'] & \\
F \times B' \arrow[u, "\tilde{\rho}'"] \arrow[uurr] \arrow[urrr, "\rho"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Cum $(\mathrm{Id} \times f)\, d_0\,(\alpha, b) = d_0\,(\alpha, f\,(b))$ şi cum $d_0\,(\alpha, b) = (d_0\,\alpha \cdot \underset{\sim}{\tau}'\,(b),\ d_0 b)$, $d_0\,(\alpha, f\,(b)) = (d_0\,\alpha_0 \cdot \tau\, f\,(b),\ d_0\, f\,(b)$, avem

$$(\mathrm{Id} \times f)\, d_0\,(\alpha, b) = (d_0\,\alpha \cdot \underset{\sim}{\tau}'\,(b),\ d_0\, f\,(b))$$

$$\Vert$$

$$d_0\,(\alpha, f\,(b)) = (d_0\,\alpha \cdot \tau'\,(f\,(b),\ d_0 f\,(b))$$

Rezultă

$$d_0\ \alpha \circ \tau'\ (b) = d_0 \circ \tau'\ (f\,(b))$$

de unde

$$\underset{\sim}{\tau}'\,(b) = \tau'\,(f\,(b)),\ \text{adică}\ \underset{\sim}{\tau}' = \tau' \cdot f.$$

Fie acum două fibrări principale (F, E, B) şi (F, E', B'). Considerăm complexul semisimplicial $E \underset{F}{\times} E'$ şi anume mulţimea claselor de echivalenţă obţinută prin acţiunea lui F asupra lui $E \times E'$ în felul următor: $g(\alpha;\ x,\ x') = (\alpha x,\ \alpha x')$.

Există o aplicaţie naturală $\pi\colon E \underset{F}{\times} E' \to B \times B'$ care este (uşor verificabil) semisimplicială.

Propoziţia 2.15. *Aplicaţia* $\pi : E \underset{F}{\times} E' \to B \times B'$ *este o fibrare Kan.*

Demonstraţie. Fie date $b \in B_n$ şi $b' \in B'_n$ şi fie un întreg $0 \leqslant k \leqslant n$; fie date pentru orice $0 \leqslant i \leqslant n, i \neq k$ elementele $x_i \in E_{n-1}$ şi $x'_i \in E'_{n-1}$ astfel încît $px_i = d_i b$, $px'_i = d_i b'$ şi $d_i(\widehat{x_j,\ x'_j}) = d_{j-1}(\widehat{x_i,\ x'_i})$ cu $(i < j)$ (notăm cu $(\widehat{x,\ y})$ clasa de F-echivalenţă a lui (x, y) în $E \times E'$). Aceasta înseamnă existenţa elementelor $t_{ij} \in F_{n-2}$ astfel încît $d_i x_j = t_{ij} d_{j-1} x_i$ şi $d_i x'_j = t_{ij} d_{j-1} x'_i$.

Va trebui să arătăm existenţa unui element $x \in E_n$ şi $x' \in E'_n$ astfel încît $p(x) = b$, $p(x') = b'$ şi $d_i(\widehat{x, x'}) = (\widehat{x_i,\ x'_i})$. Alegem $y \in E_n$ şi $y' \in E'_n$, astfel că $p(y) = b$, $p(y') = b'$. Pentru că $d_i y = p(x_i)$, există $u_i \in F_{n-1}$ cu $d_i y = u_i x_i$ la fel $u'_i \in F_{n-1}$ cu $d_i y' = u' x'_i$. Scriind că pentru $i < j$ $(i \neq k, j \neq k)$, avem $d_i d_j y = d_{j-1} d_i y$ şi $d_i d_j y' = d_{j-1} d_i y'$, obţinem atunci $(d_i u_j)(d_i x_j) = (d_{j-1} u_i)(d_{j-1} x_i)$ şi $(d_i u'_j)(d_i x'_j) = (d_{j-1} u'_i)(d_{j-1} x'_i)$ de unde $(d_i u_j) t_{ij} = d_{j-1} u_i$, $(d_i u'_j) t_{ij} = d_{j-1} u'_i$ *şi* deci $d_i(u_j u_j'^{-1}) = d_{j-1}(u_i u_i'^{-1})$. Există atunci un $w \in F_n$ cu $d_i w = u_i u_i'^{-1}$ pentru $i \neq k$.

Punem $x = y$ şi $x' = wy'$. Acestea satisfac oficiul cerut. q.e.d.

Fie (F, E, B) şi (F, E', B') două fibrări principale şi $g : B \to B'$. Fie $\gamma(b) = (b, g(b))$.

Propoziţia 2.16. *Morfismele de fibrări principale* $(Id_F, \bar{f}, f)$, *pentru care* $f = g$, *sînt în corespondenţă biunivocă cu aplicaţiile semisimpliciale* $\varphi : B \to E \underset{F}{\times} E'$ *pentru care* $\pi\rho = \gamma$, *unde* $\pi : E \underset{F}{\times} E' \to B \times B'$ şi $r(b) = b r g(b)$

Demonstraţie. Fie $(\mathfrak{M})$ mulţimea acestor morfisme şi $(\mathfrak{A})$ mulţimea aplicaţiilor semisimpliciale $\varphi : B \to E \underset{F}{\times} E'$ pentru care $\pi\rho = \gamma$.

Construim o corespondenţă 1) : $\mathfrak{M} \to \mathfrak{A}$. Fie pentru aceasta (Id_F, f, g) un astfel de morfism; aplicaţia $x \to (x, \tilde{f}(x))$ induce prin trecere la cît o aplicaţie $\varphi : B \to E \underset{F}{\times} E'$ care urmată de π dă aplicaţia γ. Construim corespondenţa 2) : $\mathfrak{A} \to \mathfrak{M}$. Fie pentru aceasta $\varphi : B \to E \underset{F}{\times} E'$ pentru care diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & E \times E' \arrow[d, "F"] \\
 & B \times B'
\end{tikzcd}$$

este comutativă. Dacă $x \in E$, $\varphi p(x) \in E \underset{F}{\times} E'$ şi în această clasă, există un unic element al lui $E \times E'$ de forma (x, x'). Aplicaţia $x \to x'$ pune în evidenţă un morfism $E \to E'$ care induce, pe B, morfismul g.

Cele 2 corespondenţe 1) şi 2) sînt reciproce. Lăsăm pe seama cititorului verificarea semisimplicialităţii aplicaţiilor construite cît şi reciprocităţii lui 1) şi 2).

TEOREMA 2.17. *Orice fibrare principală de bază* $\Delta[1] \times B$ *este izomorfă cu o fibrare principală* $(F, \Delta[1] \times X, \Delta[1] \times B)$, *unde* (F, X, B) *este o fibrare principală.*

Demonstraţie. Fie $i^0 : \Delta[0] \to \Delta[1]$ aplicaţia semisimplicială definită prin $i^0\{0\} = \{0\}$ iar pe celelalte simplexe prin compatibilitate cu s_i. Fie diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & Y \arrow[r, "p"] & \Delta[1] \times B \\
 & & \Delta[0] \times B \arrow[u, "i"'] \arrow[d, phantom, "\approx"] \\
F \arrow[r] & X \arrow[uu] \arrow[r, "p'"'] & B \arrow[uu, bend right=60, dotted]
\end{tikzcd}$$

unde $\approx$ identifică pe $\Delta[0] \times B$ cu B Vom nota tot cu i aplicaţia punctată.

Fie de asemenea $(\mathrm{Id}_F, \tilde{i}, i)$ morfismul indus de la fibrarea principială (F, X, B) (produsul fibrat al fibrării $(F, Y, \Delta[1] \times B)$ prin aplicaţia i) în fibrarea principală $(F, Y, \Delta[1] \times B)$. Vom defini un izomorfism de la fibrarea principală $(F, \Delta[1] \times X, \Delta[1] \times B)$ în $(F, Y, \Delta[1] \times B)$. Pentru aceasta vom construi morfismul $\tilde{l} : \Delta[1] \times X \to Y$ care să inducă morfismul identic pe bază $\Delta[1] \times B$.

Fie atunci $Z = (\Delta[1] \times X) \times_F Y = \Delta[1] \times (X \times_F Y)$, $\pi : Z \to \Delta[1] \times B \times \Delta[1] \times B$ indusă de produsul $\Delta[1] \times p \times p'$ şi $r : \Delta[1] \times B \to \Delta[1] \times B \times \Delta[1] \times B$ aplicaţia diagonală ; după propoziţia 2.16 va fi suficient să punem în evidenţă o aplicaţie $\varphi : \Delta[1] \times B \to Z$ care compusă cu π să dea pe r. Unei astfel de aplicaţii i se asociază în mod biunivoc morfismul $(\mathrm{Id}, \tilde{l}, \mathrm{Id}) : (F, \Delta[1] \times X, \Delta[1] B) \to (F, Y, \Delta[1] \times B)$

Cum morfismul $(\mathrm{Id}_F, \tilde{i}, \mathrm{Id})$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & Y \arrow[r] & \Delta[1] \times B \\
F \arrow[r] & X \arrow[u, "\tilde{i}"] \arrow[r] & B \arrow[u, "i"]
\end{tikzcd}$$

induce aplicaţia $t : B \to X \times_F Y$, φ va fi dat de $\mathrm{Id} \times t : \Delta[1] \times B \to \Delta[1] \times (X \times_F Y) = Z$.

TEOREMA 2.18. *Fie* X' *o fibrare principală de grup structural* F *şi bază* B'. *Dacă 2 aplicaţii semisimpliciale de la* B *în* B' *sînt omotope, fibrările induse sînt izomorfe.*

Demonstraţie. Considerăm diagrama [1])

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E' \arrow[rr] & & B' & & \\
F \arrow[r] & E' \times_{B'} (\Delta[1] \times B) \arrow[u, "\tilde{h}"] \arrow[rr] & & \Delta[1] \times B \arrow[u, "h"] & & \\
 & & F \arrow[rr] & & E' \times_{B'(h\cdot i_2)} B \arrow[lllu] \arrow[r] & B \arrow[llu, "i_2"'] \\
F \arrow[r] & E' \times_{B'(h.i_1)} B \arrow[uu, "\tilde{i}_1"] \arrow[rr] & & B \arrow[uu, "i_1"] & &
\end{tikzcd}$$

unde $h|_{\{0\} \times B} = f$, $h|_{\{1\} \times B} = g$, i_1 este incluziunea dată de

$$i_1(a) = s_0^q \{0\} \times a$$

iar

$$i_2(a) = s_0^q \{1\} \times a.$$

Cum în diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E' \times_{B'} (\Delta[1] \times B) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] & \Delta[1] \times B \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & (L = E' \times_{B'(h\cdot i_2)} B) \\
F \arrow[r] & \Delta[1] \times L \arrow[r] & \Delta[1] \times B &
\end{tikzcd}$$

morfismul (Id, $\tilde{f}$, Id) este isomorfism, conform teoremei 2.16 există proiecţiile $\tilde{p}$, p;

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & L \arrow[r] & B \\
F \arrow[r] & \Delta[1] \times L \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{p}"] & \Delta[1] \times B. \arrow[u, "p"]
\end{tikzcd}$$

astfel încît $(\mathrm{Id}_F, \tilde{p}, p)$ să fie morfism de fibrări principale.

Existenţa morfismului $(\mathrm{Id}_F, \tilde{p}\tilde{i}_1, pi_1)$ care este un izomorfism al lui $F \to E' \times_{B'(h\cdot i_1)} B \to B$ în $F \to L \to B$ şi al analogului său $(\mathrm{Id}_F, \tilde{p}\,\tilde{i}_2, pi_2)$ care este un izomorfism al lui $F \to E' \times_{B'(hi_1)} B \to B$ în $F \to L \to B$, demonstrează teorema.

Construcţia W *şi* $\overline{W}$ *(clasifiantul universal).*

Fie G un grup semisimplicial. Definim acum următorul complex semisimplicial $\overline{W}(G)$:

$$W(G)_q = G_{q-1} \times G_{q-2} \times \ldots \times G_0 \text{ (ca mulţime)}$$

Operatorii d_i şi s_i sînt definiţi astfel

$$d_0(x_{q-1}, x_{q-2}, \ldots x_0) = (x_{q-2}, x_{q-3}, \ldots x_0)$$

---

[1] $E' \times_{B(h\cdot i_1)} B$ desemnează produsul fibrat al lui E' cu B relativ la B' prin aplicaţia $h\cdot i_1$ iar $E \times_{B(h\cdot i_2)} B$ prin aplicaţia $h\cdot i_2$

$d_i(x_{q-1}, x_{q-2}, \ldots, x_0) = (d_{i-1} x_{q-1}, \ldots, d_1 x_{q-i+1}, d_0 x_{q-i} \cdot x_{q-i-1}, x_{q-i-2}, \ldots)$
pentru $i \geqslant 1$

$$s_i(x_{q-1}, \ldots, x_0) = (s_{i-1} x_{q-1}, \ldots, s_0 x_{q-i}, e_{q-i}, x_{q-i-1}, \ldots, x_0).$$

Se verifică ușor că cu acești d_i și s_i, $\overline{W}(G)$ constituie un complex semisimplicial.

TEOREMA 2.19. *$\overline{W}(G)$ este un complex Kan.*

Demonstrație. Vom presupune date $n + 1$-simplexele-$\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}, \alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{n+1}$ astfel încît $d_i \alpha^j = d_{j-1} \alpha^i$ pentru $i < j$. Vom pune atunci în evidență un $(n + 2)$-simplex b pentru care $d_i b = \alpha^i$.

Vom deosebi două cazuri:

Cazul I: $k = 0$. Fie simplexele

$$\alpha^1 = (x_n^1, x_{n-1}^1, \ldots, x_0^1)$$

$$\alpha^2 = (x_n^2, x_{n-1}^2, \ldots, x_0^2)$$

. . . .

$$\alpha^{n+1} = (x_n^{n+1}, x_{n-1}^{n+1}, \ldots, x_0^{n+1})$$

pentru care $d_i \alpha^j = d_{j-1} \alpha^i$.

Remarcăm că $x_n^2, x_n^3, \ldots, x_n^{n+1}$, renumerotate $y^1, y^2, \ldots y^n$, au proprietatea $d_i y^j = d_{j-1} y^i$. Într-adevăr, $d_i y^j = d_i x_n^{j+1}$ și $d_{j-1} y^i = d_{j-1} x_n^{i+1}$. Dar $d_{i+1} \alpha_{j+1} = d_j \alpha_{i+1}$ ceea ce atrage

$$(d_i x_n^{j+1}, d_{i-1} x_n^j, \ldots) = (d_{j-1} x_n^{i+1}, d_{j-2} x_n^i, \ldots)$$

adică $d_i x_n^{j+1} = d_{j-1} x_n^{i+1}$.

Rezultă existența unui $n + 1$-simplex β pentru care $d_i \beta = y^i$. Să considerăm acum $(n + 2)$-simplexul lui $\overline{W}(G)$ dat de

$$(\beta, (d_0 \beta^{-1}) \cdot x_n^1, x_{n-1}^1, x_{n+2}^1, \ldots, x_0^1).$$

Remarcăm că $d_i(\beta, (d_0 \beta^{-1}) \cdot x_n^1, x_{n-1}^1, x_{n+2}^1, \ldots, x_0^1) = \alpha^i$.

Într-adevăr, pentru $i = 1$ obținem

$$(d_0 \beta \cdot d_0 \beta^{-1} \cdot x_n^1, x_{n-1}^1, \ldots, x_0^1) = (x_n^1, x_{n-1}^1, \ldots, x_0^1),$$

relație evident verificată.

Pentru $i = 2$ obținem $(d_1 \beta, d_0 (d_0 \beta^{-1}) \cdot d_0 x_n^1 \cdot x_{n-1}^1, x_{n-2}^1, \ldots) = (x_n^2, x_{n-1}^2, x_{n-2}^2, \ldots)$ deoarece

$$d_1 \beta = y^1 = x_n^2$$

$$d_0 d_0 \beta^{-1} \cdot d_0 x_n^1 \cdot x_{n-1}^1 = d_0 d_1 \beta^{-1} \cdot d_0 x_n^1 \cdot x_{n-1}^1 = d_0 (x_n^2)^{-1} \cdot d_0 x_n^1 \cdot x_{n-1}^1 = x_{n-1}^2$$

căci din $d_1 \alpha^2 = d_1 \alpha^1$ $(i = 1, j = 2)$ rezultă $d_0 x_n^1 \cdot x_{n-1}^1 = d_0 x_n^2 \cdot x_{n-1}^2$, și din egalitatea $d_1\,\alpha^2 = d_1\,\alpha^1$, $x_{n-2}^1 = x_{n-2}^2$, $x_{n-3}^1 = x_{n-3}^2, \ldots, x_0^1 = x_0^2$. Pentru $i \neq 1{,}2$ obținem

$$(d_{i-1}\,\beta,\ d_{i-2}\,d_0\,\beta^{-1}\cdot d_{i-2}\,x_n^1, \ldots,\ d_0\,x_{n+1-i}^1\cdot x_{n-i}^1, x_{n-i-1}^1 \ldots) =$$

$$= (x_n^i,\ x_{n-i}^i, \ldots\ x_{n-i}^i,\ x_{n-i-1}^i, \ldots)$$

deoarece $d_{i-1}\,\beta = y^{i-1} = x_n^i$ și

$$d_{i-2}\,d_0\,\beta^{-1}\cdot d_{i-2}\,x_n^1 = d_0\,d_{i-1}\,\beta^{-1}\cdot d_{i-2}\,x_n^1 = d_0\,(x_n^i)^{-1}\cdot d_{i-2}\,x_n^1 = x_{n-1}^i,$$

(ultima egalitate rezultînd din egalitatea $d_{i-2}\,x_n^1 = d_0\,x_n^i\cdot x_{n-1}^i$ dedusă din relațiile $d_1\alpha^i = d_{i-1}\,\alpha^1$), iar egalitatea celorlalte componente rezultă tot din $d_1\,\alpha^i = d_{i-1}\,\alpha^1$.

Cazul II : $k \neq 0$. Considerăm atunci $(n+1)$ — simplexele

$$\alpha^0 = x_n^0,\ x_{n-1}^0, \ldots, x_0^0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^{k-1} = x_n^{k-1},\ x_{n-1}^{k-1}, \ldots, x_0^{k-1}$$

$$\alpha^{k+1} = x_n^{k+1},\ x_{n-1}^{k+1}, \ldots, x_0^{k+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha^{n+1} = x_n^{n+1},\ x_{n-1}^{n+1}, \ldots, x_0^{n+1}$$

astfel încît $d_i\,\alpha^j = d_{j-1}\,\alpha^i$ pentru $i < j,\ i, j \neq k$.

Remarcăm într-un început că simplexele

$$x_n^1\cdot(x_n^0)^{-1} = y^0,\ x_n^2 = y^1, \ldots, x_n^{k-1} = y^{k-2},\ x_n^{k+1} = y^k, \ldots,$$

$$x_n^{n+1} = y^n$$

verifică relațiile $d_i\,y^j = d_{j-1}\,y^i$, $i < j$, $i, j \neq k-1$. Pentru $0 < i$ acestea rezultă din relațiile $d_{i+1}\,\alpha^{j+1} = d_j\,\alpha^{i+1}$.

Pentru $i = 0$, $d_0 y^j = d_{j-1} y^0$ sau $d_0\,x_n^{j+1} = d_{j-1}\,x_n^1(d_{j-1}\,x_n^0)^{-1}$ rezultă din $d_1\,\alpha^{j+1} = d_j\,\alpha^1$, și $x_{n-1}^{j+1} = d_{j-1}\,x_n^0$ (din relația $d_0\,\alpha^{j+1} = d_j\,\alpha$). Fie atunci $n+1$ simplexul β pentru care $d_i\,\beta = y^n$.

Considerăm simplexul β, x_n^0, x_{n-1}^0, $x_{n-2}^0, \ldots, x_0^0$ ca $n+2$ simplex al lui $\overline{W(G)}$. Atunci vom arăta că

$$d_i\,(\beta,\ x_n^0,\ x_{n-1}^0,\ x_{n-2}^0, \ldots, x_0^0) = \alpha^i.$$

Pentru $i = 0$ acest lucru este evident. Pentru $i = 1$ obținem

$$(d_0\,\beta\cdot x_n^0,\ x_{n-1}^0,\ x_{n-2}^0, \ldots, x_0^0) = (x_n^1,\ x_{n-1}^1, \ldots, x_0^1)$$

Cum $d_0\,\beta = y^0 = x_n^1\cdot(x_{n-1}^0)^{-1}\cdot x_n^0 = x_n^1$ și cum $d_0\,\alpha' = d_0\alpha^0$ și această egalitate este verificată. Pentru $i > 1$, $d_i\,(\beta, x_n^0, x_{n-1}^0, \ldots, x_0^0) = (x_n^i,\ x_{n-1}^i, \ldots, x_0^i)$ datorită faptului că $d_{i-1}\,\beta = x_n^i$ și datorită egalității $d_{i-1}\,\alpha^0 = d_0\,\alpha^i$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Fie acum τ' o funcție tordantă, un ansamblu de funcții $\tau_q' : W(G)_q \to G_{q-1}$ definit prin $\tau_q'(x_{q-1},\ x_{q-2}, \ldots, x_0) = x_{q-1}$, τ' are evident proprietățile i) ii) iii) iv) de la 2.10.

Atunci conform cu 2.11 ea definește un produs torsionat, mai mult, o fibrare principală de grup structural G. Fie spațiul fibrat $W(G)$. Structura lui $W(G)$ este ușor de pus în evidență:

$$W(G)_n = G_n \times G_{n-1} \times \ldots \times G_0, \text{ ca mulțime}$$

$$d_i(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = (d_i x_n, \; d_{i-1} x_{n-1}, \ldots,$$

$$d_0(x_{n-i} \cdot x_{n-i-1} \ldots x_0) \text{ pentru } i \geqslant 1$$

$$d_0(x_n, \; x_{n-1}, \ldots, x_0) = (d_0 x_n \cdot x_{n-1}, \; x_{n-2}, \ldots, \; x_0)$$

$$s_i(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0 = (s_i x_n, s_{i-1} x_{n-1} \ldots s_0 x_{n-i}, e_{n-i}, x_{n-i-1}, x_{n-i-2}, \ldots, x_0)$$

Proiecția p a fibrării principale este

$$p(x_n, \; x_{n-1}, \ldots, x_0) = (x_{n-1}, \ldots x_0)$$

iar multiplicarea $g(\alpha; (x_n, \; x_{n-1}, \ldots, x_0)) = (\alpha \cdot x_n, \; x_{n-1}, \ldots x_0)$

TEOREMA 2.20. *Construcțiile* (W *și* $\overline{W}$) *definesc un functor* $\mathcal{W} : \mathcal{G} \to \mathcal{T}_p$ *de la categoria* $\mathcal{G}$ *a grupurilor semisimpliciale la categoria* $\mathcal{T}_p$ *fibrărilor principale peste complexe Kan.*

Teorema este evidentă.

PROPOZIȚIA 2.21. *Dacă* G *este un grup conex, atunci* $\overline{W}(G)$ *este simplu conex.*

Demonstrație. Fie punctul bază al lui G definit de simplexele $(e_q, e_{q-1}, e_{q-2}, \ldots, e_0)$. Fie α un 0 simplex, și cum G este conex fie α^1 1-simplexul pentru care $d_0 \alpha^1 = e_0$ și $d_1 \alpha^1 = \alpha$. Fie atunci (α^1, e_0) 2-simplexul lui $\overline{W}(G)$ pentru care $d_0(\alpha^1, \; e_0) = e_0$, $d_1(\alpha^1, e_0) = d_0 \alpha^1 \cdot e_0 = e_0$, $d_2(\alpha^1, e_0) = d_1\alpha = \alpha^1$. Este clar atunci, $\overline{W}(G)$ avînd prin definiție $\overline{W}(G)_0 = \{e_1\}$ (simbolic), că orice 1-simplex închis este d_2 — frontiera unui 2 simplex pentru care d_0 și d_1 sînt $e_0 = s_0 e_{-1}$. Deci grupul fundamental al lui $W(G)$ este constituit dintr-un singur element.

TEOREMA 2.22. *Grupurile de omotopie ale lui* $W(G)$ *sînt toate triviale.*

Demonstrație. Fie un n-simplex al lui $W(G)_n$ $(x_n, \; x_{n-1}, \ldots, \; x_0)$ care are toate fețele în punctul bază, adică

$$(d_0 x_n \cdot x_{n-1}, \; x_{n-2}, \; x_{n-3}, \ldots, \; x_0) = (e_{n-1}, \; e_{n-2}, \ldots, \; e_0)$$

$$(d_1 x_n, \; d_0 x_{n-1} \cdot x_{n-2}, \ldots, \; x_0) = (e_{r-1}, \; e_{n-2}, \ldots, \; e_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(d_i x_n \; \ldots \; d_0 x_{n-i} \cdot x_{n-i-1}, \; x_{n-i-2}, \ldots, x_0) = (e_{n-1}, \ldots, \; e_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(d_n x_n \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; d_1 x_1) = (e_{n-1}, \ldots, e_0).$$

Rezultă imediat că $x_{n-2}, \ldots, x_0$ sînt $e_{n-2}, \ldots, e_0$ și că

$$d_1 x_{n-1}, \ldots, d_{n-1} x_{n-1} \text{ sînt } e_{n-2}$$

$$d_1 x_n \;, \ldots, d_n \; x_n \text{ sînt } e_{n-1}.$$

Fie atunci un simplex α^{n+1} pentru care $d_1 \alpha^{n+1} = e_n$, $d_2 \alpha^{n+1} = e_n, \ldots,$ $d_{n+1} \alpha^{n+1} = x_n$ (simplex ce există datorită faptului că $W(G)$ este complex Kan, ($\overline{W}(G)$ fiind Kan şi $W(G) \xrightarrow{p} \overline{W}(G)$ fiind fibrare Kan surjectivă). Dacă considerăm $n+1$-simplexul $(\alpha^{n+1}, d_0 \overset{-1}{\alpha^{n+1}}, e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_0)$ observăm că :

$$d_0 (\alpha^{n+1}, d_0 \overset{-1}{\alpha^{n+1}}, e_{n-1}, e_{n-2} \ldots e_0) = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_0)$$

$$d_1 (\alpha^{n+1}, d_0 \overset{-1}{\alpha^{n+1}} e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots e_0) = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_0) \ldots$$

$$d_n (\alpha^{n+1}, d_0 \overset{-1}{\alpha^{n+1}}, e_{n-1}, \ldots, e_0) = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_0),$$

$$d_{n+1} (\alpha^{n+1}, d_0 \overset{-1}{\alpha^{n+1}}, e_{n-1}, \ldots, e_0) = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0)$$

COROLAR. *Avem* $\Pi_1 (\overline{W}(G)) = 0$, $\Pi_{k+1} (\overline{W}(G)) = \Pi_k (G)$.

Rezultă din şirul exact de omotopie al spaţiilor fibrate.

TEOREMA 2.23. *Dacă G este grup minimal, atunci $\overline{W}(G)$ este complex minimal.*

Demonstraţie. Fie pentru aceasta două n-simplexe α şi β pentru care $d_i \alpha = d_i \beta$. Presupunînd că există un $n+1$-simplex x astfel că

$$d_0 x = s_{n-1} d_0 \alpha$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$d_{n-1} x = s_{n-1} d_{n-1} \alpha$$

$$d_n x = \alpha$$

$$d_{n+1} x = \beta$$

trebuie să arătăm că $\alpha = \beta$

Remarcăm că $d_i \alpha = d_i \beta$, unde $\alpha = (\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots, \alpha^0)$, $\beta = (\beta^{n-1},$

$$\beta^{n-1}, \ldots, \beta^0) \text{ atrage } \begin{cases} \alpha^{n-2} = \beta^{n-2} = a^{n-2} \\ \alpha^{n-3} = \beta^{n-3} = a^{n-3} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha^0 = \beta^0 = \mathrm{a}^0 \end{cases}$$

Punem atunci $\alpha = (\alpha^{n-1}, a^{n-2}, \ldots a^0)$ şi $\beta = (\beta^{n-1}, a^{n-2}, \ldots a^0)$; $d_0 x = s_{n-1} d_0 \alpha$ atrage $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = (s_{n-2} a^{n-2}, s_{n-3} a^{n-3}, \ldots, s_0 a^0, e_0)$.

Deci din $d_0 x = s_{n-1} d_0 \alpha$ obţinem

$$x_{n-1} = s_{n-2} a^{n-2}$$

$$x_{n-2} = s_{n-3} a^{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 = s_0 a^0$$

$$x_0 = e.$$

Cum $d_0 x_n \cdot x_{n-1} = s_{n-2} \ (d_0 \alpha^{n-1}) \cdot s_{n-2} a^{n-2}$ (din $d_1 x = s_{n-1} d_1 \alpha$) obținem $d_0 x_n = s_{n-2} \ (d_0 \ \alpha^{n-1}) \cdot s_{n-2} \ a^{n-2} \cdot (s_{n-2} a^{n-2})^{-1} = s_{n-2} d_0 \alpha^{n-1}$ și din $d_i \ x = s_{n-1} d_i \ \alpha$ pentru $2 \leqslant i < n$ avem $d_{i-1} x_n = s_{n-2} \ d_{i-1} \alpha^{n-1}$ pentru $2 \leqslant i < n-1$ iar din $d_n \ x = \alpha$ și $d_{n+1} \ x = \beta$ obținem $d_{n-1} \ x_n = \alpha^{n-1}$ și $d_n x_n = \beta^{n-1}$. Dar din minimalitatea lui G rezultă că $\alpha^{n-1} = \beta^{n-1}$ deci teorema este demonstrată.

CONSECINȚĂ. Grupul G fiind minimal, fibrarea $W(G) \to \overline{W}(G)$, ca fibrare local trivială peste un complex minimal și Kan de fibră complex minimal, este minimală.

Deci : I. Functorul $\mathcal{W}$ aplică subcategoria plină a grupurilor minimale în categoria fibrărilor principale de fibre grupuri minimale și bază complexe Kan minimale.

II. Functorul $\overline{W}$ reprezintă categoria $\mathcal{G}^{\min}$ a grupurilor semisimpliciale și conexe în categoria $\mathcal{C}^1$ a complexelor minimale Kan simplu conexe.

Ulterior vom reveni la functorul $\overline{W}$ punînd în evidență și alte proprietăți ale lui.

TEOREMA 2.24. *O fibrare principală de grup structural G este izomorfă cu o fibrare principală indusă de o aplicație $h : B \to W(G)$ din fibrarea $G \to W(G) \to \overline{W}(G)$.*

Demonstrație. Fie (G, E, B) o fibrare principală și ρ o „ridicare” care conform cu 2.4 există. Cu ajutorul lui ρ putem construi izomorfismul $(\mathrm{Id}_G, \ \widetilde{\rho}, \ \mathrm{Id})$ între fibrările principale (G, E, B, p) și $(G, G \underset{\tau}{\times} B, B, \widetilde{p})$,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] & B \\
G \arrow[u, "\mathrm{Id}"'] \arrow[r] & G \underset{\tau}{\times} B \arrow[u, "\widetilde{\rho}"'] \arrow[r, "\widetilde{p}"] & B, \arrow[u, "\mathrm{Id}"']
\end{tikzcd}$$

unde τ este determinată perfect de ρ, care determină, așa cum am arătat în 2.8, produsul torsionat $G, G \underset{\tau}{\times} B, B$ căruia i se asociază funcția de torsiune τ și care este de forma $\tau \ (\alpha, b) = d_0 \ \alpha \ \cdot \ \tau' \ (b)$. Este deci perfect determinată funcția tordantă $\tau' : B_{q+1} \to G_q$. Funcția τ' are proprietățile semnalate la 2.10.

Cu ajutorul ei vom defini o aplicație $h : B \to \overline{W} \ (G)$ și vom arăta că este semisimplicială.

Punem $h_n \ (b) = (\ \tau' \ (b), \ \tau' \ (d_0 b), \tau' \ (d_0^2 b), \ldots, \tau' \ (d_0^{n-1} b)) = (\ \tau'(b), \ h_{n-1} d_0 b)$.

Verificăm mai întîi că h_n comută cu d_i :

$$h_{n-1} \ (d_i \ b) = (\ \tau' \ (d_i \ b), \ h_{n-2} \, d_0 \, d_i \ b).$$

Dacă $i = 0$,

$$h_{n-1} \ (d_0 \ b) = (\ \tau' \ (d_0 \ b), \ h_{n-2} \ (d_0^2 \ b)),$$

iar $d_0 \, h_n \ b = d_0 \ (\ \tau' \ (b_0), \ \tau' \ (d_0 \ b), \ h_{n-2} \ \ (d_0^2 \ b)) = (\ \tau' \ (d_0 \ b), \ h_{n-2} \ \ (d_0^2 \ b))$ și comutarea este verificată.

Dacă $i > 0$,

$$h_{n-1}(d_i\, b) = (\tau' d_i\, b,\ h_{n-2}\, d_0 d_i b) = (\tau' d_i\, b,\ h_{n-2}\, d_{i-1} d_0\, b)\, d_i\, (h_n\, b) =$$

$$= d_i\, (\tau' b,\ h_{n-1}\, d_0\, b) = (\tau' d_i\, b,\ d_{i-1} h_{n-1} d_0\, b) =$$

$=$ (conform proprietății ii) din 2.10 și presupunînd verificată ipoteza inducției)

$$= (\tau' d_i\, b,\ h_{n-2}\, d_i\, d_0 b)$$

și egalitatea este demonstrată.

Verificăm acum comutarea cu s_i :

$$\text{Știm că}: h_{n+1}(s_i\, b) = (\tau'\ (s_i\, b),\ h_n\,(d_0 s_i\, b)) =$$

$$:= \begin{array}{l} \nearrow (e_q,\ h_n(b)) \ \text{ pentru } i = 0 \\ \searrow (s_{i-1}(b),\ h_n\,(s_{i-1}\, d_0 b),\ \text{pentru } i \neq 0 \end{array}$$

cum $s_0\, h_n\, b = (e_q,\ h_n\,(b)\ )$, pentru $i = 0$, egalitatea este verificată.

Pentru $i \neq 0$, $(s_{i-1}\ \tau'\,(b),\ h_n\,(s_{i-1} d_0\, b)) = (s_{i-1}\ \tau'(b),\ s_{i-1} h_{n-1}\,(d_0 b) = = s_{i-1}\, h_n\,(b)$ deci egalitatea este verificată și pentru $i \neq 0$.

În definitiv am construit aplicația semisimplicială h. Construim acum aplicația semisimplicială $\tilde{h} : G \underset{\tau'}{\times} B \to W\,(G)$ punînd $\tilde{h}\,(\alpha,\ b) = (\alpha, h\,(b))$.

Aplicația astfel definită este evident (din motive asemănătoare cu cele de sus) semisimplicială. Un calcul ușor arată că

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] & W(G) \arrow[r] & \widetilde{W}(G) \\
G \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & G \underset{\tau'}{\times} B \arrow[r, "f"] \arrow[u, "h"'] & B \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

este un morfism de fibrări principale. Atunci conform teoremei 2.13 d) și definiției izomorfismului, $(G,\ G \underset{\tau'}{\times}\ B,\ B)$ este izomorfă cu fibrarea indusă de h și cu fibrarea $(G,\ E,\ B)$.

Fie mulțimea claselor de izomorfism de fibrări principale de bază B și grup structural G, notată $\mathcal{M}\ (B,\ G)$.

Fie Map $(B,\ \overline{W}\ (G))$ mulțimea aplicațiilor semisimpliciale de la B în $\overline{W}\ (G)$. Există o aplicație naturală. $\mathcal{T}$: Map $(B,\ \overline{W}\ (G)\ ) \to (B,\ G)$ mulțimea fibrărilor principale de bază B și grupa G. Această aplicație induce conform lui 2.17 aplicația $\mathcal{T}_{G*} : \Pi\,(B,\ \overline{W}\ (G)) \to \mathcal{M}\ (B,\ G)$.

Teorema 2.22 arată că aplicația $\mathcal{T}_{G*}$ este **surjectivă**. În cele ce urmează vom arăta că $\mathcal{T}_{G*}$ este și o aplicație injectivă.

PROPOZIȚIA 2.25. *Fie* $(F,\ X,\ B)$ *o fibrare principală de grup structural* F *și* B' *un subcomplex al lui* B *iar* $(F,\ X',\ B')$ *fibrarea indusă. Dacă* $\tau'_{B'} =$ *este o funcție tordantă pentru fibrarea* $(F,\ X',\ B')$, *ea poate fi extinsă la o funcție tordantă pentru fibrarea* $(F,\ X,\ B)$.

Aceasta este o consecință imediată a teoremei 2.4 şi a raționamentelor ulterioare.

Propoziția 2.26. *Fie* (F, X, B) *o fibrare principală de grup structural* F *și bază* B *și fie* B' *un subcomplex al lui* B, *iar* (F, X', B') *fibrarea indusă; atunci orice morfism* $(f, f_{X'}, f_{B'}) : (F, X', B') \to (F, W(F)\ \overline{W}(F))$ *poate fi extins la un morfism* $(f, f_X, f_B) : (F, X, B) \to (F, W(F), \overline{W}(F))$.

Propoziția aceasta se deduce uşor din 2.25.

Teorema 2.27. *Dacă 2 fibrări principale* (F, X', B') *și* (F, X, B) *sînt induse de 2 aplicații semisimpliciale* h' *și* h, *și dacă aceste fibrări sînt izomorfe,* h *și* h' *sînt omotope.*

Demonstrație. Fie din nou fibrarea principală $(F, \Delta[1] \times X, \Delta[1] \times B)$ şi subfibrarea principală $(F, \{0\} \times X \cup \{1\} \times X)$, $\{0\} \times B \cup \{1\} \times B)$. Cu h şi h' construim un morfism al acestei fibrări în $(F, W(F), \overline{W}(F))$ şi conform propoziției 2.24, extindem acest morfism la un morfism al lui $(F, \Delta[1] \times X, \Delta[1] \times B)$. Această extensie determină o aplicație semisimplicială $H : \Delta[1] \times B \to \overline{W}(F)$ pentru care $H \mid \{0\} \times B = h$ şi $H \mid \{1\} \times B = h'$; deci h şi h' sînt omotope.

Cu aceasta este demonstrată complet teorema lui Steenrod care afirmă biunivocitatea corespondenței $\mathcal{F}_G^* \Pi(B, W(\overline{F})) \to M(B, F)$. În limbaj functorial, această teoremă se poate enunța astfel: Fie $\mathcal{M}$ un functor de la categoria complexelor semisimpliciale şi a claselor de omotopie de aplicații semisimpliciale în categoria mulțimilor definite după cum urmează: fiecărui complex B i se asociază mulțimea claselor de izomorfism de fibrări principale de grup structural F, $\mathcal{M}(B, F)$. Pentru orice clasă de omotopie $\hat{f} : B' \to B$, acest functor asociază o aplicație a lui $\mathcal{M}(B, F) \to \mathcal{M}(B', F)$, construită într-un mod natural (fibrării principale (F, E, B) şi aplicației $f : B' \to B$ îi asociem fibrarea principală $(F, E \underset{B}{\times} B', B')$ care depinde, în afara unui izomorfism, numai de clasa de omotopie a lui f conform cu 2.18.

Teorema 2.28. *Functorul* $\mathcal{M}$ *este reprezentabil, iar obiectul de reprezentare este* $\overline{W}(F)$.

COSTRUCŢIA LUI KAN „F”

Fie K un complex semisimplicial. Vom defini acum un grup semisimplicial $F(K)$ în felul următor:

Considerăm $G_n(K)$, grupul liber generat de $n+1$-simplexele lui K_{n+1}, şi de inversele lor formale.

Introducem în $G_n(K)$ relația $s_0 y = e_n$ pentru $y \in K_n$, adică considerăm divizorul normal generat de $s_0 y$ cu $y \in K_n$ notat cu $L_n(K)$, şi notăm $F_n(K) = G_n(K)/L_n(K)$; n-simplexele lui $F(K)$ vor fi clasele lui $G_n(K)$, modulo $L_n(K)$. Considerăm de asemenea aplicația : $K_{n+1} \to F_n(K)$ care asociază fiecărui $k+1$-simplex clasa sa în $F_n(K)$. Pentru a face din $F(K)$ un complex semisimplicial, vom defini operatorii d_i şi s_i, mai întîi pe generatori punînd, dacă $\tau' : K_{n+1} \to F_n(K)$ este aplicația ce pune în evidență generatorii, $s_i\tau' y = \tau' s_{i+1}\, y$, $i \geqslant 0$, $d_i\tau' y = \tau' d_{i+1} y$, $i \geqslant 1$ și $d_0\tau' y = (\tau' d_1 y)(\tau' d_0 y)^{-1}$ și extinzînd la întreg grupul $F_n(K)$ punînd $s_i(\tau'(y_0)\,\tau'(y_1)\ldots\tau'(y_i)^{-1}\ldots) = s_i\,\tau'(y_0)\,s_i\,\tau'(y_1)\ldots(s_i\,\tau'(y_i))^{-1}\ldots$ respectiv $d_i(\tau'(y_0)\,\tau'(y_1)\ldots\tau'(y_i)^{-1}\ldots) = d_i\,\tau'(y_0)\,d\,\tau'(y_1)\ldots(d_i\,\tau'(y_i))^{-1}\ldots$ Sînt automat verificate relațiile ce afirmă că $\{F(K)_q\}$ este complex semisimplicial și că este chiar grup semisimplicial. Funcția $\tau' : K_{n+1} \to F_n(K)$ verifică relațiile i), ii), iii) iv) de la 2.10 definind atunci, conform lui 2.11, un produs torsionat unic pentru funcția de torsiune $\tau(\alpha, b) = d_0, (\alpha, \tau'(b))$. Acest produs torsionat este conform aceluiași 2.11 o fibrare principală.

Se remarcă cu ușurință că $F(\ldots)$ este un functor, mai mult, asocierea $K \rightsquigarrow$ fibrarea principală $(F(K), F(K) \underset{\tau'}{\times} K, K)$ este functorială, deoarece pentru orice aplicație semisimplicială $f : K' \to K$ putem construi tripletul $(F(f), \widetilde{F}(f), f)$ care să fie un morfism de fibrări principale, unde $F(f)$, $\widetilde{F}(f), f$ sînt puse în evidență în diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(K') \arrow[r] \arrow[d, "F(f)"] & F(K') \underset{\tau'}{\times} K' \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{F}(f)"] & K' \arrow[d, "f"] \\
F(K) \arrow[r] & F(K) \underset{\tau'}{\times} K \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

Aceste observații sînt consemnate de

TEOREMA 2.29. *Asocierea* $K \rightsquigarrow (F(K) \to F(K) \underset{\tau}{\times} K \to K)$ *pune în evidență un functor* F *de la categoria complexelor semisimpliciale la cea a fibrărilor principale.*

O dată cu acest functor se remarcă și functorul „F” care asociază fiecărui complex semisimplicial K grupul structural al fibrării principale $(F(K), F(K) \underset{\tau}{\times} K, K)$. El este un functor de la categoria complexelor semisimpliciale la categoria grupurilor semisimpliciale.

PROPOZIȚIA 2.30. *Dacă* K *este un complex semisimplicial Kan simplu conex,* $F(K)$ *este un grup semisimplicial conex.*

Demonstrație. Este ușor de văzut că $F(K)$ conține un singur 0-simplex.

DEFINIȚIA 2.31. Se numește conexiune pentru fibrarea principală (F, E, B) un morfism de fibrări principale $(f^*, \bar{f}, f) : (F(B), F(B) \underset{\tau}{\times} B, B) \to (F, E, B)$ pentru care f este Id_B.

Pentru prescurtare vom nota o conexiune, adică un morfism $(f^*, \bar{f}, f)$ prin „$\mathcal{E}$”.

Considerăm acum categoria $\mathcal{L}_c$ a spațiilor fibrate principale cu o conexiune, categorie ce are ca obiecte cuplele constituite dintr-un spațiu fibrat principal (E, F, B) și o conexiune $\mathcal{E}$, notat $(F, E, B, \mathcal{E})$ iar ca morfisme, morfismele de spații fibrate principale care transportă conexiunea obiectului $(F_1, E_1, B_1, \mathcal{E}_1)$ în conexiunea obiectului $(F_2, E_2, B_2, \mathcal{E})$ adică pentru care diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] & & B_1 \\
& F(B_1) \arrow[ul, "f_1^*"'] \arrow[rr] & & F(B_1)\times_{\tilde{\tau}'} B_1 \arrow[ul, "\tilde{f}_1"'] \arrow[ur] & \\
F_2 \arrow[uu, "g^*"] \arrow[rr] & & E_2 \arrow[uu, "\tilde{g}"'] \arrow[rr] & & B_2 \arrow[uu, "g"'] \\
& F(B_2) \arrow[ul, "f_2^*"] \arrow[uu, "F(g)"'] \arrow[rr] & & F(B_2)\times_{\tau} B_2 \arrow[ul, "\tilde{f}_2"] \arrow[uu, "\tilde{F}(g)"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

este comutativă

PROPOZIŢIA 2.32. *Orice funcţie tordantă τ' pentru fibrarea principală (F, E, B) defineşte o conexiune pentru această fibrare.*

Demonstraţie. $T'_q : B_{q+1} \to F_q$ induce un omomorfism $\tau'_q : G_q(B) \to F_q$ care transportă subgrupul $L_q(B)$ în elementul nul al lui F_q, datorită proprietăţii $\tau'_q(s_0 y) = e_q$ a funcţiei tordante; deci T'_q induce un omomorfism $f_q^* : F_q(B) \to F_q$ care, ţinînd cont de celelalte proprietăţi ale funcţiei tordante, este un omomorfism semisimplicial.

Definim acum $\tilde{f}(\alpha, b) = (f^*(\alpha), b)$. Ştiind că $E_q = F_q \times B_q$ şi că $a(b, x) = (ab, x)$ pentru $a \in F_q$, $x \in B_q$, $(b, x) \in E_q$ rezultă imediat că tripletul $(f^*, \tilde{f}, \mathrm{Id}_B)$ constituie un morfism de fibrări principale.

PROPOZIŢIA 2.33. *Orice conexiune $\mathcal{E} = (f^*, \tilde{f}, \mathrm{Id}_B)$ pentru o fibrare principală (F, E, B), defineşte o funcţie de torsiune pentru această fibrare; adică există $\tau'_q : B_{q+1} \to F_q$ care verifică proprietăţile* (2.10) *şi un izomorfism de fibrări principale* $(\mathrm{Id}_F, \varphi, \mathrm{Id}_B)$ *pus în evidenţă în diagrama următoare*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[d, "\mathrm{Id}_B"] \\
F \arrow[u, "\mathrm{Id}_F"] \arrow[r] & F\times_{\tau'} B \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

Demonstraţie. Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[rr] \arrow[dd, "\mathrm{Id}_F"'] & & E \arrow[rr, "p"] \arrow[dd, dashed, "\varphi"] & & B \arrow[dd, "\mathrm{Id}_B"] & \\
& F(B) \arrow[ul, "f^*"'] \arrow[rr] \arrow[dl, "f^*"] & & F(B)\times_{\tau'} B \arrow[ul, "\tilde{f}"'] \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, "\tilde{f}"] & & B \arrow[ul, "\mathrm{Id}_B"'] \arrow[dl, "\mathrm{Id}_R"] \\
F \arrow[rr] & & F\times_{\underset{\sim}{\tau}'} B \arrow[rr, "p"] & & B &
\end{tikzcd}$$

unde $\underset{\sim}{\tau}' = f^{\star} \cdot \tau'$, verificînd condiţiile i), ii), iii), iv) din 2.10, permite construirea fibrării principale $(F, F \times B, B)$ conform cu 2.11 şi a lui

$\underset{\sim}{\tau}'$

$\tilde{\tilde{f}}(\alpha, b) = (f^*(\alpha), b)$. Vom defini acum o aplicaţie semisimplicială $\varphi : E \to F \underset{\tau'}{\times} B$ în felul următor :

Dacă $x \in E_q$, fie $(e_q, p(x)) \in F(B)_q \times B_q$ un q-simplex al lui $F(B) \underset{\tau'}{\times} B$; cum $\tilde{f}(e_q, p(x))$ are proprietatea că $p\tilde{f}(e_q, p(x)) = p(x)$, există un element $\alpha \in F_q$ astfel încît $x = \alpha\tilde{f}(e_q, p(x))$. Punem atunci $\varphi(x) = \alpha \cdot \tilde{\tilde{f}}(e, p(x)) = (\alpha, p(x))$ ca q-simplex al lui $F \underset{\tau'}{\times} B$. Vom arăta că φ este aplicaţie semisimplicială.

Într-adevăr, $d_i\,\varphi(x) = d_i(\alpha, p(x)) = (d_i\,\alpha, p(d_i\,x))$ pentru $i > 0$. Iar $\varphi(d_i x) = d_i\,\alpha \cdot \tilde{\tilde{f}}(e, p(d_i\,x)) = (d_i\,\alpha, p(d_i\,x))$, deoarece din $x = \alpha \cdot \tilde{f}(e, p(x))$ rezultă $d_i\,x = d_i\,\alpha \cdot d_i\,f(e, p(x)) = d_i\,\alpha \cdot \tilde{f} d_i(e, p(x)) = d_i\,\alpha \cdot \cdot \tilde{f}(e_{q-1}, d_i\,p(x)) = d_i\,\alpha \cdot \tilde{f}(e_{q-1}, p(d_i\,x))$ şi $d_0\varphi(x) = d_0(\alpha, p(x)) = (d_0\alpha \cdot \underset{\sim}{\tau}'\,p(x), d_0\,p(x)) = (d_0\,\alpha \cdot \underset{\sim}{\tau}'\,p(x), p(d_0 x))$, iar $\varphi(d_0 x) = (d_0\,\alpha \cdot \underset{\sim}{\tau}'\,p(x), p(d_0 x))$, deoarece din $x = \alpha\tilde{f}(e, p(x))$ rezultă $d_0 x = d_0\alpha \cdot \tilde{f} d_0(e, p(x)) = d_0\,\alpha \cdot \cdot \tilde{f}(e_{q-1}\tau'(p(x)), d_0 p(x)) = d_0\,\alpha \cdot f^*(\tau'(p(x)) \cdot \tilde{f}(e, p(d_0\,x)) = (d_0\,\alpha \cdot \underset{\sim}{\tau}'(p(x), p(d_0 x))$. Deci comutarea cu d_i este verificată. În mod asemănător se verifică şi comutarea cu s_i. Rămîne să arăt faptul că $(\mathrm{Id}_F, \varphi, \mathrm{Id}_B)$ constituie un morfism de fibrări principale ; or, aceasta revine să verificăm că $\varphi(\beta x) = \beta\varphi(x)$ pentru $\beta \in F_q$ şi $x \in E_q$. Presupunem $x = \alpha \cdot \tilde{f}(e, p(x))$. Atunci $\beta x = \beta\alpha \cdot \tilde{f}(e, p(x))$. Aceasta atrage $\varphi(\beta x) = (\beta\alpha, p(x))$, şi cum $\beta\varphi(x) = \beta(\alpha, p(x)) = (\beta\alpha, p(x))$, $(\mathrm{Id}_F, \varphi, \mathrm{Id}_B)$ constituie un morfism de fibrări principale.

TEOREMA 2.34. *Dacă desemnăm cu* **C** *mulţimea conexiunilor şi cu* **T** *mulţimea funcţiilor tordante cu* λ_1 *aplicaţia de la* **C** *la* **T** *definită de* 2.32 *şi cu* λ_2 *aplicaţia de la* **T** *la* **C** *definită de* 2.32, *acestea sînt reciproce, adică există o corespondenţă biunivocă între mulţimea conexiunilor şi a funcţiilor tordante.*

Demonstraţie. $\lambda_2 . \lambda_1 = \mathrm{Id}$ este banal de verificat.

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \mathrm{Id}.$$

Fie pentru aceasta o fibrare principală cu o conexiune (F, E, B), adică diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[rr] \arrow[ddr] & & E \arrow[rr] \arrow[ddr, "\varphi"] & & B \arrow[ddr, "\mathrm{Id}_B"] & \\
F(B) \arrow[ur, "f^*"] \arrow[rr, "\mathrm{Id}_F"'] \arrow[drr, "f^*"'] & & F(B)\underset{\tau'}{\times}B \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[rrr] \arrow[drr, "\tilde{\tilde{f}}"'] & & & B \arrow[u, "\mathrm{Id}_B"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_B"'] & \\
 & & F \arrow[rr] & & F\underset{\tau'}{\times}B \arrow[rr] \arrow[uul, dashed, bend right, "\varphi^{-1}"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Conexiunii $\mathcal{E} = (f^\star\tilde{f}, \mathrm{Id})$ îi asociem funcţia tordantă $\underset{\sim}{\tau}' = f^\star\tau'$ şi morfismul $(\mathrm{Id}_F, \varphi, \mathrm{Id}_B)$ care arată că $\underset{\sim}{\tau}'$ este o funcţie tordantă pentru fibrarea principală (F, E, B). Asociem acum acestei funcții tordante o nouă conexiune, conform lui 2.31, care este de fapt $(f^{*}, \varphi^{-1}, \overset{\approx}{f}, \mathrm{Id}_{B}) = (\mathrm{Id}_{F}, \varphi^{-1}, \mathrm{Id}_{B}) \cdot (f^{*}, \overset{\approx}{f}, \mathrm{Id}_{B})$.

Cum $\varphi \cdot \widetilde{f} = \overset{\approx}{f}$ iar φ este izomorfism semisimplicial atunci $(f^{*}, \varphi^{-1} \overset{\approx}{f}, \mathrm{Id}_{B}) = (f^{*}, \widetilde{f}, \mathrm{Id}_{B})$.

Teorema este astfel demonstrată.

PROPOZIȚIA 2.35. *Fie* $(F, E, B, \mathcal{E})$ *un spațiu fibrat cu o conexiune și* $f : B' \to B$ *o aplicație semisimplicială. Există atunci pe fibrarea principală* $(F, E \underset{B}{\times} B', B')$ *o conexiune* $\mathcal{E}')$ *astfel încît morfismul de fibrări principal* $(\mathrm{Id}, \mathrm{pr}_{2}, f)$ *este un morfism în categoria* $\mathcal{L}_{C}$ *și orice morfism al lui* $(F_{1}, E_{1}, B_{1}, \mathcal{E}_{1})$ *în* $(F, E, B, \mathcal{E})$ *se factorizează unic prin el.*

Demonstrație. Rezultă imediat din 2.14.

COROLAR. *Conexiunea* $\mathcal{E}'$ *este unică.*

Fie acum $\mathcal{W}_{F}$ conexiunea spațiului clasifiant universal indusă de funcția tordantă τ'.

Vom nota prin $(F, W(F), \overline{W}(F) \mathcal{W}_{(F)})$ fibrarea cu conexiune.

Fie $\mathcal{L}_{C}^{0}$ subcategoria ale cărei obiecte sînt fibrări cu conexiune peste aceleași baze B, și de același grup structural F și ale cărei morfisme sînt morfisme $(f^{*}, \widetilde{f}, f)$ din $\mathcal{L}_{C}$ pentru care $f^{*} = \mathrm{Id}_{F}$. Fie $\mathcal{N}(B)$ clasele de izomorfism ale acestei categorii.

TEOREMA 2.36. (Teorema lui Narasihmhahn). *Mulțimea* $\mathcal{N}(B)$ *este în corespondență biunivocă cu mulțimea* $\mathrm{Map}(B, \overline{W}(F))$.

Demonstrație. Trebuie puse în evidență aplicațiile $M_{1} : \mu_{1} : \mathcal{N}(B) \to \mathrm{Map}(B, \overline{W}(F))$ și $\mu_{2} : \mathrm{Map}(B, \overline{W}(F)) \to \mathcal{N}(B)$ și arătat că acestea sînt reciproce.

Mai întîi remarcăm ușor că 2 obiecte ale lui $\mathcal{L}_{C}^{0}$ sînt izomorfe dacă și numai dacă considerăm $\lambda_{2}(F, E, B, \mathcal{E})$, funcția tordantă, și apoi aplicația asociată ei de la B în clasifiant, ca și în 2.24, acestea dau aceeași aplicație. Astfel definim μ_{1}.

Reciproc. Dată fiind aplicația de la B în clasifiantul $\overline{W}(F)$, aceasta induce din fibrarea principală cu conexiune $(F, W(F), \overline{W}(F), \mathcal{W}_{(F)})$ o fibrare principală cu conexiune conform lui 2.34. Definim în acest fel μ_{2}. Reciprocitatea lor rezultă detaliind construcțiile.

Remarcă. Teorema 2.36 afirmă că dacă $\mathcal{N}$ este functorul de la categoria complexelor semisimpliciale (fie Kan) în categoria mulțimilor care asociază lui B, complex semisimplicial, mulțimea claselor de izomorfism de fibrări principale cu conexiune, $\mathcal{N}(B)$, acest functor este reprezentabil, obiectul de reprezentare fiind $\overline{W}(F)$.

Această teoremă a fost demonstrată în cazul geometric de Narasihmhahn.

ANEXĂ

TEOREMA 2.37. *Fie* $F \to E \to B$ *și* $F_{1} \to E_{1} \to B_{1}$ *două fibrări principale și* $(f^{*}\ \widetilde{f}, f)$ *un morfism de fibrări principale de exemplu al lui*

(F, E, B) în (F_1, E_1, B_1) cu f aplicaţie injectivă. *Dată fiind o funcție tordantă τ' pentru fibrarea (F, E, B), există una τ'_1 pentru (F_1, E_1, B_1) astfel încît diagrama*

$$\begin{tikzcd} B_q \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "f_3"] & F_{q-1} \arrow[d, "f_1"] \\ B'_q \arrow[r, "\tau'_1"] & F'_{q-1} \end{tikzcd}$$

este comutativă pentru orice q.

Teorema 2.38. *În ipotezele teoremei 2.37 dacă ξ și ξ_1 sînt aplicațiile în clasifiant induse de funcțiile tordante τ și τ', diagrama*

$$\begin{tikzcd} W(F) \arrow[r, "W(f_1)"] \arrow[d, "\xi"] & W(F_1) \arrow[d, "\xi_1"] \\ B \arrow[r] & B_1 \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Teorema 2.39. *Dacă K este un complex semisimplicial cu un singur 0-simplex, $F(K) \underset{\tau'}{\times} K$ are toate grupurile de omotopie reduse la un singur element* [2].

CAPITOLUL III

Considerăm categoria $\mathcal{M}$ a complexelor semisimpliciale Kan și conexe și $\overline{\mathcal{M}}$ subcategoria plină a complexelor minimale. Dacă presupunem dată relaţia de omotopie H, categoriile „cît" $\overline{\mathcal{M}}/H \rightsquigarrow \mathcal{M}/H$ vor fi echivalente. (De remarcat că, categoriile $\overline{\mathcal{M}}$ și $\mathcal{M}$ nu sînt echivalente).

Obiectul acestui capitol este studiul complexelor Kan ca „tip de omotopie"; este atunci suficient să considerăm complexe minimale. Avantajul lucrului cu complexe minimale va fi pus în evidenţă în momentul în care vom arăta că fibrările Kan, care apar în descompunerea Postnikov-Zilber-Moore (le vom numi de acum înainte P—Z—M) sînt fibrări principale, despre care, conform capitolului anterior, se poate spune mai mult.

Definiția 3.1. Un complex semisimplicial Kan, X, este zis q — poliedru, dacă orice simplex de dimensiune $i > q$ este degenerat.

Propoziția 3.2. *Un sistem de aplicații $f_q : X_q \to Y_q$ $q \leqslant n$, unde X este un n-poliedru pentru care $f_{q-1} \cdot d_i = d_i f_q$ și $f_q \cdot s_i = s_i f_{q-1}$ pentru $q \leqslant n$, definește o unică aplicație semisimplicială $f : X \to Y$.*

Definiția 3.3. a) Două q — simplexe x și x' se zic n echivalente dacă $d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_{q-n}} x = d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_{q-n}} x'$ pentru orice $d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_{q-n}}$.

b) Un complex semisimplicial Kan X se numește n-trivial dacă „x, n-echivalent cu x'" atrage $x = x'$.

COROLARUL 1. *Orice complex n-trivial este și minimal în dimensiunea n.*

COROLARUL 2. *n-trivialitatea atrage $n + k$-trivialitatea.*

COROLARUL 3. *Orice complex n-trivial este și minimal în dimensiunea $n + k$.*

Asociem complexului X, complexul X^n definit în felul următor: X_q^n este constituit din mulțimea claselor de n — echivalență de q — simplexe.

Observație. Este clar că $X_q^n = X_q$ pentru $q \leqslant n$. Este ușor de verificat că mulțimile X_q^n constituie un complex semisimplicial despre care vom arăta că este încă un complex Kan.

Există o aplicație semisimplicială $p_n : X \to X^n$ care asociază fiecărui q — simplex $x \in X_q$ clasa de echivalență în X_q^n.

PROPOZIȚIA 3.4. *Aplicația semisimplicială $p_n : X \to X_n$ este o fibrare Kan.*

Demonstrație. Utilizăm limbajul diagramatizat al lui Zisman Gabriel conform cu capitolul 1. Fie pentru aceasta diagrama

(*)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_n"] & X^n \arrow[r] & \Delta[0] \\
\Lambda^k[q] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "i_k"] \arrow[ur, phantom, "I"] & \Delta[q] \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

Pentru a demonstra propoziția va trebui să verificăm că orice diagramă de tipul dreptunghiului I se poate completa cu o aplicație semisimplicială $h : \Delta[q] \to X$.

a) dacă $q \leqslant n$ aplicația h există totdeauna datorită faptului că $X_q \xrightarrow{p_q^n} X_q^n$ este biunivocă pentru $q \leqslant n$ și există o aplicație semisimplicială h pentru care diagrama

(**)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & \Delta[0] \\
\Lambda^k[q] \arrow[r, "i_k"] & \Delta[q] \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

este comutativă (X este complex semisimplicial Kan).

Or, conform propoziției 3.2, diagrama următoare

(***)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "p_n"] & X^n \\
\Lambda^k[q] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r] & \Delta[q] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

este încă comutativă, căci 2 aplicații semisimpliciale ale unui q — poliedru X (în cazul nostru $X = \Delta[q]$) care coincid pe $X_1, \ldots, X_q$ sînt egale.

Dacă $q > n + 1$ cu același h (obținut din diagrama (**)) diagrama

(****)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p_n"] & X^n \\ \Lambda^k[q] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "i_k"] & \Delta[q] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

este încă comutativă, deoarece :

X^n fiind q — minimal, din $p_n \circ h \circ i_k = \beta \circ i_k$ (relație adevărată datorită faptului că $h \cdot i_k = \alpha$) rezultă $p_n \circ h \circ i = \beta \circ i$, unde $i : \dot{\Delta}[q] \to \Delta[q]$. Cum X^n este q — trivial, din $p_n \circ h \circ i = \beta \circ\ i$ rezultă

$$p_n \circ h = \beta.$$

Rămîne să arătăm existența aplicației semisimpliciale h în cazul cînd $q = n + 1$. Cum $(p_n)_n : X_n \to X^n_n$ este biunivocă, h este definit pe toate n — simplexele lui $\Delta\,[n + 1]$. Pentru simplexul $\beta\,\delta_{n+1}$ există însă un $n + 1$ simplex $x \in X$ pentru care $p_n\,(x) = \beta\,\delta_{n+1}$; punem atunci $h_{n+1}\,(\delta_{n+1}) = x$. Este ușor de verificat ipoteza propoziției 3.2. Rezultă conform acestei propoziții că există un h semisimplicial care face diagrama comutativă.

COROLAR. *X^n este un complex Kan* (deoarece p_n este surjectivă).

PROPOZIȚIA 3.5. *Avem* :

a) $(X^n)^p = X^p$ *pentru* $p \leqslant n$

b) $(X^n)^p = X^n$ *pentru* $p \geqslant n$.

Așadar putem asocia fiecărui complex semisimplicial X (datorită lui 3.5) diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd} X^{n+1} \arrow[r, "p^X_{n+1,n}"] & X^n & \dots & X^3 \arrow[r, "p^X_{3,2}"] & X^2 \arrow[r, "p^X_{2,1}"] & X^1 \arrow[r, "p^X_{1,0}"] & X^0 \\ & & & & & X \arrow[ulllll, "p^X_{n+1}"] \arrow[ul, "p^X_2"'] \arrow[u, "p^X_1"'] \arrow[ur, "p^X_0"'] & \end{tikzcd}$$

unde $p^X_{n+1,\,n}$, p^X_n, deci toate aplicațiile semisimpliciale sînt fibrări Kan.

Remarcăm :

PROPOZIȚIA 3.6 1) *Asocierea* $X \rightsquigarrow$ *diagrama*
$$\begin{tikzcd} & X_n \\ & \vdots \\ X \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[dr] & X_1 \arrow[d] \\ & X_0 \end{tikzcd}$$
este functorială.

2) $X = \underset{n\to\infty}{\underset{\longleftarrow}{\lim}}\ X^n$.

TEOREMA 3.7. a) $p_n^X : X \to X^n$ *induce izomorfism pentru grupurile de omotopie pînă în dimensiunea* n

$$\Pi_k (X, x_0) \xrightarrow{(p_n^X)_*} \Pi_k (X, p_n^X (x_0)),\ k \leqslant n.$$

b) *Dacă în diagrama* $E^n (X, x_0) \xrightarrow{i^n_{x_0}} X \xrightarrow{p^X_x} X^n$, $E^n (X, x_0)$ este fibra fibrării Kan p_n^X deasupra 0 - simplexului $x_0 \in X_0^n$, atunci : $(i^n_{x_0})_* : \Pi_k(E^n(X, x_0), x_0) \to \Pi_k (X, x_0))$ este izomorfism pentru $k > n$. (Ținem cont de faptul că fibra unei fibrări Kan este un complex Kan).

c) $\Pi_k (X^n, p_n^X (x_0)) \approx 0$ *pentru* $k > n$.

Demonstrație. a) Rezultă din faptul că $(p_n^X)_k$ este biunivocă.

b) $E^n (X, x_0)_q$ este constituit din simplexul $s_0^q x_0$ dacă $q \leqslant n$ iar altfel din mulțimea q — simplexelor x pentru care $d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_{q-n}} x = s_0^n x_0$.

Or, este evident că simplexele care participă la construcția grupului de omotopie $\Pi_k (X, x_0)$ ale lui X în $\{x_0\}$ (complexul semisimplicial generat de 0-simplexul x_0) sînt aceleași cu cele care participă la construcția grupului de omotopie $\Pi_k (E (X, x_0), x_0)$ pentru $k > n$.

Dacă două k-simplexe x și y $(k > n)$ cu $d_i x = s_0^{k-1} x_0\, d_i y = s_0^{k-1} x_0$ sînt omotope în X, există un $k + 1$ simplex z pentru care $d_0 z, \ldots, d_{k-1} z = s_0^k x_0$, $d_k z = x$ și $d_k z = y$ deci $z \in E(X, x_0)_{k+1}$. Atunci x și y sînt omotope și în $E (X, x_0)$. Cu alte cuvinte $(i^n_{x_0})_*$ este monomorfism.

c) Rezultă din șirul exact de omotopie al spațiilor fibrate (teorema 1.16).

TEOREMA 3.8. *Fibra fibrărilor* $p_{n,\, n-1}$ *este un complex Eilenberg Mac-Lane de grup* $\Pi_n (X, x_0)$ *în dimensiunea* n.

PROPOZIȚIA 3.9. *Fie* $p_n^X : X \to X^n$ *și* A *un* $n + 1$ — *poliedru. Orice aplicație semisimplicială* $f : A \to X^n$ *se poate factoriza prin* p_n^X.

Demonstrație. Fie A^n complexul semisimplicial generat de n simplexele lui A. Datorită proprietății lui $(p_n^X)_k$ de a fi biunivocă pentru $k \leqslant n$ conform cu 3.2, putem defini o aplicație f^n astfel încît diagrama următoare să fie comutativă :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p_n"] & X^n \\ A^n \arrow[u, "f^n"] \arrow[r] & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$$

Fie acum un $n + 1$ simplex σ al lui A, fie $f (\sigma)$ imaginea lui σ prin f și fie τ un $n + 1$ simplex al lui X pentru care $p_n^X(\tau) = f (\sigma)$. Definim $f_{n+1} (\sigma) = \tau$. Punem acum $\bar{f}_q = f_q^n$ pentru $q < n + 1$. Este clar că $\bar{f}_i$ verifică condițiile lui 3.2, așa că există $\bar{f}$ care face comutativă diagrama.

PROPOZIȚIA 3.10. *Dacă* X *este minimal,* X^n *este minimal.*

Pentru demonstrație trebuie să arătăm că pentru orice diagramă

$$\begin{tikzcd} \Delta[q] \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[dr] & X^n \arrow[r, dash] & \Delta[0] \\ & \Delta[1] \times \dot{\Delta}[q] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r] & \Delta[1] \times \Delta[q] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

unde α se factorizează prin proiecţia canonică, $h \mid \{0\} \times \Delta[q] = h \mid \{1\} \times \Delta[q]$.

Dacă $q \leqslant n$ considerăm diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[rr] & & \Delta[0] \\
\dot{\Delta}[q] \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & X^n \arrow[u, "p_n"] \arrow[urr] & & \\
 & \Delta[1] \times \dot{\Delta}[q] \arrow[ul, "p"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr] & & \Delta[1] \times \Delta[q] \arrow[uu, "\beta"] \arrow[ull, "h"] \arrow[uull, dashed, "\bar{h}"]
\end{tikzcd}$$

Cum $(p_n^X)_k$ este biunivoc pentru $k \leqslant n$, există $\bar{\bar{\alpha}} : \Delta[q] \to x$ datorită lui 3.2.

Dacă $q \leqslant n + 1$, există h pentru care diagrama este comutativă (dacă $q < n + 1$, h se construieşte cu ajutorul propoziţiei 3.10).

Cum $X \to \Delta[0]$ este fibrare minimală $\bar{h} \mid \{0\} \times \Delta[q] = \bar{h} \mid \{1\} \times \Delta \times [q]$ deci şi $h \mid \{0\} \times \Delta[q] = h \mid \{1\} \times \Delta[q]$.

Dacă $q > n$, $h \mid \{0\} \times \Delta[q]$ şi $h \mid \{1\} \times \Delta[q]$ sînt 2 simplexe singulare ale căror simplexe fundamentale au acelaşi $q - 1$ schelet $(q-1 \geqslant n)$ şi datorită n — trivialităţii lui X^n, atunci cele 2 simplexe coincid. În consecinţă $h \mid \{0\} \times \Delta[q] = h \mid \{1\} \times \Delta[q]$.

Remarcăm că p_n^X este fibrare minimală, X este complex minimal, analog $p_{n,\,n-1}^X$. Deci, fibrele lui $p_{n,\,n-1}^X$, respectiv al lui p_n^X, sînt complexe minimale.

PROPOZIŢIA 3.11. *Fie* $\Delta[n + k]$ *şi* $\Delta^{(k)}[n + k]$ *complexul semisimplicial generat de* $d_{i_1} d_{i_2} \ldots d_{i_k} \delta_{n+k}$. *Fie* X *un complex semisimplicial Kan pentru care* $\Pi_n(X, x_0) = 0$, $\Pi_{n+1}(X, x_0) = 0$, $\Pi_{n+2}(X, x_0) = 0, \ldots, \ldots, \Pi_{n+k-1}(X, x_0) = 0$. *Atunci orice* $f : \overset{(k)}{\Delta}(n + k) \to \Delta[n + k]$ admite o extensie $\bar{f} : \Delta[n + k] \to X$.

Demonstraţie. Propoziţia este o consecinţă imediată a propoziţiei 1.20 şi a proprietăţii de a fi complex Kan.

Fie acum $K(G, n)$ complexul semisimplicial minimal Eilenberg-Mac Lane.

LEMA 3.12. *Avem*:

$K(G, n)_q = \{s_0^q x_0\}$ *pentru* $q < n$.

$K(G, n)_n$ *are acelaşi cardinal cu* G.

$K(G, n)_q$, $q > n$, q — *simplexele sînt complet determinate de frontierele lor* $d_{i_1} \ldots d_{i_{q-n}} \sigma$ *(adică este* $n + k$ *trivial pentru* $k > 0$).

STRUCTURA DE GRUP A LUI K (G, N) N > 1

Este clar că putem defini o structură de grup semisimplicial pe $K(G, n)$. Pentru aceasta stabilim o corespondenţă biunivocă între $K(G, n)_n$ şi G şi înzestrăm mulţimea $K(G, n)_n$ cu structura lui G transportată prin această corespondenţă. În felul acesta $K(G, n)_q$ pentru $q \leqslant n$ capătă structură de grup. Definim o structură de grup pe $K(G, n)_q$ cu $q > n$

punînd $x \cdot y$ egal cu simplexul z care are $d_{i_1} \ldots d_{i_k} z = d_{i_1} \ldots d_{i_{q-n}} x \cdot$ $\cdot d_{i_1} \ldots d_{i_{q-n}} y$ simplex a cărui existență este asigurată de propoziția 3.12.

Cu aceste operații, $K(G, n)$ devine un grup semisimplicial minimal și abelian într-un mod evident.

TEOREMA 3.13. *Dacă X este complex semisimplicial minimal Kan, atunci $K(\Pi_n(X), n) \to X_n \to X_{n-1}$ este fibrare principală.*

Va trebui să punem în evidență multiplicările $g_q(\alpha, x)$ pentru diverșii q. Pentru $q < n$ punem $g_q(e_q, x) = x$, $K(\Pi(X), n)_q$ fiind constituit dintr-un singur element. Presupunem acum că cunoaștem și $g_n(\alpha, x)$. Vom defini $g_{n+k}(\alpha, x)$ punînd $g_{n+k}(\alpha, x)$ egal cu un $n + k$ — simplex pentru care $d_{i_1} \ldots d_{i_k} g(\alpha, x) = g(d_{i_1} \ldots d_{i_k} \alpha, d_{i_1} \ldots d_{i_k} x)$. Este clar că dacă există un astfel de simplex, conform proprietății de $n + k$ — trivialitate a lui X^n, el este unic. Rămîne de stabilit existența lui. Vom demonstra existența după ce vom defini multiplicarea $g_n : K(\Pi_n(X), n)_n \times X_n \to X_n$.

Fie $\alpha \in K(\Pi_n(X), n_n$ și $x \in X_n$ pentru care $d_i \alpha = s_0^{n-1} x_0$, x_0 fiind singurul 0 — simplex al lui X_n.

Primul nostru obiectiv este construcția unei omotopii :

$F^{(\alpha, x)} : \Delta[1] \times \dot{\Delta}[n + 1] \to X^n$ astfel încît :

$F^{(\alpha, x)} \mid \{1\} \times \Delta^1 [n + 1]$ este simplexul singular asociat lui x;

$F^{(\alpha, x)} \mid \{1\} \times \Delta^2 [n + 1]$ este simplexul singular asociat lui $s_0 d_1 x$,

$F^{(\alpha, x)} \mid \{1\} \times \Delta^{n+1} [n + 1]$ este simplexul singular asociat lui $s_0 d_n x$,

iar $F^{(\alpha, x)} \mid \{0\} \times \Lambda^\circ [n + 1]$ este aplicația semisimplicială ce duce complexul $\{0\} \times \Lambda^\circ [n + 1]$ în complexul semisimplicial generat de $\{x_0\}$.

Definim pe F punînd $F^{(\alpha, x)} \Delta[1] \times \Lambda^\circ [n + 1] = t \cdot \omega_{n+1}$ unde t este aplicația semisimplicială a lui $\Lambda^\circ [n + 1] \to X^n$ dată prin

$t \mid \Delta^1 [n + 1]$ este simplexul singular asociat lui x

. . . .

$t \mid \Delta^{n+1} [n + 1]$ este simplexul singular asociat lui $s_0 d_n x$, și ω_{n+1} dată de 1.17.

$F^{(\alpha, x)} \mid \{0\} \times \Delta^\circ [n + 1]$ fiind simplexul singular asociat lui α, F este definit pe $\{0\} \times \Delta^0 [n + 1] \cup \Delta[1] \times \dot{\Delta}^0 [n + 1]$ și conform proprietății de „complex Kan” a lui X^n putem extinde F pe $\Delta[1] \times$ $\times \Delta^0 [n + 1]$, extensie a cărei restricție este univoc determinată pe $\{1\} \times \Delta^0 [n + 1]$ (datorită minimalității lui X^n). Deci F este o aplicație semisimplicială a lui $\Delta[1] \times \Delta[n + 1]$ care verifică condițiile cerute.

Vom pune $\underline{F \mid \{1\} \times \Delta^\circ [n + 1] = g(\alpha, x).}$

$g(\alpha, x)$ este unicul simplex pentru care $t : (\dot{\Delta}[n + 1], \{0\}) \to (X^n, x_0)$ definit prin

$$t \mid \Delta^0 [n + 1] = g(\alpha, x)$$

$$t \mid \Delta^1 [n + 1] = x$$

$$t \mid \Delta^{n+1} [n + 1] = s_0 d_0 n$$

reprezintă în $\widetilde{\Pi}_n (X^n, x_0)$, vezi remarca de la 1.17, elementul $j_1(\alpha)$ (conform teoremei 1.29).

Vom arăta acum că $g(\beta, g(\beta, x)) = g(\alpha\beta, x)$.

Fie pentru aceasta aplicaţia semisimplicială
$f:(\ddot{\Delta}\,[n+2],\ d_2 \ldots d_{n+2}\,\delta_{n+2}) \to (X,\ x_0)$ definită prin :
$f\,|\,\dot{\Delta}^2\,[n+2] = t,$
$f\,|\,\dot{\Delta}^\circ\,[n+2] = t',$
$f\,|\,\dot{\Delta}^1\,[n+2] = t'',$
unde
$t\ = F^{(\beta,\,x)}\ |\ \{1\} \times \dot{\Delta}\,[n+1],$
$t' = F^{(\alpha,\,g\,(\beta,\,x))}\ |\ \{1\} \times \dot{\Delta}\,[n+1],$
$t'' = F^{(\alpha\beta,\,x)}\ |\ \{1\} \times \dot{\Delta}\,[n+1].$

Este clar că f fiind definit compatibil pe $\dot{\Delta}^2$, $\dot{\Delta}^0$, $\dot{\Delta}^1$, este definit pe tot $\ddot{\Delta}\,[n+2]$.

Este uşor de verificat că $f\,|\,\dot{\Delta}^k\,[n+2]$, $k \neq 0,\ 1,\ 2$, considerate ca aplicaţii semisimpliciale de la $(\dot{\Delta}\,[n+1],\ \{0\}) \to (X,\ x_0)$, sînt omotope cu aplicaţia trivială. Este de asemenea uşor de verificat că $f\,(d_2 \ldots\ldots d_{n+2}\,\delta_{n+2}) = s_0\,x_0$. Sîntem deci în condiţiile propoziţiei 1.19, şi avem $\hat{t'} - \hat{t''} + \hat{t} = 0$ de unde $\hat{t''} = \hat{t'} + \hat{t} = j_1\,(\beta) + j_1\,(\alpha) = j_1\,(\beta\alpha) = \hat{t'''}$, unde $\hat{t'''}$ este $F^{(\alpha\beta,\,x)}\,|\,\{1\} \times \dot{\Delta}\,[n+1]$.

Cum $\hat{t''} = \hat{t'''}$, rezultă t'' omotop cu t''' relativ la $\{0\}$ şi conform teoremei 1.29, $g\,(\alpha\beta,\ x) = g\,(\alpha,\ g\,(\beta,\ x))$.

Tot ca corolar al teoremei 1.29, rezultă că dacă $g\,(\alpha,\ x) = x$ şi $g\,(0,\ x) = x$ atunci

$$\alpha = 0.$$

Vom arăta acum existenţa simplexului de dimensiune $n+1$ care are ca frontiere simplexele $g\,(d_i\,\alpha,\ d_i\,x)$. Este clar că dacă notăm cu $y_i = g_i\,(d_i\,\alpha,\ d_i\,x)$ $d_i\,y_j = d_{j-1}\,y_i$ pentru $i < j$, deci $g\,(d_i\,\alpha,\ d_i\,x)$ definesc o aplicaţie semisimplicială $f'\,(\dot{\Delta}\,[n+1],\ \{0\}) \to (X,\ x_0)$.

Fie de asemenea f aplicaţia semisimplicială dată de restricţia simplexului singular asociat lui x la frontiera $\dot{\Delta}\,[n+1]$ a lui $\Delta\,[n+1]$.

Definim acum o aplicaţie semisimplicială $g\,(\ddot{\Delta}\,[n+2],\ d_2 \ldots \ldots d_{n+2}\,\delta_{n+2}) \to (X,\ x_0)$ punînd

$$g\,|\,\dot{\Delta}^0\,[n+2] = f',$$

$$g\,|\,\dot{\Delta}^1\,[n+2] = f,$$

$$g\,|\,\dot{\Delta}^2\,[n+2] = t^1$$

$$g\,|\,\dot{\Delta}^3\,[n+2] = t^2$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$g\,|\,\dot{\Delta}^{n+1}\,[n+2] = t^n$$

unde $t^i : (\dot{\Delta}\,[n+1], \{0\}) \to (X, x_0)$ este dat de $F^{(d_i\alpha,\, d_i x)} \mid \{1\} \times \dot{\Delta}\,[n+1]$ iar $f' : (\dot{\Delta}\,[n+1], \{0\}) \to (X, x_0)$ este definit prin $f' \mid \Delta^\circ\,[n+1] = d_0 x$ $f' \mid \Delta^k\,[n+1] = F^{(d_k\alpha,\, d_k x)} \mid \{1\} \times \Delta^0\,[n+1]$ pentru $k > 0$.

Este vizibil că

$$g\,(d_2 \ldots d_{n-2}\,\delta_{n+2}) = s_0\,x_0\,;$$

atunci

$$\hat{f} - \hat{f'} + \hat{t^1} - \hat{t^2} + \ldots (-1)^{n+1}\,\hat{t^n} = \hat{f} - \hat{f'} + j_1\,(d_1\,\alpha - d_2\,\alpha + \ldots$$

$$\ldots) = \hat{f} - \hat{f'} + \hat{j}_1\,(d_0\,\alpha) = 0.$$

Înainte de a continua demonstrația este necesar să justificăm egalitatea $d_0\,\alpha - d_1\alpha + d_2\,\alpha \ldots = 0$, unde $\widehat{d_i\,\alpha} \in \Gamma_n\,(X, x_0) = \Pi_n\,(X, x_0)$.

Pentru a vedea acest lucru este suficient să arătăm că

$$j_1\,(\widehat{d_0\,\alpha} - \widehat{d_1\,\alpha} + \widehat{d_2\,\alpha} \ldots) = j_1\,(\widehat{d_0\,\alpha}) - j_1\,(\widehat{d_1\,\alpha}) + j_1\,(\widehat{d_2\,\alpha}) \ldots = 0.$$

Considerăm pentru aceasta aplicația semisimplicială $h : (\ddot{\Delta}\,[n+2], \{0\}) \to (X^n, x_0)$ definită prin :

$h \mid \dot{\Delta}^0\,[n+2] = t_0 = \alpha \mid \dot{\Delta}\,[n+1]$ deci $t_0 = 0$;

$h \mid \dot{\Delta}^i\,[n+2] = t_i$, unde t_i este aplicația semisimplicială de la $(\dot{\Delta}^i\,[n+1], \{0\}) \to (X^n, x_0)$ definit prin $t_i \mid \Delta^0\,[n+1] = d_{i-1}\,\alpha$, $t_i \mid \Delta^k\,[n+1] = s_0^n\,x_0$ pentru $k \neq 0$.

Conform propoziției 1.19, avem

$$\hat{t}_0 - \hat{t}_1 + \hat{t}_2 \ldots = 0$$

deci

$$\widehat{d_0\,\alpha} = \widehat{d_1\,\alpha} - \widehat{d_2\,\alpha} + \widehat{d_3\,\alpha} \ldots$$

Deci $\hat{f'} = \hat{f} + j_1\,(\widehat{d_0\,\alpha}) = j_1\,(\widehat{d_0\,\alpha})$ deoarece $\hat{f} = 0$ (conform lui 1.20.

Fie acum $r : (\ddot{\Delta}\,[n+2], \{0\}) \to (X^n, x_0)$ astfel încît

$$r \mid \dot{\Delta}^i\,([n+2] = K_i$$

$$K_1 = f',\ K_0 = F^{(d_0\alpha,\, d_0 x)} \mid \{1\} \times \dot{\Delta}\,[n+1],\ K_2 = f'',$$

f'' fiind definit prin $f'' \mid \Lambda^0\,[n+1] = f' \mid \Lambda^0\,[n+1]$, $f'' \mid \Delta^0[n+1] = K_0 \mid \Delta^1\,[n+1]$.

Este ușor de verificat că $\widehat{K}_i = 0$ pentru $i = 3, 4, \ldots$ Conform teoremei 1.30, $\widehat{K}_0 - \widehat{K}_1 + \widehat{K}_2 = 0$, de unde $\widehat{K}_2 = \widehat{K}_1 - \widehat{K}_0 = f' - j\,(\widehat{d_0\,\alpha}) = 0$.

Deci $\widehat{K}_2 = 0$ și f' este extensibil.

Verificarea proprietăților

a) $g_{n+1}(\alpha, g_{n+1}(\beta, x)) = g_{n+1}(\alpha\beta, x)$,

b) $g_{n+1}(\alpha, x) = x$ atrage $\alpha = s_0^{n+1} x_0$ și

c) $g_{n+1}(s_0^{n+1} x_0, x) = x$

este o chestiune de calcul fără dificultăți.

Pentru multiplicările g_{n+k}, $k > 1$, existența simplexului $g_{n+k}(\alpha, x)$ se stabilește conform propoziției 3.12 după ce am determinat, ca în raționamentul anterior, simplexele $d_{i_1} \ldots d_{i_{k-1}} g_{n+k}(\alpha, x)$.

$X^n \xrightarrow{p^X_{n,\,n-1}} X^{n-1}$ fiind fibrare principală, există, conform teoremei 2.24, o aplicație

$$\xi_{n+1} : X^{n-1} \to \overline{W}(K(\Pi_n(X), n)) = K(\Pi_n(X), n+1),$$

a cărei clasă de omotopie caracterizează în afară unui izomorfism fibrarea $X^n \to X^{n-1}$; ξ_{n+1} va pune în evidență o clasă de coomologie numită clasă caracteristică a fibrării $X^n \to X^{n-1}$. $\hat{\xi}_{n+1} \in H^{n+1}(X^{n-1}, \Pi_n(X))$ care o caracterizează univoc pînă la un izomorfism. Ea fiind de fapt acea clasă de omotopie $\bar{\xi}\, n+1$ pentru care $\bar{\xi}^*_{n+1}\, \delta_{n+1} = \hat{\xi}_{n+1}$, unde δ_{n+1} este clasa fundamentală a lui $H^{n+1}(K(\Pi_n(X), n+1), \Pi_n(X))$.

Deci cunoașterea lui X^{n-1} și a lui $\hat{\xi}_{n+1} \in H^{n+1}, (X^{n-1}\ \Pi_n(X))$ implică cunoașterea lui X^n.

DEFINIȚIA 3.14. Un sistem Postnikov este un tablou

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$$

$$\hat{\xi}_3 \in H^3(X_1, \Pi_2(X)),\ \hat{\xi}_4 \in H^4(X_2, \Pi_3(X)), \ldots, \hat{\xi}_{n+2} \in H^{n+2}(X_n, \Pi_{n+2}(X)$$

unde X_n este complet determinat de X_{n-1} și $\hat{\xi}_{n+1}$.

FUNCTORIALITATEA DESCOMPUNERILOR POSTNIKOV–ZILBER–MOORE

Este clar că dacă $f : X \to Y$ este o aplicație semisimplicială între 2 complexe minimale, avem diagrama comutativă conform propoziției 3.6 :

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] \\
& X_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[d, "p^X_{n,n-1}"] & & Y_n \arrow[d, "p^Y_{n,n-1}"] \\
& X_{n-1} \arrow[rr, "f_{n-1}"] \arrow[d, "p^X_{n-1,n-2}"] & & Y_{n-1} \arrow[d, "p^Y_{n-1,n-2}"] \\
X \arrow[uur, "p^X_n"] \arrow[ur, "p^X_{n-1}"] \arrow[r, "p^X_{n-2}"] \arrow[drr, "f"'] & X_{n-1} \arrow[rr, "f_{n-2}"] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & & Y_{n-2} \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
& {} & Y \arrow[uuur, "p^Y_n"] \arrow[uur, "p^Y_{n-1}"] \arrow[ur, "p^Y_{n-2}"'] & {}
\end{tikzcd}$$

LEMA 3.15. a) *f_n aplică subcomplexul $K(\Pi_n(X), n)$ în subcomplexul $K(\Pi_n(Y), n)$.*

b) *$f_n \mid K(\Pi_n(X), n)$ este un omomorfism de grupuri.*

Demonstrația este imediată datorită minimalității și faptului că

$$K(\Pi_n(X), n)_n = \Pi_n(X, x_0) \text{ ca grup și}$$

$$K(\Pi_n(Y), n)_n = \Pi_n(Y, y_0) \text{ ca grup.}$$

TEOREMA 3.16. a) *Dacă notăm cu f_n^* restricția lui $f_n \mid K(\Pi_n(X), n) \to K(\Pi_n(Y), n)$, atunci (f_n^*, f_n, f_{n-1}) este un morfism de fibrări principale.*

b) *În diagrama*

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(Y^{n-1}, \Pi_n(X)) \arrow[r, "\widetilde{f}_{n-1}^{X}"] \arrow[d, "f_n^{*Y}"] & H^{n+1}(X^{n-1}, \Pi_n(X)) \arrow[d, "f_n^{*X}"] \\
H^{n+1}(Y^{n-1}, \Pi_n(Y)) \arrow[r, "\widetilde{f}_{n-1}^{Y}"] & H^{n+1}(X^{n-1}, \Pi_n(Y))
\end{tikzcd}$$

unde f_n^{*X} este omomorfismul indus de aplicația $f_n^{*X} : K(\Pi_n(X), n) \to K(\Pi_n(Y), n)$ analog f_n^{*Y} și $\widetilde{f}_n^X$ este indus de f_{n-1} pentru coomologia cu coeficient în $\Pi_n(X)$ și $\widetilde{f}_n^Y$ pentru coomologia cu coeficienți în $\Pi_n(Y)$

$$f_n^{*X}(\hat{\xi}_{n+1}^X) = \widetilde{f}_{n-1}^Y(\hat{\xi}_{n+1}^Y).$$

Demonstrație. Conform teoremei 2.38, este suficient să arăt că (f_n^*, f_n, f_{n-1}) este un morfism de fibrări principale, adică

$$f^n g^X(\alpha, x) = g^X(f_n^* \alpha, f^n x),$$

deci că

$$f^n \cdot F^{(\alpha, x)} \mid \{1\} \times \Delta^\circ[n+1] = F^{(f\alpha, fx)} \mid \{1\} \times \Delta^\circ[n+1].$$

Dar datorită minimalității va fi suficient să arătăm că

$$f^n \cdot F^{(\alpha, x)} \mid \Delta[1] \times \dot{\Delta}^\circ[n+1] \cup \{1\} \times \Delta^\circ[n+1] =$$

$$= F^{(f\alpha, fx)} \mid \Delta[1] \times \dot{\Delta}^\circ[n+1].$$

Însă $f^n \cdot F^{(\alpha, x)} \mid \Delta[1] \times \dot{\Delta}^\circ[n+1] = F^{(f\alpha, fx)} \mid \Delta[1] \times \dot{\Delta}^\circ[n+1]$ deoarece $f^n \cdot F^{(\alpha, x)} \mid \Delta[1] \times \Lambda^\circ[n+1] = F^{(f\alpha, fx)} \mid \Delta[1] \times \Lambda^\circ[n+1]$ (evident) iar $f^n \cdot F^{(\alpha, x)} \mid \{1\} \times \Delta^\circ[n+1] = f^n(\alpha)$ și $F^{(f\alpha, f(x))} \mid \{1\} \times \Delta^\circ[n+1] = f^n(\alpha)$.

PROPRIETĂȚI ALE INVARIANȚILOR POSTNIKOV

DEFINIȚIA 3.17. În cele ce urmează vom numi invariant Postnikov clasa de coomologie $\hat{\xi}_{n+1}$.

Vom da acum două teoreme relativ la structura acestor invarianţi

TEOREMA A (J. Pierre Meyer). *Fie $X \in \overline{\mathcal{M}}$ simplu conex. Următoarele aserţiuni sînt echivalente :*

1) *Omomorfismul Hourewicz* $h_n^* : \Pi_n(X) \to H_n(X)$ *este monomorfism de sumant direct ;*

2) $\hat{\xi}^{n+1} = 0$.

TEOREMA B. (Arkowitz-Curjel). *Fie $X \in \mathcal{M}$ simplu conex. Următoarele aserţiuni sînt echivalente :*

1) *Omomorfismul Hourewicz* $h_n^* : \Pi_n(X) \to H_n(X)$ *este $\mathcal{F}$ monomorfism unde $\mathcal{F}$ este clasa grupurilor finite ;*

2) $\hat{\xi}^{n+1}$ *este de ordin finit.*

Demonstraţie. Considerăm fibrarea principală $X^n \to X^{n-1}$ de fibră $K(\Pi_n(X), n)$ ($n-1$ conexă) şi baza X^{n-1} simplu conexă (conform propoziţiilor 3.4 şi 3.5). Atunci avem următorul şır exact pentru omologie pus în evidenţă de J. P. Serre în teza sa

(1) $$\ldots \to H_{n+1}(K(\Pi_n(X), n) \to H_{n+1}(X^n) \to H_{n+1}(X^{n-1}) \xrightarrow{\tau_n^*} H_n(K(\Pi_n(X), n) \to H_n(X^n) \to \ldots$$

Ţinem cont acum că

$$H_{n+1}(K(\Pi_n(X), n)) = H_n(K(\Pi_n(X), n+1) = 0.$$

Pentru a demonstra acest lucru considerăm fibrarea

$$K(\Pi_n(X), n) \to \overline{W}(K(\Pi_n(X), n)) \times_{\tau'} K(\Pi_n(X), n) \to \overline{W}(K(\Pi_n(X), n)),$$

unde notăm

$$(K(\Pi_n(X), n+1)) = \overline{W}(K(\Pi_n(X), n))$$

şi

$$\overline{W}(K(\Pi_n(X), n)) \times_{\tau'} K(\Pi_n(X), n) = E = W(K(\Pi_n(X), n)).$$

Deoarece $K(\Pi_n(X), n)$ este $n-1$ conex şi $K(\Pi_n(X), n+1)$ este n-conex, avem şirul exact pentru omologie

(2) $$\ldots \to H_{2n-2}(K(\Pi_n(X), n) \to H_{2n-2}(E) \to H_{2n-2}(K(\Pi_n(X), n+1)), \xrightarrow{\tau_{2n-1}^*} H_{2n-1}(K(\Pi_n(X), n)) \ldots H_{n+1}(E) \to H_{n+1}(K(\Pi_n(X), n+1)) \; H_n(K(\Pi_n(X), n)) \to H_n(E) \to \ldots$$

Cum E are toate grupurile de omologie nule, avem

$$H_{n+1}(K(\Pi_n(X), n) = H_n(K(\Pi_n(X), n+1)) = 0$$

(ultima egalitate datorîndu-se teoremei lui Hourewicz).

Atunci şirul (1) devine

$$
\begin{aligned}
(3)\qquad & 0 \xrightarrow{i_n^*} H_{n+1}(X^n) \xrightarrow{p^*_{n,\,n-1}} H_{n+1}(X^{n-1}) \xrightarrow{\tau_n^*} H_n(K(\Pi_n(X), n)) \\
& \xrightarrow{i_n^*} H_n(X^n) \xrightarrow{p^*_{n,\,n-1}} H_n(X^{n-1}) \xrightarrow{\tau^*_{n-1}} 0.
\end{aligned}
$$

Demonstraţia teoremei A. Dacă omomorfismul Hourewicz este monomorfism de sumant direct, atunci ultima parte a şirului (3)

$$\begin{tikzcd}
H_n(K(\Pi_n(X),n) \arrow[r, "i_n^*"] \arrow[d, "\wr\,\wr"'] & H_n(X^n) \arrow[r] & H_n(X^{n-1}) \arrow[r] & 0 \\
H_n(K(\Pi_n(X),n) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\wr\,\wr"'] & \Pi_n(X^n) \arrow[u, "h_n^*"'] & & \\
\Pi_n(X) \arrow[ru, "\approx"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(□)

poate fi completată la

$$0 \to H_n(K(\Pi_n(X), n)) \xrightarrow{i_n^*} H_n(X^n) \xrightarrow{p^*_{n,\,n-1}} H_n(X^{n-1}) \xrightarrow{\tau^*_{n-1}} 0$$

unde i_n^* este monomorfism de sumant direct, datorită diagramei comutative (□) ($\xrightarrow{\approx}$ desemnează izomorfism). Atunci aplicînd functorul Hom $(\ldots, \Pi_n(X))$, şirul anterior devine :

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad & 0 \to \operatorname{Hom}(H_n(X^{n-1}); \Pi_n(X)) \to \operatorname{Hom}(H_n(X^n); \Pi_n(X)) \\
& \xrightarrow{\operatorname{Hom}(i_n^*\ \Pi_n(X))} \operatorname{Hom}(H_n(K(\Pi_n(X), n), \Pi_n(X)).
\end{aligned}
$$

El rămîne încă un şir exact, iar Hom $(i_n, \Pi_n(X))$ este un epimorfism de sumant direct.

Considerăm diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X^{n-1}); \Pi_n(X)) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}(H_{n-1}(X^n); \Pi_n(X)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & H^n(X^{n-1}; \Pi_n(X)) \arrow[r, "p^*_{\sim n,\, n-1}"] \arrow[d] & H^n(X^n; \Pi_n(X)) \arrow[r, "i^*_{\sim n}"] \arrow[d] & H^n(K(\Pi_n(X),n); \Pi_n(X)) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(H_n(X^{n-1}); \Pi_n(X)) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(H_n(X^n); \Pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(H_n(K(\Pi_n(X),n); \Pi_n(X)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(5)

care poate fi completat cu săgețile punctate prin aplicarea lemei celor 5 omomorfisme (adică $i^*_{\sim n}$ este epimorfism și $p^*_{n,\,n-1}$ este monomorfism.

Considerînd acum pentru coomologie șirul lui Serre aplicat fibrării $K(\Pi_n(X), n) \to X^n \to X^{n-1}$, obținem $\ldots H^n(X_n; \Pi_n(X) \xrightarrow{i^*_{\sim n}} H^n K(\Pi_n(X), n)$ $\Pi_n(X) \xrightarrow{\tau^*_{\sim n}} H^{n+1}(X_{n-1}; \Pi_n(X)) \to \ldots$; avem $\tau^*_{\sim n}(\delta_n) = 0$, deoarece $i^*_{\sim}n$ este epimorfism.

Deoarece avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
& & K(\Pi_n(X), n+1) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
K(\Pi_n(X), n) \arrow[r] & W(K(\Pi_n(X), n)) \arrow[r] & \overline{W}(K(\Pi_n(X), n) \\
K(\Pi_n(X), n) \arrow[r] \arrow[u] & X^n \arrow[r] \arrow[u] & X^{n-1} \arrow[u, "\xi_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

atunci avem și diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
H^n(K(\Pi_n(X), n); \Pi_n(X)) \arrow[r, "\tau^*_n"] & H^{n+1}(X_{n-1}; \Pi_n(X)) \\
H^n(K(\Pi_n(X), n)); \Pi_n(X) \arrow[r, "\tau'_n", "\approx"'] \arrow[u, "\mathrm{Id}*"'] & H^{n+1}(\overline{W}(K(\Pi_n(X), n-1); \Pi_n(X)) \arrow[u, "\overline{\xi}^*_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

ce rezultă din functorialitatea șirului lui Serre, unde τ'_n este un izomorfism ce duce clasa fundamentală δ_n în clasa fundamentală δ'_{n+1}. Atunci $\tau^*_n(\delta_n) = \overline{\xi}^*_{n+1}(\delta'_{n+1}) = 0$ deci $\hat{\xi}_{n+1} = 0$.

Dacă $\hat{\xi}_{n+1} = 0$, $X^n \to X^{n-1}$ este fibrare trivială, deci $X^n = X^{n-1} \times \times K(\Pi_n(X), n)$. Cum pentru X^n omomorfismul Hourewicz este evident monomorfism de sumant direct, și cum diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi_n(X_n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\wr"'] & H_n(X_n) \arrow[d, "\wr\wr"] \\
\Pi_n(X) \arrow[r, "h^*_n"] & H_n(X)
\end{tikzcd}$$

este comutativă, rezultă h^*_n monomorfism de sumant direct.

Demonstrația teoremei B. Ultima parte a șirului (3)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed] & H_n(K(\Pi_n)(X), n)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\wr"'] & H_n(X^n) \arrow[r] & H_n(X^{n-1}) \arrow[r] & 0 \\
& \Pi_n(K(\Pi_n(X), n)) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\wr\wr"'] & \Pi_n(X_n) \arrow[u, "h^*_n"'] & & \\
& \Pi_n(X) \arrow[ur, "\approx"'] & & &
\end{tikzcd}$$

devine exact modulo „clasa $\mathcal{F}$" datorită faptului că h_n^* este monomorfism modulo „clasa $\mathcal{F}$" şi diagrama din figură este comutativă.

În aceste condiţii, (4) este încă exact modulo „clasa $\mathcal{F}$" şi diagrama (5) este încă exactă cu săgeţile completate modulo „clasa $\mathcal{F}$". Lema „celor 5" menţinîndu-se modulo „clasa $\mathcal{F}$" rezultă $\tau^*_{\sim}(\delta_n) = 0$ (modulo clasa $\mathcal{F}$) adică $\hat{\xi}_{n+1}$ este de ordin finit.

Reciproc, dacă $\hat{\xi}_{n+1}$ este de ordin finit, există un k astfel încît $(\hat{\xi}_{n+1})^k$ este clasă de omotopie 0.

Aceasta atrage $\bar{\xi}^*_{\sim n+1} = 0$, unde $\bar{\xi}^*_{\sim n+1}$ este omomorfismul

$$\bar{\xi}^*_{\sim n+1} : H^{n+1}(\overline{W}(K(\Pi_n(X), n), Q) \to H^{n+1}(X^{n-1})\,Q)$$

şi din comutativitatea diagramei

$$\begin{tikzcd}
H^n(K(\Pi_n(X), n, Q) \arrow[r, "\xi_n^*"] & H^{n+1}(X^{n-1}, Q) \\
H^{n+1}(\bar{W}(K(\Pi_n(X), n))) \arrow[u, "\wr\,\zeta'_n"] \arrow[ur, "\bar{\xi}^*_{n+1}"] &
\end{tikzcd}$$

τ_n^* este 0.

Adică $H^n(X_n, Q) \xrightarrow{i^*_{\sim n}} H^n(K(\Pi_n(X), n), Q)$ este epimorfism şi conform teoremei de coeficienţi universali

$\Pi_n(X) \xrightarrow{h_n^*} H_n(X)$ este $\mathcal{F}$-monomorfism.

CÎTEVA REMARCI ASUPRA FUNCTORIALITĂŢII DESCOMPUNERILOR POSTNIKOV

Definiţia 3.18. Complexul semisimplicial Kan X se numeşte H — complex dacă X_n este un monoid cu unitate în ambele părţi (o multiplicare cu unitate la dreapta şi stînga) şi d_i şi s_i sînt omomorfisme de monoizi care păstrează unitatea.

Definiţia 3.19. Complexul semisimplicial X se numeşte semigrup sau încă H — spaţiu asociativ dacă X_n sînt monoizi asociativi.

Lema 3.20. *Dacă X este un complex semisimplicial şi*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr] \arrow[ddr] & {} \arrow[d] \\
& X_{n+1} \arrow[d] \\
& X_n \\
& \vdots
\end{tikzcd}$$

descompunerea P.Z.M., atunci

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[dr] \arrow[ddr] & {} \arrow[d] \\
& X_{n+1} \times X_{n+1} \arrow[d] \\
& X_n \times X_n \arrow[d] \\
& {}
\end{tikzcd}$$

este descompunerea P.Z.M a produsului direct $X \times X$.

Teorema 3.21. 1) *Dacă X este un H — complex, H — complex asociativ sau grup, atunci X_n sînt H — complexe, H — complexe asociative sau grupuri semisimpliciale.*

2) p_n, $p_{n,n-1}$ *sînt omomorfisme de H — complexe H — complexe asociative (ce păstrează unitatea) de grupuri.*

Demonstraţia. Este o consecinţă imediat a teoremei de functorialitate şi a lemei.

Propoziţia 3.22. *Dacă $F \to E \to B$ este o fibrare Kan şi F este fibra deasupra 0-simplexului x_0, atunci $F^n \to E^n \to B^n$ sînt încă fibrări Kan.*

Demonstraţie. Se urmează calea raţionamentului prin care arătăm că $X \to X_n$ este fibrare Kan.

Teorema 3.23. *Necesar şi suficient pentru a exista o structură de H — complex, H — complex asociativ, sau semigrup, grup semisimplicial* pe X *este să existe astfel de structuri pe X^n şi $p_{n,n-1}$ să fie omomorfisme de astfel de structuri.*

Demonstraţia este banală.

Primită la redacţie la 18 iulie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. M. Arkowitz şi C. R. Curjel, *The Hurewicz homomorphism and finite homotopy invariants.* Transaction of the American Mathematical Society, **110**, 538—551 (1964).
2. H. Cartan, *Séminaire de topologie algébrique* 1955—56, École Normale Supérieure, Paris.
3. A. Dold, *Die geometrische Realisierung eines schiefen kartesischen Produktes.* Archiv für Mathematik, **9** (1958).
4. J. Pierre Meyer, *Whitehead products and Postnikov systems.* American Journal of Mathematics, **LXXX II**, 271—279 (1960).
5. J. Moore, *Semisimplicial complexes and Postnikov systems.* Symposium internacional de topologia algebrica, Mexico, 1956, p. 232—247.
6. J. Moore, *Seminary on algebric topology.* 1955—1956, Princeton.
7. J. A. Zilber, *Categories in homotopy theory.* Thesis-Harvard, Cambridge Massachusetts, 1963.
8. M. Zisman, *Quelques propriétés des fibres au sens de Kan.* Thèse, Paris, 1960.
9. M. Zisman et P. Gabriel, *Exposés dans le séminaire homotopique.* Strasbourg, 1964.

O DEMONSTRAŢIE A UNEI TEOREME PRIVIND TENSORUL DE CURBURĂ

DE

N. N. TEODORESCU şi GH. N. RIZESCU

Se dă o demonstraţie simplă unei teoreme după care, în general, tensorul de curbură al unui spaţiu Riemann determină metrica spaţiului, abstracţie de un factor constant.

În această Notă, utilizînd o metodă dată de acad. G. Vrănceanu, vom da o demonstraţie directă şi relativ simplă următoarei teoreme datorate lui C. Teleman :

,,*Dacă două spaţii Riemann* V_n *şi* $\overline{V}_n$ $(n > 3)$ *de metrică pozitiv definită au acelaşi tensor de curbură şi dacă matricile* $X_{kl} = \| R^i_{jkl} \|$ *formează un sistem ireductibil de transformări liniare, atunci metricile celor două spaţii diferă printr-un factor constant*''.

★

Fie V_n şi $\overline{V}_n$ două spaţii Riemann avînd metricile $ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j$ şi $d\overline{s}^2 = \overline{a}_{ij}\, dx^i\, dx^j$. Să notăm cu T^i_{jk} diferenţa simbolurilor lui Cristoffel $\overline{\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|}$ şi $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$. Avem deci :

$$(1) \qquad \overline{\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|} = \left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| + T^i_{jk}.$$

Dacă cele două spaţii au acelaşi tensor de curbură,

$$\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}$$

luînd derivata covariantă în raport cu metrica lui $\overline{V}_n$ respectiv V_n rezultă că :

$$\overline{R}^i_{jkl\,;\,\overline{r}} = R^i_{jkl\,;\,r} + R^s_{jkl}\, T^i_{sr} - R^i_{skl}\, T^s_{jr} - R^i_{jsl}\, T^s_{rk} - R^i_{jks}\, T^s_{lr}$$

Prin permutarea indicilor k, l şi r, vom obţine alte două relaţii analoage.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 4, P. 631–633, BUCUREŞTI, 1966

Adunînd aceste trei relaţii şi ţinînd seama de identităţile lui Bianchi :

$$R^i_{jkl\,;\,r} + R^i_{jlr\,;\,k} + R^i_{jrk\,;\,l} = 0$$

şi de simetria strîmbă în ultimii doi indici ai tensorului R^i_{jkl} se obţine relaţia :

$$R^i_{skl}\, T^s_{jr} + R^i_{slr}\, T^s_{jk} + R^i_{srk}\, T^s_{jl} = R^s_{jkl}\, T^i_{sr} + R^s_{jlr}\, T^i_{sk} + R^s_{jrk}\, T^i_{sl} \tag{2}$$

★

Deoarece matricile $X_{kl} = \| R^i_{jkl} \|$ formează un sistem ireductibil de transformări liniare rezultă că sistemul :

$$x_{ri}\, R^r_{jkl} + x_{rj}\, R^r_{ikl} = 0 \tag{2'}$$

are soluţie unică, abstracţie făcînd de un factor.

Observăm că sistemul (2′) este verificat atît de a_{ij} cît şi de $\overline{a}_{ij}$. Rezultă că între coeficienţii tensorilor metrici ale celor două spaţii avem relaţia :

$$\overline{a}_{ij} = e^{2\sigma}\, a_{ij},$$

unde σ este o funcţie de variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

De aici obţinem pentru simbolii lui Cristoffel, relaţia :

$$\overline{\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|} = \left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| + \delta^i_j\, \sigma_k + \delta^i_k\, \sigma_j - a_{jk}\, \sigma^i,$$

unde am notat $\sigma_i = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^i}$ şi $\sigma^i = a^{is}\, \sigma_s$.

Relaţia (1) ne dă :

$$T^i_{jk} = \delta^i_j\, \sigma_k + \delta^i_k\, \sigma_j - a_{jk}\, \sigma^i. \tag{3}$$

Înlocuind în (2) valorile date de (3) şi ţinînd seama de relaţiile :

$$R^i_{rkl} + R^i_{klr} + R^i_{lrk} = 0$$

obţinem :

$$\delta^i_r\, R^s_{jkl}\, \sigma_s + \delta^i_k\, R^s_{jlr}\, \sigma_s + \delta^i_l\, R^s_{jrk}\, \sigma_s + a_{jr}\, R^i_{skl}\, \sigma^s +$$

$$+\, a_{jk}\, R^i_{slr}\, \sigma^s + a_{jl}\, R^i_{srk}\, \sigma^s = 0$$

Înmulţind cu a^{jl} şi sumînd găsim :

$$\delta^i_r\, R^s_k\, \sigma_s - \delta^i_k\, R^s_r\, \sigma_s + (n-3)\, R^i_{srk}\, \sigma^s = 0. \tag{4}$$

Punînd în (4) $i = r$ şi sumînd se obţine : $2(n-2)\, R^s_k\, \sigma_s = 0$, deci pentru $n > 2$ avem :

$$R^s_k\, \sigma_s = 0. \tag{5}$$

Ţinînd seama de (4) obţinem pentru $n > 3$:

$$R^s_{jkl}\,\sigma_s = 0. \tag{6}$$

★

Condiţiile ca matricile $X_{kl} = \| R^i_{jkl} \|$ să formeze un sistem ireductibil de transformări liniare ne spune că sistemul liniar şi omogen :

$$R^s_{jkl}\, x_s = 0$$

admite numai soluţia banală. Relaţia (6) ne arată că $\sigma_i = 0$, deci $\sigma =$ $=$ constant.

După cum rezultă din (5) teorema este adevărată şi pentru $n = 3$ dacă presupunem că determinantul $| R^i_k |$ nu este identic nul.

Primită la redacţie la 11 noiembrie 1965

Liceul „C.A. Rosetti”, Bucureşti
Liceul „D. Cantemir”, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. K. ТЕЛЕМАН, *Об одной теореме Бореля-Лихнеровича.* Rev. math. pures et appl., III (1958).
2. N. N. TEODORESCU, *Asupra unor spaţii Finsler.* St. cerc. mat., **13**, *3* (1962).
3. G. VRANCEANU, *Sur la décomposabilité et les groupes d'holonomie des espaces A_n.* Publicationes mathematicae, Debrecen, **7** (1960).
4. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială.* vol. I Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text sau în ordine alfabetică. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 304 p. + 52 pl., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

N. RANCU şi L. TŐVISSI, **Statistica matematică cu aplicaţii în producţie**, 1963, 898 p. + 20 pl., 45 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOÏLOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 4, P. 481—634, BUCUREŞTI, 1966

I. P. „Informaţia" – c. 3065

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

5

TOMUL 18
1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti. Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOM. 18, Nr. 5
1966

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

S U M A R

Pag.

LIVIU TODOR, Asupra metodei lui Jacobi de rezolvare a problemei vectorilor și valorilor proprii ale unei matrici simetrice 637

CORNELIU SIMIONESCU și CLAUDIA SIMIONESCU, Asupra transformărilor punctuale de prima speță între plane proiective cu tensor pătratic Π_{ij} constant 641

NICOLAE POPESCU, Elemente de teoria fasciculelor (IV) . . . 645

ION I. CRISTEA și LIVIU DINU, Asupra mișcării plane a unui fluid viscos într-un semispațiu racordat la un canal de alimentare perpendicular pe frontiera sa. 671

ION I. CRISTEA și HORIA I. ENE, Asupra unor mișcări fluide cu vîrtej constant 675

OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ, Cîteva observații asupra topologizării modulelor 681

ELEMÉR ROSINGER, Scufundarea distribuțiilor $\mathcal{D}'_n$ în algebre pseudotopologice 687

ANDREI A. SUSEA, O nouă problemă la limită pentru ecuația căldurii în două variabile independente 731

DAN VOICULESCU, O ecuație privind corpurile convexe și aplicații la corpurile asociate unui corp convex 741

PETRIȘOR MAZILU, Asupra unei mișcări staționare tridimensionale cu suprafața liberă într-un mediu poros omogen. . 747

NICOLAE TELEMAN, O definiție geometrică a unor forme ale lui André Weil ce se pot asocia unei conexiuni infinitezimale 753

IOANA CIORĂNESCU, Asupra unor proprietăți ale funcțiilor vectoriale slab derivabile 763

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 635 – 768 BUCUREȘTI, 1966

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

ASUPRA METODEI LUI JACOBI DE REZOLVARE A PROBLEMEI VECTORILOR ŞI VALORILOR PROPRII ALE UNEI MATRICI SIMETRICE

DE

LIVIU TODOR

În lucrarea de faţă se propune o modificare a metodei lui Jacobi (uneori cunoscută şi sub numele de metoda lui Neumann şi Goldstine). Această modificare constă în a determina unghiul rotaţiilor plane ce intervin în metoda amintită cu ajutorul formulei (4) în loc de (3).

Precum se ştie, una din cele mai eficace metode de rezolvare a problemei valorilor şi vectorilor proprii ale unei matrici simetrice A este metoda lui Jacobi. Prin această metodă se reconstituie matricea ortogonală T care reduce matricea A la forma diagonală, sub forma unui produs de matricile T_k:

$$T = \lim_{k \to \infty} T_k T_{k-1} \ldots T_2 T_1 \tag{1}$$

fiecare din matricile T_k fiind o matrice de rotaţie numai în două din variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_k$. O astfel de matrice T_k are forma

$$T_k = \begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \cos\theta & \ldots & \sin\theta & \ldots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & -\sin\theta & \ldots & \cos\theta & \ldots & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \to \text{linia } i \\ \\ \to \text{linia } j \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{coloana} & & \text{coloana} & & \\
 & & & & i & & j & &
\end{array} &
\end{array} \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 637-640, BUCUREŞTI, 1966

unde unghiul θ este astfel ales ca matricea A_k dată de

$$A_k = T_k A_{k-1} T'_k \,; \quad (A = A_0) \tag{3}$$

să fie mai aproape de matricea diagonală decît A_{k-1}. Trecînd peste formulele care permit calcularea elementelor lui A_k din elementele lui A_{k-1} şi în funcţie de unghiul θ, amintesc că în aceste formule intervin funcţiile cos θ şi sin θ. Formula care determină în mod optim unghiul θ este:

$$\operatorname{tg} 2\,\theta = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} = a. \tag{3'}$$

În mod obişnuit după alegerea întregilor i şi j se calculează raportul din membrul al doilea, apoi se rezolvă ecuaţia transcendentă (3) şi se calculează valorile lui sin θ şi cos θ. Acest mod de a proceda are mai multe inconveniente, printre care amintim

— timpul lung necesar rezolvării ecuaţiei (3),

— timpul lung necesar calculării lui sin θ şi cos θ,

— program complicat ce încarcă memoria maşinii cu subrutinele necesare calculării lui sin θ, cos θ, precum şi pentru rezolvarea ecuaţiei (3),

— neconcordanţa perfectă între valorile lui sin θ şi cos θ (adică faptului că suma pătratelor acestora nu este exact 1), ceea ce provine din faptul că sin θ şi cos θ sînt calculate aproximativ prin polinoame de cea mai bună aproximaţie.

Dintre acestea ultima are urmări în ceea ce priveşte exactitatea valorilor şi vectorilor proprii, iar celelalte sînt deosebit de supărătoare în special pentru maşinile mici ce le avem la dispoziţie la ora actuală, reducînd ordinul maxim pentru care se poate rezolva problema.

În străinătate s-au făcut experienţe cu o metodă care elimină rezolvarea ecuaţiei transcendente (3), observîndu-se că pentru unghiuri mici tangenta aproximează bine unghiul, şi că se poate presupune despre θ că este situat în intervalul $(-\pi/4, \pi/4)$. În aceste condiţii se pune:

$$\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{a}{4} \tag{4}$$

care se consideră valabilă pentru $|a| < 1$. Apoi se calculează sin $\tilde{\theta}$ şi cos $\tilde{\theta}$, prin expresiile raţionale cunoscute în funcţie de $\operatorname{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2}$. Pentru unghiuri θ mai mari, adică pentru $|a| > 1$ se execută în locul rotaţiei de unghiul θ o rotaţie de $\pi/4$. Această metodă nu influenţează valorile proprii, însă lungeşte procesul în ansamblul lui.

Am introdus următoarea modificare în acest procedeu. La început se compară $|2a_{ij}|$ cu $|a_{ii} - a_{jj}|$. Dacă primul este mai mic se calculează a, altfel se calculează $1/a = a'$. Apoi se calculează $a/4$ respectiv $a'/4$ după caz:

$$b = a/4\,; \qquad b' = a'/4.$$

Se compară modulele acestor mărimi cu constanta

$$(6)\qquad c = 0{,}198912374 = \operatorname{tg} \pi/16 = \operatorname{tg} 11°15'.$$

În cazul $|2a_{ij}| \leqslant |a_{ii} - a_{jj}|$ şi $|b| \leqslant c$ se calculează $\sin \widetilde{\theta}$ şi $\cos \widetilde{\theta}$ după formulele :

$$(6')\qquad \sin \widetilde{\theta} = \frac{2b}{1+b^2}\,; \qquad \cos \widetilde{\theta} = \frac{1-b^2}{1+b^2}\,.$$

În cazul $|2a_{ij}| < |a_{ii} - a_{jj}|$ şi $|b| \geqslant c$, se calculează tot după (6) dar cu $b_1 = c$ sign b în loc de b.

În cazul cînd $|2a_{ij}| > |a_{ii} - a_{jj}|$ se introduce unghiul θ' complementar lui θ faţă de $\pi/4$:

$$(7)\qquad \theta + \theta' = \pi/4.$$

Evident,

$$(8)\qquad \operatorname{tg} 2\theta' = \operatorname{tg}(\pi/2 - 2\theta) = 1/a = a'$$

şi

$$(9)\qquad \operatorname{tg} \frac{\widetilde{\theta}'}{2} = a'/4 = b'.$$

Aici am presupus că θ şi deci şi θ' sînt pozitivi. Astfel se obţine o posibilitate de a calcula pe $\sin \widetilde{\theta}$ şi $\cos \widetilde{\theta}$:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \sin \widetilde{\theta} &= \sin(\pi/4 - \widetilde{\theta}') = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \widetilde{\theta}' - \sin \widetilde{\theta}') = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-b'^2}{1+b'^2} - \frac{2b'}{1+b'^2}\right) \end{aligned}$$

şi

$$(11)\qquad \begin{aligned} \cos \widetilde{\theta} &= \cos(\pi/4 - \widetilde{\theta}') = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \widetilde{\theta}' + \sin \widetilde{\theta}') = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-b'^2}{1+b'^2} + \frac{2b'}{1+b'^2}\right). \end{aligned}$$

Formulele precedente se extind şi pentru b' negativi, în care caz în loc de b' trebuie pus $|b'|$, şi în formula (10) membrul al doilea se înmulţeşte cu sign b'.

În sfîrşit, în cazul $|2a_{ij}| > |a_{ii} - a_{jj}|$ şi $|b'| > c$ se întrebuinţează tot formulele (10), (11), dar luînd $b_1' = c$ sign b' în loc de b'.

Programul în aceste condiţii modificate a fost făcut la Centrul de calcul al Universităţii din Bucureşti, de către cercetătorii Teodorescu Alexandru şi Isac Gheorghe şi a dat rezultate foarte mulţumitoare.

Eroarea maximă în unghi are loc pentru $\widetilde{\theta}=22°30'$ cînd $\theta=19°15'1,9''$. Se poate calcula cantitatea cu care crește suma pătratelor elementelor de pe diagonala lui A_{k+1} față de A_k. În cazul alegerii optime a unghiului θ (adică după formula (3)) această sumă crește cu $2\,a_{ij}^2$. Cu procedeul indicat creșterea este ceva mai mică și anume

$$2\,a_{ij}^2 - 2\,a_{ij}^2\,\frac{b^4\,(b^2-5)^2}{(1+b^2)} = 2a_{ij}^2\,q^2\,. \tag{12}$$

Numărul q^2, a cărei semnificație este evidentă, este subunitar și are valoarea minimă pentru $\widetilde{\theta} = 22°30'$ și această valoare minimă este $q^2_{-} = 0,983264\ldots$, ceea ce explică rezultatul bun al procedeului.

Primită la redacție la 6 august 1965

Facultatea de matematică
și mecanică a Universității din București

BIBLIOGRAFIE

1. A. Korganoff, *Méthodes de calcul numérique*. Tome I, Dunod, Paris, 1961.

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR PUNCTUALE DE PRIMA SPEȚĂ ÎNTRE PLANE PROIECTIVE CU TENSOR PĂTRATIC Π_{ij} CONSTANT

DE

CORNELIU SIMIONESCU şi CLAUDIA SIMIONESCU

Se pune problema determinării transformărilor punctuale de prima speță cu tensor pătratic constant. Se arată că dacă metrica asociată este pozitiv definită, problema depinde numai de constante arbitrare.

Recent [1] unul dintre noi a considerat problema determinării transformărilor punctuale izoterme între plane proiective arătînd că determinarea acestor transformări depinde în general de trei constante arbitrare şi de alte patru funcții arbitrare de o variabilă. În această clasă intră şi transformările punctuale cu tensor pătratic constant.

În lucrarea de față se arată că transformările proiective de prima speță cu tensor pătratic Π_{ij} constant şi cu metrică definită pozitivă au conexiunea proiectivă constantă şi ca urmare, problema determinării acestor transformări depinde numai de constante arbitrare.

Acad. prof. Gh. Vrănceanu [2], *a arătat că fiind dată o corespondență punctuală*

$$u^1 = u^1(x^1,\ x^2), \qquad u^2 = u^2(x^1,\ x^2) \tag{1}$$

între două plane proiective $A_2(x^1, x^2)$, $E_2(u^1, u^2)$ *se poate asocia spațiului* A_2 *o conexiune proiectivă* Π^i_{jk}, $(i, j, k = 1{,}2)$ *prin relațiile*

$$\Gamma^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \delta^i_j \frac{v_k}{v} + \delta^i_k \frac{v_j}{v}, \qquad \left(v_k = \frac{\partial v}{\partial_{x^k}}\right),$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 641-644, BUCUREŞTI, 1966

unde $v = \Delta^{-\frac{1}{3}}$, Δ *fiind iacobianul corespondenței* (1), δ^i_j *simbolii lui Kronecker, iar* Γ^i_{jk} *componentele conexiunii afine ale spațiului* A_2, *definite de formulele*

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial^2 u^s}{\partial x^j \partial x^k} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial u^s}$$

De asemenea a arătat [3] *că un sistem de funcții* $\Pi^i_{jk}(x, y)$, unde am luat $x^1 = x$, $x^2 = y$, $(i, j, k = 1,2)$ *constituie componentele unei conexiuni proiective asociate spațiului* A_2 *dacă și numai dacă satisfac sistemul*

$$\frac{\partial \Pi^1_{112}}{\partial y} - \frac{\partial \Pi^2_{212}}{\partial x} + \Pi^2_{112}\Pi^1_{12} + 2\,\Pi^2_{212}\Pi^2_{12} - \Pi^1_{221}\Pi^2_{11} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Pi^1_{221}}{\partial x} - \frac{\partial \Pi^2_{212}}{\partial y} + \Pi^1_{221}\Pi^2_{21} + 2\,\Pi^2_{212}\Pi^1_{12} - \Pi^2_{112}\Pi^1_{22} = 0,$$

unde Π^i_{jkl} *este tensorul de curbură asociat conexiunii proiective* Π^i_{jk}.

Dacă Π^i_{jk} este o conexiune proiectivă a spațiului A_2, atunci cantitățile

$$\Pi_{ij} = \Pi^s_{il}\Pi^l_{js} \tag{3}$$

constituie componentele unui tensor dublu covariant și se numește tensorul pătratic asociat conexiunii Π^i_{jk}, astfel că putem asocia un spațiu V_2, al lui Riemann, cu metrica

$$\mathrm{d}s^2 = \Pi_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \qquad (i, j = 1,2). \tag{4}$$

În ipoteza că tensorul Π_{ij} este constant ne putem aranja în așa fel încît dacă metrica (4) este pozitiv definită, să avem

$$\mathrm{d}s^2 = 2\,[(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2] \tag{4'}$$

fapt care ne spune că putem lua

$$\Pi^2_{11} = \Pi^1_{12} = \sin\alpha, \qquad \Pi^2_{21} = \Pi^1_{22} = \cos\alpha.$$

În acest caz ținînd seama de formulele (2) rezultă că Π^i_{jk} *este o conexiune proiectivă a spațiului* $A_2\,(x, y)$ *dacă și numai dacă* $\alpha\,(x, y)$ *este o integrală a sistemului*

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial y} + 2\left[\cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right] = 0 \tag{5}$$

$$2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + 2\left[\sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right] = 0$$

Cu notațiile $\alpha_x = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\alpha y = \frac{\partial x}{\partial y}$, $\alpha_{x^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}$, ..., (5) devine

$$\begin{aligned} \alpha_{x^2} &= \alpha_{y^2} + 2\alpha_x \, \alpha_y + 2 \cos \alpha \alpha_x - 2 \sin \alpha \, \alpha_y \\ \alpha_{xy} &= - \sin \alpha \; \alpha_x - \cos \alpha \alpha_y - \frac{1}{2} \alpha_x^2 + \frac{1}{2} \alpha_y^2 \end{aligned} \tag{5'}$$

de unde deducem că α este o integrală a sistemului cu diferențiale totale

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{x^3} &= (3\alpha_y + \cos \alpha) \, \alpha_{y^2} - \frac{1}{2} \alpha_x^3 + \frac{9}{2} \alpha_x \alpha_y^2 - \frac{3}{2} \sin \alpha \; \alpha_x^2 + \\ &+ 4 \cos \alpha \, \alpha_x \, \alpha_y - \frac{11}{2} \sin \alpha \, \alpha_y^2 + (3 + \cos^2 \alpha) \, \alpha_x - \sin \alpha \cos \alpha \; \alpha_y \\ \alpha_{yx^2} &= -(\sin \alpha + \alpha_x) \, \alpha_{y^2} - \frac{5}{2} \alpha_x^2 \, \alpha_y + \frac{1}{2} \alpha_y^3 - \frac{3}{2} \cos \alpha \; \alpha_y^2 - \\ &- \frac{5}{2} \cos \alpha \; \alpha_x^2 - \sin \alpha \cos \alpha \; \alpha_x + (1 + \sin^2 \alpha) \; \alpha_y \\ \alpha_{xy^2} &= (\alpha_y - \cos \alpha) \, \alpha_{y^2} + \frac{1}{2} \alpha_x^3 - \frac{1}{2} \alpha_x \, \alpha_y^2 + \frac{3}{2} \sin \alpha \; \alpha_x^2 - \\ &- \frac{1}{2} \sin \alpha \; \alpha_y^2 + \sin \alpha \, \alpha_x + \sin \alpha \cos \alpha \; \alpha_y \\ \alpha_{y^3} &= (\sin \alpha - 3 \, \alpha_x) \, \alpha_{y^2} - \frac{3}{2} \alpha_x^2 \, \alpha_y - \frac{1}{2} \alpha_y^3 + \frac{3}{2} \cos \alpha \; \alpha_y^2 + \\ &+ 4 \sin \alpha \; \alpha_x \, \alpha_y - \frac{3}{2} \cos \alpha \; \alpha_x^2 + \sin \alpha \; \cos \alpha \; \alpha_x + (2 + \cos^2 \alpha) \, \alpha_y . \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Scriind condițiile de integrabilitate ale sistemului (6) obținem

$$\begin{aligned} &(4 \, \alpha_{y^2} + 8 \cos \alpha \, \alpha_x - 10 \sin \alpha \, \alpha_y + 8 \, \alpha_x \; \alpha_y) \, \alpha_{y^2} + 4 \, \alpha_x^2 \, \alpha_y^2 + \\ &+ 8 \cos \alpha \; \alpha_x^2 \, \alpha_y - 9 \sin \alpha \; \alpha_x \, \alpha_y^2 - \cos \alpha \, \alpha_y^3 + 4 \, (1 + \cos^2 \alpha) \, \alpha_x^2 - \\ &- 8 \sin \alpha \; \cos \alpha \, \alpha_x \, \alpha_y - (7 - 3 \cos^2 \alpha) \, \alpha_y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(4 \, \alpha_{y^2} + 8 \cos \alpha \, \alpha_x - 10 \sin \alpha \, \alpha_y + 8 \, \alpha_x \, \alpha_y) \, \alpha_{y^2} + 4 \, \alpha_x^2 \, \alpha_y^2 \; + \\ &+ 8 \cos \alpha \; \alpha_x^2 \, \alpha_y - 9 \sin \alpha \; \alpha_x \, \alpha_y^2 - \cos \alpha \, \alpha_y^3 + 4 \, (1 + \cos^2 \alpha) \, \alpha_x^2 - \\ &- 8 \sin \alpha \cos \alpha \; \alpha_x \, \alpha_y + (4 + 5 \sin^2 \alpha) \, \alpha_y^2 = 0 \\ &\alpha_y \, [\sin \alpha \; \alpha_x^2 - \cos \alpha \; \alpha_x \alpha_y - 2 \sin \alpha \, \alpha_y^2 + 2 \sin^2 \alpha \, \alpha_x + 3 \sin \alpha \cos \alpha \, \alpha_y] = 0 . \end{aligned}$$

Din primele două condiţii avem

$$2 \sin^2 \alpha \, \alpha_y^2 = 0$$

adică : sau sin $\alpha = 0$ şi atunci conexiunea proiectivă este dată de

$$\Pi_{11}^2 = \Pi_{12}^1 = 0, \qquad \Pi_{21}^2 = \Pi_{22}^1 = 1$$

sau $\alpha_y = 0$ şi ca urmare $\alpha_x = 0$.

Am obţinut astfel teorema :

Transformările punctuale de prima speţă cu tensor pătratic constant şi cu metrică definită pozitivă, au conexiunea proiectivă constantă.

Altfel spus, transformările punctuale între plane proiective cu metrică euclidiană şi cu coordonate x, y carteziene, sînt cu conexiune proiectivă constantă.

Primită la redacţie la 9 august 1965

Institutul Politehnic Braşov
Institutul Pedagogic de 3 ani Braşov

BIBLIOGRAFIE

1. Corneliu Simionescu, *Asupra transformărilor punctuale izoterme.* Lucrări ştiinţifice, I. P. Bv., vol. VI (sub tipar).
2. Gheorghe Vrănceanu, *Trasformazioni punctuali tra spazi affini o proiettivi e spazi a connessione affine euclidea.* Boll. U.M.T. **(3)**, *12* (1957).
3. — *Sul tensore associati ad una corrispondenza fra spazi proiettivi.* Boll. U.M.T. **(3)**, 12 (1957).

ELEMENTE DE TEORIA FASCICULELOR (IV)

DE

NICOLAE POPESCU

În partea a IV-a a lucrării, se expune sfîrşitul capitolului IV. Aici se dă o interpretare a fasciculelor de mulţimi în raport cu sit dat precum şi aplicaţii ale acestor chestiuni.

§ 20. STUDIUL CATEGORIEI DE LOCALIZARE

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit, astfel că functorul canonic $i : \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ de la fascicule la prefascicule are un adjunct la stînga a ce comută cu limitele proiective finite. (Acest fapt se întîmplă, spre exemplu, dacă $\mathcal{C}$ este un element al lui U.) Ca în paragraful 18 pentru orice $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^{\wedge}$, vom nota cu $\overline{F}$ obiectul $(i \circ a)(F)$. Dacă $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, am văzut că asocierea: $X \rightsquigarrow \overline{X}$ defineşte un functor de la $\mathcal{C}$ la subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ formată din obiectele $\overline{X}$ cu $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$. Fie $\overline{h}$ acest functor. $\overline{h}$ este un functor biunivoc pentru obiecte.

Propoziţia 4.35. *Functorul $\overline{h}$ coincide cu functorul $a \circ h$.* Demonstraţia acestei afirmaţii este imediată, ţinînd cont de faptul că functorul canonic: $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ este deplin fidel.

Concludem din cele de mai sus că functorul $\overline{h}$ comută cu limitele proiective finite reprezentabile din $\mathcal{C}$.

Fie acum τ o topologie mai puţin fină ca topologia canonică pe $\mathcal{C}$; pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $X = \overline{X}$ şi deci functorul $\overline{h}$ mai sus definit este o echivalenţă între $\mathcal{C}$ şi $\overline{\mathcal{C}}$. Evident, categoria $\mathcal{C}^{\sim}$ este mai „puţin largă" decît categoria $\mathcal{C}^{\wedge}$, de aceea functorul $\overline{h}$ are anumite proprietăţi după cum vom vedea în continuare. Mai întîi observăm că în acest caz $\overline{h}$ comută cu limitele proiective reprezentabile din $\mathcal{C}$.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 645–669, BUCUREŞTI, 1966

Fie $u, v: R \rightrightarrows X$ un cuplu de morfisme din $\mathcal{C}$ și $p: X \to Y$ un conucleu al său. Vom spune că cuplul (u, v) este τ-exact, τ fiind o topologie pe $\mathcal{C}$ dacă diagrama din $\overline{\mathcal{C}}$:

$$\overline{R} \underset{\overline{v}}{\overset{\overline{u}}{\rightrightarrows}} \overline{X} \xrightarrow{\overline{p}} \overline{Y}$$

este exactă.

În general, este foarte greu de caracterizat toate cuplurile τ-exacte din $\mathcal{C}$, dacă τ este arbitrară. Iată, într-un fel, caracterizarea unor cupluri exacte pentru cazul cînd τ este topologia canonică.

Propoziția 4.36. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie, $\mathcal{C}^{\sim}$ categoria fasciculelor peste $\mathcal{C}$ în raport cu topologia canonică, $\overline{h}: \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ functorul canonic. Fie $R \rightrightarrows X$ o relație de echivalență din $\mathcal{C}$ al cărui cît Y să fie reprezentabil; considerăm următoarele proprietăți:*

i) *$\overline{Y}$ este cîtul relației de echivalență $\overline{R} \rightrightarrows \overline{X}$ din $\mathcal{C}^{\sim}$.*

ii) *Relația de echivalență $R \rightrightarrows X$ este efectiv universală.*

Implicația ii) $\Rightarrow$ i) este valabilă oricînd. Dacă $\mathcal{C}$ este un element al lui U, atunci și i) $\Rightarrow$ ii).

Demonstrație. Fie valabilă *ii*). Atunci în $\mathcal{C}$ avem diagrama exactă:

$$R = X \Pi_Y X \rightrightarrows X \xrightarrow{p} Y$$

și deci în $\widetilde{\mathcal{C}}$ avem diagrama:

$$\overline{R} = \overline{X} \Pi_{\overline{Y}} \overline{X} \rightrightarrows \overline{X} \xrightarrow{\overline{p}} \overline{Y}.$$

Pentru a dovedi că această diagramă este exactă, fie F un fascicul pentru topologia canonică; din definiția topologiei canonice este suficient să considerăm că F este reprezentabil și faptul că functorul $\overline{h}$ este o echivalență.

Fie acum $\mathcal{C}$ un element al lui U; atunci în categoria $\mathcal{C}^{\sim}$ există produse fibrate, iar $\overline{R} \rightrightarrows \overline{X}$ este o relație de echivalență din $\mathcal{C}^{\sim}$. Dacă $\overline{p}: \overline{X} \to \overline{Y}$ este morfismul respectiv $(p: X \to Y)$ în $\mathcal{C}$, atunci $\overline{p}$ este efectiv universal. Mai mult, morfismul canonic $\alpha: \overline{R} \to \overline{X} \Pi_{\overline{Y}} \overline{X}$ este un izomorfism. Așadar în $\overline{\mathcal{C}}^{\sim}$ avem diagrama exactă:

$$R \to \overline{X} \Pi_{\overline{Y}} \overline{X} \rightrightarrows X \to \overline{Y}$$

și din echivalența cu $\mathcal{C}$, (prin $\overline{h}$) deducem că p este quarabil în $\mathcal{C}$ și este efectiv universal.

Mai mult, putem dovedi următorul rezultat:

Propoziția. 4.37. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $\mathcal{C}^{\sim}$ categoria fasciculelor peste $\mathcal{C}$ în raport cu topologia canonică astfel că functorul incluziune $i: \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ admite un adjunct la stînga exact. Fie în $\mathcal{C}$ relația de echivalență: $R \rightrightarrows X$ al cărui cît Y este reprezentabil. Atunci în $\mathcal{C}^{\sim}$ avem diagrama exactă (canonic indusă):*

$$\overline{R} \rightrightarrows \overline{X} \to \overline{Y}.$$

Demonstrație. Fie în $\mathcal{C}^{\sim}$ cuplul $\overline{R} \rightrightarrows \overline{X}$; pentru a construi un conucleu, al său considerăm diagrama exactă din $\mathcal{C}^{\wedge}$

$$R \rightrightarrows X \xrightarrow{q} \text{Coker } (u,\ v)$$

căruia îi aplicăm functorul a (adjunctul la stînga al lui i), $(a\ (\text{Coker } (u,\ v)),$ $a\ (q)\ )$ este cîtul cuplului $\overline{R} \rightrightarrows \overline{X}$ din $\mathcal{C}^{\sim}$. Fie acum în $\mathcal{C}^{\wedge}$ diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & Y & \\
R \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "q"] & & \mathit{Coker}\,(u,v) \arrow[ul, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

canonic construită.

Deoarece în $\mathcal{C}^{\wedge}$ q este un epimorfism, deducem că α este un morfism acoperitor. Pentru a termina demonstrația propusă trebuie să dovedim că α este un morfism biacoperitor. Pentru aceasta observăm că dacă $Z \in \text{Ob } \mathcal{C}$, atunci în Ens avem diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & \mathit{Hem}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(R,Z) \\
& \mathit{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\mathit{Coker}\,(u,v),\ Z\right) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

canonic construită din ultima diagramă; în plus linia de sus a acestei diagrame este exactă. α' este un izomorfism (fapt imediat din teorema Yoneda-Grothendieck).

Așadar, α este un morfism biacoperitor. Propoziția este dovedită.

Observație. Nu am folosit nicăieri în cele de mai sus faptul că $R \rightrightarrows X$ este un triplet de echivalență ci doar faptul că diagrama:

$$R \rightrightarrows X \rightarrow Y$$

este exactă în $\mathcal{C}$. Pentru a fi corecți, este bine însă să dovedim următorul rezultat.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $\{F_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ o familie de prefascicule peste $\mathcal{C}$; fie τ topologia pe $\mathcal{C}$ definită de familia $\{F_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ de prefascicule și $q : H \rightarrow K$ un morfism din $\mathcal{C}^{\wedge}$. q este biacoperitor dacă și numai dacă pentru orice $\alpha \in I$, morfismul canonic, definit de q:

$$q_{\alpha} :\ \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(K,\ F_{\alpha}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}\ (H,\ F_{\alpha})$$

este un izomorfism.

Cititorul este invitat să facă, ca exercițiu, demonstrația acestui rezultat.

Pentru a dezvolta considerentele următoare folosim următoarea definiție :

Definiția 4.38. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categoria și* $\{S_i\}_{i\in I}$ *o familie de obiecte din* $\mathcal{C}$, *astfel că suma directă* $S = \coprod S_i$ *există în* $\mathcal{C}$. *Vom spune că suma directă* S *este disjunctă dacă morfismele canonice* $S_i \to S$ *sînt monomorfisme și dacă pentru orice cuplu* (i, j), $i \neq j$, *produsul* $S_i \sqcap_S S_j$ *este un obiect inițial strict. (Un obiect* O *al lui* $\mathcal{C}$ *se zice ,,inițial strict", dacă este inițial și orice morfism de adresă* O *este izomorfism).*

Evident, în categoria mulțimilor orice sumă directă este disjunctă, fapt imediat de verificat, mulțimea vidă fiind un obiect inițial strict.

Propoziția 4.39. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie în care există un obiect inițial strict și în care produsele fibrate sînt reprezentabile. Notăm prin* $C^{\sim}$ *categoria fasciculelor peste* $\mathcal{C}$ *în raport cu topologia canonică și prin* $k : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\sim}$ *functorul canonic. Pentru orice topologie* τ *pe* $\mathcal{C}$ *mai puțin fină decît cea canonică notăm prin* $\mathcal{C}_\tau^{\sim}$ *categoria fasciculelor peste* $\mathcal{C}$ *pentru topologia* τ *și prin* $\overline{h}_\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\tau^{\sim}$ *functorul evident (deoarece orice obiect al lui* $\mathcal{C}$ *este fascicul în raport cu topologia* τ*). Functorul* h_τ *comută cu limitele proiective reprezentabile din* $\mathcal{C}$.

Fie X_i, $i \in I$, *o familie de obiecte din* $\mathcal{C}$ *astfel că suma directă*

$$X = \coprod_{i\in I} X_i$$

este reprezentabilă. Considerăm următoarele proprietăți :

i) *Suma directă* $\coprod_{i\in I} X_i$ *este disjunctă și universală*

ii) *Familia morfismelor canonice* $X_i \to X$, $i \in I$, *este acoperitoare pentru topologia canonică și pentru orice topologie satisfăcînd proprietățile :*

a) τ *este mai puțin fină decît topologia canonică.*

b) *Familia* $(X_i \to X)_{i\in I}$ *este acoperitoare pentru* τ

c) *Ciurul vid este acoperitor pentru obiectul inițial al lui* $\mathcal{C}$ *, în topologia* τ.

Morfismul canonic

$$\coprod_{i\in I} h_\tau (X_i) \to h_\tau (\coprod_{i\in I} X_i)$$

este un izomorfism.

iii) *Morfismul canonic*

$$\coprod_{i\in I} h_\tau (X_i) \to h (\coprod_{i\in I} X_i)$$

este un izomorfism.

Sînt valabile implicațiile i) $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii). Dacă* $\mathcal{C}$ *este un element al lui* U, *aceste trei proprietăți sînt echivalente.*

Demonstrație. ii) $\Rightarrow$ iii). Acest fapt este evident. iii) $\Rightarrow$ i). Admitem deci că $\mathcal{C}$ este un element al lui U. Mai întîi observăm că sumele directe din $\mathcal{C}$ sînt universale, deoarece h comută cu limitele proiective și în $\mathcal{C}$ limitele inductive sînt universale, adică

$$\overline{h}\,(\amalg X_i)\,\Pi_Z\, Y) = k\,(\amalg X_i)\,\Pi_{k(Z)}\, k\,(Y) = \amalg\, k\,(X_i)\,\Pi_{k(Z)}(Y) =$$
$$= \amalg\,(k\,(X_i)\,\Pi_{k(Z)}\,(Y)) = \amalg\, k\,(X\,\Pi_Z\, Y) = k\,(\amalg\,(X_i\,\Pi_Z Y)).$$

Concludem de aici că morfismul canonic

$$\amalg\,(X_i\,\Pi_Z Y) \to (\amalg X_i)\,\Pi_Z Y$$

este un izomorfism, deoarece, pentru orice $H \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, avem :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}\,(\amalg\,(X_i\,\Pi_Z\, Y), H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(\amalg\,(X_i\,\Pi_Z\, Y), H) \simeq$$
$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(\amalg(X_i\,\Pi_Z\, Y), H) \simeq \ldots \text{ etc.}$$

Să dovedim că suma directă în cauză este disjunctă. Pentru aceasta observăm că, notînd cu $h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ functorul canonic, afirmația iii) implică că morfismul :

$$\alpha : \amalg\, h\,(X_i) \to h\,(\amalg X_i)$$

este biacoperitor. Luăm spre exemplu $Y = X_i\,\Pi_X\, X_j$, $X = \amalg X_i$.

Fie în $\mathcal{C}^{\wedge}$ diagrama :

$$\begin{tikzcd}
& hX_i \arrow[dr, "\alpha_i"] & & \\
hX_i \prod_{\amalg hX_i} hX_j \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "u_j"'] & & hX_i \arrow[r, "\alpha"] & h(\amalg X_i) \\
& hX_j \arrow[ur, "\alpha_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Evident că notînd $v_i = \alpha_i \circ u_i$, $v_j = \alpha_j \circ u_j$ deducem că morfismul

$$\mathrm{Ker}\,(v_i, v_j) \to hX_i \underset{\amalg hX_i}{\Pi} hX_j$$

este acoperitor, deoarece $\alpha \circ v_i = \alpha \circ v_j$. Dar din faptul că sumele directe în $\mathcal{C}^{\wedge}$ sînt disjuncte, deducem că

$$hX_i\,\Pi_{\amalg hX_i}\, hX_j = \varnothing$$

și deci $X_i\,\Pi_X\, X_j$ este un obiect inițial strict.

Dacă $i = j$, deducem că morfismul diagonal $X_i \to X_i\,\Pi_X X_i$ este un monomorfism acoperitor pentru topologia canonică și deci un izomorfism. Așadar α_i, α_j sînt monomorfisme.

i) $\Rightarrow$ ii). Pentru a termina demonstrația este suficient să dovedim că morfismul canonic : $\alpha : \coprod h(X_i) \to h(\coprod X_i)$ este biacoperitor. Fie deci $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}^\wedge$ și $u, v : Y \rightrightarrows h(X_i)$ cu $\alpha \circ u = \alpha \circ v$. Atunci există două posibilități :

a) u și v au imaginile în hX_i resp. hX_j și $i \neq j$.

b) sau-$i = j$.

În primul caz, dacă notăm $\alpha_i : hX_i \to hX_j$ morfismele structurale, deducem că există un morfism $\gamma : Y \to hX_i \prod_{h(\coprod X_i)} hX_j$, cu $\alpha \circ \alpha_i \circ u_i = \alpha \circ \alpha_j \circ u_j = \gamma$. Dar deoarece $h\,(X_i \prod_{\coprod X_i} X_j)$ este mulțimea vidă, γ este un izomorfism. Celălalt caz se deduce imediat deoarece α este un epimorfism.

Observație. La dovedirea implicației iii) $\Rightarrow$ i) a fost nevoie de admis că $\mathcal{C}$ este un element al lui U, pentru a putea dezvolta egalitățile de mai sus.

Observăm încă, că din propoziția dovedită se deduce că functorul $\overline{h} : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ pentru topologia canonică comută cu anumite sume directe din $\mathcal{C}$, care rămîn sume directe în $\mathcal{C}^{\sim}$.

§ 21. TOPOS-URI

În cele ce urmează vom continua cu studiul categoriei fasciculelor pentru un sit dat.

PROPOZIȚIA 4.40. *Fie $\mathcal{C}$ un sit, element al lui U. Categoria fasciculelor peste $\mathcal{C}$ are proprietățile :*

a) *Limitele proiective sînt reprezentabile.*

b) *Sumele directe indexate de elemente din U sînt reprezentabile. Ele sînt disjuncte și universale.*

c) *Relațiile de echivalență sînt efectiv universale.*

Demonstrația este evidentă din cele de mai sus.

Observații. Aceste proprietăți au fost puse în evidență, căci ele vor permite ulterior să caracterizăm categoriile care sînt echivalente cu categoriile de fascicule peste categorii elemente ale lui U.

Proprietatea a) de mai sus este echivalentă cu proprietatea :

a′) Există un obiect final, produsele fibrate și produsele directe sînt reprezentabile.

Pentru cele ce urmează este convenabilă următoarea definiție a generatorilor.

DEFINIȚIA 4.41. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $\{X_i\}_{i \in I}$ o familie de obiecte din $\mathcal{C}$. Vom spune că familia $\{X_i\}_{i \in I}$ este o familie de generatori pentru categoria $\mathcal{C}$ dacă pentru orice monomorfism $u : G \to H$, următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) *u este un izomorfism.*

ii) *Pentru orice $i \in I$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\,(X_i, u)$ este izomorfism.*

Echivalența acestei definiții cu definiția clasică este evidentă.

PROPOZIȚIA 4.42. *Fie $\mathcal{C}$ un U-sit a cărui topologie să fie mai puțin fină decît cea canonică. Familia fasciculelor reprezentabile este o familie de generatori a categoriei fasciculelor peste $\mathcal{C}$.*

Fie $\mathcal{C}$ *un sit element al lui* U *; familia fasciculelor asociate cu obiectele lui* $\mathcal{C}$ *este o familie de generatori a categoriei fasciculelor peste* $\mathcal{C}$*. Această familie este indexată de un element al lui* U*.*

Demonstrația acestei propoziții este evidentă, căci obiectele reprezentabile din $\mathcal{C}$ formează o familie de generatori pentru $\mathcal{C}^{\wedge}$ iar $\mathcal{C}^{\sim}$este o categorie de fracții pentru $\mathcal{C}$ și functorul canonic are adjunct la dreapta (deplin fidel).

PROPOZIȚIA 4.43. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie care satisface proprietățile propoziției 4.40 și are o familie de generatori indexată de un element al lui* U*. În aceste condiții, orice* U*- fascicul pentru topologia canonică este reprezentabil.*

Demonstrație. Varianta I (Verdier). Fie V un univers astfel că $\mathcal{C}$ să fie un element al lui V. Fie $\mathcal{C}^{\sim}$ categoria fasciculelor peste $\mathcal{C}$ (cu valori în V-Ens), în raport cu topologia canonică și fie $\overline{h} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\sim}$ functorul canonic :

Etapa I. Fie $g_i \; : G_i \to H,\; i \in I \in U$, o familie epimorfică din $\mathcal{C}$. Dacă $\sqcup\, G_i$ și $G_i \,\Pi_H\, G_i$ sînt reprezentabile (necesar, V-reprezentabile, U este universul în raport cu care $\mathcal{C}$ este U-categorie și deci $U \subseteq V$), atunci fasciculul H este reprezentabil. Într-adevăr, suma directă $\sqcup\, G_i$ este reprezentabilă în $\mathcal{C}$ printr-un fascicul G și același lucru este valabil pentru $\sqcup\, G_i \,\Pi_H\, G_j = K$ iar diagrama, canonic construită :

$$K \rightrightarrows G \to H$$

este exactă în $\mathcal{C}^{\sim}$și $K = G \,\Pi_H\, G$. Așadar H este reprezentabil conform propoziției 4.36.

Etapa II. Fie $X_\alpha,\; \alpha \in A \in V$, o familie de generatori din $\mathcal{C}$. Pentru orice fascicul H notăm cu $I(H)$ ansamblul $\bigsqcup\limits_{\alpha \in A}$ Hom $(X_\alpha,\, H)$. Familia $\{u : X_\alpha \to H\},\; (u,\; \alpha) \in I\,(H)$ este evident epimorfică. Dacă H este un U-fascicul, $I\,(H)$ este un element al lui U. Așadar orice U-fascicul este sursa unei familii epimorfice de morfisme ale căror surse sînt reprezentabile ; să dovedim că H este reprezentabil. Fie într-adevăr G imaginea familiei epimorfice date, în H. Morfismul $G \to H$ este un monomorfism. Evident, G este reprezentabil și $X_\alpha \,\Pi_G\, X_\beta = X_\alpha \Pi_H\, X_\beta$ este, pentru orice cuplu $(\alpha,\, \beta)$, un obiect reprezentabil. Evident $G \simeq H$.

Etapa III. Orice subfascicul al unui fascicul reprezentabil este reprezentabil. Fie $G \to H$ un subfascicul, H fiind un U-fascicul reprezentabil. G este evident un U-fascicul. Familia $u :\, X_\alpha \to G\;\, (u,\, \alpha) \in I(G)$ este deci epimorfică și indexată de un element al lui U. În plus $X_\alpha \,\Pi_G\, X_\beta = X_\alpha \,\Pi_H X_\beta$, și sînt reprezentabile ; G este reprezentabil conform cu etapa a II-a.

Etapa IV. Orice U-fascicul H este reprezentabil, fapt ce rezultă din cele 3 etape de mai sus, căci familia epimorfică $(u,\; \alpha) \in I(H)$ este un element al lui U și produsul $X_\alpha \,\Pi\, X_\beta$ este reprezentabil, iar $X_\alpha \,\Pi_G\, X_\beta$ este un subobiect în $X_\alpha \;\Pi\; X_\beta$ și deci reprezentabil.

Varianta II-a. (Schiță). Fie $H :\; \mathcal{C} \to$ Ens un prefascicul de mulțimi, fascicul în raport cu topologia canonică. Vom dovedi că H este U-mărginit și transformă limitele inductive în proiective. Atunci, conform propoziției 1.21, este un functor reprezentabil (contravariant).

Pentru a dovedi că U-prefascicul este mărginit, beneficiem de faptul că $\mathcal{C}$ are o familie de generatori. Observăm apoi că dacă $Y = \varinjlim Y_\alpha$, atunci familia $f_\alpha : Y_\alpha \to Y$, în care f_α sînt morfismele structurale, este o familie acoperitoare în topologie canonică; aceasta deoarece limitele inductive sînt universale în $\mathcal{C}$. Așadar, dacă $R \to X$ este ciurul generat de familia $(Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$, atunci $R = \varinjlim Y$ și dacă $F : \mathcal{C} \to \text{Ens}$ este un fascicul în topologia canonică, atunci:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y, F) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, F) \simeq$$

$$\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(\varinjlim Y_\alpha, F) \simeq \varprojlim \text{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(Y_\alpha, F) \simeq$$

$$\simeq F(Y) \simeq \varprojlim F(Y_\alpha).$$

ceea ce arată că F transformă limitele inductive în proiective și deci este reprezentabil.

DEFINIȚIA 4.44 *Se numește U- topos, sau dacă nu este pericol de confuzie „topos", orice U-categorie care satisface proprietățile* a), b), c) *din propoziția 4.43 și are o familie de generatori indexată de un element al lui U.*

Din cele de mai sus se deduce că dacă $(\mathcal{C}, \tau)$ este un sit element al lui U, atunci categoria fasciculelor peste $\mathcal{C}$ în raport cu τ este un topos. Vom dovedi în cele ce urmează că orice U-topos este de fapt de această formă.

§ 22. MORFISME DE SITURI

DEFINIȚIA 4.45. *Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două situri și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor între categoriile subiacente. Vom spune că functorul T este continuu dacă pentru orice fascicul F de mulțimi peste $\mathcal{C}'$, prefascicului $T_* F$ este un fascicul pentru situl $\mathcal{C}$.*

Observație. Aici folosim notațiile din capitolul II: T_* este functorul restricție.

Observăm că conceptul de functor continuu depinde de universul U. Dacă U este suficient de mare, adică dacă $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt elemente ale lui U, atunci conceptul de functor continuu nu depinde de U (conform propoziției 2.4).

Fie E și E' două spații topologice și $f : E \to E'$ o aplicație continuă; atunci, notînd cu $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ categoriile deschișilor celor două spații, avem că $f^{-1} : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ este un functor continuu, fapt bine cunoscut.

Fie $i : \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}^\wedge$ functorul injecție de la fascicule la prefascicule și analog $i' : \mathcal{C}'^\sim \to \mathcal{C}'^\wedge$. Din definiție se deduce că T este continuu dacă și numai dacă există un functor $T_S : \mathcal{C}'^\sim \to \mathcal{C}^\sim$ astfel că $i' \circ T_S = T_* \circ i$. Pentru orice fascicul F peste $\mathcal{C}'$, $T_S F$ se numește imaginea directă a lui F prin functorul T_*. Evident, functorul T comută cu limitele proiective.

Iată un criteriu ce ne permite să punem în evidență functorii continui și care are ca exemplu intuitiv exemplul de mai sus.

PROPOZIȚIA 4.46. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două situri elemente ale lui* U *iar* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor între categoriile subiacente. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) *Functorul* T *este continuu.*

ii) *Pentru orice obiect* X *din* $\mathcal{C}$ *și orice rafinare a lui* X, $R \to X$, *morfismul* $T^* R \to T^* X$ *este biacoperitor în* $\mathcal{C}'^\wedge$.

În ipotezele de mai sus, functorul T *transformă orice familie acoperitoare din* $\mathcal{C}$ *într-o familie acoperitoare din* $\mathcal{C}'$.

Admitem încă că topologia lui $\mathcal{C}$ *se poate defini printr-o pretopologie și că functorul* T *comută cu produsele fibrate. Atunci afirmațiile* i) *și* ii) *de mai sus sînt echivalente cu afirmația :*

iii) *Functorul* T *transformă familiile care definesc pretopologia în familii acoperitoare din* $\mathcal{C}'$.

Demonstrație. i) $\Leftrightarrow$ ii). Într-adevăr, fie F un fascicul pentru $\mathcal{C}'$. $T_* F$ este un fascicul pentru $\mathcal{C}$ dacă și numai dacă pentru orice rafinare $R \to X$, din $\mathcal{C}$, morfismul canonic :

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, T_* F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, T_* F)$$

este un izomorfism. Dar T_* este adjunct la dreapta pentru T^* și deci avem izomorfismul :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(T^* X, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(T^* R, F)$$

din care deducem că morfismul $T^* R \to T^* X$ este biacoperitor.

Fie acum $\{f_\alpha : X_\alpha \to X\}$ o familie acoperitoare din $\mathcal{C}$. Atunci ciurul $R \to X$ generat de această familie este acoperitor și deci morfismul $T^* R \to T^* X$ este biacoperitor. Dar din faptul că T^* comută cu limitele inductive, deducem că ciurul generat de familia $\{T(X_\alpha) \to T(X)\}$ din $\mathcal{C}$ conține în imaginea sa imaginea morfismului $T^* R \to T^* X$ și deci este biacoperitor.

i) $\Rightarrow$ iii). Fie F un fascicul pentru $\mathcal{C}'$ și $\{X_\alpha \to X\}_{\alpha \in I}$ o familie acoperitoare, din $\mathrm{cov}\, X$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$. $T_* F$ este un prefascicul dacă și numai dacă diagrama :

$$T_* F(X) \to \prod_{\alpha \in I} T_* F(X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{(\alpha, \beta) \in I \times I} T_* F(X_\alpha \textstyle\prod_X X_\beta)$$

este exactă. Dar din definiția lui $T_* F$, această diagramă este de fapt diagrama :

$$F(T(X)) \to \prod_{\alpha \in I} F(T(X_\alpha)) \rightrightarrows \prod_{(\alpha, \beta) \in I \times I} F(T(X_\alpha \textstyle\prod_X X_\beta)).$$

Dar functorul T comută cu produsele fibrate și deci familia $\{T(X_\alpha) \to T(X)\}_{\alpha \in I}$ este acoperitoare în $\mathcal{C}'$ și F este un fascicul pentru $\mathcal{C}'$.

q.e.d.

PROPOZIȚIA 4.47. *Folosim ipotezele propoziției precedente și notațiile obișnuite de mai sus. Admitem că functorul* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *este continuu.*

Functorul $T_S : \mathcal{C}'^{\sim} \to \mathcal{C}^{\sim}$ *admite un adjunct la stînga* $T^S : \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}'^{\sim}$. *Functorul* T^S *posedă următoarele proprietăți* :

1) *Există izomorfismul canonic* : $T^S \simeq a' \circ T^* \circ i$.

2) *Există izomorfismul canonic* : $T^S \circ a \simeq a' \circ T^*$.

3) *Functorul* T^S *comută cu limitele inductive.*

4) *Dacă functorul* T^* *comută cu limitele proiective finite, atunci și* T^* *comută. Mai general,* T^S *comută cu acele limite proiective finite cu care comută și* T^*.

Demonstrație. Prima afirmație se deduce printr-o verificare directă și de asemenea a doua. A treia este banală, iar ultima se duce din prima.

Observație. Considerăm diagrama canonic construită (admitem că T este continuu) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{C}' \arrow[d, "h'"] \\
\mathcal{C}^{\wedge} \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "a"'] & \mathcal{C}'^{\wedge} \arrow[d, "a'"] \\
\mathcal{C}^{\sim} \arrow[r, "T^S"] & \mathcal{C}'^{\sim}
\end{tikzcd}$$

Pătratul superior al acestei diagrame este comutativ, iar cel de jos comutativ pînă la un izomorfism canonic. Functorii a, a', T^S și T^* putînd fi definiți pînă la un izomorfism, putem să-i alegem de așa manieră încît :

1) Functorii compuși $a \circ h$ și $a' \circ h'$ sînt injectivi pe ansamblul obiectelor

2) $a' \circ h' \circ T = T^S \circ a \circ h$.

DEFINIȚIA 4.48. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două situri elemente ale lui* U *și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor între categoriile subiacente. Vom spune că functorul* T *este un morfism de situri dacă*

a) *Functorul* T *este continuu*

b) *Functorul* T^S *comută cu limitele proiective finite.*

PROPOZIȚIA 4.49. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două situri elemente ale lui* U *și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor. Admitem că în* $\mathcal{C}$ *limitele proiective finite sînt reprezentabile și functorul* T *comută cu limitele proiective finite. Admitem de asemenea că imaginea prin* T *a oricărei familii acoperitoare din* $\mathcal{C}$ *este o familie acoperitoare din* $\mathcal{C}'$. *Atunci* T *este un morfism de situri.*

Demonstrație. Evident, topologia lui $\mathcal{C}$ se poate defini de către o pretopologie (componentele oricărui ciur) și deci T este continuu. Functorul T^* comută cu limitele proiective finite (propoziția 2.11) și deci T^S comută (propoziția precedentă).

§ 23. COMORFISME DE SITURI

DEFINIŢIA 4.50. *Fie* $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ *două situri, elemente ale lui* U, *și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor între categoriile subiancete. Vom spune că* T *este un comorfism de situri dacă pentru orice fascicul de mulţimi* G *peste* $\mathcal{C}$, T^+G *este un fascicul pentru* $\mathcal{C}'$ (T^+ *este un adjunct la dreapta pentru* T).

Aşadar functorul T este un comorfism de situri dacă şi numai dacă există un functor $T^{++} : \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}'^{\sim}$ astfel că $i' \circ T^{++} = T^+ \circ i$. ($i'$ şi i fiind functorii injecţie de la fascicule la prefascicule). Functorul T^{++} comută, evident, cu limitele proiective.

PROPOZIŢIA 4.51. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două situri elemente ale lui* U *și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor între categoriile subiacente. Functorul* T *este un comorfism de situri dacă și numai dacă are proprietatea:*

D) *Pentru orice obiect* Y *al lui* $\mathcal{C}$ *și pentru orice ciur acoperitor* $R \to TY$ *din* $\mathcal{C}'$, *ciurul generat de morfismele* $Z \to Y$ *din* $\mathcal{C}$, *astfel că* $TZ \to TY$ *se factorizează prin* R, *este o rafinare a lui* X.

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Fie că T este un comorfism de situri; atunci pentru orice fascicul G peste $\mathcal{C}$, T^+G este un fascicul peste $\mathcal{C}'$. Fie deci $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ şi $R \to TY$ un ciur acoperitor; avem izomorfismul canonic:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^{\wedge}}(TY, T^+G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^{\wedge}}(R, T^+G)$$

de unde, prin adjuncţie, izomorfismul:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(T_*(TY), G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(T_* R, G).$$

Aşadar morfismul $T_* R \to T_* TY$ este biacoperitor. Deoarece functorul T comută cu limitele proiective, el păstrează şi monomorfismele şi deci $T_* R \to T_* TY$ este un monomorfism.

Fie $\alpha : I_d\, \mathcal{C}^{\wedge} \to T_* \circ T^*$ un morfism de adjuncţie al lui T_* cu T^* şi $\alpha_Y : Y \to T_* T^* Y$. Deoarece $T_* R \to T_* TY$ este acoperitor, deducem că desantul său $(T_* R : \alpha_Y) \to Y$ este acoperitor; dar acest ciur este format din toate morfismele $f : Z \to Y$ astfel că $p \circ f \in T_* R$. Dar, pentru $K \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'$, $R(K) = \{g \mid g : K \to TY,$ cu $(K, g) \in R\}$; $T_* R(Z) = R(TZ)$ şi este format din toate morfismele $Th : TZ \to TY$, care se factorizează prin R, deci care fac comutativă diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & TZ \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "Th"] \\
R \arrow[r, "i"'] & TY
\end{tikzcd}$$

Dar, conform adjuncţiei dintre T^* şi T_*, Th se factorizează prin Y, dacă şi numai dacă morfismul asociat prin adjuncţie: $h' : Z \to T_* TY$ (luăm $T^*Z = TZ$) se factorizează prin $T_* R$, adică avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r, "\alpha_Z"] \arrow[d, "h'"] \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, "h" near end] & T_* TZ \arrow[dl, "T_*T(h)"' near start] \\
T_* R \arrow[r] & T_* TY \arrow[r, "\alpha_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Fig. *a*

Dar : $T_* T(h) \circ \alpha_Z = \alpha_Y \circ h = h'$. Dar $h' \in T_* R$ şi deci $\alpha_Y \circ h \in T_* R$. Aşadar $h \in (T_* R : \alpha_Y)$.

Condiţia este suficientă. Fie S un obiect din $\mathcal{C}'$ şi $R \to S$ un ciur acoperitor; dacă condiţia (D) este îndeplinită, trebuie să dovedim că pentru orice fascicul G peste $\mathcal{C}$, avem izomorfismul :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(S, T^+ G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^\wedge}(R, T^+ G)$$

fapt care echivalează cu aceea că morfismul canonic:

$$T_* R \to T_* S$$

este acoperitor. Pentru aceasta fie $f : Y \to TS$ un morfism din $\mathcal{C}$; trebuie să dovedim că $(T_* R : f) \to Y$ este acoperitor. Dar $f : Y \to T_* S$ se factorizează astfel: $Y \xrightarrow{\alpha_Y} T_* TY \xrightarrow{T_* f'} T_* S$. Aşadar : $(T_* R : f) = [(T_* R : T_* f') : \alpha_Y]$. Dar $(T_* R : T_* f') = T_*(R : f')$, deoarece T comută cu limitele proiective; $(R : f') \to TY$ este acoperitor şi $((T_* R : T_* f') : \alpha_Y) \to Y$ este ciurul format din toate morfismele $h : Z \to Y$, cu $\alpha_Y \circ h \in T(R : f')$, adică pentru care $T^*(\alpha_Y \circ h) \in (R : f')$, deci conform ipotezei făcută morfismele h generează un ciur acoperitor peste Y egal tocmai cu $(T^* R : f)$.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 4.52. *Fie $\mathcal{C}$ un sit aparţinînd lui U, $\mathcal{C}'$ un sit şi $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un comorfism de situri. Functorul T^{++} admite un adjunct la dreapta $T_S : \mathcal{C}'^{\sim} \to \mathcal{C}^{\sim}$ care are proprietăţile :*

1) *Există izomorfismul canonic : $T_S \simeq a \circ T_* \circ i'$.*

2) *Dacă $\mathcal{C}'$ este un element al lui U, există izomorfismul canonic : $T_S \circ a' \simeq a\, T$.*

3) *Functorul T_S comută cu limitele inductive şi cu limitele proective finite.*

Observaţie. Am folosit notaţiile obişnuite.

Demonstraţia este imediată şi lăsată cititorului.

PROPOZIȚIA 4.53. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două situri elemente ale lui* U *și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor iar* $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ *un adjunct al său la stînga. Următoarele afirmații sînt echivalente* :

i) *Functorul* T *este continuu.*

ii) *Functorul* S *este un comorfism.*

Demonstrație. Într-adevăr, functorul S^+ este izomorf cu T_* și deci avem izomorfismul functorial :

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(S_*, ?) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(?, T_*)$.

§ 24. TOPOLOGIA INDUSĂ. LEMA DE COMPARARE

Fie $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor (covariant) și τ' o topologie pe $\mathcal{C}'$. Vom defini pe $\mathcal{C}$ o topologie cu ajutorul lui T și o vom numi topologie indusă de T.

PROPOZIȚIA 4.54. *Fie* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor între două categorii și* τ' *o topologie pe* $\mathcal{C}'$.

Există pe $\mathcal{C}$ *o topologie* τ *astfel că* :

1) *Functorul* T *este continuu.*

2) *Orice topologie pe* $\mathcal{C}$ *pentru care* T *să fie continuu este mai puțin fină decît* τ.

Demonstrație. Construcția topologiei τ se face raționînd astfel : pentru ca T să fie continuu în topologia τ, trebuie ca $T_* F$ să fie un fascicul în topologia τ pentru orice F, fascicul peste $\mathcal{C}'$ în topologia τ'. Așadar vom spune că ciurul $R \to X$ din $\mathcal{C}$ este acoperitor în topologia τ, dacă pentru orice $f : Y \to X$, morfism din $\mathcal{C}$, morfismul $T^*((R : f) \to Y)$ este biacoperitor în $\mathcal{C}'^\wedge$. Fie $J(X)$ toate ciururile peste X care satisfac la această cerință. Evident că pentru orice ciur $R \to X$, $R \in J(X)$ și $f : Y \to X$; $(R : f) \in J(Y)$. Fie R, R' ciururi peste X cu $R \in J(X)$ și $(R' : f) \in J(Y)$ pentru orice $(Y, f) \in R$. Printr-un raționament simplu putem rămîne la cazul $R \subseteq R'$; de aici rezultatul.

Observație. Aici am aplicat în mod indirect, următorul rezultat datorat lui Radu Alexandru [2] :

Fie $\mathcal{C}$ o categorie mică și $\mathcal{D}$ o categorie cu limite inductive, astfel că $\mathcal{D}$ este o bicategorie ; fie încă $T : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{D}$ un functor ce comută cu limitele inductive și cu limitele proiective finite. În aceste condiții există o topologie τ pe $\mathcal{C}$ astfel că ciurul $R \to X$ este acoperitor pentru topologia τ dacă și numai dacă pentru orice morfism $f : Y \to X$, morfismul $T((R : f) \to Y)$ este un izomorfism.

Invităm cititorul să reproducă demonstrația acestei propoziții.

PROPOZIȚIA 4.55. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie, element al lui* U, $\mathcal{C}'$ *un sit aparținînd lui* U, $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor și* τ *topologia pe* $\mathcal{C}$, *cea mai fină, pentru care* T *să fie continuu. Fie* $m : H \to K$ *un monomorfism din* $\mathcal{C}^\wedge$. *Următoarele afirmații sînt echivalente* :

i) *Monomorfismul* m *este acoperitor pentru topologia* τ.

ii) *Pentru orice schimbare de bază* $P \to K$, *morfismul* $T^*(H \Pi_K P) \to T^*(P)$ *este biacoperitor în* $\mathcal{C}'^\wedge$.

iii) *Pentru orice schimbare de bază* $X \to K$ $(X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C})$ $T^*(H \Pi_K X) \to T^*(H)$ *este biacoperitor în* $\mathcal{C}'^\wedge$.

Demonstrația este evidentă din definiția topologiei τ.

Propoziția 4.56. *Fie* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor și* τ' *o topologie pe* $\mathcal{C}'$. *Pentru orice univers* U, *căruia îi aparține* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$, *notăm prin* τ_U *topologia peste* $\mathcal{C}$, *cea mai fină pentru care orice* U*-fascicul peste* $\mathcal{C}'$ *să fie transformat în* U*-fascicul peste* $\mathcal{C}$ *prin functorul* T_*. *Topologia* τ_U *nu depinde de universul* U; *ea se zice topologia indusă de* T.

Demonstrație. Fiind date două universuri U și U', există, după axiomele universului, un univers V, care include U și U'. Dacă U și V sînt două universuri ce conțin pe $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$, vom dovedi că $\tau_U = \tau_V$; pentru aceasta admitem că $U \leqslant V$. Topologia τ_U este atunci mai fină ca τ_V. Rămîne deci să dovedim că orice ciur acoperitor pentru τ_U este acoperitor și pentru τ_V, ceea ce se deduce din propoziția precedentă. q.e.d.

Din teoria clasică a fasciculelor se știe că un fascicul este bine definit peste un spațiu topologic, dacă se dau valorile sale pe o bază de deschiși ai spațiului. În cele ce urmează vom generaliza aceste fapte.

Propoziția 4.57. (Lema de comparare.) *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie aparținînd lui* U, $\mathcal{C}'$ *un sit aparținînd lui* U *și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor deplin fidel. Fie* τ *topologia peste* $\mathcal{C}$ *indusă de* T. *Admitem că orice obiect din* $\mathcal{C}'$ *se poate acoperi de obiecte din* $\mathcal{C}$, *adică există o familie acoperitoare* $(T(X_\alpha) \to Y)_{\alpha \in I}$. *Atunci functorul imagine directă:*

$$T_S : \mathcal{C}'^\sim \to \mathcal{C}^\sim$$

este o echivalență de categorii.

Demonstrație. Fie T_* și T^* functorii imagine directă și reciprocă pentru prefascicule. Fie $\Phi : \mathrm{Id}\,\mathcal{C}^\wedge \to T_* T^*$ o săgeată de adjuncție a lui T_* cu T^* și $\Psi : T^* T_* \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}'^\wedge$ o cvasiinversă a sa. Deoarece T este deplin fidel, atunci și T_* este deplin fidel și deci Ψ este un izomorfism; dar se deduce imediat că $\Psi_{T^* T_*} = T^* T_* \Psi$ și este un izomorfism: mai mult, Ψ_{T^*} este un izomorfism.

Vom dovedi propoziția în mai multe etape:

1) Morfismul $\Psi : T^* T_* \to \mathrm{Id}\,\mathcal{C}'^\wedge$ este acoperitor. Fie pentru aceasta H' un obiect din $\mathcal{C}'^\wedge$. Trebuie să dovedim că morfismul $T^* T_*(\mathrm{H}') \to H'$ este acoperitor. Dar H' este o limită directă de prefascicule reprezentabile și functorii T^* și T_* comută cu asemenea limite și încă, o limită inductivă de morfisme acoperitoare este încă un morfism acoperitor. Așadar putem admite de la început că H' este un obiect Y din $\mathcal{C}'$. Știm că există morfismul functorial

$$T_*(Y) \to \varinjlim I_Y^T,$$

unde I_Y^T este categoria ale cărui obiecte sînt perechi (X, m), cu $m : T(X) \to Y$ și în care morfismele sînt definite în mod canonic. Fie $\mathrm{pr} : I_Y^T \to \mathcal{C}$ functorul $(X, m) \rightsquigarrow X$ (adică functorul proiecție). Există izomorfismul canonic:

$$T_*(Y) \to \varinjlim_{I_Y^T} \mathrm{pr}\,(?)\,.$$

Dar functorul T_* comută cu limitele inductive; există deci izomorfismul:

$$T^* T_* (Y) \xrightarrow{\sim} \varinjlim T^* \mathrm{pr}\,(?) \qquad (^*).$$

Pentru a dovedi că morfismul $\Psi_Y : T^* T_* (Y) \to Y$ este acoperitor, este suficient de dovedit că imaginea lui $T^* T_* (Y)$ în Y este un ciur acoperitor. Dar izomorfismul $(^*)$ ne arată că imaginea lui $T^* T_* (Y)$ în Y este reuniunea imaginilor obiectelor $T(X)$ în Y care prin ipoteză este acoperitoare.

2) Morfismul $\Psi : T^* T_* \to \mathrm{Id}\, \mathcal{C}$ este biacoperitor.

Fie deci $K', H' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'^{\wedge}$ și $m_1, m_2 : K \rightrightarrows T^* T_* (H')$, două morfisme astfel că $\Psi_{H'} \circ m_1 = \Psi_{H'} \circ m_2$. Avem diagrama comutativă construită în mod canonic:

b)

$$\begin{tikzcd}
T^*T_*T^*T_*(H') \arrow[rr, "\Psi_{T^*T_*(H')}"] \arrow[dr, "T^*T_*\Psi_{H'}"] & & T^*T_*(H') \arrow[dr, "\Psi_{H'}"] & \\
& T^*T_*(H') \arrow[rr, "\Psi_{H'}"] & & H' \\
T^*T_*(K') \arrow[uu, shift left, "T^*T_*(m_1)"] \arrow[uu, shift right, "T^*T_*(m_2)"'] \arrow[ur, "T^*T_*(p)"] \arrow[rr, "\Psi_{K'}"] & & K' \arrow[uu, shift left, "m_1"] \arrow[uu, shift right, "m_2"'] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

în care $p = \Psi_{H'} \circ m_1 = \Psi_{H'} \circ m_2$. Folosind egalitatea $T^* T_* \Psi_{H'} = \Psi_{T^* T_* (H')}$, deducem $m_1 \circ \Psi_{K'} = m_2 \circ \Psi_{K'}$. Dar cum $\Psi_{K'}$ este acoperitor, avem că

$$\mathrm{Ker}\,(m_1, m_2) \to K'$$

este un morfism acoperitor.

3) Un morfism $H \to K$ din $\mathcal{C}$ este biacoperitor dacă și numai dacă morfismul $T^* (H) \to T^* (K)$ este biacoperitor. Morfismul $H' \to K'$ din $\mathcal{C}'^{\wedge}$ este biacoperitor, dacă și numai dacă morfismul $T_* (H') \to T_* (K')$ este biacoperitor.

Fie, într-adevăr, $H' \to K'$ un monomorfism acoperitor din $C'^{\wedge}$; dovedim că $T_* (H') \to T_* (K')$ este biacoperitor. Evident, $T_* (H') \to T_* (K')$ este monomorfism și deci folosim propoziția de mai sus care caracterizează monomorfismele acoperitoare pentru topologia indusă. Așadar pentru orice morfism $K \to T_* (K')$ din $\mathcal{C}^{\wedge}$, trebuie să dovedim că $T_* (H') \prod_{T_* (K')} K \to K$ este un morfism transformat de T^* într-un morfism acoperitor.

Folosind faptul că T^* este deplin fidel, deducem că în $\mathcal{C}^{\wedge}$ avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_K"'] & T_*(K') \arrow[d, "\Psi_{T(K')}"] \\
T_*T^*(K) \arrow[r, "T_*T^*(f)"] & T_*T^*T_*(K')
\end{tikzcd}$$

în care Ψ_K şi $\Psi_{T*(K')}$ sînt izomorfisme. Se deduce de aici că morfismul f este „izomorf'' cu un morfism de tipul : $T_*(p) : T_*T^*(K) \to T_*(K')$. Functorul T_* comutînd cu limitele proiective; deducem că morfismul $T_*(H') \Pi K \to K$ este izomorf cu un morfism $H' \Pi_{K'} T^*(K) \to T(K)$. Dar morfismul $H' \Pi_{K'} T^*(K) \to T^*(K)$ este un monomorfism acoperitor şi deci este suficient să dovedim că morfismul $T_*(H') \to T_*(K')$ este transformat de T^* în morfism biacoperitor. Dar diagrama :

$$\begin{tikzcd}
T^*T_*(H') \arrow[r] \arrow[d] & T^*T_*(K') \arrow[d] \\
H' \arrow[r] & K'
\end{tikzcd} \qquad (**)$$

construită graţie adjuncţiei, este comutativă şi săgeţile verticale sînt biacoperitoare. Deci morfismul $T^*T_*(H') \to T^*T_*(K')$ este biacoperitor.

Fie acum $p: H' \to K'$ un morfism biacoperitor din $\mathcal{C}'^{\wedge}$. Deoarece functorul T_* comută cu limitele proiective, deducem imediat că $T_*(H') \to T_*(K')$ este acoperitor şi încă, dacă $pu = pv$, $u, v: L' \rightrightarrows H'$, atunci $\mathrm{Ker}(u, v) \to L'$ este monomorfism acoperitor şi $T_*(\mathrm{Ker}(u, v)) \to T_*(L')$ este egal cu $\mathrm{Ker}(T_*(u), T_*(v)) \to T_*(L')$ şi este un monomorfism acoperitor. Aşadar p este biacoperitor.

Fie acum $H \to K$ un morfism acoperitor din $\mathcal{C}^{\wedge}$. Putem dovedi, fără dificultate, graţie faptului că săgeata functorială Ψ este un izomorfism, că $T^*(H) \to T^*(K)$ este biacoperitor. Într-adevăr, dacă F' este un fascicul peste $\mathcal{C}'$, atunci $T_*(E')$ este un fascicul peste $\mathcal{C}$ şi deci avem :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(H, T_*F') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(K, T_*F')$$

de unde deducem că $T^*(H) \to T^*(K)$ este biacoperitor.

Fie $H \to K$ un morfism din $\mathcal{C}'^{\wedge}$. Admitem că $T^*(H) \to T^*(K)$ este biacoperitor. Dar atunci $T_*T^*(H) \to T_*T^*(K)$ este biacoperitor şi deci $H \to K$ este biacoperitor.

Fie $H' \to K'$ un morfism din $C'^{\wedge}$, astfel că $T_*(H') \to T_*(K')$ este biacoperitor. Dar atunci din diagrama $(**)$ se deduce că $H' \to K'$ este biacoperitor deoarece restul de 3 săgeţi ale diagramei sînt biacoperitoare.

4) Pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ notăm cu $J^2(X)$ (respectiv $J^2(T(X))$) categoria morfismelor biacoperitoare de adresă X (respectiv $T(X)$). Din cele de mai sus, T^* defineşte un functor deplin fidel $T^+_X : \dot{J}^2(X) \to \dot{J}^2(T(X))$. Imaginea acestui functor este o subcategorie iniţială a lui $J^2(T(X))$.

Într-adevăr, fie $H' \to T(X)$ un obiect din $J^2(T(X))$. Fie diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
T^*T_*(H') \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & T^*T_*T^*(X) \arrow[d, "\Phi_{T(X)}"] \\
H' \arrow[r] & T(X)
\end{tikzcd}$$

construită în mod canonic, în care $\Phi_{T(X)}$ este epimorfism iar $\bar{f} = T^*T_*(f)$ este biacoperitor. Deducem că $\Phi_{T(X)} \circ \bar{f} = T^*(g)$ (cu $g : T_*(H') \to X$, căci T^* este deplin fidel) este biacoperitor în $\mathscr{C}^\wedge$ și imaginea lui $T^*(g)$ este conținută în imaginea lui f.

5) Functorul imagine directă $T_S : \mathscr{C}'^\sim \to \mathscr{C}^\sim$ este deplin fidel. Fie, într-adevăr, T_S functorul imagine reciprocă. Este suficient să dovedim că morfismul $T^S \circ T_S \to \mathrm{Id}\ \mathscr{C}'^\sim$ este un izomorfism. Dar acest fapt se deduce din etapa 2-a acestei propoziții și din izomorfismul $a' \circ T \circ i \simeq T_S$.

6) Functorul imagine reciprocă T^S este deplin fidel.

Fie G un fascicul peste $\mathscr{C}$. Este suficient să dovedim că morfismul (de adjuncție) $G \to T_S T^S(G)$ este un izomorfism. Fie pentru aceasta $X \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$. Este suficient încă să dovedim că $G(X) \to T^S G(T(X))$ este un izomorfism. Dar avem

$$T^S G(T(X)) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{?\in J^2(TX)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'^\sim}(?,\ T^*G)).$$

Dar, conform punctului 4) al acestei propoziții, imaginea prin T_X^* a lui $J^2(X)$ este o subcategorie inițială a lui $J^2(T(X))$, și putem calcula limita directă după această subcategorie. Dar T^S este deplin fidel și deci

$$\varinjlim_{?\in J^2(X)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\wedge}(?, G) \xrightarrow{\sim} \lim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'^\wedge}(?, T^*(G)).$$

Așadar obținem izomorfismul

$$T^s G(T(X)) \xrightarrow{\sim} \lim_{?\in J^2(X)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\wedge}(?, G).$$

Dar G fiind un fascicul, membrul doi al acestei formule este format din termeni constanți, toți egali cu $G(X)$, iar morfismele limitei inductive sînt izomorfisme. Deci limita inductivă este exact $G(X)$ etc.

§ 25. TOPOS. MORFISME DE TOPOS-URI

Prin topologia unui U-topos se va înțelege topologia sa canonică fără a mai specifica acest fapt (dacă contrariul nu va fi specificat). Fasciculele care apar sînt, evident, în raport cu topologia canonică.

În cele ce urmează vom dovedi următoarea propoziție care caracterizează topos-urile.

PROPOZIȚIA 4.58. (Jean Giraud). *Fie $\mathscr{E}$ o V-categorie. Următoarele afirmații sînt echivalente* :

i) *$\mathcal{E}$ este un U-topos.*

ii) *Orice U-fascicul în raport cu topologia canonică a lui $\mathcal{E}$ este reprezentabil și $\mathcal{E}$ are o familie de generatori indexată de un element al lui U.*

iii) *Există un sit $\mathcal{C}$ aparținînd lui U, astfel că $\mathcal{C}$ este echivalentă cu categoria fasciculelor peste $\mathcal{C}$.*

Demonstrație. Folosind propoziția 4.33 este suficient să dovedim, pentru a termina, că ii) $\Rightarrow$ iii).

Fie deci, că $\mathcal{E}$ satisface ii) din propoziția de mai sus.

Fie $(C_i)_{i \in I}$, $I \in U$, o familie de generatori ai lui $\mathcal{E}$. Notăm prin $\mathcal{C}$ subcategoria plină a lui $\mathcal{E}$ definită de obiectele C_i. Evident că $\mathcal{C}$ este un element al lui U.

Lema 1. *Orice obiect Y al lui $\mathcal{E}$ poate fi acoperit pentru topologia canonică de obiecte din $\mathcal{C}$.*

Demonstrație. Fie V un univers care conține pe U și căruia îi aparține categoria $\mathcal{E}$. Notăm prin $\mathcal{E}_V$ categoria V-fasciculelor peste $\mathcal{E}$ pentru topologia canonică. Pentru a dovedi lema este suficient să dovedim că marginea superioară a imaginilor în Y ale obiectelor C_i, care stau peste Y, este egală cu Y (Aceste limite inductive sînt făcute după mulțimi din V). Fie S această margine superioară. Fasciculul S este conținut în Y și deci este un U-fascicul. El este deci reprezentabil printr-un obiect, notat încă S, al lui $\mathcal{E}$ și prin definiție există un izomorfism :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}\,(C_i, S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}\,(C_i, Y)$$

pentru orice $i \in I$. Dar C_i fiind generatori, se deduce că $S \to Y$ este un izomorfism.

Propunem cititorului ca exercițiu să dovedească că dacă există o familie C_i, în U-toposul $\mathcal{E}$, astfel că orice obiect Y al lui se poate acoperi de obiecte C_i, atunci această familie este o mulțime de generatori pentru $\mathcal{E}$.

Lema 2. *Ipotezele și notațiile sînt cele din lema 1. Fie τ topologia indusă în $\mathcal{C}$ de functorul „injecție" $T : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ și fie $\mathcal{C}^{\sim}$ categoria fasciculelor corespunzătoare. Orice obiect al lui $\mathcal{E}$ definește prin imagine directă un U-fascicul peste $\mathcal{C}$ pentru topologia τ. Avem deci un functor $H : \mathcal{E} \to \mathcal{C}^{\sim}$. Acest functor este o echivalență de categorii.*

Demonstrație. Fie V un univers ce conține pe U și căruia îi aparține categoria $\mathcal{E}$. Notăm prin $\mathcal{E}_V^{\sim}, \mathcal{C}_V^{\sim}$ categoriile respective, de V-fascicule. După „lema de comparație" se deduce că functorul imagine directă $T_* : \mathcal{E}_V^{\sim} \to \mathcal{C}_V^{\sim}$ definește o echivalență de categorii. Pentru a termina demonstrația este suficient să dovedim că orice U-fascicul peste $\mathcal{C}$ este izomorf cu imagine directă a unui V-fascicul peste $\mathcal{E}$, sau încă este suficient de dovedit că imaginea reciprocă a unui fascicul peste $\mathcal{C}$ este izomorfă cu un U- fascicul peste $\mathcal{E}$. Fie G un U-fascicul peste $\mathcal{C}$ și Y un obiect al lui $\mathcal{E}$. Morfismul de adjuncție $T^* T_* (Y) \to Y$ este biacoperitor (lema de comparare). Așadar avem un izomorfism :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_V^{\sim}}\,(T^* T(Y),\ T^s(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_V^{\sim}}\,(Y,\ T^s(G)).$$

Aplicînd adjuncția obținem izomorfismul:

$$\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{E}_V}}(Y,\ T^s(G)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}_V}}(T_*(Y),\ T_s T^s(G))$$

Functorul T_s fiind o echivalență, avem că:

$$T^s G(Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}_V}}(T(Y),\ G).$$

Dar $\mathcal{E}$ este o U-categorie și deci $T_*(Y)$ este un U-prefascicul peste $\mathcal{C}$ și G fiind un U-fascicul, ansamblul $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}_V}}(T^*(Y), G)$ aparține lui U.

Observații. Propoziția precedentă dovedește de fapt o proprietate mai tare ca iii) din teorema lui Giraud și care se poate enunța astfel:

iii) Există un sit $\mathcal{C}$ aparținînd lui U pentru care topologia să fie mai puțin fină decît cea canonică și astfel că $\mathcal{E}$ să fie echivalentă cu categoria U-fasciculelor peste $\mathcal{C}$.

Dacă în plus universul U conține un cardinal infinit, putem admite că limitele proiective finite să fie reprezentabil în $\mathcal{C}$.

Ultima parte a acestei afirmații se obține remarcînd că sub condițiile impuse universului, putem totdeauna completa o familie de generatori ai lui $\mathcal{E}$ indexată de un element al lui U, pînă la o familie indexată de un element al lui U, care conține obiectul final al lui $\mathcal{E}$ și stabilă la produse fibrate (făcînd toate produsele fibrate posibile, prin iterare succesivă) astfel:

a) Considerăm obiectele C_i, adică toți generatorii lui $\mathcal{E}$ și obiectul final.

b) Notăm cu $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{E}$ ce conțin obiectele C_i și toate produsele fibrate făcute cu ele pentru obiecte din familie. Categoria obținută este încă un element al lui U.

c) Considerăm categoria $\mathcal{C}_2$ construită din $\mathcal{C}_1$ ca și $\mathcal{C}_1$. Repetăm procedeul indefinit.

Notăm $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{i \in N} \mathcal{C}_i$ (N fiind mulțimea numerelor naturale); obținem încă o categorie U-mică cu produse fibrate și obiect final.

2) Fie $\mathcal{E}$ un U-topos și V un univers ce conține pe U. Categoria $\mathcal{E}$ nu este în general un V-topos. Pe de altă parte, U-topos-urile sînt exemple importante de U-situri care nu sînt elemente ale lui U. Aceste fapte impun prudența manifestată atunci cînd era vorba de universuri: specificarea de fiecare dată a naturii categoriei care apărea.

Lema de comparare, este o primă indicație asupra interesului pe care îl prezintă topos-urile: Situri neizomorfe și neechivalente definesc toposuri echivalente.

PROPOZIȚIA 4.59. *Fie* $\mathcal{E}$ și $\mathcal{E}'$ *două* U*-toposuri și* $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ *un functor. Următoarele afirmații sînt echivalente*:

i) *Functorul* T *este continuu.*

ii) T *admite un adjunct la dreapta.*

iii) T *comută cu limitele inductive.*

Demonstrație. i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) în mod evident. Implicația iii) $\Rightarrow$ i) rezultă imediat din lema următoare:

LEMĂ. *Fie $\mathcal{E}$ un U-topos și F un prefascicul peste $\mathcal{E}$. Următoarele afirmații sînt echivalente.*

1) *Prefascicului F este un fascicul (adică este un functor reprezentabil).*

2) *Prefascicului F transformă limitele inductive în limite proiective.*

Demonstrație. Evident că i) $\Rightarrow$ ii). Dovedim că ii) $\Rightarrow$ i). Fie $R \to X$ un ciur acoperitor al unui obiect X al lui $\mathcal{E}$ pentru topologia canonică. Obiectul R este atunci limita inductivă în $\mathcal{E}$ a functorului $\mathcal{E}/R \to \mathcal{E}$. Așadar F este un fascicul, deoarece:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^\wedge}(R, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^\wedge}(\varinjlim X_\alpha, F) =$$

$$= \varprojlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^\wedge}(X_\alpha, F) = \varprojlim F(X_\alpha) = F(\varinjlim X_\alpha) =$$

$$= F(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^\wedge}(X, F)$$

(egalitățile sînt izomorfisme functoriale deduse în mod canonic). q.e.d.

Fie acum $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două situri aparținînd lui U și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor continuu. Rezultă că functorul imagine reciprocă $T^S : \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}'^\sim$ între topos-urile corespunzătoare este un functor continuu.

DEFINIȚIA 4.60. Fie $\mathcal{E}$ și $\mathcal{E}'$ două U-topos-uri și $T: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un functor. Vom spune că functorul T este un morfism de toposuri dacă functorul T este continuu și comută cu limitele proiective finite.

Evident, un morfism între două situri aparținînd lui U definește un morfism între topos-urile corespunzătoare.

Fie, de asemenea, $\mathcal{C}$ un sit aparținînd lui U; functorul fascicul asociat $a : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{C}^\sim$ este un morfism de topos-uri (căci are un adjunct la dreapta) și este exact.

Observații. Putem defini conceptul de morfisme de topos-uri și astfel: Un morfism între două topos-uri $\mathcal{E}$ și $\mathcal{E}'$ este un cuplu de functori T: $\mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ și $S : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ cu proprietățile următoare: functorul T este adjunct la stînga lui S și comută cu limitele proiective finite.

§ 26. FASCICULE CU VALORI ÎNTR-O CATEGORIE

DEFINIȚIA 4.61. Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit și $\mathcal{D}$ o categorie; spunem că functorul contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un $\mathcal{D}$-fascicul (altfel F se numește $\mathcal{D}$-prefascicul) dacă pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ prefascicului de mulțimi $F_D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D \circ F\ (?))$, este un fascicul de mulțimi peste $\mathcal{C}$.

Interesante sînt pentru noi cazurile cînd $\mathcal{D}$ este o categorie cu limite proiective; atunci duala sa $\mathcal{D}^0$ este o categorie cu limite inductive și functorul canonic $F^0 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^0$ (definit de F) se prelungește conform propoziției 2.3 la un functor unic: $\overline{F}^0 : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{D}^0$, care comută cu limitele inductive și are ca adjunct la dreapta functorul: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}(\overline{F}^0 \circ h \circ ?)$. ($h$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^\wedge$ este functorul canonic).

PROPOZIȚA 4.62. *Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $\mathcal{D}$-prefascicul, $\mathcal{D}$ fiind o categorie cu limite proiective. F este un $\mathcal{D}$-fascicul dacă și numai dacă pentru orice morfism biacoperitor $m : H \to K$ din $\mathcal{C}^\wedge$, $\overline{F}^0\,(m)$ este un izomorfism.*

Demonstrație. Dacă pentru orice $m : H \to K$ morfism biacoperitor din $\mathcal{C}^\wedge$, $\overline{F}^0\,(m)$ este un izomorfism, deducem că pentru orice rafinare $R \to X$, $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, avem izomorfismul :

$$\overline{F}^0(R) \xrightarrow{\sim} \overline{F}^0(X)$$

adică pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$ avem izomorfismul

(a) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D, \overline{F}\ R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D, \overline{F}\ X)$,

unde $\overline{F} : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{D}$ este canonic construit cu ajutorul lui $\overline{F}^0$. Dar relația (a) se mai scrie :

(b) $\varprojlim\limits_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D, F X_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D, FX)$

dedusă canonic din aceea că $R = \varinjlim X$ cu $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. Conchidem că F este un D-fascicul, relația (b) fiind necesară și suficientă pentru aceasta.

Invers, fie că $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un $\mathcal{D}$-fascicul ; aceasta înseamnă că pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, prefasciculul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D, F\,(?))$ este un fascicul. Dar atunci pentru orice $m : H \to K$ morfism biacoperitor din $\mathcal{C}^\wedge$, morfismul canonic :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}\,(H,\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D,\ F\ (?)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}\,(K,\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(D,\ F(?)))$$

este izomorfism ; dar ultima relație se mai scrie

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}\,(H, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}\,(\overline{F}^0(?)), D)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}\,(K, \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}\,(\overline{F}^0(?)\,D))\,;$$

folosind adjuncția lui $\overline{F}^0$ cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\,(\overline{F}^0,\ ?)$, deducem izomorfismul :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}\,(\overline{F}^0\,(H),\ D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^0}\,(\overline{F}^0\,(K),\ D),$$

pentru orice $D \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$; de aici rezultatul.

COROLAR. *Fie $(\mathcal{C},\ \tau)$ un sit, $\mathcal{D}$ o categorie cu limite proiective și $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $\mathcal{D}$-fascicul ; atunci pentru orice ciur acoperitor $R \to X$ din $\mathcal{C}$ morfismul canonic :*

$$\varinjlim X_\alpha \to X$$

$(R = \lim X_\alpha)$, induce izomorfismul

$$(*) \qquad \varprojlim_{\alpha} F(X)) \xleftarrow{\sim} F(X).$$

Invers, dacă relația (*) este satisfăcută, atunci F este un $\mathcal{D}$-fascicul.

Fie acum $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ un functor covariant ce comută cu limitele proiective ($\mathcal{D}$ și $\mathcal{D}'$ sînt categorii cu limite proiective) ; atunci, dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un $\mathcal{D}$-fascicul, $T \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}'$ este un $\mathcal{D}'$-fascicul conform corolarului de mai sus.

Fie $\mathcal{D}$ o categorie concretă, cu limite proiective, și astfel că functorul subiacentă : $S : \mathcal{D} \to \mathrm{Ens}$ comută cu limitele proiective. Notăm cu $\overline{\mathcal{C}}^\wedge$ categoria $\mathcal{D}$-prefasciculelor și cu $\overline{\mathcal{C}}^\sim$ categoria $\mathcal{D}$-fasciculelor. Functorul S induce functorul $S^{\wedge} : \bar{\mathcal{C}}^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ şi functorul $S^{\sim} : \bar{\mathcal{C}}^{\sim} \to \mathcal{C}^{\sim}$ astfel că diagrama de categorii şi functori canonic construită :

$$\begin{tikzcd}
\bar{\mathcal{C}}^{\wedge} \arrow[r, "S^{\wedge}"] & \mathcal{C}^{\wedge} \\
\bar{\mathcal{C}}^{\sim} \arrow[u, "\bar{i}"] \arrow[r, "S^{\sim}"] & \mathcal{C}^{\sim} \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

în care $\bar{i}$ este functorul incluziune de la fascicule la prefascicule este comutativă.

În condiţiile de mai sus, vom admite că functorul S satisface la proprietatea :

(P) : S stabileşte o echivalenţă între categoria $\mathcal{D}$-fasciculelor peste $\mathcal{C}$ şi subcategoria lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ formată din $\mathcal{D}$-obiectele lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ al căror prefascicul subiacent este un fascicul de mulţimi.

(K). De asemenea, admitem că dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ este un $\mathcal{D}$-prefascicul, atunci fasciculul asociat lui $S^{\wedge} \circ \mathrm{F}$ este de asemenea un $\mathcal{D}$-obiect (adică functorul $\overline{S^{\wedge}\ F} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ se factorizează prin $\mathcal{D}$).

Observăm că condiţiile de mai sus sînt verificate dacă $\mathcal{D}$ este o categorie cu „structură" dată de limite proiective finite. Remarcăm printre acestea categoria $\mathcal{G}r$, Ann, Annc, Ab, Mod$A$ etc. ; observăm de asemenea că acestea sînt categoriile uzuale care se folosesc în teoria fasciculelor.

PROPOZIŢIA 4.63. *Fie $\mathcal{C}$ un sit aparţinînd lui U şi $\mathcal{D}$ o categorie concretă cu limite proiective, astfel că functorul subiacenţă comută cu limitele proiective şi sînt verificate condiţiile* (P) *şi* (*K*) *de mai sus. Atunci functorul $\bar{i} : \bar{\mathcal{C}}^{\sim} \to \bar{\mathcal{C}}^{\wedge}$ admite un adjunct la stînga $\bar{a}$, ce comută cu limitele proiective finite.*

Demonstraţie. Admitem direct că $S^{\wedge} \circ \bar{i}$ identifică pe $\mathcal{C}^{\sim}$ cu subcategoria lui $\mathcal{C}^{\wedge}$, formată din obiectele care se factorizează prin $\mathcal{D}$, şi prefascicul subiacent de mulţimi este un fascicul. Fie $F \in \mathrm{Ob}\ \bar{\mathcal{C}}^{\wedge}$; atunci $S^{\wedge} \circ F : F' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ şi $\overline{F} = \overline{S^{\wedge} \circ F}$ este un $\mathcal{D}$-obiect din $\mathcal{C}^{\wedge}$ al cărui prefascicul de mulţimi subiacente este conţinut în $\bar{\mathcal{C}}^{\sim}$. Definim $\bar{a}(F) = \overline{S^{\wedge} \circ F}$. Asocierea $F \rightsquigarrow \bar{a}(F)$ este evident functorială ; mai mult, functorul $\bar{a}$ comută cu limitele proiective finite ; deoarece functorii a şi $S^{\wedge}$ comută cu astfel de limite ($S^{\wedge}$ comută cu limitele proiective deoarece S comută cu limitele proiective şi limitele proiective din $\bar{\mathcal{C}}^{\wedge}$ se fac „pe componente"). Faptul că $\bar{a}$ este adjunct la stînga lui $\bar{i}$ este evident.

Observaţie. Este necesar totuşi să aducem cîteva precizări ; prima constă în aceea că functorul $S^{\wedge} : \bar{\mathcal{C}}^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ este fidel dar nu deplin fidel ; aşadar $\bar{\mathcal{C}}^{\wedge}$ este o subcategorie a lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ care în general nu este plină. Deci $\bar{\mathcal{C}}^{\wedge}$ este o subcategorie a lui $\mathcal{C}^{\wedge}$ iar $\bar{\mathcal{C}}^{\sim}$ este o subcategorie a lui $\mathcal{C}^{\sim}$; în cele de mai sus am cerut pe de o parte ca orice obiect din $\mathcal{C}^{\wedge}$ care se factorizează prin $\mathcal{D}$ (şi care este sigur în $\bar{\mathcal{C}}^{\wedge}$) pentru care structura de prefascicul subiacent este un fascicul de mulţimi este sigur în $\bar{\mathcal{C}}^{\sim}$ şi pe de altă parte ca fasciculul asociat un obiect din $\overline{\mathcal{C}}^{\wedge}$ să fie în $\overline{\mathcal{C}}^{\sim}$. Observăm că nici una din cereri nu este verificată în general.

Să dovedim, spre exemplu, că categoria $\mathcal{G}r$ satisface condiţiile de mai sus. Evident, dacă $F : \mathcal{C} \to \mathcal{G}r$ este un prefascicul astfel ca fasciculul de mulţimi subiacent este fascicul de mulţimi, atunci F este un fascicul de grupuri. Pentru aceasta fie $R \to X$ o rafinare a lui X; morfismul canonic $\varinjlim_{\alpha} X_{\alpha} \to X$ induce izomorfismul:

$$\varprojlim_{\alpha} S \circ F(X_{\alpha}) \overset{\sim}{\longleftarrow} S \circ F(X)$$

$S : \mathcal{G}r \to \mathrm{Ens}$, fiind functorul subiacenţă. Dar putem scrie:

$$\varprojlim_{\alpha} S \circ F(X_{\alpha}) \overset{\sim}{\rightleftarrows} S(\varprojlim F(X_{\alpha})) \overset{\sim}{\longleftarrow} S \circ F(X).$$

Dacă $\varphi : \varprojlim_{\alpha} F(X_{\alpha}) \leftarrow F(X)$ este morfismul canonic, indus de morfismul $R \to X$, atunci $S(\varphi)$ fiind un izomorfism, căci deja φ este. Deci F este un fascicul de mulţimi.

Observaţie. Observăm că acest fapt nu se întîmplă dacă considerăm spre exemplu pe $\mathcal{D}$ ca fiind o categorie de spaţii topologice: grupuri sau inele topologice, în care aplicaţia identică a mulţimilor subiacente spre exemplu nu este izomorfism.

Fie acum că $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^{\wedge}$ este un $\mathcal{G}r$-obiect; aceasta înseamnă că pentru orice $H \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^{\wedge}$, mulţimea: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(H, F)$ are structură de grup în mod natural, fapt care se deduce imediat; aşadar, $a(F)$ este un obiect al categoriei $\overline{\mathcal{C}}^{\sim}$.

DEFINIŢIA 4.64. *Categoriile concrete ce satisfac condiţiile propoziţiei precedente se zic categorii „bune pentru teoria fasciculelor" sau F-categorii.*

PROPOZIŢIA 4.65. *Fie $\mathcal{D}$ o F-categorie şi $S : \mathcal{D} \to \mathrm{Ens}$ functorul subiacenţă; admitem că S admite un adjunct la stînga („structura liberă") notat L. În aceste condiţii, functorul $S : \overline{\mathcal{C}}^{\sim} \to \mathcal{C}^{\sim}$ admite un adjunct la stînga $L^{\sim}$ şi functorul $S^{\wedge}$ admite un adjunct la stînga $L^{\wedge}$ astfel că:*

$$L^{\sim} = \bar{a} \circ L^{\wedge} \circ i$$

(*folosind notaţiile curente de mai sus*).

Demonstraţia este trivială şi lăsată cititorului.

COROLAR. *Fie $\{X_i\}_{i \in I}$ o familie de generatori ai lui $\mathcal{C}^{\sim}$. Atunci familia $\{L^{\sim}(X_i)\}$ este o familie de generatori din $\overline{\mathcal{C}}^{\sim}$.*

Observaţie. Fie $\mathcal{D} = \mathrm{Mod}\ A$, categoria modulelor drepte unitare peste inelul A. Atunci $\overline{\mathcal{C}}^{\wedge}$ este o categorie de diagrama peste Mod A şi deci abeliană. Ea satisface axiomele Ab5 şi Ab4* ale lui Grothendieck; conform propoziţiei 3.32, $\overline{\mathcal{C}}^{\sim}$ este o categorie abeliană ce satisface aceleaşi axiome. Mai mult, din corolarul de mai sus se deduce că $\overline{\mathcal{C}}^{\sim}$ este o categorie cu generatori. Ea este deci o categorie Grothendieck.

§ 27. COOMOLOGIA ČECH

Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $\{U_\alpha \to V\}_{\alpha \in I}$ o familie de morfisme din $\mathcal{C}$. Admitem că produsele fibrate care apar există în $\mathcal{C}$. Fie K_n mulțimea ale cărei elemente sînt obiectele $\{U_{\alpha_0} \Pi_V U_{\alpha_1} \Pi_V \ldots \Pi_V U_{\alpha_n}\}$ K_0 este evident formată din obiectele $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Definim aplicațiile canonice :

$$\partial_i^n : K_n \to K_{n-1}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$$

astfel $\partial_i^n (U_{\alpha_0} \Pi_V \ldots \Pi_V U_{\alpha_i} \ldots \Pi_V U_{\alpha_n}) = U_{\alpha_0} \Pi_V \ldots U_{\alpha_{i-1}} \Pi_V U_{\alpha_{i+1}} \ldots \Pi_V U_{\alpha_n}$.

Notăm încă cu $\partial_i^n(\alpha) : U_{\alpha_0} \Pi_V \ldots \Pi_V U_{\alpha_n} \to \partial_i^n (U_{\alpha_0} \Pi_V \ldots \Pi_V U_{\alpha_n})$ morfismul canonic construit.

Definim de asemenea aplicațiile :

$$s_i^n : K_n \to K_{n+1},\ 0 \leqslant i \leqslant n$$

astfel

$$s_i^n (U_{\alpha_0} \Pi_V \ldots U_{\alpha_i} \Pi_V U_{\alpha_{i+1}} \ldots \Pi_V U_{\alpha_n}) = U_{\alpha_0} \Pi_V \ldots U_{\alpha_i} \Pi_V U_{\alpha_i} \Pi_V U_{\alpha_{i+1}} \ldots \Pi_V U_{\alpha_n}).$$

Cititorul va constata imediat că aplicațiile ∂_i^n, s_j^n verifică relațiile :

$$\partial_i^n \circ \partial_j^{n+1} = \partial_{j-1}^n \circ \partial_i^{n+1}, \quad i < j$$

$$s_i^{n+1} \circ s_j^n = s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n, \qquad i \leqslant j$$

$$\partial_i^n \circ s_j^{n-1} = \begin{cases} s_{j-1}^{n-2} \circ \partial_i^{n+1} & i < j \\ \mathrm{Id} & i = j, \text{ sau } i = j + 1 \\ s_j^{n-2} \circ \partial_{i-1}^{n-1} & i > j + 1. \end{cases}$$

Din cele de mai sus se deduce că mulțimea graduată $K = \{K_n, s_i, \partial_i^n\}$ este un complex semisimplicial.

Un exemplu important este următorul : $\mathcal{C}$ este un sit, element al lui U și $R_\alpha \to X$ sînt toate rafinările lui X (considerate în categoria $\mathcal{C}^\wedge$).Dacă $f : X \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci f induce în mod canonic aplicația de complexe semisimpliciale :

$$f = \{f_n\} : K(X) \to K(Y).$$

Ulterior vom face considerații asupra omotopiei acestor complexe semisimpliciale.

Fie $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ un prefascicul de grupuri abeliene (putem lua în loc de Ab pe Mod A) și grupurile :

$$F_n = \prod_{(\alpha_0, \ldots \alpha_n) \in I^{n+1}} F(U_{\alpha_0} \Pi_V U_{\alpha_1} \Pi_V \ldots \Pi_V U_{\alpha_n}).$$

Morfismele $\partial_i^n(\alpha_i)$ mai sus considerate, definesc pentru i fix, un morfism $\varphi_i : F_n \to F_{n+1}$. Notăm $d_n = \sum (-1)^i \varphi_i$. Se constată imediat că $d_{n+1} \circ d_n = 0$. Așadar $(F_n, d_n)_{n \in N}$ este un complex de colanțuri. Evident, asocierea $F \rightsquigarrow (F_n, d_n)$ este functorială în F : ea definește un functor exact de la categoria $\overline{\mathcal{C}}^{\wedge}$(a prefasciculelor de grupuri abeliene peste $\mathcal{C}$) la categoria complexelor de colanțuri peste Ab.

Observație. Faptul că functorul de mai sus este exact se deduce din aceea că $\overline{\mathcal{C}}^{\wedge}$ este o categorie de diagrame și din faptul că Ab satisface Ab4*.

Vom nota cu $H^q(\{U_\alpha \to V\}; F)$ grupurile de coomologie ale complexului (F_n, d_n). Functorii H^q, $q \geqslant 0$ se numesc grupurile de coomologie Čech ale familiei $\{U_\alpha \to V\}$ relativ la F.

Relativ la functorii $\{H^q\}_{q \geqslant 0}$, se poate dovedi că ei formează un ∂— functor universal în sensul lui Grothendieck ((1), Cap. II). Nu vom intra în detalii rezervînd acestor detalii locul în o altă lucrare.

Observăm că dacă $(\mathcal{C}, \tau)$ este un sit definit de o pretopologie, atunci toate acoperirile unui obiect (din pretopologia în cauză) formează un sistem filtrat. Putem considera în loc de prefascicule, fascicule de grupuri abeliene și putem defini grupurile de coomologie cu conceptul de limită inductivă ; se obține în particular coomologia Čech clasică.

Acest capitol este esențial continuat de capitolul V care tratează teoria siturilor abeliene.

BIBLIOGRAFIE

1. ARTIN MIKE, *Grothendieck topologies Seminar*, Harward University, 1962.
2. RADU ALEXANDRU, *Quelques observations sur les sites* (à paraître).
3. VERDIER, JEAN LOUIS, *Topologies et faisceaux III.* I.E.H.S., Paris, 1964.

ASUPRA MIŞCĂRII PLANE A UNUI FLUID VÎSCOS ÎNTR-UN SEMISPAŢIU RACORDAT LA UN CANAL DE ALIMENTARE PERPENDICULAR PE FRONTIERA SA

DE

ION I. CRISTEA şi LIVIU DINU

Considerînd planul xOy ca plan al mişcării şi alegînd axa Ox ca urmă a frontierei semispaţiului în planul xOy, se determină distribuţia de viteze ce corespunde unei stări date de presiune pe porţiunea de racord. Se consideră canalul cu pereţii paraleli şi perpendiculari pe frontiera semispaţiului.

§ 1. O problemă asemănătoare, vizînd determinarea mărimilor de curgere din distribuţia iniţială de viteze, a fost rezolvată de către J. Förste [1]. Condiţiile problemei sînt aici aceleaşi ca în [1]. În [1], soluţia este dată cu ajutorul reprezentării lui D. I. Şerman [5], [6], însă, în general, ea se poate găsi uşor folosind reprezentarea dată de M. Nicolescu [4].

§ 2. Studiul este legat de problema lui Stokes plană [2]:

$$\mu \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \mu \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Introducînd funcţia de curent Ψ avem

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{3}$$

$$\Delta \Delta \Psi = 0 \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 671–674, BUCUREŞTI, 1966

astfel că, în baza reprezentării lui Goursat-Almansi [2], funcţia Ψ, se poate scrie sub forma :

$$\Psi = \mathrm{Re}\ \{\bar{z}Q(z) + H(z)\}, \quad z = x + iy. \tag{5}$$

Viteza complexă este

$$w = u - iv = 2i\frac{\partial \Psi}{\partial z} = i\,[\bar{z}\,Q'(z) + \overline{Q(z)} + H'(z)] \tag{6}$$

iar vîrtejul şi presiunea au expresiile :

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\,\Delta\Psi = -\,2\ \mathrm{Re}\ \{Q'(z)\}, \tag{7}$$

$$p = -\,4\mu\ \mathrm{Im}\ \{Q'(z)\}. \tag{8}$$

§ 3. Pentru funcţiile $Q(z)$ şi $H(z)$ să folosim reprezentarea lui D. I. Şerman [5], [6] :

$$\begin{cases} Q(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{\omega(\eta)}{\eta - z}\,\mathrm{d}\eta\,, \\ H'(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{\overline{\omega(\eta)}}{\eta - z}\,\mathrm{d}\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\omega(\eta)}}{\eta - z}\,\mathrm{d}\bar{\eta} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{\eta}\,\omega(\eta)}{(\eta - z)^2}\,\mathrm{d}\eta, \end{cases} \tag{9}$$

unde $\omega(\eta)$ este o funcţie de punctele conturului C, care urmează a fi determinată.

Se poate deduce că :

$$w = -\frac{1}{2\pi}\int_C \overline{\omega(\eta)}\,\mathrm{dlg}\frac{\bar{\eta} - \bar{z}}{\eta - z} + \frac{1}{2\pi}\int_C \omega(\eta)\,\mathrm{d}\left(\frac{\bar{\eta} - \bar{z}}{\eta - z}\right), \tag{10}$$

$$\Omega = -\,2\ \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(\eta)}{(\eta - z)^2}\,\mathrm{d}\eta\right\}, \tag{11}$$

$$p = -\,4\mu\ \mathrm{Im}\ \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\omega(\eta)}{(\eta - z)^2}\,\mathrm{d}\eta\right\}. \tag{12}$$

Dacă $z \rightarrow z_0 \in C$, atunci

$$w = i\overline{\omega(z_0)} + \frac{1}{2\pi}\int_C \omega(\eta)\,\mathrm{d}\left(\frac{(\bar{\eta} - \bar{z}_0}{\eta - z_0}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_C \overline{\omega(\eta)}\,\mathrm{dlg}\frac{\bar{\eta} - \bar{z}_0}{\eta - z_0}. \tag{10'}$$

Punînd $\eta - z_0 = r\mathrm{e}^{i\theta}$ în (10) se vede că :

$$w = i\,\overline{\omega(z_0)} + \frac{1}{\pi i}\int_C \omega(\eta)\,\mathrm{e}^{-2i\theta}\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{\pi i}\int_C \overline{\omega(\eta)}\,\mathrm{d}\theta$$

astfel încît, dacă conturul C se particularizează la o dreaptă, avem evident

$$w|_C = i\,\overline{\omega(z_0)}. \tag{13}$$

§ 4. Să alegem originea în mijlocul orificiului şi fie $2a$ deschiderea acestuia.

Din condiţiile de aderenţă pentru fluidul vîscos, avem:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_{y=0} &= -\,u(x, 0) = 0, \\ \left.\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_{y=0} &= -\,v(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \notin (-\,a, +\,a), \\ \lambda(x), & x \in (-\,a, +\,a). \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

În baza lui (13) şi (14)

$$\omega(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-\,a, +\,a) \\ \lambda(x), & x \in (-\,a, +\,a) \end{cases} \tag{15}$$

observîndu-se că funcţia $\omega(x)$ este reală.

Din punct de vedere experimental, există posibilitatea determinării presiunii p la ieşirea din canal, adică a presiunii fluidului pe porţiunea $(-a, +a)$ a frontierei semispaţiului; de aceea, vom presupune cunoscută funcţia

$$p|_{y=0} = p(x). \tag{16}$$

Făcînd în (12) $y = 0$, se deduce

$$4\mu \operatorname{Im}\left.\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda(\eta)}{(\eta - z)^2}\,\mathrm{d}\eta\right\}\right|_{y=0} = p(x)$$

astfel că funcţia $\lambda(\eta)$ satisface condiţia integrală

$$-\frac{2}{\pi}\,\mu\int_{-a}^{a}\frac{\lambda(\eta)}{(\eta - x)^2}\,\mathrm{d}\eta = p(x). \tag{17}$$

În definitiv, notînd $K'(x) = \dfrac{p(x)}{2\mu i}$, prin integrare în raport cu x, din (17) se obţine:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda(\eta)}{(\eta - x)}\,\mathrm{d}\eta = K(x) + C, \tag{18}$$

funcţia $K(x)$ fiind cunoscută, iar C fiind o constantă nedeterminată.

Rezultă atunci că [3]:

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{\pi i}\sqrt{\eta^2 - a^2}\int_{-a}^{a}\frac{K(\xi)}{(\xi - \eta)\sqrt{\eta^2 - a^2}}\,\mathrm{d}\xi \tag{19}$$

iar

$$C = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{K(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}. \tag{20}$$

§ 5. Din (9) și (15) avem :

$$Q(z) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{-a}^{a} \frac{a\sqrt{\eta^2 - a^2}}{\eta - z}\,\mathrm{d}\eta \int_{-a}^{a} \frac{K(\xi)}{(\xi - \eta)\sqrt{\xi^2 - a^2}}\,\mathrm{d}\xi \tag{21}$$

și utilizînd formula de intervertire a lui Poincaré-Bertrand,

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\eta^2 - a^2}}{\eta - z}\,\mathrm{d}\eta \int_{-a}^{a} \frac{K(\xi)}{(\xi - \eta)\sqrt{\xi^2 - a^2}}\,\mathrm{d}\xi = -\pi^2 K(z) + {}$$

$$+ \int_{-a}^{a} \frac{K(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}\,\mathrm{d}\xi \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\eta^2 - a^2}}{(\eta - z)(\xi - \eta)}\,\mathrm{d}\eta$$

deoarece

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{\eta^2 - a^2}}{(\eta - z)(\eta - x)}\,\mathrm{d}\eta = i\pi\left[1 - \frac{z + x}{\sqrt{z^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}}\right]$$

se găsește

$$Q(z) = \frac{1}{2}K(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a} \left[1 - \frac{z + \xi}{\sqrt{z^2 + a^2} + \sqrt{\xi^2 - a^2}}\right] \frac{K(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}\,\mathrm{d}\xi. \tag{22}$$

Calculînd $Q'(z)$ se poate obține, ca o verificare, condiția la limită (16). În fine, putem exprima $H'(z)$ prin $Q(z)$ cu formula

$$H'(z) = Q(z) - 2Q'(z). \tag{23}$$

Funcția $Q(z)$ odată determinată, distribuția de viteze, vîrtejul și presiunea în domeniul ocupat de fluid, sînt date prin

$$w = 2y\,Q'(z) + 2i\ \mathrm{Re}\ \{Q(z)\}. \tag{24}$$

$$p - 2i\Omega = 4i\,\mu Q'(z). \tag{25}$$

Primită la redacție la 11 octombrie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. J. FÖRSTE, ZAMM, **43** **7/8**, 353–359 (1963).
2. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucarest-Paris, 1959, p. 316–320.
3. N. I. MUSHELIȘVILI, *Singuliarnie integralniie uravneniia*. Moskva, 1962, p. 122–124.
4. M. NICOLESCU, Analele Acad. R.P.R., **II**, A (1949), Memoriul 15.
5. D. I. ȘERMAN, DAN SSSR, **27**, *9*, 911–914 (1940).
6. D. I. ȘERMAN, DAN SSSR, **28**, *1*, 29–32 (1940).

ASUPRA UNOR MIŞCĂRI FLUIDE CU VÎRTEJ CONSTANT

DE

ION I. CRISTEA şi HORIA I. ENE

Se consideră mişcarea cu vîrtej constant caracterizată de relaţiile (4). În cazul fluidului incompresibil obţinem tocmai legea fundamentală a hidrostaticii $p = p_0 + \rho U$. În cazul gazului perfect caracterizat de legea de stare $p/\rho^\gamma =$ const., dacă mişcarea este staţionară, în absenţa forţelor de masă, atunci $\rho =$ const. şi $p =$ const. Se consideră de asemenea cazul gazului caracterizat de legea de stare $p = \alpha R \rho T$ în mişcarea nestaţionară ca şi în cea staţionară.

1. Ecuaţiile de mişcare ale fluidelor perfecte se scriu sub forma cea mai generală :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v} = \operatorname{grad}\left(U - \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2\right), \tag{1}$$

unde notăm

$$U - \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 = B \tag{2}$$

şi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\rho \vec{v}) = 0. \tag{3}$$

La aceste ecuaţii se va mai adăuga ecuaţia de stare.

Ne propunem să studiem mişcările fluide, plane, caracterizate de o repartiţie de viteze de forma

$$\begin{aligned} u &= F\,(y,\ t) \\ v &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

în absenţa obstacolelor.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 675–680, BUCUREŞTI, 1966

2. În cazul fluidului incompresibil, în mişcarea nestaţionară, ecuaţia (1) va avea forma :

$$(5)\qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}\vec{v} \times \vec{v} = \operatorname{grad}\left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}V^2\right)$$

iar ecuaţia (3) :

$$(6)\qquad \operatorname{div}\vec{v} = 0.$$

Din (5) avem :

$$(7)\qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad -F\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial y}.$$

Din a doua ecuaţie (7) rezultă :

$$(8)\qquad B = -\frac{1}{2}F^2(y, t) + \lambda(x, t)$$

şi atunci din (8) cu prima ecuaţie din (7) avem

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} = a'(t),$$

de unde deducem imediat că :

$$(9)\qquad \begin{aligned} F(y, t) &= a(t) + b(y),\\ \lambda(x, t) &= a'(t)x + c(t). \end{aligned}$$

Prima relaţie (9) ne arată că, de fapt, componenta după axa Ox a vitezei este de forma :

$$u = V_\infty(t) + f(y, t).$$

Cu ajutorul relaţiilor (9), B devine :

$$(10)\qquad B = -\frac{1}{2}V^2 + a'(t)x + c(t).$$

Din (10) şi (5) deducem imediat :

$$(11)\qquad \frac{p}{\rho} = U - \lambda(x, t).$$

Deci în absenţa forţelor de masă ($U = 0$), (11) ne arată că $\frac{p}{\rho}$ este o funcţie liniară de x, depinzînd şi de timp prin intermediul coeficienţilor. Din punct de vedere fizic nu poate fi admisă această concluzie, deci sîntem conduşi la a considera $a'(t) = 0$, adică $a(t) = a = \text{const}$. În această situaţie vedem deci că presiunea verifică tocmai legea fundamentală a hidrostaticii :

$$p = p_0 + \rho U.$$

În cazul mişcărilor caracterizate de o repartiţie de viteze de forma :

$$u = V_\infty + 2ay$$

$$v = 0$$

expresii ale raportului $\frac{p}{\rho}$ au mai fost date de C. Iacob [7] şi de asemenea de I. I. Cristea [3]. În acest caz s-au studiat foarte multe exemple, dintre care cităm C. Iacob [5], [6], [7], I. I. Cristea [3], H. I. Ene [4].

3. În cazul fluidului compresibil caracterizat de legea de stare $p/\rho^\gamma = \text{const.}$, în mişcarea staţionară, ecuaţiile de mişcare dau :

$$B = -\frac{1}{2}F^2(y) + \text{const.}$$

de unde rezultă, în cazul în care presupunem $U = 0$, că $p = \text{const.}$ deci $\rho = \text{const.}$ Acest rezultat, aparent contradictoriu, este explicat de următoarea teoremă dată de L. Crocco [2] :

Mişcările homentropice, permanente, plane sau de revoluţie, în absenţa forţelor de masă, sînt irotaţionale.

În cazul fluidului caracterizat de legea de stare $p = \alpha R \rho T$, L. Crocco [1] a studiat mişcarea staţionară, definind funcţia de curent, iar o aplicaţie a acestei funcţii la studiul mişcărilor rotaţionale la viteze supersonice peste diverse profile a fost dată de A. Kogan [8].

a) *Cazul mişcării nestaţionare.* În acest caz ecuaţiile mişcării sînt tocmai ecuaţiile (1) şi (3) la care se adaugă legea de stare :

$$p = \alpha R \rho T \tag{12}$$

Proiectînd ecuaţia (1) pe cele două axe de coordonate vom obţine în final pe B, abstracţie făcînd de o constantă, tot sub forma :

$$B = -\frac{1}{2}[a(t) + b(y)]^2 + a'(t)x. \tag{13}$$

Din (13) şi (2) rezultă :

$$a'(t)x = U - \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{14}$$

relaţie care ne conduce în final la :

$$\frac{D(p, \rho)}{D(x, y)} = 0$$

ceea ce înseamnă de fapt $\rho = \rho(p)$.

Ecuaţia energiei fiind

$$Jc_v \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - Jk\Delta T - \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{15}$$

ţinînd seamă de (12) avem

$$(15')\qquad Jc_v \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho}\right) - Jk\Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) - \alpha R\frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Dar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$$

şi cum (3) se mai scrie

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + F\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 \text{ sau } \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$$

rezultă că:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

şi atunci putem să scriem (15′) sub forma finală

$$(15'')\qquad \left(Jc_v - \alpha R\frac{p}{\rho}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{p}{\rho}\right) - Jk\Delta\left(\frac{p}{\rho}\right) = 0$$

ecuaţie care defineşte tocmai raportul $\frac{p}{\rho}$.

b) *Cazul mişcării staţionare.* În acest caz ecuaţiile de mişcare (1) şi (3) se scriu:

$$(16)\qquad \operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{v} = \operatorname{grad}\left(U - \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{1}{2}V^2\right)$$

$$(17)\qquad \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

la care vom adăuga ecuaţia de stare (12).

Proiectînd ecuaţia (16) pe cele două axe şi integrînd sistemul astfel obţinut, avem:

$$(18)\qquad B = -\frac{1}{2}F^2(y) + \text{const.}$$

Din (18) şi (2) rezultă:

$$U - \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \text{const.}$$

sau

$$(19)\qquad \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

În acest caz însă, ecuaţia de continuitate ne va da:

$$F \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

şi cum $F \neq 0$, rezultă

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \text{ sau } \rho = \rho(y). \tag{20}$$

Acum condiţia (19) va deveni cu (20):

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

de unde

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ sau } p = p(y). \tag{21}$$

Ecuaţia energiei (15) se scrie în acest caz:

$$Jc_v F \frac{\partial T}{\partial x} - Jk \Delta T - \frac{p}{\rho^2} F \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

sau, ţinînd seama de relaţiile (12), avem:

$$F \left(Jc_v - \alpha R \frac{p}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) - Jk \Delta \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0. \tag{22'}$$

În (22') dacă ţinem seama de (20) şi (21) avem:

$$\Delta \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0$$

de unde rezultă imediat:

$$\frac{p}{\rho} = ay + b. \tag{23}$$

Vedem deci că în acest caz raportul $\frac{p}{\rho}$ este o funcţie liniară de y şi deci că şi temperatura T va varia în acelaşi fel.

Primită la redacţie la 16 octombrie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. L. Crocco, Atti della Reale Accademia dei Lincei, **XXIII**, 115—124 (1936).
2. — Zeitschrift für angewandte Math. u. Mech., **17**, 1—7 (1937).
3. I. I. Cristea, St. cerc. mat., **XIV**, *2*, 253—306 (1963).
4. H. I. Ene, St. cerc. mat., **17**, *5*, 781—791 (1965).
5. C. Iacob, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, **VI**, 801—809 (1954).
6. — St. cerc. mat., **V**, 333—349 (1954).
7. — *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest-Paris, 1959.
8. A. Kogan, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., **XI**, 1—23 (1958).

CÎTEVA OBSERVAȚII ASUPRA TOPOLOGIZĂRII MODULELOR

DE

OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ

În Nota de față se consideră un inel Λ și o subcategorie de topologizare $\mathcal{T}$ a categoriei $\mathcal{C}_\Lambda$ a Λ-modulelor drepte unitare. Se studiază cîteva chestiuni legate de categoria $\mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}}$ a Λ-modulelor topologice cu topologia dată de $\mathcal{T}$.

Introducere. Una din problemele centrale ale algebrei locale este problema completării inelelor și modulelor în raport cu topologia adică. O asemenea topologie se poate obține uneori și folosind noțiunea de subcategorie de topologizare ([1], ch. V).

În lucrarea de față studiem cîteva aspecte ale topologizării unui modul cu ajutorul unei subcategorii de topologizare, arătînd de exemplu că cele două topologii cu care poate fi înzestrat canonic un modul finit generat coincid (propozițiile 3, 6).

Scopul lucrării constă pe de o parte în adîncirea unor rezultate deja cunoscute, iar pe de altă parte în stabilirea unor legături între teoria completării și teoria localizării. Studiul amănunțit al acestor legături va fi continuat într-o lucrare viitoare.

§ 1. Fie $\mathcal{C} \circ U$ — categorie aditivă, U fiind un univers suficient de mare. Considerăm o subcategorie plină a lui $\mathcal{C}$ care o dată cu un obiect conține subobiectele și obiectele cît ale acestuia, exemplarele izomorfe cu el existente în $\mathcal{C}$ și, în plus, o dată cu două obiecte conține și suma lor directă.

Exemple de astfel de subcategorii sînt numeroase:

1. Subcategoriile pline ale obiectelor noetheriene (respectiv artiniene) din $\mathcal{C}$. (Dacă $\mathcal{C}$ este categoria abeliană, aceste categorii sînt chiar dese).

2. Dacă $\mathcal{C} = \mathrm{Ab}$, subcategoria grupurilor abeliene al căror anulator pentru orice element este de forma $(a)^n$ cu $a \in Z$ fixat.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 681–693, BUCUREȘTI, 1966

3. Dacă $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\Lambda$ (categoria Λ-modulelor drepte unitare, unde Λ e inel nu neapărat comutativ cu $1 \neq 0$), o astfel de subcategorie o vom numi de acum încolo *subcategorie de topologizare*, denumire care va căpăta deplină justificare. De altfel în cele ce urmează ne vom situa în cazul $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\Lambda$ și vom fixa pentru tot decursul lucrării o subcategorie de topologizare $\mathcal{T}$.

Fie $M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}_\Lambda$; definim pe M (în particular pe Λ^d) o topologie pe care o notăm $\tau_M^{\mathcal{T}}$, luînd ca sistem fundamental de vecinătăți pentru 0 submodulele M' ale lui M astfel încît $M/M' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{T}$. Se constată imediat că M devine grup topologic, că structura de Λ-modul a lui Λ^d devine structură de inel liniar topologic, în fine că $(M, \tau_M^{\mathcal{T}})$ este un Λ-modul topologic.

Notînd $\mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}}$ categoria Λ-modulelor liniare topologice (avînd un sistem fundamental de vecinătăți pentru 0 dat de submodule), unde pe Λ luăm topologia $\tau_\Lambda^{\mathcal{T}}$ dată de $\mathcal{T}$, este definit în mod evident un functor *deplin fidel*

$$T : \mathcal{C}_\Lambda \to \mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}} \qquad M \rightsquigarrow (M, \tau_M^{\mathcal{T}}).$$

Sînt echivalente următoarele afirmații :

a. Functorul subiacență $S : \mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}} \to \mathcal{C}_\Lambda$ este adjunct la stînga al lui T ;

b. Orice topologie de pe un obiect din $\mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}}$ este cel puțin egală cu topologia dată de $\mathcal{T}$ pe el;

c. $\mathcal{T}$ se reduce la obiectul nul.

În adevăr,

$$b \equiv c, \; c \Rightarrow a \text{ sînt evidente;}$$

a $\Rightarrow$ b. Fie (M, τ) un obiect din $\mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}}$, deci $S(M, \tau) = M$.

În ipoteza făcută, o săgeată de adjuncție a lui T cu S $I_{\mathcal{C}_\Lambda} \leftarrow ST$ este pentru orice modul dată de aplicația identică a acestuia. Deducem că morfismul cvasiadjunct este furnizat tot de aplicația identică (continuă), deci pentru orice obiect (M, τ) din $\mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}}$, τ este mai fină decît $\tau_M^{\mathcal{T}}$.

T fiind deplin fidel, există o subcategorie plină $\mathcal{C}'_{\mathcal{T}}$ a lui $\mathcal{C}_\Lambda^{\mathcal{T}}$ care conține „imaginea" lui T astfel încît restricția lui S la $\mathcal{C}'_{\mathcal{T}}$ este adjunct la stînga al lui T; anume $\mathcal{C}'_{\mathcal{T}}$ este formată din acele (M, τ) pentru care τ este mai fină decît $\tau_M^{\mathcal{T}}$.

Sînt evident echivalente afirmațiile :

a) T stabilește o echivalență între $\mathcal{C}_\Lambda$ și $\mathcal{C}'_{\mathcal{T}}$.

b) $\mathcal{C}'_{\mathcal{T}}$ este categorie abeliană în mod canonic.

c) Orice topologie liniară τ pe un modul M arbitrar mai fină decît $\tau_M^{\mathcal{T}}$ coincide cu $\tau_M^{\mathcal{T}}$ (pentru $b \Rightarrow c$ luăm bimorfismul $1_M : M \to M$, unde M este înzestrat respectiv cu τ și $\tau_M^{\mathcal{T}}$, care rezultă izomorfism).

Dacă se îndeplinește una din aceste condiții echivalente zicem că $\mathcal{T}$ este *subcategorie de topologizare deplină*.

Evident, orice suprasubcategorie de topologizare a unei subcategorii de topologizare deplină este deplină.

Observații. Considerăm subcategoria $\tau^{\mathcal{C}'}$ a lui $\mathcal{C}_{\Lambda}^{\tau}$ formată din acele obiecte din $\mathcal{C}_{\Lambda}^{\mathfrak{T}}$ a căror topologie este mai puțin fină decît topologia dată de $\mathfrak{F}$. Functorul subiacență S restrîns la $\mathfrak{T}^{\mathcal{C}'}$ este adjunct la dreapta pentru T. În adevăr, observăm că dacă $(M, \tau) \in \mathrm{Ob}\,({}_{\mathfrak{T}}\mathcal{C}')$, atunci morfismul identic $1_M : TSM \to M$ este continuu și este cvasiinvers săgeții $ST \leftarrow I_{\mathcal{C}_{\Lambda}}$. Evident, T este o echivalență între $\mathcal{C}_{\Lambda}$ și ${}_{\mathfrak{T}}\mathcal{C}'$ dacă și numai dacă orice topologie pe un modul M arbitrar este egală cu $\tau_M^{\mathfrak{T}}$, ceea ce revine la faptul că $\mathfrak{F}$ este subcategoria nulă.

§2. În cele ce urmează toate idealele sînt — pînă la mențiunea contrariului — ideale drepte. Se zice că inelul Λ este *liniar topologizat* (dr) dacă este înzestrat cu o topologie τ_{Λ}^{*} — compatibilă cu structura de inel — dată de un sistem fundamental de vecinătăți pentru 0 format din ideale (necesar deschise). Aceasta revine la faptul că în Λ s-a pus în evidență o familie nevidă F pe ideale (anume idealele deschise din τ_{Λ}^{*}) astfel încît sînt verificate următoarele condiții:

1°. Dacă $\underline{a}$, $\underline{b}$ sînt ideale din Λ astfel încît $\underline{a} \in F$ și $\underline{b} \supset \underline{a}$, atunci $\underline{b} \in F$.

2°. Pentru orice $\underline{a}$, $\underline{b} \in F$, $\underline{a} \cap \underline{b} \in F$.

3°. Pentru orice $\underline{a} \in F$ și $x \in \Lambda$, $\{\underline{a} : x\} \in F$. O astfel de familie de ideale se va numi sistem *topologizant de ideale* ([1], ch. V, § 2).

Fie $\mathfrak{F}$ o subcategorie de topologizare a lui $\mathcal{C}_{\Lambda}$.

Cum există o corespondență biunivocă între topologiile liniare pe Λ și sistemele topologizante de ideale din Λ, fie F sistemul topologizant asociat cu topologia $\tau_{\Lambda}^{\mathfrak{T}}$ a lui Λ.

Notăm $\widetilde{\mathfrak{T}}$ subcategoria lui $\mathcal{C}_{\Lambda}$ formată din toate modulele al căror anulator al oricărui element stă în F.

PROPOZIȚIA 1. *Cu notațiile de mai sus* : 1. $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *este o subcategorie plină a lui* $\mathcal{C}_{\Lambda}$ *care conține* $\mathfrak{T}$.

2. *Fie* $0 \to M' \to M \xrightarrow{\varphi} M'' \to 0$ *un șir exact în* $\mathcal{C}_{\Lambda}$ *și* $M \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathfrak{T}}$. *Atunci* M', $M'' \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathfrak{T}}$.

3. *Orice limită inductivă a unui sistem inductiv de obiecte din* $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *calculată în* $\mathcal{C}$ *stă în* $\widetilde{\mathfrak{T}}$.

Demonstrație. 1. În adevăr, dacă $M \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{T}$, atunci pentru orice $x \in M$, ${}^{\Lambda}/_{\mathrm{Ann}\,x}$ este izomorf cu un submodul al lui M, deci ${}^{\Lambda}/_{\mathrm{Ann}\,x} \in \mathfrak{T}$.

2. Este evident că $M' \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathfrak{T}}$. Fie acum $x \in M''$ arbitrar, $x = \varphi(y)$ cu $y \in M$. Cum $\mathrm{Ann}\,x \supset \mathrm{Ann}\,y$ rezultă $\mathrm{Ann}\,x \in F$, deci $M'' \in \mathrm{Ob}\,\widetilde{\mathfrak{T}}$.

3. Este suficient să observăm că orice sumă directă de module din $\widetilde{\mathfrak{T}}$ stă în $\widetilde{\mathfrak{T}}$ și că anulatorul oricărui element din acea sumă directă e intersecție finită de ideale din F.

COROLAR. $\widetilde{\mathfrak{T}}$ *este subcategorie de topologizare a lui* $\mathcal{C}_{\Lambda}$, **închisă** (*în sensul lui* [1], *ch. IV*, § *4*). *Există o corespondență biunivocă între sistemele topologizante din* Λ *și subcategoriile închise ale lui* $\mathcal{C}_{\Lambda}$.

Demonstrația este evidentă; conform propoziției 1, topologia dată de subcategoria de topologizare $\widetilde{\mathcal{T}}$ pe orice modul din $\mathcal{C}_\Lambda$ este mai fină decît topologia dată de $\mathcal{T}$. Vom vedea în propozițiile 2, 3, cazuri în care aceste topologii coincid.

PROPOZIȚIA 2. *Fie $\mathcal{T}$ o subcategorie de topologizare a lui $\mathcal{C}_\Lambda$. Sînt echivalente următoarele afirmații:*

a. *$\mathcal{T}$ este o subcategorie închisă.*

b. *Subcategoriile $\mathcal{T}$ și $\widetilde{\mathcal{T}}$ coincid.*

c. *Pentru orice modul M, topologiile $\tau^{\mathcal{T}}_M$ și $\tau^{\widetilde{\mathcal{T}}}_M$ coincid.*

Demonstrație. a $\Rightarrow$ b. În adevăr, dacă $\mathcal{T}$ este subcategorie închisă iar F este sistemul topologizant asociat topologiei $\tau^{\mathcal{T}}_\Lambda$, atunci subcategoria asociată lui F (care prin definiție este $\widetilde{\mathcal{T}}$) este exact T.

Implicația b $\Rightarrow$ c este evidentă.

c $\Rightarrow$ a. Este suficient să arătăm că dacă $(M_i)_{i\in I}$ este o familie de obiecte din $\mathcal{T}$ (unde conform convențiilor generale cînd lucrăm cu $\underline{\mathfrak{U}}$-categorii, I este o mulțime al cărui cardinal este în $\underline{\mathfrak{U}}$), atunci $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \operatorname{Ob} \mathcal{T}$. Or, $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \operatorname{Ob} \widetilde{\mathcal{T}}$ (căci $\widetilde{\mathcal{T}}$ este închisă) deci subobiectul nul din $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ este deschis în $\tau^{\widetilde{\mathcal{T}}}_{\bigoplus\limits_{i\in I} M_i}$, deci e deschis și în topologia dată de $\mathcal{T}$ pe $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, deci $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{T}$.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă M este un Λ-modul finit generat (Λ comutativ) iar $\mathcal{T}$ este o subcategorie de topologizare a lui $\mathcal{C}_\Lambda$, atunci topologiile $\tau^{\mathcal{T}}_M$ și $\tau^{\widetilde{\mathcal{T}}}_M$ coincid.*

Demonstrație. Observăm mai întîi că pentru idealul $\underline{a}$ și $x \in \Lambda$, avem $\{\underline{a} : x\} \supset \underline{a}$, deci cele două topologii date de $\mathcal{T}$ și $\widetilde{\mathcal{T}}$ coincid pe Λ. Procedăm prin inducție, observînd pe de o parte că dacă M_1, M_2 sînt Λ-module astfel încît pe ele topologiile date de $\mathcal{T}$ și $\widetilde{\mathcal{T}}$ coincid, atunci aceste topologii coincid și pe $M_1 \oplus M_2$ și pe de altă parte că, dacă M'' este un modul cît al unui modul M, atunci topologia $\tau^{\mathcal{T}}_{M''}$ și topologia cît a lui $\tau^{\mathcal{T}}_M$ coincid.

§ 3. O subcategorie închisă a lui $\mathcal{C}_\Lambda$ care este și deasă se zice *localizantă* ([1], ch. III, § 11).

Sistemul topologizant F asociat unei subcategorii localizante (care este evident subcategorie de topologizare) satisface în plus condiția:

(4) Dacă $\underline{a}$, $\underline{b}$ sînt ideale din F astfel încît $\underline{b} \in F$ și $\{\underline{a} : x\} \in F$ pentru orice $x \in \underline{b}$, atunci $\underline{a} \in F$.

Subcategoriile localizante ale lui $\mathcal{C}_\Lambda$ sînt în corespondență biunivocă cu sistemele topologizante din Λ care satisfac (4).

PROPOZIȚIA 4. *Fie $\mathcal{T}$ o subcategorie de topologizare a lui $\mathcal{C}_\Lambda$ pe care în plus o presupunem deasă. Atunci $\widetilde{\mathcal{T}}$ este subcategorie localizantă.*

Demonstrație. Fie F sistemul idealelor care formează sistemul fundamental de vecinătăți pentru 0 în Λ pentru topologia $\tau^{\mathcal{T}}_\Lambda$. Sistemul topologizant asociat lui $\widetilde{\mathcal{T}}$ este format din toate idealele lui Λ care conțin un ideal din F. Evident, $\underline{a} \supset \underline{b}$ şi $\underline{b} \in F$ implică $\underline{a} \in F$ deoarece $\Lambda/\underline{a}$ este cît al lui $\Lambda/\underline{b}$. Rămîne să arătăm că F satisface condiţia (4). Fie $\underline{b} \in F$ şi $\underline{a}$ din Λ astfel încît pentru orice $x \in \underline{b}$, $\{a : x\} \in F$. Putem admite $\underline{a} \subset \underline{b}$, altfel înlocuim $\underline{a}$ cu $\underline{a} \cap \underline{b}$. Avem atunci şirul exact

$$0 \to \underline{b}/\underline{a} \to \Lambda/\underline{a} \to \Lambda/\underline{b} \to 0$$

în care $\Lambda/b \in \operatorname{Ob} \mathcal{T}$. Mai mult, pentru orice $\hat{x} \in \underline{b}/\underline{a}$, $\operatorname{Ann} \hat{x} = \{\underline{a} : x\} \in F$, deci $\underline{b}/\underline{a} \in \operatorname{Ob} \mathcal{T}$, aşadar $\Lambda/\underline{a} \in \operatorname{Ob} \mathcal{T}$ (căci $\mathcal{T}$ este deasă). Aşadar $\underline{a} \in F$.

În general reciproca acestei propoziţii nu este adevărată.

Fie $\mathcal{T}$ o subcategorie de topologizare a lui $\mathcal{C}_\Lambda$, M un Λ-modul oarecare şi M' un submodul al său. Pentru orice submodul M_1 al lui M deschis în $\tau_M^{\mathcal{T}}$, $M_1 \cap M'$ este deschis în $\tau_{M'}^{\mathcal{T}}$. Deducem că topologia $\tau_{M'}^{\mathcal{T}}$ este mai fină decît topologia indusă pe M' de $\tau_M^{\mathcal{T}}$.

P. Gabriel dă un criteriu necesar şi suficient ca aceste două topologii să coincidă, anume sînt echivalente afirmaţiile :

1. Subcategoria $\mathcal{T}$ conţine o dată cu un modul toate extensiile sale esenţiale.

2. $\mathcal{T}$ este stabilă la anvelope injective.

3. Pentru orice modul M şi orice submodul M' al său,

$$\tau_{M'}^{\mathcal{T}} = \tau_M^{\mathcal{T}}\big|_{M'}.$$

Propoziţia următoare dă un alt criteriu :

PROPOZIŢIA 5. *Fie $\mathcal{T}$ o subcategorie de topologizare. Fie M un modul oarecare şi M' un submodul deschis al său în topologia τ_M. Sînt echivalente următoarele afirmaţii* :

a. *$\mathcal{T}$ este subcategorie deasă.*

b. $\tau_{M'}^{\mathcal{T}} = \tau_M^{\mathcal{T}}\big|_{M'}$.

Demonstraţie. a $\Rightarrow$ b. Fie M un modul, M' un submodul al său deschis în $\tau_M^{\mathcal{T}}$. Dacă M_1 este un submodul deschis al lui M' în $\tau_{M'}^{\mathcal{T}}$, atunci din şirul exact $0 \to M'/M_1 \to M/M_1 \to M/M' \to 0$ se deduce că M_1 este deschis în M în topologia $\tau_M^{\mathcal{T}}$.

b $\Rightarrow$ a. Fie F sistemul topologizant asociat lui $\mathcal{T}$. Demonstraţia este încheiată dacă arătăm că F satisface condiţia (4). Fie deci $\underline{a}$, $\underline{b}$ ideale în Λ astfel încît $\underline{b} \in F$ şi $\{\underline{a} : x\} \in F$ pentru orice $x \in \underline{b}$. Putem considera $\underline{a} \subseteq \underline{b}$ şi atunci $\underline{a}$ e deschis în topologia lui $\underline{b}$ dată de $\mathcal{T}$ (căci $b/a \in \mathcal{T}$). Cum $\underline{b}$ este deschis, din ipoteza făcută asupra celor două topologii, rezultă că $\underline{a}$ e deschis în $\tau_\Lambda^{\mathcal{T}}$, adică $\underline{a} \in F$.

COROLARUL 1. *Fie $\mathcal{T}$ subcategorie închisă. Sînt echivalente afirmaţiile* :

a. *$\mathcal{T}$ este localizantă.*

b. *Pentru orice modul M şi orice submodul M' deschis al său*

$$\tau_{M'}^{\mathcal{T}} = \tau_M^{\mathcal{T}}\big|_{M'}.$$

COROLARUL 2. *Dacă $\mathcal{T}$ este închisă şi stabilită la anvelope injective, atunci $\mathcal{T}$ este localizantă.*

§4. În acest paragraf, presupune că inelul Λ are o topologie liniară τ_Λ^* — compatibilă cu structura de inel — dată de un sistem fundamental de vecinătăţi pentru 0, format din ideale $\mathcal{B}_\Lambda = \{\underline{a}_i\}_{i \in I}$.

Fie $\mathscr{T}$ subcategoria lui $\mathcal{C}_\Lambda$ formată din acele module M astfel încît pentru orice $x \in M$, Ann x este ideal deschis în τ^*_Λ; este evident o subcategorie de topologizare şi astfel, orice modul M primeşte două topologii: pe de o parte topologia $\tau^{\mathscr{T}}_M$ studiată în paragrafele anterioare şi pe de altă parte topologia τ^*_M dată de sistemul de vecinătăţi pentru 0 :

$$\mathscr{B}_M = \{ M\underline{a}_i \}_{i \in I}.$$

Propoziţia 6. *Cu notaţiile de mai sus, topologia* $\tau^{\mathscr{T}}_M$ *este mai fină decît* τ^*_M. *Dacă* M *este* Λ*-modul finit generat, atunci cele două topologii coincid.*

Demonstraţie. Fie M' un submodul al lui M deschis în τ^*_M adică există $i_0 \in I$ astfel încît $M' \supset M\underline{a}_{i_0}$. Atunci pentru orice $\overline{x} \in M/M'$, Ann $\overline{x} \supset \underline{a}_{i_0}$, deci Ann $\overline{x}$ este deschis în τ^*_Λ, adică $M/M' \in \mathscr{T}$, aşadar M' este deschis în topologia $\tau^{\mathscr{T}}_M$. Presupunem acum $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ şi M' un submodul al lui M deschis în $\tau^{\mathscr{T}}_M$, adică pentru orice $\overline{x} \in M/M'$, Ann $\overline{x}_j$ este deschis în τ^*_Λ. Atunci cu $i\,(j) \in I$, Ann $\overline{x}_j \supset a_{i\,(j)}$ pentru $j = 1, \ldots, n$ deci există $\underline{a}_{i_1} \in B_\Lambda$ astfel încît Ann $M/M' \supset \underline{a}_{i_1}$. Deci $M' \supset M\underline{a}_{i_1}$, adică M' este deschis în τ^*_M.

Presupunem acum că inelul Λ este noetherian (dr) şi liniar topologizat avînd idealul bilateral $\underline{m}$ ca ideal de definiţie (adică luăm $\mathscr{B}_\Lambda = \{\underline{m}^n\}_{n \geqslant 0}$ pentru topologia τ^*_Λ; în acest caz, subcategoria de topologizare $\mathscr{T}$ asociată lui $\mathscr{B}_\Lambda$ la începutul acestui paragraf este chiar localizantă. Dacă $\mathscr{T}$ este stabilă la anvelope injective (*respectiv* T este deasă) şi acest lucru se întîmplă de exemplu dacă Λ este comutativ ([1], ch. V, § 5, propoziţia 10), iar M este un modul finit generat, deci noetherian, atunci conform propoziţiei 6 şi celor spuse în § 3 rezultă că pentru orice submodul N al lui M (*respectiv*, conform propoziţiei 5 pentru orice submodul deschis N al lui M) şi pentru orice n natural, există $h\,(n) \leqslant 0$ astfel încît $N\underline{m}^n < N \cap M\underline{m}^n < N\underline{m}^{n+h}$. Dealtminteri acest rezultat se obţine şi din cunoscuta lemă Artin-Rees.

Luînd în particular $N = \bigcap_{n \geqslant 0} M\underline{m}^n$, obţinem $N \cdot \underline{m} = N$, adică lema lui Krull. În adevăr, $N = M\underline{m}^n \cap N \subset N\underline{m}^{n+h\,(n)} \leqslant N\underline{m}$.

Primită la redacţie la 8 octombrie 1965.

Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste
România, Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. P. Gabriel, *Des catégories abéliennes.* Bull. de la Soc. Math. de France (1962).
2. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. Journ., **9** (1957).
3. A. Lascu, *Algebră locală.* Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966.
4. N. Popescu, *Teoria fasciculelor.* St. cerc. mat., **18**, *2—4* (1966).

SCUFUNDAREA DISTRIBUŢIILOR $\mathcal{D}'_n$ ÎN ALGEBRE PSEUDOTOPOLOGICE

DE

ELEMÉR ROSINGER

Se defineşte o noţiune de pseudotopologie diferită de cea din [11] şi [12], bazată pe noţiunile de proces topologic şi echivalenţă topologică a proceselor topologice. Caracterul „dirijat'' al acestor noţiuni nu apare în definirea pseudotopologiei, definiţie care are un aspect pur algebric. Se construieşte o familie de algebre pseudotopologice complete şi separate care conţin distribuţiile $\mathcal{D}'_n$ şi induc pe $\mathcal{E}_n$ (spaţiul funcţiilor indefinit derivabile pe R^n) algebra uzuală. În plus, $\mathcal{E}_n$ se scufundă continuu în fiecare din aceste algebre, iar derivarea funcţiilor din $\mathcal{E}_n$ se poate prelungi pînă la un operator liniar uniform continuu.

INTRODUCERE

În capitolul I se expune o definiţie a noţiunii de pseudotopologie care prezintă unele modificări faţă de definiţiile din [11] şi [12].

Se expune o formalizare a noţiunii de *proces topologic pe o mulţime nevidă* (avînd drept cazuri particulare noţiunile de *proces Cauchy şi de limită*) care include reprezentările obişnuite prin şiruri, şiruri generalizate, baze de filtre, filtre etc.

Noţiunea centrală din schema pseudotopologică expusă este *echivalenţa topologică a proceselor topologice.*

Plecînd de la această noţiune se pot defini celelalte noţiuni topologice uzuale : procesele Cauchy, convergente, continuitatea, uniform continuitatea etc. Un rol deosebit în studiul proceselor topologice îl au operaţiile de completare şi separare a pseudotopologiilor. În schema pseudotopologică expusă există mai multe posibilităţi de definire a completatului şi separatului unei pseudotopologii.

Schema pseudotopologică expusă se caracterizează prin predominarea aspectului *algebric* al construcţiei asupra celui topologic, identificat în mod obişnuit cu caracterul dirijat al proceselor topologice, Cauchy şi de limită.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 687–729, BUCUREŞTI, 1966

Acest caracter dirijat al proceselor topologice apare numai în cazul unor construcţii concrete de pildă a completatului sau separatului unei pseudotopologii etc.

În capitolul II se construieşte o pseudotopologie $\mathcal{T}_0$ pe spaţiul $\mathcal{E}_n (n \geqslant 1)$ al funcţiilor indefinit derivabile pe R^n şi o familie de algebre pseudotopologice separate şi complete $((\overline{\mathcal{E}}_{n\lambda}, \overline{\mathcal{T}}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ în aşa fel încît :

1) spaţiul distribuţiilor $\mathcal{D}_n'$ este conţinut în fiecare $\overline{\mathcal{E}}_{n\lambda}$ cu $\lambda \in \Lambda$;

2) pentru $\lambda \in \Lambda$, algebra din $\overline{\mathcal{E}}_{n\lambda}$ induce pe $\mathcal{E}_n$ algebra uzuală;

3) derivarea funcţiilor din $\mathcal{E}_n$ se poate extinde pînă la un operator liniar uniform continuu în pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_\lambda$;

4) orice şir din $\mathcal{E}_n$ convergent în pseudotopologia $\mathcal{T}_0$ este convergent şi în pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_\lambda$, cu $\lambda \in \Lambda$.

CAPITOLUL I

§ 1. DEFINIREA PSEUDOTOPOLOGIEI

DEFINIŢIA 1. Fie E o mulţime nevidă. Numim pseudotopologie pe E orice structură

$$\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$$

unde :

1.1. E' este o mulţime nevidă

1.2. $\mathrm{T} : \mathcal{P}(\mathrm{E}) \to \mathcal{P}(\mathrm{E}')$ ca

1.2.1. $(\forall)\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}), \varnothing \neq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$:

$$\varnothing \neq \mathrm{T}(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{T}(\mathrm{B})$$

1.2.2. $\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}'$

1.3. $\Pi : \mathrm{E}' \times \mathrm{E}' \to \{0,1\}$ ca

1.3.1. $(\forall)\, x \in \mathrm{E},\ x', y' \in \mathrm{T}(\{x\})$:

$$\Pi(x', y') = 1$$

1.3.2. $(\forall)\, x', y' \in \mathrm{E}'$:

$$\Pi(x', y') = 1 \Rightarrow \Pi(y', x') = 1$$

1.3.3. $(\forall)\, x', y' \in \mathrm{E}'$:

$$\Pi(x', y') = 1 \Rightarrow \Pi(x', x') = 1.$$

Observaţia 1. Numim orice $x' \in \mathrm{E}'$ *proces topologic pe* E iar pentru $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}), \mathrm{A} \neq \varnothing$ numim $\mathrm{T}(\mathrm{A})$ mulţimea *proceselor topologice pe* E *cu baza în* A. Relaţia binară Π, care în general nu este tranzitivă şi nici reflexivă, reprezintă *echivalenţa topologică a proceselor topologice.*

DEFINIŢIA 2. Fie E o mulţime nevidă, $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$ o pseudotopologie pe E.

Definim $\mathcal{C}h\ (\mathcal{T}) = \{x' \in E' \mid \Pi\ (x', x') = 1\}$.
Pentru $x \in E$ definim

$$\mathcal{C}n\ (\mathcal{T}, x) = \left\{ x' \in E' \;\middle|\; \begin{matrix} (\exists)\ x'_0 \in T(\{x\}) : \\ \Pi(x', x'_0) = 1 \end{matrix} \right\}$$

Observația 2. $\mathcal{C}h\ (\mathcal{T})$ reprezintă mulțimea *proceselor Cauchy pe* E iar $\mathcal{C}n\ (\mathcal{T}, x)$ reprezintă mulțimea *proceselor convergente spre x pe* E în pseudotopologia $\mathcal{T}$.

PROPOZIȚIA 1. *În condițiile de la definiția 2*

1.1. $\bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{C}n\ (\mathcal{T}, x) \subseteq \mathcal{C}h\ (\mathcal{T})$

1.2. $(\forall)\ x \in E$:

$$\varnothing \neq T(\{x\}) \subseteq \mathcal{C}n\ (\mathcal{T}, x).$$

Demonstrație. 1.1 rezultă din 1.3.3, de la definiția 1.
1.2 rezultă din 1.3.1 de la definiția 1.
Semnificația definițiilor de mai sus rezultă din următoarele exemple :
Exemplul 1. Fie E o mulțime nevidă, ρ o semimetrică pe E. Fie

1.1. $E' = N \to E$

1.2. $T : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca

$T(A) = N \to A$

1.3. $\Pi : E' \times E' \to \{0,1\}$ ca

$$\Pi(s_1, s_2) = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\forall)\ \varepsilon > 0 : \\ (\exists)\ h \in N : \\ (\forall)\ h_1, h_2 \in N,\ h_1, h_2 \geqslant h : \\ \rho(s_1(h_1), s_2(h_2)) \leqslant \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Fie $\mathcal{T}_\rho = E, E', T, \Pi)$; atunci $\mathcal{T}_\rho$ este o pseudotopologie pe E, $\mathcal{C}h\ (\mathcal{T}_\rho)$ este mulțimea șirurilor $s : N \to E$ care sînt șiruri Cauchy în spațiul metrizabil (E, ρ) iar pentru $x \in E$, $\mathcal{C}n\ (\mathcal{T}_\rho, x)$ este mulțimea șirurilor $s : N \to E$ care converg spre x în spațiul metrizabil (E, ρ).

Dacă se definește $T_* : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca

$$T_*(A) = \left\{ s \in E' \;\middle|\; \begin{matrix} (\exists)\ h_0 \in N : \\ (\forall)\ h \in N, h \geqslant h_0 : \\ s(h) \in A \end{matrix} \right\}$$

atunci $\mathcal{T}_{*\rho} = (E, E', T_*, \Pi)$ este de asemenea o pseudotopologie pe E.

Exemplul 2. În condițiile de la exemplul 1, fie

2.1. $E' = \bigcup\limits_{n \in N_+} (N^n \to E)$

2.2. $T : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca

$T(A) = \bigcup\limits_{n \in N_+} (N^n \to A)$

2.3. $\Pi : E' \times E' \to \{0,1\}$ ca
$(\forall)\, n_1, n_2 \in N_+,\ s_1 \in N^{n_1} \to E,\ s_2 \in N^{n_2} \to E$:

$$\Pi(s_1, s_2) = 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\forall)\ \varepsilon > 0 : \\ (\exists)\ h \in N : \\ (\forall)\ h_{11}, \ldots, h_{1n_1},\ h_{21}, \ldots, h_{2n_2} \in N \\ \qquad h_{11}, \ldots, h_{1n_1},\ h_{21}, \ldots, h_{2n_2} \geqslant h : \\ \qquad \rho(s_1(h_{11}, \ldots, h_{1n_1}), s_2(h_{21}, \ldots, h_{2n_2})) \leqslant \varepsilon \end{array}\right)$$

Fie $\mathcal{T}^\rho = (E, E', T, \Pi)$, atunci $\mathcal{T}^\rho$ este o pseudotopologie pe E, $\mathcal{C}h(\mathcal{T}^\rho)$ este mulțimea șirurilor $s \in \bigcup_{n \in N_+} (N^n \to E)$, care sînt șiruri Cauchy în spațiul metrizabil (E, ρ), iar pentru $x \in E$, $\mathcal{C}n(\mathcal{T}^\rho, x)$ este mulțimea șirurilor $s \in \bigcup_{n \in N_+} (N^n \to E)$ care converg spre x în spațiul metrizabil (E, ρ).

Dacă se definește $T^* : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca

$$T^*(A) = \left\{ s \in E' \;\middle|\; \begin{array}{l} (\exists)\ n \in N_+ : \\ \quad * 1.\ s \in N^n \to E \\ \quad * 2.\ (\exists)\ h \in N : \\ \qquad\quad (\forall)\ h_1, \ldots, h_n \in N,\ h_1, \ldots, h_n \geqslant h : \\ \qquad\qquad s(h_1, \ldots, h_n) \in A \end{array} \right\}$$

atunci $\mathcal{T}^{*\rho} = (E, E', T^*, \Pi)$ este de asemenea o pseudotopologie pe E.

Exemplul 3. Fie E o mulțime nevidă, $\mathcal{U}$ o structură uniformă pe E. Fie

3.1. $E' = \mathrm{BFIL}(E)$ [1])
3.2. $T : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca
$T(A) = \mathrm{BFIL}(A)$.
3.3. $\Pi : E' \times E' \to \{0,1\}$ ca

$$\Pi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\forall)\ U \in \mathcal{U} : \\ (\exists)\ B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2 : \\ \quad B_1 \times B_2 \subseteq U \end{array}\right).$$

Fie $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = (E, E', T, \Pi)$; atunci $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ este o pseudotopologie pe E, $\mathcal{C}h(\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ este mulțimea bazelor de filtru pe E care generează filtre Cauchy pe E în structura uniformă $\mathcal{U}$ iar pentru $x \in E$, $\mathcal{C}_n(\mathcal{T}(\mathcal{U}), x)$ este mulțimea bazelor de filtru pe E care generează filtre convergente pe *E* spre x în structura uniformă $\mathcal{U}$.

Observația 3. În vederea înglobării în schema pseudotopologică a proceselor topologice reprezentate prin șiruri generalizate, definiția 1 trebuie extinsă la cazul cînd E' este o categorie.

Această extindere care nu prezintă dificultăți principiale, nefiind necesară în construcțiile din capitolul 2, nu va fi expusă în lucrare.

---

[1]) Prin B F I L (E) se notează mulțimea bazelor de filtru pe E.

Observaţia 4. Totalitatea pseudotopologiilor pe o mulţime nevidă dată nu mai formează o mulţime ci o categorie.

Observaţia 5. Noţiunea de pseudotopologie formulată la definiţia 1 nu se reduce la noţiunea de structură uniformă, deoarece după cum rezultă din exemplul 3, în cazul unei structuri uniforme *echivalenţa topologică* Π este tranzitivă.

§ 2. COMPARAREA PSEUDOTOPOLOGIILOR

DEFINIŢIA 3. Fie E, E′ două mulţimi nevide, $T : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E')$ ca

3.1. $(\forall)\, A, B \in \mathcal{P}(E),\ \emptyset \neq A \subseteq B :$

$$\emptyset \neq T(A) \subseteq T(B).$$

3.2. $T(E) = E'$.

Notăm cu PT (E, E′, T) mulţimea pseudotopologiilor pe E de forma $\mathcal{T} = (E, E', T, \Pi)$.

DEFINIŢIA 4. În condiţiile de la definiţia 3 definim relaţia binară $\leqslant$ pe PT (E, E′, T) încît

$$\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\forall)\, x', y' \in E' : \\ \Pi_2(x', y') = 1 \Rightarrow \Pi_1(x', y') = 1 \end{array} \right)$$

unde $\mathcal{T}_1 = (E, E', T, \Pi_1)$, $\mathcal{T}_2 = (E, E', T, \Pi_2)$. În acest caz spunem că pseudotopologia $\mathcal{T}_2$ este mai fină decît pseudotopologia $\mathcal{T}_1$ sau aceasta din urmă este mai puţin fină decît prima.

PROPOZIŢIA 2. *În condiţiile de la definiţia 3 relaţia binară* $\leqslant$ *este o ordonare reflexivă proprie pe* PT (E, E′, T).

Demonstraţia este imediată.

Notaţie. În condiţiile de la definiţia 3, fie $\mathfrak{T} \subseteq PT(E, E', T)$ nevidă; notăm $\overline{\mathcal{T}} = (E, E', T, \overline{\Pi})$, $\underline{\mathcal{T}} = (E, E', T, \underline{\Pi})$, unde $\overline{\Pi}, \underline{\Pi} : E' \times E' \to \{0,1\}$ ca

1. $\overline{\Pi}(x', y') = 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\forall)\ (E, E', T, \Pi) \in \mathfrak{T} : \\ \Pi(x', y') = 1 \end{array} \right)$

2. $\underline{\Pi}(x', y') = 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\exists)\ (E, E', T, \Pi) \in \mathfrak{T} : \\ \Pi(x', y') = 1 \end{array} \right)$

Are loc atunci

TEOREMA 1. *Avem*

1. $\overline{\mathcal{T}}, \underline{\mathcal{T}} \in PT(E, E', T)$
2. $(\forall)\, \mathcal{T} \in \mathfrak{T} :$

$$\underline{\mathcal{T}} \leqslant \mathcal{T} \leqslant \overline{\mathcal{T}}$$

3. $(\forall)\ \mathcal{T} \in \mathrm{PT}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$:

3.1. $\begin{pmatrix} (\forall)\ \mathcal{T}_1 \in \mathfrak{T} : \\ \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T} \leqslant \underline{\mathcal{T}}$

3.2. $\begin{pmatrix} (\forall)\ \mathcal{T}_1 \in \mathfrak{T} : \\ \mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T} \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{\mathcal{T}} \leqslant \mathcal{T}$

Demonstrație. 1. Fie $x \in \mathrm{E}$, $x', y' \in \mathrm{T}(\{x\})$; atunci $(\forall)\ (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi(x', y') = 1$$

deci

$$\overline{\Pi}(x', y') = \underline{\Pi}(x', y') = 1 ;$$

fie $x', y' \in \mathrm{E}'$; dacă $\overline{\Pi}(x', y') = 1$, atunci $(\forall)\ (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi(x', y') = 1$$

deci $(\forall)\ (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi(y', x') = 1$$

deci $\overline{\Pi}(y', x') = 1$; analog $\underline{\Pi}(x', y') = 1 \Rightarrow \underline{\Pi}(y', x') = 1$; dacă $\overline{\Pi}(x', y') = 1$, atunci $(\forall)\ (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi) \in \overline{\mathfrak{T}}$:

$$\Pi(x', x') = 1$$

deci $\overline{\Pi}(x', x') = 1$; analog $\underline{\Pi}(x', y') = 1 \Rightarrow \underline{\Pi}(x', x') = 1$;

2. Este evidentă ;

3. Fie $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi) \in \mathrm{P}\,\mathrm{T}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$

3.1. Fie $x', y' \in \mathrm{E}'$ ca $\underline{\Pi}(x', y') = 1$; atunci $(\exists)\ \mathcal{T}_1 = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_1) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi_1(x', y') = 1$$

dar $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1$ deoarece $\mathcal{T}_1 \in \mathfrak{T}$, deci $\Pi(x', y') = 1$, deci, în definitiv, $\mathcal{T} \leqslant \underline{\mathcal{T}}$;

3.2. Fie $x', y' \in \mathrm{E}'$ ca $\Pi(x', y') = 1$; atunci $(\forall)\ \mathcal{T}_1 = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_1) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi_1(x', y') = 1 \text{ deoarece } \mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}$$

deci $\overline{\mathcal{T}} \leqslant \mathcal{T}$.

3. FUNCȚII CONTINUE ȘI UNIFORM CONTINUE

DEFINIȚIA 5. Fie E_1, E_2, E_1', E_2' mulțimi nevide, $\mathrm{T}_1 : \mathcal{P}(\mathrm{E}_1) \to \mathcal{P}(\mathrm{E}_1')$, $\mathrm{T}_2 : \mathcal{P}(\mathrm{E}_2) \to \mathcal{P}(\mathrm{E}_2')$ ca

5.1. $(\forall)\ \mathrm{A}_i, \mathrm{B}_i \in \mathcal{P}(\mathrm{E}_i)$, $\emptyset \neq \mathrm{A}_i \subseteq \mathrm{B}_i$:

$$\emptyset \neq \mathrm{T}_i(\mathrm{A}_i) \subseteq \mathrm{T}_i(\mathrm{B}_i) \qquad \text{cu } i \in \{1, 2\}.$$

5.2. $\mathrm{T}_i(\mathrm{E}_i) = \mathrm{E}_i'$ cu $i \in \{1, 2\}$.

Fie $\mathrm{S} : (\mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2) \to (\mathrm{E}_1' \to \mathrm{E}_2')$ ca

5.3. $(\forall)\ f : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$, $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{P}(\mathrm{E}_1)$:

$$(\mathrm{S}(f))(\mathrm{T}_1(\mathrm{A}_1)) \subseteq \mathrm{T}_2(f(\mathrm{A}_1)).$$

Fie $\mathcal{T}_1 = (E_1, E'_1, T_1, \Pi_1) \in PT(E_1, E'_1, T_1)$

$$\mathcal{T}_2 = (E_2, E'_2, T_2, \Pi_2) \in PT(E_2, E'_2, T_2)$$

$$f : E_1 \to E_2$$

$$x_1 \in E_1.$$

Spunem că f este *S continuă în* x_1 de la pseudotopologia $\mathcal{T}_1$ pe E_1 la pseudotopologia $\mathcal{T}_2$ pe E_2 numai dacă

5.4. $(\forall)\ x'_1 \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}_1, x_1)$:

$$(S(f))(x'_1) \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}_2, f(x_1)).$$

Spunem că f este S *continuă pe* E_1 de la pseudotopologia $\mathcal{T}_1$ pe E_1 la pseudotopologia $\mathcal{T}_2$ pe E_2 numai dacă

5.5. $(\forall)\ x_1 \in E_1 : f$ este S continuă în x_1.

Spunem că f este S *uniform continuă pe* E_1 de la pseudotopologia $\mathcal{T}_1$ pe E_1 la pseudotopologia $\mathcal{T}_2$ pe E_2 numai dacă

5.6. $(\forall)\ x'_1, y'_1 \in E'_1$:

$$\Pi_1(x'_1, y'_1) = 1 \Rightarrow \Pi_2((S(f))(x'_1), (S(f))(y'_1)) = 1.$$

PROPOZIȚIA 3. *În condițiile de la definiția 5 dacă f este* S *uniform continuă atunci este* S *continuă.*

Demonstrație. Fie $x_1 \in E_1$, $x'_1 \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}_1, x_1)$; atunci $(\exists)\ x'_{10} \in T_1(\{x_1\})$:

$$\Pi_1(x'_1, x'_{10}) = 1 ;$$

deci $\Pi_2((S(f))(x'_1), (S(f))(x'_{10})) = 1$ deoarece f este S uniform continuă, dar $x'_{10} \in T_1(\{x_1\}) \Rightarrow (S(f))(x'_{10}) \in (S(f))(T_1(\{x_1\}))$ iar $(S(f))(T_1(\{x_1\})) \subseteq T_2(\{f(x_1)\})$ deci $(S(f))(x'_{10}) \in T_2(\{f(x_1)\})$, de unde rezultă că $(S(f))(x'_1) \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}_2, f(x_1))$.

Semnificația definiției 5 rezultă din exemplul următor :

Exemplul 4. Fie E_1, E_2 mulțimi nevide,

$$E'_1 = BFIL(E_1),\ E'_2 = BFIL(E_2).$$

Fie $T_1 : \mathcal{P}(E_1) \to \mathcal{P}(E'_1)$, $T_2 : \mathcal{P}(E_2) \to \mathcal{P}(E'_2)$ ca

$$T_1(A_1) = BFIL(A_1),\ T_2(A_2) = BFIL(A_2) ;$$

atunci T_1, T_2 verifică condițiile 5.1. și 5.2. de la definiția 5.
Fie $S : (E_1 \to E_2) \to (E'_1 \to E'_2)$ ca

$$(S(f))(\mathcal{B}_1) = \{f(B_1) \mid B_1 \in \mathcal{B}_1\} ;$$

atunci S verifică condiția 5.3 de la definiția 5.

Fie $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ structuri uniforme pe E_1 respectiv E_2 ; atunci S continuitatea într-un punct, S continuitatea pe E_1 și S uniform continuitatea de la pseudotopologia $\mathcal{T}(\mathcal{U}_1)$ pe E_1 la pseudotopologia $\mathcal{T}(\mathcal{U}_2)$ pe E_2 (a se vedea exemplul 3) coincid respectiv cu continuitatea într-un punct, continuitatea pe E_1, uniform continuitatea pe E_1 de la structura uniformă $\mathcal{U}_1$ pe E_1 la structura uniformă $\mathcal{U}_2$ pe E_2.

§ 4. COMPLETAREA PSEUDOTOPOLOGIILOR

DEFINIȚIA 6. Fie E o mulțime nevidă, $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$ o pseudotopologie pe E. Spunem că pseudotopologia $\mathcal{T}$ este *completă* numai dacă

$$\begin{aligned} &(\forall)\ x' \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) : \\ (\mathrm{PTC})\quad &(\exists)\ x \in \mathrm{E} : \\ &x' \in \mathcal{C}_n\,(\mathcal{T}, x) \end{aligned}$$

PROPOZIȚIA 4. *În condițiile de la definiția* 6, *pseudotopologia* $\mathcal{T}$ *este completă numai dacă*

$$\mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) \subseteq \bigcup_{x \in \mathrm{E}} \mathcal{C}_n\,(\mathcal{T}, x)$$

sau numai dacă

$$\mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) = \bigcup_{x \in \mathrm{E}} \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x).$$

Demonstrația rezultă din definiția 2 și propoziția 1.

DEFINIȚIA 7. În condițiile de la definiția 6 numim *completat al pseudotopologiei* $\mathcal{T}$ orice structură $(\widetilde{\mathcal{T}}, \mathring{\iota}, \mathring{\iota}')$, unde

7.1. $\widetilde{\mathcal{T}} = (\widetilde{\mathrm{E}}, \widetilde{\mathrm{E}}', \widetilde{\mathrm{T}}, \widetilde{\Pi})$ este o pseudotopologie completă pe mulțimea nevidă $\widetilde{\mathrm{E}}$,

7.2. $\mathring{\iota} : \mathrm{E} \to \widetilde{\mathrm{E}}$, $\mathring{\iota}' : \mathrm{E}' \to \widetilde{\mathrm{E}}'$ ca

7.2.1. $(\forall)\ \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}), \mathrm{A} \neq \emptyset :$

$$\mathring{\iota}'\,(\mathrm{T}\,(\mathrm{A})) \subseteq \widetilde{\mathrm{T}}\,(\mathring{\iota}\,(\mathrm{A}))$$

7.3. $(\forall)\ x', y' \in \mathrm{E}' :$

$$\Pi\,(x', y') = 1 \Rightarrow \widetilde{\Pi}\,(\mathring{\iota}'(x'), \mathring{\iota}'\,(y')) = 1$$

7.4. $(\forall)\ \widetilde{x}' \in \mathcal{C}h\,(\widetilde{\mathcal{T}}) :$

$(\exists)\ x' \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) :$

$$\widetilde{\Pi}\,(\widetilde{x}', \mathring{\iota}'\,(x')) = 1.$$

Mulțimea $\widetilde{\mathrm{E}}$ se numește *completat al lui* E în pseudotopologia $\mathcal{T}$.

Observația 6. Condițiile 7.2 și 7.3 exprimă S uniform continuitatea aplicației $\mathring{\iota} : \mathrm{E} \to \widetilde{\mathrm{E}}$ unde

$$\mathrm{S} : (\mathrm{E} \to \widetilde{\mathrm{E}}) \to (\mathrm{E}' \to \widetilde{\mathrm{E}}') \text{ ca } \mathrm{S}\,(\mathring{\iota}) = \mathring{\iota}' ;$$

condiția 7.4 exprimă faptul că $\mathring{\iota}\,(\mathrm{E})$ este densă în $\widetilde{\mathrm{E}}$ în pseudotopologia $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Exemplul 5. În condițiile de la exemplul 3 fie

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathrm{E}} = \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}\,(\mathcal{U})) \\ &\widetilde{\mathrm{E}}' = \mathrm{BFIL}\,(\widetilde{\mathrm{E}}) \\ &\widetilde{\mathrm{T}} : \mathcal{P}\,(\widetilde{\mathrm{E}}) \to \mathcal{P}\,(\widetilde{\mathrm{E}}') \text{ ca} \\ &\qquad \widetilde{\mathrm{T}}\,(\widetilde{\mathrm{A}}) = \mathrm{BFIL}\,(\widetilde{\mathrm{A}}) \end{aligned}$$

$$\mathring{\imath} : \mathrm{E} \to \widetilde{\mathrm{E}},\ \mathring{\imath}' : \mathrm{E}' \to \widetilde{\mathrm{E}}' \text{ ca}$$

$$\mathring{\imath}\,(x) = \{\{x\}\}$$

$$\mathring{\imath}'(\mathcal{B}) = \{\mathring{\imath}\,(\mathrm{B}) \mid \mathrm{B} \in \mathcal{B}\}$$

$$\widetilde{\Pi} : \widetilde{\mathrm{E}}' \times \widetilde{\mathrm{E}}' \to \{0,1\} \text{ ca}$$

$$\widetilde{\Pi}\,(\widetilde{x}', \widetilde{y}') = 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\forall)\ \mathrm{U} \in \mathcal{U} : \\ (\exists)\ \widetilde{\mathrm{A}} \in \widetilde{x}',\ \widetilde{\mathrm{B}} \in \widetilde{y}' : \\ (\forall)\ \widetilde{x} \in \widetilde{\mathrm{A}},\ \widetilde{y} \in \widetilde{\mathrm{B}} : \\ (\exists)\ \mathrm{A} \in \widetilde{x},\ \mathrm{B} \in \widetilde{y} : \\ \quad \mathrm{A} \times \mathrm{B} \subseteq \mathrm{U} \end{array}\right)$$

atunci $((\widetilde{\mathrm{E}}, \widetilde{\mathrm{E}}', \widetilde{\mathrm{T}}', \widetilde{\Pi}), \imath, \imath')$ este un completat al pseudotopologiei $\mathcal{T}(\mathcal{U})$; fie pe $\widetilde{E}$ structura uniformă $\widetilde{\mathcal{U}}$ generată de

$$\left\{\left\{(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \widetilde{\mathrm{E}} \times \widetilde{\mathrm{E}} \,\middle|\, \begin{array}{c} (\exists)\ \mathrm{A} \in \widetilde{x},\ \mathrm{B} \in \widetilde{y} : \\ \mathrm{A} \times \mathrm{B} \subseteq \mathrm{U} \end{array}\right\} \,\middle|\, \mathrm{U} \in \mathcal{U}\right\};$$

atunci $(\widetilde{\mathrm{E}}, \widetilde{\mathrm{E}}', \widetilde{\mathrm{T}}, \widetilde{\Pi}) = \mathcal{T}(\widetilde{\mathcal{U}})$ şi $\widetilde{\mathcal{U}}$ este structura uniformă completă (în general neseparată) asociată structurii uniforme $\mathcal{U}$.

§ 5. SEPARAREA PSEUDOTOPOLOGIILOR

DEFINIŢIA 8. În condiţiile de la definiţia 6 spunem că pseudotopologia $\mathcal{T}$ este *separată* numai dacă

$$(\forall)\ x,\ y \in \mathrm{E} :$$

$$(\mathrm{PTH}) \left(\begin{array}{c} (\exists)\ x' \in \mathrm{T}\,(\{x\}),\ y' \in \mathrm{T}\,(\{y\}) : \\ \Pi\,(x', y') = 1 \end{array}\right) \Rightarrow x = y.$$

DEFINIŢIA 9. În condiţiile de la definiţia 6 numim *separat al pseudotopologiei* $\mathcal{T}$ orice structură $(\underset{\sim}{\mathcal{T}}, \mathring{\imath}, \mathring{\imath}')$, unde

9.1. $\underset{\sim}{\mathcal{T}} = (\underset{\sim}{\mathrm{E}}, \underset{\sim}{\mathrm{E}}', \underset{\sim}{\mathrm{T}}, \underset{\sim}{\Pi})$ este o pseudotopologie separată pe mulţimea nevidă $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$,

9.2. $\mathring{\imath} : \mathrm{E} \to \underset{\sim}{\mathrm{E}},\ \mathring{\imath}' : \mathrm{E}' \to \underset{\sim}{\mathrm{E}}'$ ca

9.2.1. $\mathring{\imath}\,(\mathrm{E}) = \underset{\sim}{\mathrm{E}},\ \mathring{\imath}'\,(\mathrm{E}') = \underset{\sim}{\mathrm{E}}'$

9.2.2. $(\forall)\ \mathrm{A} \in \mathcal{P}\,(\mathrm{E}),\ \mathrm{A} \neq \emptyset :$

$$\mathring{\imath}'\,(\mathrm{T}\,(\mathrm{A})) \subseteq \underset{\sim}{\mathrm{T}}\,(\mathring{\imath}\,(\mathrm{A}))$$

9.3. $(\forall)\ x',\ y' \in \mathrm{E}' :$

$$\Pi\,(x', y') = 1 \Rightarrow \underset{\sim}{\Pi}\,(\mathring{\imath}'\,(x'), \mathring{\imath}'\,(y')) = 1.$$

Mulţimea $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$ se numeşte *separat al lui* E în pseudotopologia $\mathcal{T}$.

Exemplul 6. În condițiile de la exemplul 3 fie relația binară e definită pe E ca

$$e\,(x,\ y) = 1 \Leftrightarrow (x,\ y) \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{U}\,;$$

atunci e este o relație de echivalență pe E.

Fie $\underset{\sim}{\mathrm{E}} = \mathrm{E}/e$

$\underset{\sim}{\mathrm{E}}' = \mathrm{BFIL}\,(\underset{\sim}{\mathrm{E}})$

$\underset{\sim}{\mathrm{T}} := \mathcal{P}\,(\underset{\sim}{\mathrm{E}}) \to \mathcal{P}\,(\underset{\sim}{\mathrm{E}}')$ ca

$\underset{\sim}{\mathrm{T}}\,(\underset{\sim}{\mathrm{A}}) = \mathrm{BFIL}\,(\underset{\sim}{\mathrm{A}})$

$\text{℩} : \mathrm{E} \to \underset{\sim}{\mathrm{E}}$ aplicația canonică a lui E pe $\underset{\sim}{\mathrm{E}} = \mathrm{E}/e$

$\text{℩}'\ \ \mathrm{E}' \to \underset{\sim}{\mathrm{E}}'$ ca

$\text{℩}'\,(\mathcal{B}) = \{\text{℩}\,(\mathrm{B}) \mid \mathrm{B} \in \mathcal{B}\}$

$\underset{\sim}{\Pi} : \underset{\sim}{\mathrm{E}}' \times \underset{\sim}{\mathrm{E}}' \to \{0, 1\}$ ca

$$\underset{\sim}{\Pi}\,(\underset{\sim}{x}',\ \underset{\sim}{y}') = 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (\forall)\ \mathrm{U} \in \mathcal{U} : \\ (\exists)\ \underset{\sim}{\mathrm{A}} \in \underset{\sim}{x}',\ \underset{\sim}{\mathrm{B}} \in \underset{\sim}{y}' : \\ (\forall)\ \underset{\sim}{x} \in \underset{\sim}{\mathrm{A}},\ \underset{\sim}{y} \in \underset{\sim}{\mathrm{B}} : \\ (\exists)\ x \in \underset{\sim}{x},\ y \in \underset{\sim}{y} : \\ \qquad (x,\ y) \in \mathrm{U} \end{array}\right)$$

atunci $((\underset{\sim}{\mathrm{E}},\ \underset{\sim}{\mathrm{E}}',\ \underset{\sim}{\mathrm{T}},\ \underset{\sim}{\Pi}),\ \text{℩},\ \text{℩}')$ este un separat al pseudotopologiei $\mathcal{T}\ (\mathcal{U})$.

Fie pe $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$ structura uniformă $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ generată de

$$\{(\text{℩} \times \text{℩})\,(\mathrm{U}) \mid \mathrm{U} \in \mathcal{U}\}\,;$$

atunci $(\underset{\sim}{\mathrm{E}},\ \underset{\sim}{\mathrm{E}}',\ \underset{\sim}{\mathrm{T}},\ \underset{\sim}{\Pi}) = \mathcal{T}\,(\underset{\sim}{\mathcal{U}})$ și $(\underset{\sim}{\mathcal{U}})$ este structura uniformă separată asociată structurii uniforme $\mathcal{U}$.

TEOREMA 2. *Fie* E *o mulțime nevidă,* $\mathcal{T} = (\mathrm{E},\ \mathrm{E}',\ \mathrm{T},\ \Pi)$ *o pseudotopologie pe* E, *fie* $(\underset{\sim}{\mathcal{T}},\ \text{℩},\ \text{℩}')$ *un separat al pseudotopologiei* $\mathcal{T}$ *unde* $\underset{\sim}{\mathcal{T}} = (\underset{\sim}{\mathrm{E}},\ \underset{\sim}{\mathrm{E}}',\ \underset{\sim}{\mathrm{T}},\ \underset{\sim}{\Pi})$.

Dacă $\mathcal{T}$ *este complet și* $\text{℩}'\ (\mathcal{C}h\,(\mathcal{T})) \supseteq \mathcal{C}h\,(\underset{\sim}{\mathcal{T}})$, *atunci și* $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ *este complet.*

Demonstrație. Fie $\underset{\sim}{x}' \in \mathcal{C}h\,(\underset{\sim}{\mathcal{T}})$; atunci

$$(\exists)\ x' \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) :$$
$$\underset{\sim}{x}' = \text{℩}'\,(x')$$

dar deoarece $\mathcal{T}$ este completă

$$(\exists)\ x \in \mathrm{E},\ x_0' \in \mathrm{T}\,(\{x\}) :$$
$$\Pi\,(x',\ x_0') = 1.$$

Fie $\underset{\sim}{x'_0} = \mathring{\imath}'(x'_0)$, $\underset{\sim}{x} = \mathring{\imath}(x)$; atunci $\underset{\sim}{x'_0} \in \mathring{\imath}'(\mathrm{T}(\{x\})) \subseteq \underset{\sim}{\underline{\mathrm{T}}}(\{\mathring{\imath}(x)\}) = \underset{\sim}{\underline{\mathrm{T}}}(\{\underset{\sim}{x}\})$ iar $\Pi(x', x'_0) = 1 \Rightarrow \underset{\sim}{\underline{\Pi}}(\mathring{\imath}'(x'), \mathring{\imath}'(x'_0)) = 1$ deci $\underset{\sim}{\underline{\Pi}}(\underset{\sim}{x'}, \underset{\sim}{x'_0}) = 1$.

PROPOZIȚIA 5. *Fie* E *o mulțime nevidă,* $\mathcal{T}_1 = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_1)$, $\mathcal{T}_2 = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_2)$ *două pseudotopologii pe* E. *Dacă*

5.1. $\mathcal{T}_1$ *este separată,*

5.2. $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$,

atunci și $\mathcal{T}_2$ *este separată.*

Demonstrație. Fie $x, y \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{T}(\{x\})$, $y' \in \mathrm{T}(\{y\})$ ca $\Pi_2(x', y') = 1$; atunci $\Pi_1(x', y') = 1$ deoarece $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}_2$ deci $x = y$ deoarece $\mathcal{T}_1$ este separată.

Notație. În condițiile de la definiția 6 notăm

1. $\mathcal{H}(\mathcal{T}) = \left\{ \mathcal{T}_1 \in \mathrm{P\,T}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1.1.\ \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1 \\ 1.2.\ \mathcal{T}_1 \text{ este separată} \end{array} \right\}$

2. $\mathcal{T}^{\mathrm{H}} = \inf.\, \mathcal{H}(\mathcal{T})$.

PROPOZIȚIA 6. *În condițiile de la definiția 6*

6.1. $\mathcal{H}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$;

6.2. $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}^{\mathrm{H}}$;

6.3. $\mathcal{T}^{\mathrm{H}}$ *este separată*;

6.4. $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\mathrm{H}}$ *numai dacă* $\mathcal{T}$ *este separată.*

Demonstrație. 6.1. Fie $\Pi^* : \mathrm{E}' \times \mathrm{E}' \to \{0,1\}$ ca $\Pi^*(x', y') = 1 \Leftrightarrow x' = y'$; atunci evident $\mathcal{T}^* = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi^*) \in \mathcal{H}(\mathcal{T})$

6.2. Rezultă din teorema 1.

6.3. Fie $\mathcal{T}^{\mathrm{H}} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi^{\mathrm{H}})$ și $x, y \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{T}(\{x\})$, $y' \in \mathrm{T}(\{y\})$ ca $\Pi^{\mathrm{H}}(x', y') = 1$; atunci conform teoremei 1

$$(\exists)\, \mathcal{T}_1 = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_1) \in \mathcal{H}(\mathcal{T}) :$$
$$\Pi_1(x', y') = 1$$

deci $x = y$ deoarece $\mathcal{T}_1$ este separată.

6.4. Este imediată.

§ 6. GRUPURI PSEUDOTOPOLOGICE

DEFINIȚIA 10. Fie E un grup scris aditiv, $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$ o pseudotopologie pe E. Spunem că *pseudotopologia* $\mathcal{T}$ *este compatibilă cu structura de grup a lui* E numai dacă

10.1. E′ este grup (scris de asemenea aditiv)

10.2. $(\forall)\ x, y, \in \mathrm{E}$:

$$\mathrm{T}(\{x\}) - \mathrm{T}(\{y\}) \subseteq \mathrm{T}(\{x - y\})\ ^{2)}$$

---

2) Fie X un grup scris aditiv, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{X})$, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \neq \emptyset$, notăm $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \{a + b \mid a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\}$, $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \{a - b \mid a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\}$

10.3. $(\forall)\ x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 \in E'$:

$$\Pi(x'_1, y'_1) = \Pi(x'_2, y'_2) = 1 \Rightarrow \Pi(x'_1 - x'_2,\ y'_1 - y'_2) = 1.$$

Numim $(E, \mathcal{T})$ *grup pseudotopologic.*

PROPOZIȚIA 5′. *Fie* $(E, \mathcal{T})$ *un grup pseudotopologic, unde* $\mathcal{T} = (E, E', T, \Pi)$. *Atunci*

5.1. $0' \in T(\{0\})$ *unde* 0 *și* $0'$ *sînt elementele neutre din* E *respectiv* E′.

5.2. $(\forall)\ x \in E$:

$$T(\{-x\}) = -T(\{x\})$$

5.3. $(\forall)\ x, y \in E$:

5.3.1. $T(\{x + y\}) = T(\{x\}) + T(\{y\})$

5.3.2. $T(\{x - y\}) = T(\{x\}) - T(\{y\})$.

Demonstrație. 5.1. Avem $T(\{0\}) - T(\{0\}) \subseteq T(\{0\})$ dar $T(\{0\}) \neq \emptyset$ deoarece $\{0\} \neq \emptyset$.

Fie $x' \in T(\{0\})$, atunci $0' = x' - x' \in T(\{0\}) - T(\{0\}) \subseteq T(\{0\})$.

5.2. Avem $T(\{0\}) - T(\{x\}) \subseteq T(\{-x\})$ deci $-T(\{x\}) \subseteq T(\{-x\})$ căci $0' \in T(\{0\})$ dar înlocuind pe x cu $-x$ obținem

$$-T(\{-x\}) \subseteq T(\{x\}),$$

de unde rezultă egalitatea cerută.

5.3.1. Incluziunea $\supseteq$ este adevărată deoarece

$$T(\{x\}) + T(\{y\}) = T(\{x\}) - T(\{-y\}) \subseteq T(\{x - (-y)\}).$$

Reciproc,

$$T(\{x + y\}) \subseteq T(\{x + y\}) - T(\{y\}) + T(\{y\}) = (T(\{x + y\}) - T(\{y\})) +$$
$$T(\{y\}) \subseteq T(\{x + y - y\}) + T(\{y\}) = T(\{x\}) + T(\{y\}).$$

5.3.2. Incluziunea $\supseteq$ rezultă din 10.2 de la definiția 10 ; reciproc,

$$T(\{x - y\}) \subseteq T(\{x - y\}) + T(\{y\}) - T(\{y\}) = (T(\{x - y\})) +$$
$$T(\{y\})) - T(\{y\}) \subseteq T(\{x - y + y\}) - T(\{y\}) = T(\{x\}) - T(\{y\}).$$

PROPOZIȚIA 6′. *În condițiile de la propoziția 5′*

6.1. $0' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) \subseteq \mathcal{C}h(\mathcal{T})$

6.2. $(\forall)\ x', y' \in E'$:

$$\Pi(x', y') = 1 \Rightarrow \Pi(-x', -y') = 1$$

6.3. $(\forall)\ x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, \in E'$:

$$\Pi(x'_1, y'_1) = \Pi(x'_2, y'_2) = 1 \Rightarrow \Pi(x'_1 + x'_2,\ y'_1 + y'_2) = 1$$

6.4. $(\forall)\ x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$:

$$\Pi(x', y') = 1 \Leftrightarrow \Pi(x' - y', 0') = 1$$

Demonstraţie. 6.1. Rezultă din 5.1 de la propoziţia 5′.

6.2. Fie $\Pi(x', y') = 1$ dar $\Pi(0', 0') = 1$ deci conform cu 10.3 de la definiţia 10 rezultă

$$\Pi(0' - x', 0' - y') = 1$$

deci $\Pi(-x', -y') = 1$.

6.3. Rezultă din 6.2 şi din 10.3 de la definiţia 10.

6.4. Are loc implicaţia $\Rightarrow$ deoarece

$$\Pi(x', y') = \Pi(y', y') = 1 \Rightarrow \Pi(x' - y', y' - y') = 1.$$

Reciproc,

$$\Pi(x' - y', 0') = \Pi(y', y') = 1 \Rightarrow \Pi(x', y') = 1.$$

COROLAR (*G*). *În condiţiile de la propoziţia 5′*

$(\forall)\ x', y' \in E'$:

$$\Pi(x', y') = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{G.1.} & x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}) \\ \text{G.2.} & x' - y' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) \end{pmatrix}$$

Demonstraţie. Implicaţia $\Rightarrow$ este imediată ; reciproc, avem $\Pi(x', x') = \Pi(y', y') = 1$ şi $(\exists)\ z'_0 \in T(\{0\})$:

$$\Pi(x' - y', z'_0) = 1$$

dar $\Pi(0', z'_0) = 1$ căci $0', z'_0, \in T(\{0\})$ deci $\Pi(x' - y' - 0', z'_0 - z'_0) = 1$ deci $\Pi(x' - y', 0') = 1$ de unde $\Pi(x' - y' + y', 0' + y') = 1$ adică $\Pi(x', y') = 1$.

PROPOZIŢIA 7. *În condiţiile de la propoziţia 5′*

7.1. $\mathcal{C}h(\mathcal{T})$ *este subgrup al lui* E′

7.2. $(\forall)\ x, y, \in E$:

  7.2.1. $\mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) + \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y) = \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x + y)$

  7.2.2. $\mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) - \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y) = \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x - y)$

7.3. $(\forall)\ x \in E$:

$$\mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) = \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) + T(\{x\}).$$

Demonstraţie. 7.1. Fie $x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$; atunci $\Pi(x', x') = \Pi(y', y') = 1$ deci conform cu 10.3 de la definiţia 10

$$\Pi(x' - y', x' - y') = 1$$

de unde rezultă că $x' - y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$ şi $\mathcal{C}h(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ deoarece $0' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$.

7.2.1. Are loc incluziunea $\subseteq$ deoarece fie $x' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x)$, $y' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y)$ atunci $(\exists)\ x'_0 \in T(\{x\})$, $y'_0 \in T(\{y\})$:

$$\Pi(x', x'_0) = \Pi(y', y'_0) = 1$$

deci $\Pi(x' + y', x'_0 + y'_0) = 1$, dar $x'_0 + y'_0 \in T(\{x\}) + T(\{y\}) \subseteq T(\{x + y\})$ deci $x' + y' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x + y)$.

Reciproc, fie $z' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x + y)$ atunci $(\exists)\ z_0' \in \mathrm{T}\,(\{x + y\})$:

$$\Pi\,(z',\ z_0') = 1\,;$$

fie $x_0' \in \mathrm{T}\,(\{x\})$, fie $y' = z' - x_0'$, $y_0' = z_0' - x_0'$, atunci $y_0' \in \mathrm{T}\,(\{x + y\}) - \mathrm{T}\,(\{x\}) \subseteq \mathrm{T}\,(\{y\})$ iar $\Pi\,(y',\ y_0') =$ deoarece avem $\Pi\,(z',\ z_0') = \Pi\,(x_0',\ x_0') = 1$ deci $y' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, y)$ dar $x_0' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T},\ x)$ şi $z' = x_0' + y'$.

7.2.2. Are loc incluziunea $\subseteq$ deoarece fie $x' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x)$, $y' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, y)$; atunci $(\exists)\ x_0' \in \mathrm{T}\,(\{x\})$, $y_0' \in \mathrm{T}\,(\{y\})$:

$$\Pi\,(x',\ x_0') = \Pi\,(y',\ y_0') = 1\,;$$

deci $\Pi\,(x' - y',\ x_0' - y_0') = 1$ dar $x_0' - y_0' \in \mathrm{T}\,(\{x\}) - \mathrm{T}\,(\{y\}) \subseteq \mathrm{T}\,(\{x - y\})$ deci $x' - y' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T},\ x - y)$.

Reciproc, fie $z' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x - y)$; atunci $(\exists)\ z_0' \in \mathrm{T}\,(\{x - y\})$:

$$\Pi\,(z', z_0') = 1\,;$$

fie $x_0' \in \mathrm{T}\,(\{x\})$, fie $y' = x_0' - z'$, $y_0' = x_0' - z_0'$, atunci $y_0' \in \mathrm{T}\,(\{x\}) - \mathrm{T}\,(\{x - y\}) \subseteq \mathrm{T}\,(\{y\})$ iar $\Pi\,(y', y_0') = 1$ deoarece avem $\Pi\,(x_0',\ x_0') = \Pi\,(z',\ z_0') = 1$ deci $y' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, y)$ dar $x_0' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T},\ x)$ şi $z' = x_0' - y'$.

7.3. Incluziunea $\supseteq$ rezultă din 7.2.1 ; reciproc, fie $x' \in \mathcal{C}n\ (\mathcal{T},\ x)$ atunci $(\exists)\ x_0' \in \mathrm{T}\,(\{x\})$:

$$\Pi\,(x',\ x_0') = 1$$

deci $\Pi\,(x' - x_0',\ 0') = 1$ căci $\Pi\,(x_0',\ x_0') = 1$ deci $y' = x' - x_0' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)$ iar $x' = y' + x_0'$.

TEOREMA 3. *Fie* $(\mathrm{E},\ \mathcal{T})$ *un grup pseudotopologic*, unde $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$, *atunci* Π *este tranzitivă.*

Demonstrație. Fie $x', y', z' \in \mathrm{E}'$ ca $\Pi\,(x', y') = \Pi\,(y'\ z') = 1$; atunci $x', y', z' \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T})$ deoarece $\mathcal{T}$ verifică 1.3.3 de la definiția 1, dar $\Pi\,(x' - y', 0') = \Pi\,(y' - z', 0') = 1$ conform cu 6.4 de la propoziția 6.

Deci $\Pi\,(x' - y' + y' - z', 0') = 1$ deci $\Pi\,(x' - z', 0') = 1$ însă $\Pi\,(z', z') = 1$ căci $z' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$ deci $\Pi\,(x' - z' + z',\ 0' + z') = 1$, deci $(\Pi\,x',\ z') = 1.$

DEFINIȚIA 11. Fie E, E′, două grupuri scrise aditiv, fie $\mathrm{T} : \mathcal{P}\,(\mathrm{E}) \to \mathcal{P}\,(\mathrm{E}')$, verificînd condițiile 1.2 de la definiția 1 şi 10.2 de la definiția 10. Notăm cu $\mathrm{PTG}\,(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$ mulțimea pseudotopologiilor $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$ pe E compatibile cu structura de grup a lui E.

TEOREMA 4. *În condițiile de la definiția* 11, *fie* $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{PTG}\,(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$, $\mathfrak{T} \neq \emptyset$.

Atunci

4.1. $\sup \mathfrak{T} \in \mathrm{PTG}(\mathrm{E},\mathrm{E}',\mathrm{T})$;

4.2. *dacă* $\mathfrak{T}$ *este dirijată* $\geqslant$, *atunci*

$$\inf \mathfrak{T} \in \mathrm{PTG}(\mathrm{E},\mathrm{E}',\mathrm{T}).$$

Demonstrație. 4.1. Conform teoremei 1,

$$\sup \mathfrak{T} \in \mathrm{PT}(\mathrm{E},\mathrm{E}',\mathrm{T})\,;$$

fie sup $\mathfrak{T} = (E, E', T, \overline{\Pi})$, fie $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in E'$ ca $\overline{\Pi}(x'_1, y'_1) = \overline{\Pi}(x'_2, y'_2) = 1$; atunci $(\forall)\ \mathcal{T} = (E, E', T, \Pi) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi(x'_1, y'_1) = \Pi(x'_2, y'_2) = 1$$

deci $(\forall)\ \mathcal{T} = (E, E', T, \Pi) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi(x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2) = 1$$

deci $\overline{\Pi}(x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2) = 1$, de unde rezultă că sup $\mathfrak{T} \in PTG(E, E', T)$;

4.2. Conform teoremei 1, inf $\mathfrak{T} \in PT(E, E', T)$; fie inf $\mathfrak{T} = (E, E', T, \underline{\Pi})$, fie $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in E'$ ca $\underline{\Pi}(x'_1, y'_1) = \underline{\Pi}(x'_2, y'_2) = 1$; atunci $(\exists)$, $\mathcal{T}_1 = (E, E', T, \Pi_1)$, $\mathcal{T}_2 = (E, E', T, \Pi_2) \in \mathfrak{T}$:

$$\Pi_1(x'_1, y'_1) = \Pi_2(x'_2, y'_2) = 1;$$

dar $(\exists)\ \mathcal{T} = (E, E', T, \Pi) \in \mathfrak{T} : \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1, \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_2$ deci $\Pi(x'_1, y'_1) = \Pi(x'_2, y'_2) = 1$ de unde $\Pi(x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2) = 1$ căci $\mathcal{T} \in \mathfrak{T} \subseteq PTG(E, E', T)$ deci, în definitiv $\underline{\Pi}(x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2) = 1$ adică inf $\mathfrak{T} \in PTG(E, E', T)$.

Exemplul 7. În condiţiile de la definiţia 11 fie $\mathcal{G}$ subgrup în E', $\mathcal{H}$ subgrup în $\mathcal{G}$ ca

G.1. $E'_T \subseteq \mathcal{G}$ [3]

G.2. $T(\{0\}) \subseteq \mathcal{H}$.

Definim $\Pi : E' \times E' \to \{0,1\}$ ca

$$\Pi(x', y') = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x', y' \in \mathcal{G} \\ x' - y' \in \mathcal{H} \end{array}\right|$$

atunci

7.1. $\mathcal{T} = (E, E', T, \Pi) \in PTG(E, E', T)$

7.2. $\mathcal{C}h(\mathcal{T}) = \mathcal{G}$

7.3. $\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) = \mathcal{H}$

7.4. $(\forall)\ x \in E$:
$\mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) = \mathcal{H} + T\{(x)\}$

7.5. $\mathcal{T}$ este completă numai dacă

$$\mathcal{G} \subseteq E'_T + \mathcal{H}$$

7.6. $\mathcal{T}$ este separată numai dacă

$$(\forall)\ x \in E :$$
$$T(\{x\}) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset \Rightarrow x = 0.$$

Demonstraţie. 7.1. Avem $\mathcal{T} \in PT(E, E', T)$ deoarece fie $x \in E$, $x', y' \in T(\{x\})$; atunci $x', y' \in \mathcal{G}$ deoarece $T(\{x\}) \subseteq E'_T \subseteq \mathcal{G}$ iar $x' - y' \in T(\{x\}) - T(\{x\}) \subseteq T(\{0\}) \subseteq \mathcal{H}$ deci $\Pi(x', y') = 1$; fie $x', y' \in E'$ ca $\Pi(x', y') = 1$ atunci $x', y' \in \mathcal{G}$, $x' - y' \in \mathcal{H}$ deci $y' - x' = -(x' - y') \in -\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$ deci $\Pi(y', x') = 1$; dar $x' - x' = 0' \in T(\{0\}) \subseteq \mathcal{H}$ deci şi $\Pi(x', x') = 1$.

---

[3] Se notează $E'_T = \bigcup_{x \in E} T(\{x\})$.

Avem $\mathcal{T} \in \mathrm{P\,T\,G}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$ deoarece fie $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in \mathrm{E}'$ ca $\Pi(x'_1, y'_1) = \Pi(x'_2, y'_2) = 1$; atunci $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in \mathcal{G}$, $x'_1 - y'_1$, $x'_2 - y'_2 \in \mathcal{N}$ deci $x'_1 - x'_2$, $y'_1 - y'_2 \in \mathcal{G} - \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$ iar $(x'_1 - x'_2) - (y'_1 - y'_2) = (x'_1 - y'_1) - (x'_2 - y'_2) \in \mathcal{N} - \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$ deci $\Pi(x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2) = 1$;

7.2. Fie $x' \in \mathrm{E}'$; atunci $x' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \Pi(x', x') = 1 \Leftrightarrow x' \in \mathcal{G}$

7.3. Fie $x' \in \mathrm{E}'$ dacă $x' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$ atunci $(\exists)\ x'_0 \in \mathrm{T}(\{0\})$:

$$\Pi(x', x'_0) = 1$$

deci $x', x'_0 \in \mathcal{G}$, $x' - x'_0 \in \mathcal{N}$ dar $x'_0 \in \mathrm{T}(\{0\}) \subseteq \mathcal{N}$ deci $x' = (x' - x'_0) + x'_0 \in \mathcal{N} + \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$; reciproc, dacă $x' \in \mathcal{N}$, atunci evident $x' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$.

7.4. Rezultă din 7.3. de la propoziţia 7.

7.5. $\mathcal{T}$ este completă numai dacă

$$\mathcal{C}h(\mathcal{T}) \subseteq \bigcup_{x \in \mathrm{E}} \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x)$$

deci, conform cu 7.2, 7.3 şi 7.4, numai dacă

$$\mathcal{G} \subseteq \bigcup_{x \in \mathrm{E}} (\mathcal{N} + \mathrm{T}(\{x\})) = \mathrm{E}'_{\mathrm{T}} + \mathcal{N}.$$

7.6. Dacă $\mathcal{T}$ este separată, fie $x \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{T}(\{x\})$ ca $x' \in \mathcal{N}$; atunci $\Pi(x', 0') = 1$ căci $x' - 0' = x' \in \mathcal{N}$, $x', 0' \in \mathcal{G}$ dar $0' \in \mathrm{T}(\{0\})$ deci $x = 0$ căci $\mathcal{T}$ este separată; reciproc, fie $x, y \in \mathrm{E}$, $x' \in \mathrm{T}(\{x\})$, $y' \in \mathrm{T}(\{y\})$ ca $\Pi(x', y') = 1$, atunci $x' - y' \in \mathcal{N}$ dar $x' - y' \in \mathrm{T}(\{x\}) - \mathrm{T}(\{y\}) \subseteq \mathrm{T}(\{x - y\})$ deci $\mathcal{N} \cap \mathrm{T}(\{x - y\}) \neq \emptyset$ de unde $x - y = 0$ adică $x = y$ deci $\mathcal{T}$ este separată.

§ 7. SPAŢII VECTORIALE PSEUDOTOPOLOGICE

Definiţia 12. Fie E spaţiu vectorial peste corpul K, fie $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$ o pseudotopologie pe E. Spunem că *pseudotopologia* $\mathcal{T}$ *este compatibilă cu structura de spaţiu vectorial a lui E numai dacă*

12.1. E′ este spaţiu vectorial peste corpul K;

12.2. $(\forall)\ x, y \in \mathrm{E}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$:

$$\alpha \mathrm{T}(\{x\}) + \beta \mathrm{T}(\{y\}) \subseteq \mathrm{T}(\{\alpha x + \beta y\});$$ [4]

12.3. $(\forall)\ x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in \mathrm{E}'$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K}$:

$$\Pi(x'_1, y'_1) = \Pi(x'_2, y'_2) = 1 \Rightarrow \Pi(\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2, \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2) = 1.$$

Numim $(\mathrm{E}, \mathcal{T})$ *spaţiu vectorial pseudotopologic.*

Propoziţia 8. *Fie* $(\mathrm{E}, \mathcal{T})$ *un spaţiu vectorial pseudotopologic, atunci pseudotopologia* $\mathcal{T}$ *este compatibilă cu structura de grup a lui* E.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$; atunci E′ este grup conform cu 12.1 de la definiţia 12; fie $x, y \in \mathrm{E}$; atunci conform cu 12.2 de la definiţia 12

$$\mathrm{T}(\{x\}) - \mathrm{T}(\{y\}) \subseteq \mathrm{T}(\{x - y\})$$

---

[4] Fie X un spaţiu vectorial peste corpul K, A, B $\in \mathcal{P}(\mathrm{X})$, A, B $\neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$, notăm $\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} = \{\alpha a + \beta b \mid a \in \mathrm{A},\ b \in \mathrm{B}\}$.

dacă se alege $\alpha = 1$, $\beta = -1$; fie $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in E'$ ca $\Pi(x'_1, y'_1) = \pi(x'_2, y'_2) = 1$; atunci conform cu 12.3 de la definiţia 12

$$\Pi(x'_1 - x'_2,\ y'_1 - y'_2) = 1$$

dacă se alege $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$.

PROPOZIŢIA 9. *În condiţiile de la propoziţia 8*

9.1. $(\forall)\ x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$:

$$\alpha T(\{x\}) + \beta T(\{y\}) = T(\{\alpha x + \beta y\}).$$

9.2. *Următoarele condiţii sînt echivalente*

9.2.1. $(\forall)\ x \in E$, $\alpha \in K$:

$$\alpha T(\{x\}) = T(\{\alpha x\}).$$

9.2.2. $(\forall)\ x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$:

$$\alpha T(\{x\}) + \beta T(\{y\}) = T(\{\alpha x + \beta y\}).$$

9.2.3. $T(\{0\}) = \{0'\}$

9.2.4. $(\forall)\ x \in E$:

$T(\{x\})$ *are un singur element.*

Demonstraţie. 9.1. Avem, $T(\{\alpha x + \beta y\}) \subseteq T(\{\alpha x + \beta y\}) - T(\{\beta y\}) + T(\{\beta y\}) = (T(\{\alpha x + \beta y\}) - T(\{\beta y\})) + T(\{\beta y\}) \subseteq T(\{\alpha x + \beta y - \beta y\}) + T(\{\beta y\}) = T(\{\alpha x\}) + T(\{\beta y\})$

dar fie $z \in E$, $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$; atunci $T(\{\gamma z\}) = \gamma\left(\frac{1}{\gamma} T(\{\gamma z)\} + 0T(\{0\})\right) \subseteq \gamma T\left(\left\{\frac{1}{\gamma} \cdot \gamma \cdot z + \frac{1}{\gamma} \cdot 0 \cdot 0\right\}\right) = \gamma T(\{z\})$, deci $T(\{\alpha x + \beta y) \subseteq \alpha T(\{x\}) + \beta T(\{y\})$.

9.2. Condiţiile 9.2.1, 9.2.2 şi 9.2.3 sînt echivalente evident; are loc implicaţia 9.2.3 $\Rightarrow$ 9.2.4 deoarece fie $x \in E$ ca

$$(\exists)\ x'_1, x'_2 \in T(\{x\}):$$

$$x'_1 \neq x'_2;$$

atunci $0' \neq x' = x'_1 - x'_2 \in T(\{x\}) - T(\{x\}) \subseteq T(\{0\})$ absurd.

PROPOZIŢIA 10. *În condiţiile de la propoziţia 8*

10.1. $\mathcal{C}h(\mathcal{T})$ *este subspaţiu vectorial în* E'

10.2. $(\forall)\ x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$:

$$\alpha \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) + \beta \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y) = \mathcal{C}n(\mathcal{T}, \alpha x + \beta y)$$

10.3. $(\forall)\ x, y \in E$, $\alpha, \beta \in K$:

$$\alpha \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) + \beta\, \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y) \subseteq \mathcal{C}n(\mathcal{T}, \alpha x + \beta y).$$

10.4. $\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0)$ *este subspaţiu vectorial al lui* $\mathcal{C}h(\mathcal{T})$.

Demonstraţie. 10.1. Fie $x', y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$, $\alpha, \beta \in K$; atunci $\Pi(x', x') = \Pi(y', y') = 1$ deci $\Pi(\alpha x' + \beta y', \alpha x' + \beta y') = 1$ deci $\alpha x' + \beta y' \in \mathcal{C}h(\mathcal{T})$;

10.2. Are loc incluziunea $\subseteq$ deoarece fie $x' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x), y' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y)$; atunci $(\exists)$ $x'_0 \in \mathrm{T}(\{x\})$ $y'_0 \in \mathrm{T}(\{y\})$:

$$\Pi(x', x'_0) = \Pi(y', y'_0) = 1$$

deci $\Pi(\alpha x' + \beta y', \alpha x'_0 + \beta y'_0) = 1$ dar $\alpha x'_0 + \beta y'_0 \in \alpha \mathrm{T}(\{x\}) + \beta \mathrm{T}(\{y\}) \subseteq \subseteq \mathrm{T}(\{\alpha x + \beta y\})$ deci $\alpha x' + \beta y' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, \alpha x + \beta y)$.

Reciproc, fie $z' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, \alpha x, + \beta y)$; atunci $(\exists)$ $z'_0 \in \mathrm{T}(\{\alpha x + \beta y\})$:

$$\Pi(z', z'_0) = 1;$$

fie $\alpha \neq 0$, fie $y'_0 \in \mathrm{T}(\{y\})$, fie $x'_0 = \frac{1}{\alpha}(z'_0 - \beta y'_0)$, $x' = \frac{1}{\alpha}(z' - \beta y'_0)$; atunci

$x'_0 \in \frac{1}{\alpha}(\mathrm{T}(\{\alpha x + \beta y\}) - \beta \mathrm{T}(\{y\})) \subseteq \frac{1}{\alpha} \mathrm{T}(\{\alpha x + \beta y - \beta y\}) \subseteq \mathrm{T}(\{x\})$

şi $\Pi(x', x'_0) = 1$ deoarece avem $\Pi(z', z'_0) = \Pi(y'_0, y'_0) = 1$ iar $\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha} \in \mathrm{K}$ deci $x' \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x)$ dar $y'_0 \in \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y)$ şi $z' = \alpha x' + \beta y'_0$;

10.3. Rezultă din demonstraţia pentru 10.2.

10.4. Rezultă din 10.3.

Definiţia 13. Fie E, E′ două spaţii vectoriale peste corpul K, fie $\mathrm{T} : \mathcal{P}(\mathrm{E}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathrm{E}')$ verificînd condiţiile 1.2 de la definiţia 1 şi 12.2 de la definiţia 12. Notăm cu PTV (E, E′, T) mulţimea pseudotopologiilor $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$ pe E, compatibile cu structura de spaţiu vectorial a lui E.

Teorema 5. *În condiţiile de la definiţia* 13, *fie* $\mathscr{T} \subseteq \mathrm{PTV}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$, $\mathscr{T} \neq \emptyset$. *Atunci*

5.1. $\sup \mathscr{T} \in \mathrm{PTV}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$

5.2. *Dacă* $\mathscr{T}$ *este dirijată* $\geqslant$ *atunci*

$$\inf \mathscr{T} \in \mathrm{PTV}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}).$$

Demonstraţia este analoagă cu cea pentru teorema 4.

Exemplul 8. În condiţiile de la definiţia 13 fie $\mathcal{S}$ un subspaţiu vectorial în E′, $\mathcal{V}$ un subspaţiu vectorial în $\mathcal{S}$ ca

V.1. $\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \subseteq \mathcal{S}$ [5];

V.2. $\mathrm{T}(\{0\}) \subseteq \mathcal{V}$.

Definim $\Pi : \mathrm{E}' \times \mathrm{E}' \rightarrow \{0,1\}$ ca

$$\Pi(x', y') = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x', y' \in \mathcal{S} \\ x' - y' \in \mathcal{V} \end{bmatrix}.$$

Atunci :

8.1. $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi) \in \mathrm{PTV}, (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$.

8.2. $\mathcal{C}h(\mathcal{T}) = \mathcal{S}$.

8.3. $\mathcal{C}n(\mathcal{T}, 0) = \mathcal{V}$.

---

[5] S-a notat $\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} = \bigcup_{x \in \mathrm{E}} \mathrm{T}\{(x)\}$.

8.4. $(\forall)\ x \in \mathrm{E}$:

$$\mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) = \mathcal{V} + \mathrm{T}(\{x\}).$$

8.5. $\mathcal{T}$ este completă numai dacă

$$\mathcal{S} \subseteq \mathrm{E}'_{\mathrm{T}} + \mathcal{V}.$$

8.6. $\mathcal{T}$ este separată numai dacă

$$(\forall)\ x \in \mathrm{E}:$$

$$\mathrm{T}(\{x\}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing \Rightarrow x = 0.$$

Demonstrație. 8.1. Din exemplul 7 rezultă că $\mathcal{T} \in \mathrm{PTG}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$ dar $\mathcal{T}$ verifică condiția 12.3 de la definiția 12 deoarece fie $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2 \in \mathrm{E}'$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{K}$ ca $\Pi(x'_1, y'_1) = \Pi(x'_2, y'_2) = 1$; atunci $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 \in \mathcal{S}$, $x'_1 - y'_1$, $x'_2 - y'_2 \in \mathcal{V}$ deci $\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2$, $\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 \in \alpha_1 \mathcal{S} + \alpha_2 \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$

$$(\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2) - (\alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2) = \alpha_1 (x'_1 - y'_1) + \\ + \alpha_2 (x'_2 - y'_2) \in \alpha_1 \mathcal{V} + \alpha_2 \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$$

deci $\Pi(\alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2, \ \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2) = 1$.

8.2, 8.3, 8.4, 8.5 și 8.6 rezultă din exemplul 7.

§ 8. ALGEBRE PSEUDOTOPOLOGICE

DEFINIȚIA 14. Fie E o algebră peste corpul K, fie $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$ o pseudotopologie pe E. Spunem că *pseudotopologia $\mathcal{T}$ este compatibilă cu structura de algebră a lui* E numai dacă

14.1. E′ este algebră peste corpul K.

14.2. $\mathcal{T}$ este compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui E.

14.3. $(\forall)\ x, y \in \mathrm{E}$:

$$\mathrm{T}(\{x\}) \cdot \mathrm{T}(\{y\}) \subseteq \mathrm{T}(\{x \cdot y\})$$ 6).

14.4. $(\forall)\ x'_0, y'_0 \in \mathrm{E}'_{\mathrm{T}}$, $x', y' \in \mathrm{E}'$ 7)

$$\Pi(x'_0, y'_0) = \Pi(x', y') = 1 \Rightarrow \Pi(x'_0 \cdot x', y'_0 \cdot y') = \Pi(x' \cdot x'_0, y' \cdot y'_0) = 1.$$

Numim $(\mathrm{E}, \mathcal{T})$ *algebră pseudotopologică.*

PROPOZIȚIA 11. *Fie* $(\mathrm{E}, \mathcal{T})$ *o algebră pseudotopologică, unde* $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi)$, *atunci*

11.1. *$\mathcal{T}$ este compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui* E.

11.2. E'_{T} *este subalgebră în E'*

11.3. $\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \cdot \mathcal{C}h(\mathcal{T}) \cup \mathcal{C}h(\mathcal{T}) \cdot \mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \subseteq \mathcal{C}h(\mathcal{T})$

11.4. $(\forall)\ x, y \in \mathrm{E}$:

$$\mathrm{T}(\{x\}) \cdot \mathcal{C}n(\mathcal{T}, y) \cup \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x) \cdot \mathrm{T}(\{y\}) \subseteq \mathcal{C}n(\mathcal{T}, x \cdot y)$$

---

6) Fie X o algebră peste corpul K, A, B $\in \mathcal{P}(\mathrm{X})$, A, B $\neq \varnothing$. Notăm $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \{a \cdot b \mid a \in \mathrm{A},\ b \in \mathrm{B}\}$.

7) S-a notat $\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} = \bigcup\limits_{x \in \mathrm{E}} \mathrm{T}(\{x\})$.

11.5. $(E'_T \cap \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)) \cdot \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) \cup \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) \cdot (E'_T \cap \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)) \cup E'_T \cdot$
$\cdot \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0) \cup \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0) \cdot E'_T \subseteq \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)$.

Demonstrație. 11.1. Rezultă din 14. 2 de la definiția 14.

11.2. Rezultă din 14.3 de la definiția 14.

11.3. Fie $x'_0 \in E'_T$, $x' \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T})$; atunci $\Pi\,(x'_0, x'_0) = \Pi\,(x', x') = 1$ deci $\Pi\,(x'_0 \cdot x', x'_0 \cdot x') = \Pi\,(x' \cdot x'_0, x' \cdot x'_0) = 1$, deci $x'_0 \cdot x', x' \cdot x'_0 \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T})$;

11.4. Fie $x'_0 \in T\,(\{xy\})$, $y' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, y)$; atunci $(\exists)$ $y'_0 \in T\,(\{y\})$:

$$\Pi\,(y', y'_0) = 1$$

deci $\Pi\,(x'_0 \cdot y', x'_0 \cdot y'_0) = 1$ dar $x'_0 \cdot y'_0 \in T\,(\{x\}).\,T\,(\{y\}) \subseteq T\,(\{x \cdot y\})$ deci $x'_0 \cdot y' \in$ $\in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x \cdot y)$; fie $x' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x)$, $y'_0 \in T\,(\{y\})$ atunci $(\exists)$ $x'_0 \in T\,(\{x\})$:

$$\Pi\,(x', x'_0) = 1$$

deci $\Pi\,(x' \cdot y'_0, x'_0 \cdot y'_0) = 1$ dar $x'_0 \cdot y'_0 \in T\,(\{x\}) \cdot T\,(\{y\}) \subseteq T\,(\{x \cdot y\})$ deci $x' \cdot y'_0 \in$ $\in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x \cdot y)$.

11.5. Fie $x'_0 \in E'_T$, $y' \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)$; atunci $(\exists)$ $x \in E$, $y'_0 \in T\,(\{0\})$:

$$x'_0 \in T\,(\{x\})$$

$$\Pi\,(y', y'_0) = 1$$

deci $\Pi\,(x'_0 \cdot y', x'_0 \cdot y'_0) = \Pi\,(y' \cdot x'_0, y'_0 \cdot x'_0) = 1$, dar $x'_0 \cdot y'_0 \in T\,(\{x\}) \cdot T\,(\{0\}) \subseteq$ $\subseteq T\,(\{0\})$ $y'_0 \cdot x'_0 \in T\,(\{0\}) \cdot T\,(\{x\}) \subseteq T(\{0\})$ deci $x'_0 \cdot y'$, $y' \cdot x'_0 \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)$; fie $x'_0 \in E'_T \cap \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)$, $y' \in \mathcal{C}h\,(\mathcal{T})$; atunci $\Pi\,(x'_0, 0') = \Pi\,(y', y') = 1$ dar $x'_0, 0' \in E'_T$ deci $\Pi\,(x'_0, y', 0'\,y') = \Pi\,(y'\,x'_0, y'\,0') = 1$ iar $0'\,y' = y'\,0' = 0'$ deci $x'_0\,y'$, $y'\,x'_0 \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0)$.

DEFINIȚIA 15. Fie E, E′ două algebre peste corpul K; fie $T : \mathcal{P}\,(E) \to \mathcal{P}\,(E')$ verificînd condițiile 1.2 de la definiția 1, 12.3 de la definiția 12 și 14.3 de la definiția 14. Notăm cu PTA (E, E′, T) mulțimea pseudotopologiilor $\mathcal{T} = (E, E', T, \Pi)$ pe E compatibile cu structura de algebră a lui E.

TEOREMA 6. *În condițiile de la definiția* 15, *fie* $\mathfrak{T} \subseteq$ PTA (E, E′, T), $\mathfrak{T} \neq \emptyset$. *Atunci*

6.1. sup. $\mathfrak{T} \in$ PTA (E, E′, T);

6.2. *dacă* $\mathfrak{T}$ *este dirijată* $\geqslant$, *atunci*

$$\inf \mathfrak{T} \in \mathrm{PTA}\ (E, E', T).$$

Demonstrația este analoagă cu cea pentru teorema 4.

Exemplul 9. În condițiile de la definiția 15 fie $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A} \subseteq E'$ subspații vectoriale în E′ ca

A.1. $E'_T \bigcup E'_T \cdot \mathcal{A} \bigcup \mathcal{A} \cdot E'_T \subseteq \mathcal{A}$,

A.2. $T\,(\{0\}) \bigcup (E'_T \cap \mathcal{I}) \cdot \mathcal{A} \bigcup \mathcal{A} \cdot (E'_T \cap \mathcal{I}) \bigcup E'_T \cdot \mathcal{I} \bigcup \mathcal{I} \cdot E'_T \subseteq \mathcal{I}$.

Definim $\Pi : E' \times E' \to \{0,1\}$ ca

$$\Pi\,(x', y') = 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x',\ y' \in \mathcal{A} \\ x' - y' \in \mathcal{I} \end{bmatrix}$$

atunci

9.1. $\mathcal{T} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi) \in \mathrm{PTA}\,(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$

9.2. $\mathcal{C}h\,(\mathcal{T}) = \mathcal{A}$

9.3. $\mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, 0) = \mathcal{J}$

9.4. $(\forall)\ x \in \mathrm{E}$:

$$\mathcal{C}n\,(\mathcal{T}, x) = \mathcal{J} + \mathrm{T}\,(\{x\})$$

9.5. $\mathcal{T}$ este completă numai dacă

$$\mathcal{A} \subseteq \mathrm{E}'_{\mathrm{T}} + \mathcal{J}$$

9.6. $\mathcal{T}$ este separată numai dacă

$$(\forall)\ x \in \mathrm{E} :$$

$$\mathrm{T}\,(\{x\}) \cap \mathcal{J} \neq \varnothing \Rightarrow x = 0.$$

Demonstrație. 9.1. Din exemplul 8 rezultă că $\mathcal{T} \in \mathrm{PTV}\,(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$ dar $\mathcal{T}$ verifică condiția 14.4. de la definiția 14 deoarece fie $x'_0, y'_0 \in \mathrm{E}'_{\mathrm{T}}$, $x', y' \in \mathrm{E}'$ ca $\Pi\,(x'_0, y'_0) = \Pi\,(x', y') = 1$, atunci $x', y' \in \mathcal{A}$ deci $x'_0\,x', x'\,x'_0$, $y'_0\,y', y'\,y'_0 \in \mathcal{A}$ dar $x'_0 - y'_0, x' - y' \in \mathcal{J}$ iar $x'_0\,x' - y'_0\,y' = x'_0\,(x' - y') + {}$ $+ (x'_0 - y'_0)\,y' \in \mathrm{E}'_{\mathrm{T}}\,\mathcal{J} + (\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \cap \mathcal{J}) \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{J} + \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$, $x'\,x'_0 - y'\,y'_0 = x'\,(x'_0 - y'_0) + {}$ $+ (x' - y')\,y'_0 \in \mathcal{A} \cdot (\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \cap \mathcal{J}) + \mathcal{J} \cdot \mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \subseteq \mathcal{J} + \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}$ deci $\Pi\,(x'_0\,x', y'_0\,y') =$ $\Pi\,(x'\,x'_0, y'\,y'_0) = 1$;

9.2, 9.3, 9.4, 9.5 și 9.6 rezultă din exemplul 8.

CAPITOLUL II

§ 1. SPAȚIUL VECTORIAL PSEUDOTOPOLOGIC $\mathcal{E}_n$

Fie

1.1. $n \in \mathrm{N}$

1.2. $\mathrm{E} = \mathcal{E}_n$

1.3. $\mathrm{E}' = \mathrm{N} \to \mathrm{E}$

1.4. $\mathrm{T} : \mathcal{P}\,(\mathrm{E}) \to \mathcal{P}\,(\mathrm{E}')$ ca

1.4.1. $\mathrm{T}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{N} \to \mathrm{A}$.

Atunci

1.5. $(\forall)\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}\,(\mathrm{E}),\ \varnothing \neq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$:

$$\varnothing \neq \mathrm{T}\,(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{T}\,(\mathrm{B})$$

1.6. $\mathrm{T}\,(\mathrm{E}) = \mathrm{E}'$

1.7. E, E′ sînt algebre comutative cu element unitate peste corpul R al numerelor reale

1.8. $(\forall)\ \varphi \in \mathrm{E}$:

$$\mathrm{T}\,(\{\varphi\}) = \{u\,(\varphi)\}^{8)}$$

1.9. $(\forall)\ \varphi, \psi \in \mathrm{E},\ \alpha, \beta \in \mathrm{R}$:

1.9.1. $\alpha\,\mathrm{T}\,(\{\varphi\}) + \beta\,\mathrm{T}\,(\{\psi\}) = \mathrm{T}\,(\{\alpha\varphi + \beta\psi\})$

1.9.2. $\mathrm{T}\,(\{\varphi\}).\ \mathrm{T}\,(\{\psi\}) = \mathrm{T}\,(\{\varphi \cdot \psi\})$.

---

8) Fie X o mulțime nevidă, $x \in \mathrm{X}$, definim $u(x) : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$ ca $(u\,(x))\,(h) = x$; rezultă că $u : \mathrm{X} \to (\mathrm{N} \to \mathrm{X})$.

DEFINIȚIA 1. Notăm

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ s \in E' \,\middle|\, \begin{array}{l} 1.1.\ (\forall)\, \varphi \in \mathcal{D}_n : \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \int_{R^n} (s(h))(x)\, \varphi(x)\, dx \text{ finită} \\ 1.2.\ (\forall)\, t \in \mathcal{C}_n(\mathcal{D}_n, 0) : {}^{9)} \\ \qquad \lim\limits_{\substack{k \in N \\ k \to \infty}} \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \int_{R^n} (s(h))(x)\,(t(k))(x)\, dx = 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ s \in \mathcal{S}_0 \,\middle|\, (\forall)\varphi \in \mathcal{D}_n : \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \int_{R^n} (s(h))(x)\, \varphi(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Definim

$$\Pi_0 : E' \times E' \to \{0,1\} \text{ ca}$$

$$\Pi_0(s_1, s_2) = 1 \Leftrightarrow (s_1, s_2 \in \mathcal{S}_0,\ s_1 - s_2 \in \mathcal{V}_0).$$

Notăm $\mathcal{T}_0 = (E, E', T, \Pi_0)$.

Pentru $s \in \mathcal{S}_0$ definim $< s, \cdot > : \mathcal{D}_n \to R^1$ ca

$$<s, \varphi> = \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} \int_{R^n} (s(h))(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

TEOREMA 1. *$\mathcal{T}_0$ este o pseudotopologie separată pe $E = \mathcal{E}_n$, compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui $\mathcal{E}_n$.*

Demonstrație. Conform cu exemplul 8 din capitolul I

$$\mathcal{T}_0 \in P\,T\,V\,(E, E', T);$$

$\mathcal{T}_0$ este separată deoarece fie $\varphi \in E$ ca $u(\varphi) \in \mathcal{I}_0$; atunci $(\forall)\ \psi \in \mathcal{D}_n$:

$$\int_{R^n} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = < u(\varphi), \psi > = 0 \text{ deci } \varphi = 0.$$

Observația 1. Din [6] și [5] rezultă că

$$(\forall)\ S \in \mathcal{D}'_n :$$
$$(\exists)\ s \in \mathcal{S}_0 :$$
$$(\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n :$$
$$S(\varphi) = < s, \varphi >$$

deoarece fie $s \in N \to \mathcal{E}_n$, dacă $(\forall)\ I \in \mathcal{K}_n$ (intervalele compacte din R^n):

$$(\exists)\ p \in N^n,\ t \in \mathcal{C}^0(R^n) :$$
$$^{*})\ (\forall)\ h \in N,\ x \in I :$$
$$(s(h))(x) = D^p\,(t(h))(x)$$

---

[9] Se notează cu $\mathcal{C}_n(\mathcal{D}_n, 0)$ mulțimea șirurilor $t : N \to \mathcal{D}_n$ convergente spre 0 în topologia obișnuită pe $\mathcal{D}_n$.

**) t converge uniform pe I,
atunci $s \in \mathcal{S}_0$.

Reciproc, evident

$$(\forall)\, s \in \mathcal{S}_0 :$$
$$< s, \cdot > \in \mathcal{D}'_n .$$

§ 2. O PSEUDOTOPOLOGIE COMPLETĂ PE SPAŢIUL DE ŞIRURI CAUCHY

Fie

2.1. $\widetilde{\mathrm{E}}_0 = \mathcal{S}_0$

2.2. $\widetilde{\mathrm{E}}'_0 = \mathrm{N} \to \widetilde{\mathrm{E}}_0$

2.3. $\widetilde{\mathrm{T}}_0 : \mathcal{P}(\widetilde{\mathrm{E}}_0) \to \mathcal{P}(\widetilde{\mathrm{E}}'_0)$ ca

2.3.1. $\widetilde{\mathrm{T}}_0(\widetilde{\mathrm{A}}) = \mathrm{N} \to \widetilde{\mathrm{A}}$.

Atunci 2.4. $(\forall)\ \widetilde{\mathrm{A}}, \widetilde{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}(\widetilde{E}_0), \varnothing \neq \widetilde{\mathrm{A}} \subseteq \widetilde{\mathrm{B}}$:

$$\varnothing \neq \widetilde{\mathrm{T}}_0(\widetilde{\mathrm{A}}) \subseteq \widetilde{\mathrm{T}}_0(\widetilde{\mathrm{B}})$$

2.5. $\widetilde{\mathrm{T}}_0(\widetilde{\mathrm{E}}_0) = \widetilde{\mathrm{E}}'_0$

2.6. $\widetilde{\mathrm{E}}_0, \widetilde{\mathrm{E}}'_0$ sînt spaţii vectoriale peste corpul R

2.7. $(\forall)\ s \in \widetilde{\mathrm{E}}_0$:

$$\widetilde{\mathrm{T}}_0(\{s\}) = \{u(s)\}$$

2.8. $(\forall)\ s,\ t \in \widetilde{\mathrm{E}}_0,\ \alpha,\ \beta \in \mathrm{R}$:

$$\alpha\, \widetilde{\mathrm{T}}_0(\{s\}) + \beta\, \widetilde{\mathrm{T}}_0(\{t\}) = \widetilde{\mathrm{T}}_0(\{\alpha\, s + \beta t\})$$

DEFINIŢIA 2. Definim

$$\widetilde{\mathcal{S}}_0 = \left\{ \widetilde{s} \in \widetilde{\mathrm{E}}'_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2.1)\ (\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n : \lim\limits_{\substack{h,\ k \in N \\ h,\ k \to \infty}} \displaystyle\int_{\mathrm{R}^n} ((\widetilde{s}\,(h))\ (k))\ (x)\ \varphi\,(x)\ \mathrm{d}x \text{ finită} \\ 2.2.)\ (\forall)\ t \in \mathcal{C}_n(\mathcal{D}_n, 0) : \\ \qquad \lim\limits_{\substack{l \in N \\ l \to \infty}}\ \lim\limits_{\substack{h,\ k \in N \\ h,\ k \to \infty}} \displaystyle\int_{\mathrm{R}^n} ((\widetilde{s}\,(h))\ (k))\,(x)\ (t\,(l))\,(x)\ \mathrm{d}x = 0 \end{array} \right\}$$

$$\widetilde{\mathcal{V}}_0 = \left\{ \widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0 \;\middle|\; (\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n : \lim_{\substack{h,\ k \in N \\ h,\ k \to \infty}} \int_{\mathrm{R}^n} ((\widetilde{s}\,(h))\,(k))\,(x)\ \varphi\,(x)\ \mathrm{d}x = 0 \right\}$$

Definim $\widetilde{\Pi}_0 :\ \widetilde{\mathrm{E}}'_0 \times \widetilde{\mathrm{E}}'_0 \to \{0, 1\}$ ca

$$\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) = 1 \Leftrightarrow [\widetilde{s}_1,\ \widetilde{s}_2 \in \widetilde{\mathcal{S}}_0,\ \widetilde{s}_1 - \widetilde{s}_2 \in \widetilde{\mathcal{V}}_0].$$

Notăm $\widetilde{\mathcal{T}}_0 = (\widetilde{\mathrm{E}}_0, \widetilde{\mathrm{E}}'_0, \widetilde{\mathrm{T}}_0, \widetilde{\Pi}_0)$.

Pentru $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_0$ definim $< \tilde{s}, \cdot > : \mathcal{D}_n \to \mathrm{R}^1$ ca

$$< \tilde{s}, \varphi > = \lim_{\substack{h,\, k \in N \\ h,\, k \to \infty}} \int_{\mathrm{R}^n} ((\tilde{s}\,(h))\,(k))\,(x)\, \varphi\,(x)\, \mathrm{d}x.$$

LEMA 1. *Fie* $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}_0$; *atunci*

$$(\forall)\ \varphi \in \mathcal{D}_n :$$

$$< \tilde{s}, \varphi > = \lim_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} < \tilde{s}\,(h),\ \varphi >.$$

Demonstrație. Fie $\varphi \in \mathcal{D}_n$; atunci

$$< \tilde{s}, \varphi > = \lim_{\substack{h,\, k \in N \\ h,\, k \to \infty}} \int_{\mathrm{R}^n} ((\tilde{s}\,(h))\,(k))\,(x)\ \ \varphi\,(x)\ \mathrm{d}x \text{ finită}$$

dar $(\forall)\ h \in \mathrm{N}$:

$$< \tilde{s}\,(h), \varphi > = \lim_{\substack{k \in N \\ k \to \infty}} \int_{\mathrm{R}^n} ((\tilde{s}\,(h))\,(k))\,(x)\ \ \varphi\,(x)\ \mathrm{d}x$$

deci $< \tilde{s}, \varphi > = \lim\limits_{\substack{h \in N \\ h \to \infty}} < \tilde{s}\,(h), \varphi >$

COROLAR. *Fie* $s \in \mathcal{S}_0$; *atunci*

1. $u\,(s),\ u \circ s \in \mathcal{S}_0$[10]
2. $< u\,(s), \cdot > = < u \circ s, \cdot > = < s, \cdot >$.

LEMA 2. *Fie* $s_1, s_2 \in \mathcal{S}_0$; *atunci*

$$\Pi_0\,(s_1, s_2) = 1 \Rightarrow \tilde{\Pi}_0\,(u \circ s_1, u \circ s_2) = 1.$$

Demonstrație. Din $\Pi_0\,(s_1, s_2) = 1$ rezultă $s_1 - s_2 \in \mathcal{V}_0$ deci $< s_1, \cdot > = < s_2, \cdot >$ deci conform lemei 1

$$< u \circ s_1, \cdot > = < u \circ s_2, \cdot >$$

adică $< u \circ s_1 - u \circ s_2, \cdot > = 0$ deci $u \circ s_1 - u \circ s_2 \in \tilde{\mathcal{V}}_0$ de unde $\tilde{\Pi}_0\,(u \circ s_1, u \circ s_2) = 1$.

TEOREMA 2. *$\tilde{\mathcal{T}}_0$ este o pseudotopologie completă pe $\tilde{\mathrm{E}}_0 = \mathcal{C}h\,(\mathcal{T}_0) = \mathcal{S}_0$, compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui $\mathcal{S}_0$.*

Demonstrație. Conform exemplului 8 din Cap. I

$$\tilde{\mathcal{T}}_0 \in \mathrm{P\,T\,V}\,(\tilde{\mathrm{E}}_0, \tilde{\mathrm{E}}_0', \tilde{\mathrm{T}}_0)$$

$\tilde{\mathcal{T}}_0$ este completă deoarece fie $\widetilde{s} \in \mathcal{C}h(\widetilde{\mathcal{T}}_0)$; atunci $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$; fie $s \in N \to E$ ca $s(h) = (\widetilde{s}(h))(h)$; atunci evident $s \in \mathcal{S}_0$ dar $< \widetilde{s}, \cdot > \; = \; < s, \cdot >$ deci conform lemei 1

---

[10] În expresia $u\,(s)$ se consideră $u : \tilde{\mathrm{E}}_0 \to (\mathrm{N} \to \tilde{\mathrm{E}}_0)$ în expresia $u \circ s$ se consideră $u : \mathrm{E} \to (\mathrm{N} \to \mathrm{E})$.

$$< \widetilde{s}, \cdot > \; = \; < u(s), \cdot >$$

adică $< \widetilde{s} - u(s), \cdot > \; = 0$, deci $\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, u(s)) = 1$.

Notație. Definim $\widetilde{\theta}_0 : E \to \widetilde{E}_0$, $\widetilde{\theta}'_0 : E' \to \widetilde{E}'_0$ ca

$$\widetilde{\theta}_0(\varphi) = u(\varphi)$$

$$\widetilde{\theta}'_0(s) = u \circ s.$$

Evident, $\widetilde{\theta}_0$, $\widetilde{\theta}'_0$ sînt aplicații liniare, biunivoce.

TEOREMA (COV). $(\widetilde{\mathcal{T}}_0, \widetilde{\theta}_0, \widetilde{\theta}'_0)$ *este un completat al pseudotopologiei* $\mathcal{T}_0$.

Demonstrație. Conform teoremei 2 se verifică condiția 7.1 de la definiția 7 din Cap. I; fie $A \in \mathcal{P}(E)$, $\widetilde{s} \in \widetilde{\theta}'_0(T(A))$ atunci $(\exists) s \in T(A)$:

$$\widetilde{s} = u \circ s$$

deci $(\forall) h \in N$:

$$\widetilde{s}(h) = u(s(h))$$

dar $s \in T(A) \Rightarrow (\forall) h \in N : s(h) \in A$ deci $\widetilde{s} \in \widetilde{T}_0(\widetilde{\theta}_0(A))$ deci se verifică și condiția 7.2 de la definiția menționată.

Fie $s_1, s_2 \in E'$ ca $\Pi_0(s_1, s_2) = 1$; atunci conform lemei 2, $\widetilde{\Pi}_0(u \circ s_1, u \circ s_2) = 1$ deci $\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{\theta}'_0(s_1), \widetilde{\theta}'_0(s_2)) = 1$ deci se verifică și condiția 7.3; fie $\widetilde{s} \in \mathcal{C}h(\widetilde{\mathcal{T}}_0)$ atunci $(\exists)$ $s \in \widetilde{E}_0$:

$$\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, u(s)) = 1 \text{ căci } \widetilde{\mathcal{T}}_0 \text{ este completă}$$

dar atunci conform corolarului la lema 1

$$\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, u \circ s) = 1$$

însă $s \in \widetilde{E}_0 \Rightarrow s \in \mathcal{S}_0 = \mathcal{C}h(\mathcal{T}_0)$ deci se verifică și condiția 7.4.

§ 3. SPAȚIUL VECTORIAL PSEUDOTOPOLOGIC $\mathcal{D}'_n$

Fie

3.1. $\bar{E}_0 = \mathcal{S}_0 / \mathcal{V}_0$

3.2. $\bar{E}'_0 = N \to \bar{E}_0$

3.3. $\bar{T}_0 : \mathcal{P}(\bar{E}_0) \to \mathcal{P}(\bar{E}'_0)$ ca

  3.3.1. $\bar{T}_0(\bar{A}) = N \to \bar{A}$.

Atunci

3.4. $(\forall) \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{P}(\bar{E}_0)$, $\emptyset \neq \bar{A} \subseteq \bar{B}$:

$$\emptyset \neq \bar{T}_0(\bar{A}) \subseteq \bar{T}_0(\bar{B})$$

3.5. $\overline{\mathrm{T}}_0(\overline{\mathrm{E}}_0) = \overline{\mathrm{E}}'_0$

3.6. $\overline{\mathrm{E}}_0, \overline{\mathrm{E}}'_0$ sînt spații vectoriale peste corpul R

3.7. $(\forall)\,\overline{\varphi} \in \overline{\mathrm{E}}_0$:

$$\overline{\mathrm{T}}_0(\{\overline{\varphi}\}) = \{u(\overline{\varphi})\}$$

3.8. $(\forall)\,\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\mathrm{E}}_0,\ \alpha, \beta \in \mathrm{R}$:

$$\alpha\,\overline{\mathrm{T}}_0(\{\overline{\varphi}\}) + \beta\,\overline{\mathrm{T}}_0(\{\overline{\psi}\}) = \overline{\mathrm{T}}_0(\{\alpha\,\overline{\varphi} + \beta\,\overline{\psi}\}).$$

DEFINIȚIA 3. Definim

$$\bar{\mathcal{S}}_0 = \{(\mathring{\iota}_0) \circ \widetilde{s} \mid \widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0\}$$

$$\overline{\mathcal{V}}_0 = \{(\mathring{\iota}_0) \circ \widetilde{s} \mid \widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{V}}_0\}$$

unde $\mathring{\iota}_0$ este aplicația canonică $\mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0 / \mathcal{V}_0$.

Definim $\overline{\Pi}_0 : \overline{\mathrm{E}}'_0 \times \overline{\mathrm{E}}'_0 \to \{0, 1\}$ ca

$$\overline{\Pi}_0(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 1 \Leftrightarrow (\overline{s}_1,\ \overline{s}_2,\ \in \bar{\mathcal{S}}_0\, \overline{s}_1 - \overline{s}_2 \in \overline{\mathcal{V}}_0).$$

Notăm $\overline{\mathcal{T}}_0 = (\overline{\mathrm{E}}_0, \overline{\mathrm{E}}'_0, \overline{\mathrm{T}}_0, \overline{\Pi}_0)$.

LEMA 3. *Fie* $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2 \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$; *atunci*

$$(\mathring{\iota}_0) \circ \widetilde{s}_1 = (\mathring{\iota}_0) \circ \widetilde{s}_2 \Rightarrow < \widetilde{s}_1, \cdot > = < \widetilde{s}_2 \cdot > .$$

Demonstrație. Rezultă că

$$(\forall)\, h \in \mathrm{N} :$$

$$\widetilde{s}_1(h) - \widetilde{s}_2(h) \in \mathcal{V}_0$$

deci $(\forall)\, h \in \mathrm{N}$:

$$< \widetilde{s}_1(h), \cdot > = < \widetilde{s}_2(h), \cdot >$$

deci conform lemei 1

$$< \widetilde{s}_1, \cdot > = < \widetilde{s}_2, \cdot >.$$

Notație. Conform lemei 3 pentru orice $\overline{s} \in \bar{\mathcal{S}}_0$ se poate defini

$$< \overline{s}, \cdot > : \mathcal{D}_n \to \mathrm{R} \text{ ca}$$

$$< \overline{s}, \cdot > = < \widetilde{s}, \cdot >$$

unde $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$ și $\overline{s} = (\mathring{\iota}_0) \circ \widetilde{s}$.

De asemenea pentru orice $\overline{\varphi} \in \overline{\mathrm{E}}_0$ se poate defini

$$< \overline{\varphi}, \cdot > : \mathcal{D}_n \to R$$

ca $< \overline{\varphi}, \cdot > = < s, \cdot >$ unde $s \in \mathcal{S}_0$, $\overline{\varphi} = \mathring{\iota}_0(s)$.

LEMA 4. *Fie* $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2 \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$; *atunci*

$$\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) = 1 \Rightarrow \overline{\Pi}_0((\mathring{\iota}_0) \circ \widetilde{s}_1, (\mathring{\iota}_0) \circ \widetilde{s}_2) = 1.$$

Demonstrație. Conform notației precedente

$$< (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}_1, \cdot > = < \tilde{s}_1, \cdot >$$

$$< (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}_2, \cdot > = < \tilde{s}_2, \cdot >$$

dar $< \tilde{s}_1, \cdot > = < \tilde{s}_2, \cdot >$ deoarece $\widetilde{\Pi}_0 (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = 1$ deci $< (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}_1, \cdot > = < (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}_2, \cdot >$ de unde $\overline{\Pi}_0 ((\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}_1, (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}_2) = 1$.

TEOREMA 3. $\overline{\mathcal{T}}_0$ *este o pseudotopologie completă și separată pe* $\overline{\mathrm{E}}_0 = \mathcal{S}_0 / \mathcal{V}_0$, *compatibilă cu structura de spațiu vectorial a lui* $\mathcal{S}_0 / \mathcal{V}_0$.

Demonstrație. Conform exemplului 8 din Cap. I

$$\overline{\mathcal{T}}_0 \in \mathrm{P\,T\,V} (\overline{\mathrm{E}}_0, \overline{\mathrm{E}}'_0, \overline{\mathrm{T}}_0);$$

$\overline{\mathcal{T}}_0$ este completă deoarece
fie $\bar{s} \in \mathcal{C}h\ (\overline{\mathcal{T}}_0)$ atunci $(\exists)\, \tilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$:

$$\bar{s} = (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}$$

dar $(\exists)\, s \in \mathcal{S}_0$:

$$\widetilde{\Pi}_0 (\tilde{s}, u(s)) = 1 \text{ deoarece } \widetilde{\mathcal{T}}_0 \text{ este completă}$$

fie $\bar{\varphi} = \mathring{\imath}_0 (s)$ atunci $\bar{\varphi} \in \overline{\mathrm{E}}_0$ și $\overline{\Pi}_0 (\bar{s}, u(\bar{\varphi})) = 1$ deoarece avem $u(\bar{\varphi}) = (\mathring{\imath}_0) \circ (u(s))$ iar $\tilde{s} - u(s) \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$ căci $\widetilde{\Pi}_0 (\tilde{s}, u(s)) = 1$, deci $< \tilde{s}, \cdot > = < u(s), \cdot >$ dar $< \bar{s}, \cdot > = < \tilde{s}, \cdot >$ căci $\bar{s} = (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}$ și $< u(\bar{\varphi}), \cdot > = < u(s), \cdot >$ căci $u(\bar{\varphi}) = (\mathring{\imath}_0) \circ (u(s))$ deci $< \bar{s}, \cdot > = < u(\bar{\varphi}), \cdot >$;

$\overline{\mathcal{T}}_0$ este separată deoarece fie $\bar{\varphi} \in \overline{\mathrm{E}}_0$ ca $u(\bar{\varphi}) \in \overline{\mathcal{V}}_0$; atunci $< u(\bar{\varphi}), \cdot > = 0$ dar $(\exists)\, s \in \mathcal{S}_0 : \bar{\varphi} = \mathring{\imath}_0 (s)$ deci $u(\bar{\varphi}) = (\mathring{\imath}_0) \circ (u(s))$ și $u(s) \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$ deci $< u(\bar{\varphi}), \cdot > = < u(s), \cdot > = < s, \cdot >$ de unde $< s, \cdot > = 0$ deci $s \in \mathcal{V}_0$ deci $\bar{\varphi} = \mathring{\imath}_0 (s) = \bar{0}$.

Notație. Definim $\bar{\theta}_0 : \widetilde{\mathrm{E}}_0 \to \overline{\mathrm{E}}_0$, $\bar{\theta}'_0 : \widetilde{\mathrm{E}}'_0 \to \overline{\mathrm{E}}'_0$ ca

$$\bar{\theta}_0 (s) = \mathring{\imath}_0 (s)$$

$$\bar{\theta}'_0 (\tilde{s}) = (\mathring{\imath}_0) \circ \tilde{s}.$$

Evident, $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}'_0$ sînt aplicații liniare, pe.

TEOREMA $(\widetilde{\mathrm{CHoV}})$. $(\overline{\mathcal{T}}_0, \bar{\theta}_0, \bar{\theta}'_0)$ *este un completat și separat al pseudotopologiei* $\widetilde{\mathcal{T}}_0$.

Demonstrație. Conform teoremei 3 se verifică condiția 7.1 de la definiția 7 și 9.1 de la definiția 9 din capitolul I.

Se verifică condiția 7.2 de la definiția 7 și 9.2 de la definiția 9 din Cap. I deoarece fie $\widetilde{\mathrm{A}} \in \mathcal{P} (\widetilde{\mathrm{E}}_0)$, $\bar{s} \in \bar{\theta}'_0 (\widetilde{\mathrm{T}}_0 (\widetilde{\mathrm{A}}))$; atunci $(\exists)\, \tilde{s} \in \widetilde{\mathrm{T}}_0 (\widetilde{\mathrm{A}})$:

$$\bar{s} = (\bar{\theta}_0) \circ \tilde{s}$$

deci $(\forall)\ h \in \mathrm{N}$:

$$\overline{s}\,(h) = \overline{\theta}_0\,(\widetilde{s}\,(h))$$

dar $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathrm{T}}_0\,(\widetilde{\mathrm{A}}) \Rightarrow (\forall)\ h \in \mathrm{N} : \widetilde{s}(h) \in \widetilde{\mathrm{A}}$ deci $\overline{s} \in \overline{\mathrm{T}}_0\,(\overline{\theta}_0\,(\widetilde{\mathrm{A}}))$.

Se verifică condiția 7.3 de la definiția 7 din Cap. I dat fiind că are loc lema 4.

Condiția 7.4 de la definiția menționată se verifică de asemenea deoarece fie $\overline{s} \in \mathcal{C}h\,(\overline{\mathcal{T}}_0)$; atunci $(\exists)\ \widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$:

$$\overline{s} = (\mathring{\imath}_0) \circ \widetilde{s}$$

dar atunci evident

$$\overline{\Pi}_0\,(\overline{s}, \overline{\theta}'_0\,(\widetilde{s})) = 1$$

iar $\widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{C}h\,(\overline{\mathcal{T}}_0)$.

Notație. Definim $\theta_0 : \mathrm{E} \to \overline{\mathrm{E}}_0$, $\theta'_0 : \mathrm{E}' \to \overline{\mathrm{E}}'_0$ ca

$$\theta_0\,(\varphi) = \mathring{\imath}_0\,(u\,(\varphi))$$

$$\theta'_0\,(s) = (\mathring{\imath}_0) \circ u \circ s\,.$$

Evident, θ_0, θ'_0 sînt aplicații liniare.

Lema 5. *Aplicațiile* θ_0, θ'_0 *sînt biunivoce*:

Demonstrație. Fie $\varphi \in \mathrm{E}$ ca $\theta_0\,(\varphi) = \overline{0}$ atunci $\mathring{\imath}_0\,(u\,(\varphi)) = 0$ deci $u\,(\varphi) \in \mathcal{V}_0$ deci $\varphi = 0$ deoarece $\mathcal{T}_0$ este separată.

Evident și θ'_0 este biunivocă deoarece

$$(\forall)\ s \in \mathrm{E}' :$$

$$\theta'_0\,(s) = (\theta_0) \circ s\,.$$

Teorema ($\overline{\mathrm{C}}$oV). *$(\overline{\mathcal{T}}_0, \theta_0, \theta'_0)$ este un completat al pseudotopologiei $\mathcal{T}^0$.*

Demonstrație. Conform teoremei 3 se verifică condiția 7.1 de la definiția 7 din Cap. I.

Se verifică condiția 7.2 de la definiția menționată căci fie $\mathrm{A} \in \mathcal{P}\,(\mathrm{E})$, $\overline{s} \in \theta'_0\,(\mathrm{T}\,(\mathrm{A}))$ atunci $(\exists)\ s \in \mathrm{T}\,(\mathrm{A})$:

$$\overline{s} = (\theta_0) \circ s$$

deci $(\forall)\ h \in \mathrm{N}$:

$$\overline{s}\,(h) = \theta_0\,(s\,(h))$$

dar $s \in \mathrm{T}\,(\mathrm{A}) \Rightarrow (\forall)\ h \in \mathrm{N} : s\,(h) \in \mathrm{A}$ deci $\overline{s} \in \overline{\mathrm{T}}_0\,(\theta_0\,(\mathrm{A}))$;

Se verifică și condiția 7.3 dat fiind că au loc lemele 2 și 4.

Condiția 7.4 se verifică de asemenea căci fie $\overline{s} \in \mathcal{C}h\,(\overline{\mathcal{T}}_0)$ atunci $(\exists)\ \widetilde{s} \in \widetilde{\mathcal{S}}_0$:

$$\widetilde{s} = (\mathring{\imath}_0) \circ \widetilde{s}\,.$$

dar $(\exists)\ s \in \mathcal{S}_0$

$$\widetilde{\Pi}_0\,(\widetilde{s}, u\,(s)) = 1 \text{ căci } \widetilde{\mathcal{T}}_0 \text{ este completă}$$

atunci însă $\overline{\Pi}_0(\bar{s}, \theta'_0(s)) = 1$ deoarece avem $\theta'_0(s) = (\mathring{\iota}_0) \circ (u \circ s)$ iar $\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, u \circ s) = 1$ deoarece avem $\widetilde{\Pi}_0(\widetilde{s}, u(s)) = 1$ și $\widetilde{\Pi}_0(u(s), u \circ s) = 1$ conform corolarului la lema 1.

Observația (*V*). Conform observației 1, aplicația

$$\mathcal{S}_0 \ni s \to < s, \cdot > \in \mathcal{D}'_n$$

este o aplicație liniară, pe.

Evident, nucleul acestei aplicații liniare este $\mathcal{V}_0$ deci aplicația

$$\overline{\mathrm{E}}_0 = \mathcal{S}_0 / \mathcal{V}_0 \ni \bar{\varphi} \to < \bar{\varphi}, \circ > \in \mathcal{D}'_n$$

este un izomorfism vectorial, deci se poate identifica în cele ce urmează spațiul distribuțiilor $\mathcal{D}'_n$ al lui L. Schwartz cu $\overline{\mathrm{E}}_0$.

Din teorema ($\overline{\mathrm{C}}$oV) rezultă că spațiul vectorial pseudotopologic $(\overline{\mathrm{E}}_0, \overline{\mathcal{T}}_0)$ este un completat ($\overline{\mathcal{T}}_0$ ca pseudotopologie este și separată) al spațiului vectorial pseudotopologic $(\mathrm{E}, \mathcal{T}_0)$, dar aplicațiile θ_0, θ'_0 sînt liniare și biunivoce și verifică condiția 7.2 de la definiția 7 din Cap. I, deci se poate considera că

$$\mathrm{E} \subseteq \overline{\mathrm{E}}_0, \ \mathrm{E}' \subseteq \overline{\mathrm{E}}'_0, \ \mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}}_0 \big|_{\mathcal{P}(\mathrm{E})}.$$

DEFINIȚIA 4. Definim $\Pi_{00*}, \Pi_{0*}, \Pi_{00}, \Pi_{01} : \mathrm{E}' \times \mathrm{E}' \to \{0, 1\}$ ca

4.1. $\Pi_{00*}(s_1, s_2) = 1$ numai dacă

$$\begin{aligned}
&(\forall)\, \varepsilon > 0 : \\
&(\exists)\, h \in \mathrm{N} : \\
&(\forall)\, h_1, h_2 \in \mathrm{N},\ h_1, h_2 \geqslant h,\ x \in \mathrm{R}^n : \\
&\quad |(s_1(h_1))(x) - (s_2(h_2))(x)| \leqslant \varepsilon .
\end{aligned}$$

4.2. $\Pi_{0*}(s_1, s_2) = 1$ numai dacă

$$\begin{aligned}
&(\forall)\, \mathrm{I} \in \mathcal{K}_n,\ \varepsilon > 0 : \\
&(\exists)\, h \in \mathrm{N} : \\
&(\forall)\, h_1, h_2 \in \mathrm{N},\ h_1, h_2 \geqslant h,\ x \in \mathrm{I} : \\
&\quad |(s_1(h_1))(x) - (s_2(h_2))(x)| \leqslant \varepsilon .
\end{aligned}$$

4.3. $\Pi_{00}(s_1, s_2) = 1$ numai dacă

$$(\exists)\, p \in \mathrm{N}^n,\ t_1, t_2 \in \mathrm{E}' :$$

4.3.1. $(\forall)\, h \in N,\ x \in \mathrm{R}^n :$

$$\begin{aligned}
(s_1(h))(x) &= \mathrm{D}^p(t_1(h))(x) \\
(s_2(h))(x) &= \mathrm{D}^p(t_2(h))(x) .
\end{aligned}$$

4.3.2. $\Pi_{00*}(t_1, t_2) = 1$.

4.4. $\Pi_{01} = \overline{\Pi}_0 \big|_{\mathrm{E}' \times \mathrm{E}'}$.

Notăm

$$\mathcal{T}_{00*} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_{00*}),\ \mathcal{T}_{0*} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_{0*}),$$

$$\mathcal{T}_{00} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_{00}),\ \mathcal{T}_{01} = (\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T}, \Pi_{01}).$$

PROPOZIŢIE. $\mathcal{T}_{00*}, \mathcal{T}_{0*}, \mathcal{T}_{00}, \mathcal{T}_{01}$ *sînt pseudotopologii separate pe* $\mathrm{E} = \mathcal{E}_n$, *în plus* $\mathcal{T}_{00*}, \mathcal{T}_{0*} \in \mathrm{PTA}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$ *iar* $\mathcal{T}_{00}, \mathcal{T}_{01} \in \mathrm{PTV}(\mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{T})$. *Au loc relaţiile*

$$\mathcal{T}_{01} \leqslant \mathcal{T}_0 \leqslant \begin{matrix}\mathcal{T}_{00}\\ \mathcal{T}_{0*}\end{matrix} \leqslant \mathcal{T}_{00*}.$$

Demonstraţie. Prima parte este imediată. Inegalitatea $\mathcal{T}_{01} \leqslant \mathcal{T}_0$ rezultă din teorema ($\bar{\mathrm{C}}$oV), celelalte sînt evidente.

COROLAR. *Au loc incluziunile*

$$1.\ \mathcal{Ch}(\mathcal{T}_{00*}) \subseteq \begin{matrix}\mathcal{Ch}(\mathcal{T}_{00})\\ \mathcal{Ch}(\mathcal{T}_{0*})\end{matrix} \subseteq \mathcal{Ch}(\mathcal{T}_0) = \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{Ch}(\mathcal{T}_{01})$$

2. $(\forall)\ \varphi \in \mathrm{E} = \mathcal{E}_n$:

$$\mathcal{C}_n(\mathcal{T}_{00*}, \varphi) \subseteq \begin{matrix}\mathcal{C}_n(\mathcal{T}_{00}, \varphi)\\ \mathcal{C}_n(\mathcal{T}_{0*}, \varphi)\end{matrix} \subseteq \mathcal{C}_n(\mathcal{T}_0, \varphi) = u(\varphi) + \mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{C}_n(\mathcal{T}_{01}, \varphi).$$

Observaţia (*). Fie $n = 1$, $s \in \mathrm{E}'$ ca $(s(h))(x) = \cos(h+1)x$ atunci $s \in \mathcal{C}_n(\mathcal{T}_{00}, 0)$ deoarece fie $t \in \mathrm{E}'$ ca $(t(h))(x) = (\sin(h+1)x)/(h+1)$ atunci $(s(h))(x) = \mathrm{D}^1(t(h))(x)$ şi evident $\Pi_{00*}(t, u(0)) = 1$.

Dar $s \cdot s \in \mathcal{C}_n\left(\mathcal{T}_{00}, \frac{1}{2}\right)$ deoarece fie $w \in E'$ ca $(w(h))(x) = x/2 + (\sin 2(h+1)x)/4(h+1)$ avem $((s \cdot s)(h))(x) = \mathrm{D}^1(w(h))(x)$; fie $\varphi \in E$ ca $\varphi(x) = x/2$ atunci evident $\Pi_{00*}(w, u(\varphi)) = 1$ deci $\Pi_{00}\left(s \cdot s, u\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$.

Notaţie. Fie $p \in \mathrm{N}^n$; notăm cu $\mathrm{D}^p : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ operatorul de derivare de ordin p; definim $\widetilde{\mathrm{D}}^p : \widetilde{\mathrm{E}}_0 \to \widetilde{\mathrm{E}}_0$ ca

$$(\widetilde{\mathrm{D}}^p s)(h) = \mathrm{D}^p(s(h));$$

definim $\overline{\mathrm{D}}^p : \overline{\mathrm{E}}_0 \to \overline{\mathrm{E}}_0$ ca

$$\overline{\mathrm{D}}^p \bar{\varphi} = \mathfrak{i}_0(\widetilde{\mathrm{D}}^p s) \text{ unde } \bar{\varphi} = \mathfrak{i}_0(s);$$

definim $\overline{\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}}^p : \overline{\mathrm{E}}'_0 \to \overline{\mathrm{E}}'_0$ ca

$$(\overline{\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}}^p \bar{s})(h) = \overline{\mathrm{D}}^p(\bar{s}(h)).$$

Evident D^p, $\widetilde{\mathrm{D}}^p$, $\overline{\mathrm{D}}^p$ şi $\overline{\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}}^p$ sînt aplicaţii liniare.

Observăm că definiţia lui $\overline{\mathrm{D}}^p$ are sens conform cu

LEMA 6. *Fie* $s, s_1, s_2 \in \mathcal{S}_0$, $s_1 - s_2 \in \mathcal{V}_0$, $p \in \mathrm{N}^n$; *atunci*

6.1. $\widetilde{\mathrm{D}}^p s \in \mathcal{S}_0$ şi $< \widetilde{\mathrm{D}}^p s, \cdot > = (-1)^{|p|} < s, \mathrm{D}^p \cdot >$

6.2. $< \widetilde{\mathrm{D}}^p s_1, \cdot > = < \widetilde{\mathrm{D}}^p s_2, \cdot >$.

Demonstraţie. 6.1. Fie $\varphi \in \mathcal{D}_n$, $h \in \mathrm{N}$; atunci $\int_{\mathrm{R}^n} ((\widetilde{\mathrm{D}}^p s)(h))(x) \varphi(x) \, \mathrm{d}x =$ $= \int_{\mathrm{R}^n} (\mathrm{D}^p (s(h)))(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x = (-1)^{|p|} \int_{\mathrm{R}^n} (s(h))(x) \, \mathrm{D}^p \varphi(x) \, \mathrm{d}x$ dar $\mathrm{D}^p \varphi \in \mathcal{D}_n$ şi $\mathrm{D}^p \mathcal{C}_n(\mathcal{D}_n, 0) \subseteq \mathcal{C}_n(\mathcal{D}_n, 0)$ deci $\widetilde{\mathrm{D}}^p s \in \mathcal{S}_0$;

6.2. Rezultă din 6.1.

Are loc şi

LEMA 7. Avem $(\forall)\, p \in \mathrm{N}^n : \mathrm{D}^p = \overline{\mathrm{D}}^p \big|_{\mathrm{E}}$, $\widetilde{\mathrm{D}}^p = \widetilde{\overline{\mathrm{D}}}^p \big|_{\mathrm{E}'}$.

Demonstraţie. Fie $\varphi \in \mathrm{E}$. Prin identificarea de la observaţia (V)

$$\overline{\mathrm{D}}^p \varphi = \overline{\mathrm{D}}^p \theta_0(\varphi) = \overline{\mathrm{D}}^p \mathfrak{i}_0(u(\varphi)) = \mathfrak{i}_0(\widetilde{\mathrm{D}}^p u(\varphi)) =$$
$$= \mathfrak{i}_0(u(\mathrm{D}^p \varphi)) = \theta_0(\mathrm{D}^p \varphi) = \mathrm{D}^p \varphi .$$

TEOREMA (DOV). *Fie* $p \in \mathrm{N}^n$; *atunci* D^p *este* S *uniform continuă pe* E *de la pseudotopologia* $\mathcal{T}_{0*}$ *la pseudotopologiile* $\mathcal{T}_0$ *şi* $\mathcal{T}_{01}$ *unde* S : $(\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{E}) \rightarrow (\mathrm{E}' \rightarrow \mathrm{E}')$ ca

$$((\mathrm{S}(f))(s))(h) = f(s(h));$$

$\overline{\mathrm{D}}^p$ *este* $\overline{\mathrm{S}}_0$ *uniform continuă pe* $\overline{\mathrm{E}}$ *de la pseudotopologia* $\overline{\mathcal{T}}_0$ *la pseudotopologia* $\overline{\mathcal{T}}_0$ *unde*

$$\overline{\mathrm{S}}_0 : (\overline{\mathrm{E}}_0 \rightarrow \overline{\mathrm{E}}_0) \rightarrow (\overline{\mathrm{E}}'_0 \rightarrow \overline{\mathrm{E}}'_0) \text{ ca}$$

$$((\overline{\mathrm{S}}_0(\overline{f}))(\overline{s}))(h) = \overline{f}(\overline{s}(h)) .$$

Demonstraţie. Au loc relaţiile $\mathrm{S}(\mathrm{D}^p) = \widetilde{\mathrm{D}}^p$ cu $p \in \mathrm{N}^n$ deoarece

fie $s \in \mathrm{E}'$; atunci $((\mathrm{S}(\mathrm{D}^p))(s))(h) = \mathrm{D}^p(s(h)) = (\widetilde{\mathrm{D}}^p s)(h)$ deci dacă $s_1, s_2 \in \mathrm{E}'$ atunci $(\mathrm{S}(\mathrm{D}^p))(s_1) = \widetilde{\mathrm{D}}^p s_1$, $(\mathrm{S}(\mathrm{D}^p))(s_2) = \widetilde{\mathrm{D}}^p s_2$ însă $\Pi_{0*}(s_1, s_2) = 1 \Rightarrow s_1, s_2 \in \mathcal{S}_0$, $s_1 - s_2 \in \mathcal{V}_0$ deci conform lemei 6, $\widetilde{\mathrm{D}}^p s_1$, $\widetilde{\mathrm{D}}^p s_2 \in \mathcal{S}_0$ şi

$$< \widetilde{\mathrm{D}}^p s_1, \cdot > = < \widetilde{\mathrm{D}}^p s_2, \cdot >$$

deci $\Pi_0(\widetilde{\mathrm{D}}^p s_1, \widetilde{\mathrm{D}}^p s_2) = 1$, deci D^p este S uniform continuă de la $\mathcal{T}_{0*}$ la $\mathcal{T}_0$; din propoziţia precedentă rezultă că $\mathcal{T}_{01} \leqslant \mathcal{T}_0$ deci D^p este S uniform continuă de la $\mathcal{T}_{0*}$ la $\mathcal{T}_{01}$.

Au loc relaţiile $\overline{\mathrm{S}}_0(\overline{\mathrm{D}}^p) = \widetilde{\overline{\mathrm{D}}}^p$ cu $p \in \mathrm{N}^n$ deoarece:

fie $\overline{s} \in \overline{\mathrm{E}}'_0$; atunci $((\overline{\mathrm{S}}_0(\overline{\mathrm{D}}^p))(\overline{s}))(h) = \overline{\mathrm{D}}^p(\overline{s}(h)) = (\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}^p \overline{s})(h)$.

Fie $\overline{s}_1,\ \overline{s}_2 \in \overline{\mathrm{E}}'_0$ ca $\overline{\Pi}_0\,(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 1$; atunci $(\exists)\ \widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2 \in \widetilde{\mathcal{S}}_0,\ \widetilde{s}_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$:

$$\overline{s}_1 = (\mathring{\imath}_0)\circ\widetilde{s}_1,\ \ \overline{s}_2 = (\mathring{\imath}_0)\circ\widetilde{s}_2$$

$$\overline{s}_1 - \overline{s}_2 = (\mathring{\imath}_0)\circ\widetilde{s}_0$$

Fie $\widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2, \widetilde{t}_0 \in \widetilde{\mathrm{E}}'_0$ ca

$$\widetilde{t}_1\,(h) = \widetilde{\mathrm{D}}^p\,\widetilde{s}_1\,(h),\ \widetilde{t}_2\,(h) = \widetilde{\mathrm{D}}^p\,\widetilde{s}_2\,(h),\ \widetilde{t}_0\,(h) = \widetilde{\mathrm{D}}^p\,\widetilde{s}_0\,(h)$$

atunci $\widetilde{t}_1\,\widetilde{t}_2 \in \widetilde{\mathcal{S}}_0,\ \widetilde{t}_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}_0$ deoarece
fie $\varphi \in \mathcal{D}_n$; atunci $\lim\limits_{\substack{h,\ k\in N\\ h,\ k\to\infty}} \int_{\mathrm{R}^n} ((\widetilde{t}_i\,(h))\,(k))\,(x)\,\varphi\,(x)\,\mathrm{d}x =$

$$= (-1)^{|p|} \lim_{\substack{h,\ k\in N\\ h,\ k\to\infty}} \int_{\mathrm{R}^n} ((\widetilde{s}_i\,(h))\,(k))\,(x)\,\mathrm{D}^p\,\varphi\,(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|p|} < \widetilde{s}_i,\ \mathrm{D}^p\,\varphi > \text{ cu}$$

$i \in \{0,\ 1,\ 2\}$
dar $\widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\overline{s}_i = (\mathring{\imath}) \circ \widetilde{t_i}$ cu $i \in \{1,\ 2\}$

$$\widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\overline{s}_1 - \widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\,\overline{s}_2 = (\mathring{\imath}_0)\circ\widetilde{t}_0.$$

deci $\widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\overline{s}_i \in \overline{\mathcal{S}}_0$ cu $i \in \{1,\ 2\}$

$$\widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\overline{s}_1 - \widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\overline{s}_2 \in \overline{\mathcal{V}}_0$$

deci $\overline{\Pi}_0\,(\widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\overline{s}_1,\ \widetilde{\overline{\overline{\mathrm{D}}}}{}^p\,\overline{s}_2) = 1$.

§ 4. ALGEBRE CONȚINÎND SPAȚIUL $\mathcal{D}'_n$ ȘI PRELUNGIND ALGEBRA UZUALĂ DIN $\mathcal{E}_n$

DEFINIȚIA 5. Notăm cu $\mathcal{A}$ mulțimea elementelor de forma $(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{J},\ \mathcal{A})$, unde :

5.1. $\mathcal{V}$, $\mathcal{S}$ sînt sub spații vectoriale în $\mathcal{S}_0$;

5.2. $\mathcal{A}$ este subalgebră în E′, $\mathcal{J}$ este ideal în $\mathcal{A}$;

5.3. au loc incluziunile

$$\begin{array}{lll} \mathcal{V}_0 \subseteq & \mathcal{S}_0 & \\ \cup\!\shortmid & \cup\!\shortmid & \\ \mathcal{V}\ \ \subseteq & \mathcal{S} \supseteq & \mathrm{E}'_{\mathrm{T}}{}^{11)} \\ \cap\!\shortmid & \cap\!\shortmid & \\ \mathcal{J}\ \ \subseteq & \mathcal{A}\,; & \end{array}$$

5.4. $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{S} = \mathcal{V}$

$\mathcal{V}_0 + \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$;

5.5. $\mathcal{J} \cap \mathcal{S} = \mathcal{V}$.

---

[11] Cu notațiile din § 1, $\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} = \{u\,(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{E}_n\}$.

Observația 2. 2.1. $\mathscr{A}$ nu este vidă deoarece există $\mathcal{S}$ subspațiu vectorial în $\mathcal{S}_0$, complementar lui $\mathcal{V}_0$ ca $\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \subseteq \mathcal{S}$ căci $\mathrm{E}'_{\mathrm{T}} \cap \mathcal{V}_0 = \{u(0)\}$ (unde $0 \in \mathcal{E}_n$) deoarece $\mathcal{T}_0$ este separată; fie acum $\mathcal{V} = \mathcal{J} = \{u(0)\}$, $\mathcal{A}$ subalgebra generată în E' de $\mathcal{S}$; atunci evident $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathscr{A}$.

2.2. Nu există $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathscr{A}$ ca

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0, \ \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$$

deoarece dacă presupunem prin absurd că este adevărat, atunci folosind notațiile de la observația (*) din § 3 rezultă că

$$s \in \mathcal{C}_n(\mathcal{T}_{00}, 0) \subseteq \mathcal{C}_n(\mathcal{T}_0, 0) = \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$$

deci $s \cdot s \in \mathcal{J}$ căci $s \in \mathcal{V} \subseteq \mathcal{J}$ și $\mathcal{J}$ este ideal în $\mathcal{A}$ dar $s \cdot s \in \mathcal{C}_n\left(\mathcal{T}_{00}, \frac{1}{2}\right) \subseteq$ $\subseteq \mathcal{C}h(\mathcal{T}_{00}) \subseteq \mathcal{C}h(\mathcal{T}_0) = \mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ deci $s \cdot s \in \mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ de unde conform condiției 5.5 de la definiția 5

$$s \cdot s \in \mathcal{V} = \mathcal{V}_0$$

ceea ce este evident absurd deoarece

$$s \cdot s \in \mathcal{C}n\left(\mathcal{T}_{00}, \frac{1}{2}\right) \subseteq \mathcal{C}n\left(\mathcal{T}_0, \frac{1}{2}\right)$$

iar $\mathcal{C}n\left(\mathcal{T}_0, \frac{1}{2}\right) \cap \mathcal{V}_0 = \emptyset$ căci $\mathcal{T}_0$ este separată.

Observația (*A. 1*). Fie $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathscr{A}$ atunci

A. 1.1. Aplicația

$$\mathcal{S}/\mathcal{V} \ni s + \mathcal{V} \xrightarrow{\mathring{i}_\Omega} s + \mathcal{V}_0 \in \mathcal{S}_0/\mathcal{V}_0$$

este un izomorfism vectorial conform condițiilor 5.1, 5.3 și 5.4 de la definiția 5;

A.1.2. Aplicația

$$\mathcal{S}/\mathcal{V} \ni s + \mathcal{V} \xrightarrow{\mathcal{K}_\Omega} s + \mathcal{J} \in \dot{\mathcal{A}}/\mathcal{J}$$

este liniară, biunivocă și $(\forall)\ \varphi, \psi \in \mathrm{E}$:

$$\mathcal{K}_\Omega(u(\varphi \cdot \psi) + \mathcal{V}) = \mathcal{K}_\Omega(u(\varphi) + \mathcal{V}) \cdot \mathcal{K}_\Omega(u(\psi) + \mathcal{V})$$

deoarece

fie $\varphi, \psi \in \mathrm{E}$; atunci $(u(\varphi) + \mathcal{J}) \cdot (u(\psi) + \mathcal{J}) =$

$$= u(\varphi) \cdot u(\psi) + \mathcal{J} = u(\varphi \cdot \psi) + \mathcal{J}),$$

deci A.1.3 aplicația

$$\overline{\mathrm{E}}_0 = \mathcal{S}_0/\mathcal{V}_0 \xrightarrow{\mathcal{K}_\Omega \circ (\mathring{i}_\Omega)^{-1}} \mathcal{A}/\mathcal{J}$$

este liniară, biunivocă și $(\forall)\ \varphi, \psi \in \mathrm{E}$ (conform observației (V) are loc incluziunea $\mathrm{E} \subseteq \overline{\mathrm{E}}_0$):

$$(\mathcal{K}_\Omega \circ (\mathring{i}_\Omega)^{-1})(\varphi \cdot \psi) = ((\mathcal{K}_\Omega \circ (\mathring{i}_\Omega)^{-1})(\varphi)) \cdot ((\mathcal{K}_\Omega \circ (\mathring{i}_\Omega)^{-1})(\psi)).$$

Notaţie. Pentru $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$ se notează $\overline{\mathrm{E}}_\Omega = \mathcal{A}/\mathcal{J}$.

Observaţia (*A.* 2.). Rezultă că pentru $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$ se pot efectua identificările

A.2.1. $\mathrm{E} \subseteq \overline{\mathrm{E}}_0 = \mathcal{S}_0/\mathcal{V}_0 = \mathcal{S}/\mathcal{V} \subseteq \overline{\mathrm{E}}_\Omega$;

A.2.2. $\mathrm{E}' \subseteq \overline{\mathrm{E}}'_0 \subseteq \mathrm{N} \to \overline{\mathrm{E}}_\Omega$.

Şi în acest caz structurile de algebră din $\overline{\mathrm{E}}_\Omega$ respectiv $\mathrm{N} \to \overline{\mathrm{E}}_\Omega$ induc pe E respectiv E′ structuri de algebră identice cu cele iniţiale.

§ 5. PRELUNGIREA OPERAŢIEI DE DERIVARE PE ALGEBRE

DEFINIŢIA 6. Notăm cu $\mathfrak{A}_0$ mulţimea acelor $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$ pentru care

6.1. $(\forall)\, s \in \mathcal{A},\ p \in \mathrm{N}^n$:

$$\widetilde{\mathrm{D}}^p s \in \mathcal{A};$$

6.2. $(\forall)\, s \in \mathcal{J},\ p \in \mathrm{N}^n$:

$$\widetilde{\mathrm{D}}^p s \in \mathcal{J}.$$

Observaţia 3. $\mathfrak{A}_0$ nu este vidă căci fie $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$ construit la observaţia 2 din § 4.

Fie $\mathcal{A}_1$ subalgebra generată de $\bigcup\limits_{p \in N^n} \widetilde{\mathrm{D}}^p \mathcal{A}$ în E′; atunci evident $(\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}_1) \in \mathfrak{A}_0$.

DEFINIŢIA 7. Fie $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$, $p \in \mathrm{N}^n$; definim $\overline{D}^p_\Omega : \overline{\mathrm{E}}_\Omega \to \overline{\mathrm{E}}_\Omega$[11]) ca

$$\overline{\mathrm{D}}^p_\Omega (s + \mathcal{J}) = (\overline{\mathrm{D}}^p s) + \mathcal{J};$$

definim $\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega : (\mathrm{N} \to \overline{\mathrm{E}}_\Omega) \to (\mathrm{N} \to \overline{\mathrm{E}}_\Omega)$ ca

$$(\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega (\bar{s}))(h) = \widetilde{\mathrm{D}}^p_\Omega (\bar{s}(h)).$$

Observaţia 4. Fie $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$; atunci definiţia lui $\overline{D}^p_\Omega$ este corectă deoarece fie $s_1, s_2 \in \mathcal{A}$ ca $s_1 - s_2 \in \mathcal{J}$, fie $p \in \mathrm{N}^n$ atunci $\widetilde{\mathrm{D}}^p s_1, \widetilde{\mathrm{D}}^p s_2 \in \mathcal{A}$, $\widetilde{\mathrm{D}}^p s_1 - \widetilde{\mathrm{D}}^p s_2 = \widetilde{\mathrm{D}}^p (s_1 - s_2) \in \mathcal{J}$.

TEOREMA 4. *Fie* $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$; *atunci*

4.1. $(\forall)\ p \in N^n$:

4.1.1. $\overline{\mathrm{D}}^p_\Omega$ *este liniară*

4.1.2. $\mathrm{D}^p = \overline{\mathrm{D}}^p_\Omega|_{\mathrm{E}}$

4.2. $(\forall)\ p, q \in N^n$:

$$\overline{\mathrm{D}}^p_\Omega \circ \overline{\mathrm{D}}^q_\Omega = \overline{\mathrm{D}}^{p+q}_\Omega$$

---

[11]) S-a notat $\overline{\mathrm{E}}_\Omega = \mathcal{A}/\mathcal{J}$.

4.3. $(\forall)\, p \in \mathrm{N}^n,\ \overline{\varphi},\ \overline{\psi} \in \overline{\mathrm{E}}_\Omega$:

$$\overline{\mathrm{D}}^p_\Omega\,(\overline{\varphi}.\,\overline{\psi}) = \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \mathrm{C}^q_p\,(\overline{\mathrm{D}}^q_\Omega\,\overline{\varphi}).\,(\overline{\mathrm{D}}^{p-q}_\Omega\,\overline{\psi}).$$

Demonstraţia este imediată.

Observaţia (*A. 3*). Fie $\Omega \in \mathfrak{A}_0,\ p \in \mathrm{N}^n$; atunci pe baza celor de la lema 7 din § 3 şi teorema 4 punctul 4.1.2, se poate introduce notaţia unică D^p pentru operatorii de derivare $\mathrm{D}^p,\ \widetilde{\mathrm{D}}^p,\ \overline{\mathrm{D}}^p_\Omega$ şi $\overline{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega$.

Observaţia (*I*). În paragrafele 2, 3 şi 4 sau definit următoarele funcţii mai importante :

I. 1. $\mathrm{E} \ni \varphi \xrightarrow{\widetilde{\theta}_0} u\,(\varphi) \in \widetilde{\mathrm{E}}_0$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_0 \ni s \xrightarrow{\overline{\theta}_0} s + \mathcal{V}_0 \in \overline{\mathrm{E}}_0$$

$$\mathrm{E} \ni \varphi \xrightarrow{\theta_0} u\,(\varphi) + \mathcal{V}_0 \in \overline{\mathrm{E}}_0$$

$$\mathrm{E}' \ni s \xrightarrow{\widetilde{\theta}'_0} u \circ s \in \widetilde{\mathrm{E}}'_0$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}'_0 \ni \widetilde{s} \xrightarrow{\dot{\theta}'_0} \widetilde{s} + u\,(\mathcal{V}_0) \in \overline{\mathrm{E}}'_0,$$

$$\mathrm{E}' \ni s \xrightarrow{\theta'_0} u \circ s + u(\mathcal{V}_0) \in \overline{\mathrm{E}}'_0.$$

I. 2. Pentru $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{E}}_0 \arrow[r, "(\mathring{\imath}_\Omega)^{-1}"] & \mathcal{S}/\mathcal{V} \arrow[r, "\mathcal{K}_\Omega"] & \overline{\mathrm{E}}_\Omega \\
s + \mathcal{V}_0 \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & t + \mathcal{V} \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & t + \mathcal{J} \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{E} \ni \varphi \xrightarrow{\theta_\Omega} u\,(\varphi) + \mathcal{J} \in \overline{\mathrm{E}}_\Omega$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{E}}'_0 \arrow[r] & \mathrm{N} \arrow[r] & \mathcal{S}/\mathcal{V} \arrow[r] & \overline{\mathrm{E}}'_\Omega \\
\widetilde{s} + u(\mathcal{V}_0) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & & \widetilde{t} + u\,(\mathcal{V}) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & \widetilde{t} + u\,(\mathcal{J}) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{E}' \ni s \xrightarrow{\theta'_\Omega} u \circ s + u\,(\mathcal{J}) \in \overline{\mathrm{E}}'_\Omega$$

I. 3. Pentru $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0,\ p \in \mathrm{N}^n$

$$\mathrm{E} \ni \varphi \xrightarrow{\mathrm{D}^p} \mathrm{D}^p \varphi \in \mathrm{E}$$

$$\mathrm{E}' \ni s \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{D}}^p} \widetilde{\mathrm{D}}^p\, s \in \mathrm{E}'$$

$$\overline{\mathrm{E}}_0 \ni \overline{\varphi} \xrightarrow{\overline{\mathrm{D}}^p} \overline{\mathrm{D}}^p\, \overline{\varphi} \in \overline{\mathrm{E}}_0$$

$$\overline{\mathrm{E}}_0' \ni \overline{s} \xrightarrow{\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}^p} \widetilde{\overline{\mathrm{D}}}^p\, \overline{s} \in \overline{\mathrm{E}}_0'$$

$$\overline{\mathrm{E}}_\Omega \ni \overline{\varphi} \xrightarrow{\overline{\mathrm{D}}_\Omega^p} \overline{\mathrm{D}}_\Omega^p\, \overline{\varphi} \in \overline{\mathrm{E}}_\Omega$$

$$\overline{\mathrm{E}}_\Omega' \ni \overline{s} \xrightarrow{\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}_\Omega^p} \widetilde{\overline{\mathrm{D}}}_\Omega^p\, \overline{s} \in \overline{\mathrm{E}}_\Omega'.$$

§ 6. ALGEBRE PSEUDOTOPOLOGICE

Observația ($\mathcal{AD}$). Problema algebrizării distribuțiilor constă în găsirea unei algebre pseudotopologice separate și complete $(\overline{\mathrm{E}}_1, \overline{\mathcal{T}}_1)$ (cu $\overline{\mathcal{T}}_1 = (\overline{\mathrm{E}}_1, \overline{\mathrm{E}}_1', \overline{\mathrm{T}}_1, \overline{\Pi}_1)$, $\overline{\mathrm{E}}_1' = \mathrm{N} \to \overline{\mathrm{E}}_1$, $\overline{\mathrm{T}}_1 : \mathcal{P}(\overline{\mathrm{E}}_1) \to \mathcal{P}(\overline{\mathrm{E}}_1')$ ca $\overline{\mathrm{T}}_1(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{N} \to \overline{\mathrm{A}}$) și a unei familii $(\overline{\mathrm{D}}_1^p \mid p \in \mathrm{N}^n)$ de operații liniare $\overline{\mathrm{D}}_1^p : \overline{\mathrm{E}}_1 \to \overline{\mathrm{E}}_1$ ca:

($\mathcal{AD}$1) $\overline{\mathrm{E}}_0 \subseteq \overline{\mathrm{E}}_1$ și structura de algebră indusă pe E de structura de algebră a lui $\overline{\mathrm{E}}_1$ coincide cu cea inițială:

($\mathcal{AD}$2) $(\forall)\ \overline{s}_1, \overline{s}_2 \in \overline{\mathrm{E}}_1'$:

$$\overline{\Pi}_0(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 1 \Rightarrow \overline{\Pi}_1(\overline{s}_1, \overline{s}_2) = 1$$

(uniform continuitatea scufundării lui $\overline{\mathrm{E}}_0$ în $\overline{\mathrm{E}}_1$)

($\mathcal{AD}$3) $(\forall)\ p \in \mathrm{N}^n$:

($\mathcal{AD}$3.1) $\mathrm{D}^p = \overline{\mathrm{D}}_1^p|_{\mathrm{E}}$

($\mathcal{AD}$3.2) $(\forall)\ q \in \mathrm{N}^n$: $\overline{\mathrm{D}}_1^p \circ \overline{\mathrm{D}}_1^q = \overline{\mathrm{D}}_1^{p+q}$

($\mathcal{AD}$3.3) $(\forall)\ \overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\mathrm{E}}_1$:

$$\overline{\mathrm{D}}_1^p(\overline{\varphi} \cdot \overline{\psi}) = \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \mathrm{C}_p^q (\overline{\mathrm{D}}_1^q \overline{\varphi})(\overline{\mathrm{D}}_1^{p-q} \overline{\psi}).$$

($\mathcal{AD}$3.4) $\overline{\mathrm{D}}_1^p$ este $\overline{\mathrm{S}}_1$ uniform continuă de la $\overline{\mathcal{T}}_1$ la $\overline{\mathcal{T}}_1$, unde $\overline{\mathrm{S}}_1 : (\overline{\mathrm{E}}_1 \to \overline{\mathrm{E}}_1) \to (\overline{\mathrm{E}}_1' \to \overline{\mathrm{E}}_1')$

$$\text{ca } ((\overline{\mathrm{S}}_1(\overline{f}))(\overline{s}))(h) = \overline{f}(\overline{s}(h)).$$

Remarcăm că în acest caz pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_1$ nu poate verifica condiția

$$(\forall)\ \overline{s}_1, \overline{s}_2, \overline{t}_1, \overline{t}_2 \in \overline{\mathrm{E}}_1' :$$

(AAA) $\overline{\Pi}_1(\overline{s}_1, \overline{t}_1) = \overline{\Pi}_1(\overline{s}_2, \overline{t}_2) = 1 \Rightarrow \overline{\Pi}_1(\overline{s}_1\overline{s}_2, \overline{t}_1\overline{t}_2) = 1$ și nici condiția mai slabă

$$(\forall)\ \overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\mathrm{E}}_1, \overline{s} \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_1, \overline{\varphi}),\ \overline{t} \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_1, \overline{\psi}) :$$

(AA) $\overline{s}\ \overline{t} \in \mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_1, \overline{\varphi}\ \overline{\psi})$

deoarece folosind notațiile de la observația (*) din § 3

fie $\overline{s}_1 = \overline{s}_2 = s$, $\overline{t}_1 = \overline{t}_2 = u(0)$; observăm că $s \in \mathrm{E}' \Rightarrow s \in \overline{\mathrm{E}}_1'$ deoarece

$$\mathrm{E} \subseteq \overline{\mathrm{E}}_0 \subseteq \overline{\mathrm{E}}_1;$$

atunci $\overline{\Pi}_1(\bar{s}_1, \bar{t}_1) = \overline{\Pi}_1(\bar{s}_2, \bar{t}_2) = 1$ căci avem $s \in \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}_{00}, 0)$ dar $\mathcal{C}n\,(\mathcal{T}_{00}, 0) \subseteq \mathcal{C}n\,(\mathcal{T}_{01}, 0)$ deci $\overline{\Pi}_0\,(s, u(0)) = 1$ deci conform cu $(\mathcal{A}\mathcal{D}\,2)$, $\overline{\Pi}_1\,(s, u(0)) = 1$;

dar $\bar{s}_1 \bar{s}_2 = s \cdot s$, $\bar{t}_1\, \bar{t}_2 = u\,(0)$ și $\overline{\Pi}_1\left(\bar{s}_1 \bar{s}_2,\ u\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$ căci avem $s \cdot s \in \mathcal{C}n\left(\mathcal{T}_{00}, \frac{1}{2}\right)$ dar $\mathcal{C}n\left(\mathcal{T}_{00}, \frac{1}{2}\right) \subseteq \mathcal{C}n\left(\mathcal{T}_{01}, \frac{1}{2}\right)$ deci $\overline{\Pi}_0\left(s \cdot s, u\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$ deci conform cu $(\mathcal{A}\,\mathcal{D}2)$, $\overline{\Pi}_1\left(s \cdot s,\ u\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1$;

deci $\overline{\Pi}_1(\bar{s}_1\ \bar{s}_2,\ \bar{t}_1\ \bar{t}_2) = 0$ deoarece avem $\overline{\Pi}_1(\bar{t}_1\, \bar{t}_2,\ u(0)) = 1$ căci $\bar{t}_1\, \bar{t}_2 = u\,(0)$ și $\overline{\mathcal{T}}_1$ este separată.

Pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}_1$ nu poate verifica condiția (AA) nici măcar dacă în locul condiției $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}2)$ ar verifica condiția slăbită

$(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ \mathcal{C}\,2)\ (\forall)\varphi \in \mathrm{E},\ s \in \mathcal{C}n\ (\mathcal{T}_0, \varphi)$:

$$s \in \mathcal{C}n\,(\overline{\mathcal{T}}_1, \varphi)$$

unde s-a considerat $\mathrm{E} \subseteq \overline{\mathrm{E}}_1$, $\mathrm{E}' \subseteq \overline{\mathrm{E}}'_1$ conform observației (A2)

În § 4 s-a indicat o metodă de construire a algebrei $\overline{\mathrm{E}}_1$ verificînd condiția $(\mathcal{A}\mathcal{D}\ 1)$, sub forma $\overline{\mathrm{E}}_\Omega$, unde $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathcal{Q}$ iar în § 5 s-a construit pentru orice $\Omega \in \mathcal{Q}_0$ o familie $(\overline{\mathrm{D}}{}^p_1 \mid p \in \mathrm{N}^n)$ de operații liniare $\overline{\mathrm{D}}{}^p_1 : \overline{\mathrm{E}}_1 \to \overline{\mathrm{E}}_1$ (unde $\overline{\mathrm{E}}_1 = \overline{\mathrm{E}}_\Omega$, verificînd condițiile $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ 3.1)$, $(\mathcal{A}\,\mathcal{D}3.2)$ și $(\mathcal{A}, \mathcal{D}, 3.3.)$, sub forma

$$\overline{\mathrm{D}}{}^p_1 = \overline{\mathrm{D}}{}^p_\Omega \text{ cu } p \in \mathrm{N}^n.$$

În cele ce urmează vom expune construcția pseudotopologiei $\overline{\mathcal{T}}_1$ verificînd condițiile $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ \mathcal{C}2)$ și $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ 3.4)$.

Fie

6.1. $\Omega = (\mathcal{V}, \mathcal{S}, \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathcal{Q}_0$

6.2. $\overline{\mathrm{E}}_\Omega = \mathcal{A}/\mathcal{J}$

6.3. $\overline{\mathrm{E}}'_\Omega = \mathrm{N} \to \overline{\mathrm{E}}_\Omega$

6.4. $\overline{\mathrm{T}}_\Omega : \mathcal{P}\,(\overline{\mathrm{E}}_\Omega) \to \mathcal{P}\,(\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)$ ca

6.4.1. $\overline{\mathrm{T}}_\Omega\,(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{N} \to \overline{\mathrm{A}}$;

atunci

6.5. $(\forall)\ \overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}} \in \mathcal{P}\,(\overline{\mathrm{E}}_\Omega), \varnothing \neq \overline{\mathrm{A}} \subseteq \overline{\mathrm{B}}$:

$$\varnothing \neq \overline{\mathrm{T}}_\Omega\,(\overline{\mathrm{A}}) \subseteq \overline{\mathrm{T}}_\Omega\,(\overline{\mathrm{B}})$$

6.6. $\overline{\mathrm{T}}_\Omega(\overline{\mathrm{E}}_\Omega) = \overline{\mathrm{E}}'_\Omega$

6.7. $(\forall)\,\bar{\varphi} \in \overline{\mathrm{E}}_\Omega$:

$$\overline{\mathrm{T}}_\Omega(\{\bar{\varphi}\}) = \{u\,(\bar{\varphi})\}$$

6.8. $\overline{\mathrm{E}}_\Omega$, $\overline{\mathrm{E}}'_\Omega$ sînt algebre comutative cu element unitate peste corpul R şi

6.8.1. $\mathrm{E} \subseteq \overline{\mathrm{E}}_0 \subseteq \overline{\mathrm{E}}_\Omega$

$$\mathrm{E}' \subseteq \overline{\mathrm{E}}'_0 \subseteq \overline{\mathrm{E}}'_\Omega$$

6.8.2. Algebrele induse pe E respectiv E′ de $\overline{\mathrm{E}}_\Omega$ respectiv $\overline{\mathrm{E}}'_\Omega$, coincid cu algebrele iniţiale

6.9. $(\forall)\ \overline{\varphi},\ \ \overline{\psi} \in \overline{\mathrm{E}}_\Omega,\ \alpha,\ \beta \in \mathrm{R}:$

6.9.1. $\alpha\ \overline{\mathrm{T}}_\Omega(\{\overline{\varphi}\}) + \beta\ \overline{\mathrm{T}}_\Omega(\{\overline{\psi}\}) = \overline{\mathrm{T}}_\Omega\{\alpha\overline{\varphi} + \beta\,\overline{\psi}\})$

6.9.2. $\overline{\mathrm{T}}_\Omega\ (\{\overline{\varphi}\})\cdot\overline{\mathrm{T}}_\Omega(\{\overline{\psi}\}) = \overline{\mathrm{T}}_\Omega(\{\overline{\varphi}\cdot\overline{\psi}\})$

6.10. $\mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}}_\Omega\big|_{\mathcal{P}(\overline{\mathrm{E}})}$.

DEFINIŢIA 8. Notăm cu $\overline{\mathfrak{A}}$ mulţimea elementelor de forma $\overline{\Omega} = (\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{J},\ \mathcal{A},\ \overline{\mathcal{J}},\ \overline{\mathcal{A}})$, unde

8.1. $\Omega = (\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{J}, \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0$

8.2. Au loc incluziunile $\underset{\cup|}{\overline{\mathcal{J}}} \subseteq \underset{\cup|}{\overline{\mathcal{A}}} \subseteq \overline{\mathrm{E}}'_\Omega$

$$\mathcal{C}n(\mathcal{T}_0,\ 0) \subseteq \bigcup_{\varphi\in\mathrm{E}} \mathcal{C}n(\mathcal{T}_0,\ \varphi)$$

8.3. $\overline{\mathcal{J}}$, $\overline{\mathcal{A}}$ sînt subspaţii vectoriale în $\overline{\mathrm{E}}'_\Omega$

8.4. $((\overline{\mathrm{E}}_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega})\cdot\overline{\mathcal{J}} \subseteq \overline{\mathcal{J}}$

$((\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega})\cdot\overline{\mathcal{A}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$

8.5. $\bigcup\limits_{p\in\mathrm{N}^n} \widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega\ \overline{\mathcal{J}} \subseteq \overline{\mathcal{J}},\ \bigcup\limits_{p\in\mathrm{N}^n} \widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega\ \overline{\mathcal{A}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$

8.6. $(\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega} \cap \overline{\mathcal{J}} = \{u(0)\}$

8.7. $\overline{\mathcal{A}} \subseteq (\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega} + \overline{\mathcal{J}}$.

Observaţia 4. $\overline{\mathfrak{A}}$ nu este vidă căci conform observaţiei 3

$$(\exists)\,\Omega = (\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{J},\ \mathcal{A}) \in \mathfrak{A}_0:$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{J} = \{u(0)\}.$$

Fie $\overline{\mathcal{J}}$ subspaţiul vectorial generat de $((\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega})\cdot\mathcal{V}_0$ în $\overline{\mathrm{E}}'_\Omega$ şi $\overline{\mathcal{A}} = (\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega} + \overline{\mathcal{J}}$.

Fie $\overline{\Omega} = (\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{J}, \mathcal{A},\ \overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{A}})$; atunci $\overline{\Omega} \in \overline{\mathfrak{A}}$ deoarece: Condiţiile 8.1, 8.3 şi 8.7 se verifică evident.

Se verifică 8.2 deoarece evident $\mathcal{E}n\,(\mathcal{T}_0,\, 0) = \mathcal{V}_0 \subseteq \overline{\mathcal{J}}$; fie acum $s \in \bigcup\limits_{\varphi \in \mathrm{E}} \mathcal{E}n\,(\mathcal{T}_0, \varphi)$; atunci $(\exists)\, \varphi \in \mathrm{E},\ t \in \mathcal{E}n\,(\mathcal{T}_0,\, 0)$:

$$s = u(\varphi) + t$$

deci $s \in (\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega} + \overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{A}}\cdot$

Se verifică 8.4 deoarece :

fie $\overline{s} \in \overline{\mathcal{J}}$; atunci $(\exists)$ $h \in \mathrm{N},\ s_0, \ldots, s_h \in \mathcal{A},\ t_0, \ldots, t_h \in \mathcal{V}_0$:

$$\overline{s} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h} u(s_i)\,(u \circ t_i)\,;$$

fie $\overline{t} \in (\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega}$; atunci $(\exists)$ $s \in \mathcal{A}$:

$$\overline{t} = u(s)$$

deci $\overline{t}.\ \overline{s} = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant h} u(s.\ s_i)\,(u \circ t_i)$; dar $s.s_0, \ldots, s.\ s_h \in \mathcal{A}$ căci $s,\ s_0, \ldots, s_h \in \mathcal{A}$ deci $\overline{t}.\overline{s} \in \overline{\mathcal{J}}\cdot$

De aici rezultă că

$$((\overline{\mathrm{E}}'_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega})\cdot \overline{\mathcal{J}} \subseteq \overline{\mathcal{J}},\ ((\overline{\mathrm{E}}')_\Omega)_{\overline{\mathrm{T}}_\Omega})\cdot \overline{\mathcal{A}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}\cdot$$

Se verifică 8.5 deoarece fie $\overline{s} \in \overline{\mathcal{J}},\ p \in \mathrm{N}^n$; atunci $(\exists)\, h \in \mathrm{N},\ s_0, \ldots, s_h \in \mathcal{A},\ t_0, \ldots, t_h \in \mathcal{V}_0$:

$$\overline{s} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h} u(s_i)\,(u \circ t_i)$$

dar $(\forall)$ $k \in \mathrm{N}$:

$$(\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega\ \overline{s})\,(k) = \overline{\mathrm{D}}{}^p_\Omega\,(\overline{s}\ (k)) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h} \overline{\mathrm{D}}{}^p_\Omega\,(s_i \cdot u\,(t_i\ \ (k))) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant i \leqslant h}\ \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} (\widetilde{\mathrm{D}}^q\ (\mathrm{C}_p^q\ \ s_i))\,(\widetilde{\mathrm{D}}^{p-q}\, u\,(t_i\,(k)))$$

iar $\widetilde{\mathrm{D}}^q\,(\mathrm{C}_p^q\, s_i) \in \mathcal{A}$ căci $\mathcal{A}$ verifică 6.1 de la definiția 6 din § 5, și $\widetilde{\mathrm{D}}^{p-q}\, u\,(t_i\ (k)) = u\,((\widetilde{\mathrm{D}}^{p-q}\ t_i)\,(k))$

$$\widetilde{\mathrm{D}}^{p-q}\, t_i \in \mathcal{V}_0\ \text{ căci }\ t_i \in \mathcal{V}_0$$

deci $(\forall)$ $k \in \mathrm{N}$:

$$(\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega\ \overline{s})\ (k) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h}\ \sum_{0 \leqslant q \leqslant p} \widetilde{\mathrm{D}}^q\ (\mathrm{C}_p^q\ \ s_i)\ \ u\,((\widetilde{\mathrm{D}}^{p-q}\ t_i)\,(k))$$

deci $\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega\,\overline{s} = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant h}\ \sum\limits_{0 \leqslant q \leqslant p} u\,(\widetilde{\mathrm{D}}^q\,\mathrm{C}_p^q\, s_i)\ \ (u_0\,(\widetilde{\mathrm{D}}^{p-q}\ \ t_i))$

de unde $\widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega\ \ \overline{s} \in \overline{\mathcal{J}}\cdot$

Se demonstrează analog că $(\forall)$ $\overline{s} \in \overline{\mathcal{A}},\ p \in \mathrm{N}^n : \widetilde{\overline{\mathrm{D}}}{}^p_\Omega\,\overline{s} \in \mathcal{A}$; condiția 8.6. se verifică conform lemei din anexă.

DEFINIŢIA 9. Fie $\overline{\Omega}=(\mathcal{V},\mathcal{S},\mathcal{I},\mathcal{A},\overline{\mathcal{I}},\overline{\mathcal{A}})\in\overline{\mathfrak{A}}$; definim $\overline{\Pi}_{\overline{\Omega}}:\overline{E}'_\Omega\times\overline{E}'_\Omega\to\{0,1\}$ ca

$$\overline{\Pi}_{\overline{\Omega}}(\overline{s}_1,\ \overline{s}_2)=1\Leftrightarrow[\overline{s}_1,\ \overline{s}_2\in\overline{\mathcal{A}},\ \overline{s}_1-\overline{s}_2\in\overline{\mathcal{I}}]$$

unde $\Omega=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A})$.

Notăm $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}}=(\overline{E}_\Omega,\ \overline{E}'_\Omega,\ \overline{T}_\Omega,\ \overline{\Pi}_{\overline{\Omega}})$.

TEOREMA $(\mathcal{A}\ \mathcal{D})$. *Fie* $\overline{\Omega}=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A},\ \overline{\mathcal{I}},\ \overline{\mathcal{A}})\in\overline{\mathfrak{A}}$ *şi* $\Omega=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A})$; *atunci*

1) $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}}$ *este o pseudotopologie completă şi separată, compatibilă cu structura de algebră a lui* $\overline{E}_\Omega$

2) $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}}$ *verifică* $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ \mathcal{C}2)$ *şi* $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ 3.4)$.

Demonstraţie. 1) Rezultă din exemplul 9 din Cap. I, N

2) $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}}$ verifică $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ \mathcal{C}\ 2)$ deoarece fie $\varphi\in E$, $s\in\mathcal{C}n(\mathcal{T}_0,\ \varphi)$; atunci $u\ (\varphi),\ s\in\overline{\mathcal{A}}$ dar $u(\varphi)-s\in\mathcal{C}n(\mathcal{T}_0,\ 0)$ căci $s\in\mathcal{C}n(\mathcal{T}_0,\ \varphi)$ deci $u(\varphi)-s\in\overline{\mathcal{I}}$ deci $\overline{\Pi}_{\overline{\Omega}}\ (u(\varphi),\ s)=1$ de unde $s\in\mathcal{C}n(\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}},\ \varphi)$; $\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}}$ verifică $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ 3.4)$ deoarece fie $\overline{s}_1,\ \overline{s}_2\in\overline{E}'_\Omega$ ca $\overline{\Pi}_{\overline{\Omega}}(\overline{s}_1,\ \overline{s}_2)=1$; atunci $\overline{s}_1,\ \overline{s}_2\in\overline{\mathcal{A}},\ \overline{s}_1-\overline{s}_2\in\overline{\mathcal{I}}$; fie $p\in N^n$; conform definiţiei

$$\overline{S}_1(\overline{D}^p_\Omega)=\overset{\approx}{D}{}^p_\Omega$$

deci $(\overline{S}_1\ (\overline{D}^p_\Omega))\ (\overline{s}_1),\ (\overline{S}_1\ (\overline{D}^p_\Omega))(\overline{s}_2)\in\overline{\mathcal{A}}$ căci $\overline{\mathcal{A}}$ verifică 8.5 de la definiţia 8 iar $(\overline{S}_1\ (\overline{D}^p_\Omega))\ (\overline{s}_1)-(\overline{S}_1\ (\overline{D}^p_\Omega))\ (\overline{s}_2)=(\overline{S}_1\ (\overline{D}^p_\Omega))\ (\overline{s}_1-\overline{s}_2)\in\overline{\mathcal{I}}$ căci $\overset{\approx}{D}{}^p_\Omega$ este liniară şi $\overline{\mathcal{I}}$ verifică 8.5 de la definiţia 8.

§ 7. OBSERVAŢII FINALE

7.1. Fie $\overline{\Omega}=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A},\overline{\mathcal{I}},\ \overline{\mathcal{A}})\in\overline{\mathfrak{A}}$, $\Omega=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A})$; atunci algebra pseudotopologică completă şi separată $(\overline{E}_\Omega,\ \overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}})$, unde $\overline{E}_\Omega=\mathcal{A}/\mathcal{I}$,

$$\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}}=(\overline{E}_\Omega,\ \overline{E}'_\Omega,\ \overline{T}_\Omega,\ \overline{\Pi}_{\overline{\Omega}})$$

şi familia de operaţii liniare $(\overline{D}^p_\Omega|_{p\in N^n})$ definite pe $\overline{E}_\Omega$ cu valori în $\overline{E}_\Omega$, rezolvă problema algebrizării distribuţiilor enunţată la observaţia $(\mathcal{A}\ \mathcal{D})$ din § 6 în varianta slăbită, obţinută prin înlocuirea condiţiei $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}2)$ cu $(\mathcal{A}\ \mathcal{D}\ \mathcal{C}2)$. (Folosind notaţiile din introducere, $\Lambda=\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathcal{E}}_{n\lambda}=\overline{E}_\Omega$, $\overline{\mathcal{T}}_\lambda=\overline{\mathcal{T}}_{\overline{\Omega}}$ cu $\lambda=\overline{\Omega}=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A},\ \overline{\mathcal{I}},\ \overline{\mathcal{A}})\in\overline{\mathfrak{A}}$, $\Omega=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A})$).

7.2. Se pot construi algebre pseudotopologice complete $(\overline{E}_1,\ \overline{\mathcal{T}}_1)$ (nu se ştie dacă sînt şi separate !) care verifică condiţiile $(\mathcal{A}\mathcal{D}1)$, $(\mathcal{A}\mathcal{D}2)$ şi $(\mathcal{A}\mathcal{D}3)$. În adevăr :

Fie $\Omega=(\mathcal{V},\ \mathcal{S},\ \mathcal{I},\ \mathcal{A})\in\mathfrak{A}_0$ ca $\mathcal{V}=\mathcal{I}=\{u\ (0)\}$; atunci $\overline{E}_\Omega=\mathcal{A}$, $\overline{E}'_\Omega=N\rightarrow\mathcal{A}$;

Fie $\overline{\mathcal{J}}$ subspaţiul vectorial generat de $((\overline{\mathrm{E}}'_{\Omega})_{\overline{\mathrm{T}}\Omega})$. $\mathcal{C}_n\,(\overline{\mathcal{T}}_0,\, 0)$ în $\overline{\mathrm{E}}'_{\Omega}$, $\overline{\mathcal{A}} = (\overline{\mathrm{E}}'_{\Omega})_{\overline{\mathrm{T}}\Omega} + \overline{\mathcal{J}}$; definim $\overline{\Pi} : \overline{\mathrm{E}}'_{\Omega} \times \overline{\mathrm{E}}'_{\Omega} \to \{0\,;\,1\}$ ca $\overline{\Pi}\,(\bar{s}_1,\, \bar{s}_2) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [\bar{s}_1,\, \bar{s}_2 \in \overline{\mathcal{A}},\ \bar{s}_1 - \bar{s}_2 \in \overline{\mathcal{J}}]$; notăm $\overline{\mathcal{T}} = (\overline{\mathrm{E}}_{\Omega},\ \overline{\mathrm{E}}'_{\Omega},\ \overline{\mathrm{T}}_{\Omega},\ \overline{\Pi})$; atunci $(\overline{\mathrm{E}}_{\Omega},\ \overline{\mathcal{T}})$ este o algebră pseudotopologică completă care verifică condiţiile $(\mathcal{A}\mathcal{D}1)$, $(\mathcal{A}\mathcal{D}2)$ şi $(\mathcal{A}\mathcal{D}3)$.

$\overline{\mathcal{T}}$ este separată numai dacă

$$(\forall)\ h \in \mathrm{N},\ s,\ s_0, \ldots,\ s_h \in \mathcal{A},\ \tilde{s}_0, \ldots,\ \tilde{s}_h \in \mathcal{C}_n\,(\widetilde{\mathcal{T}}_0,\ 0):$$

$$u\,(s) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h} u\,(s_i)\,(\underset{\mathcal{S}}{\mathrm{pr}} \circ \tilde{s}_i) \Rightarrow s = u\,(0),$$

unde $\underset{\mathcal{S}}{\mathrm{pr}} : \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}$ este operatorul canonic de proiecţie în raport cu descompunerea lui $\mathcal{S}_0$ în suma directă

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{V}_0 + \mathcal{S}.$$

7.3. În condiţiile de la 7.2 poate prezenta interes cazul în care pseudotopologia $\overline{\mathcal{T}}$ nefiind separată ar induce pe $\mathcal{D}'_n = \overline{\mathrm{E}}_0$ sau măcar pe $\mathrm{E} = \mathcal{E}_n$ pseudotopologii separate.

ANEXĂ

LEMĂ. *Fie* $h \in \mathrm{N}$, s, $s_0, \ldots,$ $s_h : \mathrm{N} \to \mathcal{E}_n$, $t_0, \ldots, t_h \in \mathcal{V}_0$; *dacă* $u\,(s) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h} u\,(s_i)\ (u \circ t_i)$, *atunci* $s = u\,(0)$.

Demonstraţie. Fie $k \in \mathrm{N}$; atunci $s = \sum_{0 \leqslant i \leqslant h} s_i\ u(t_i\,(k))$ deci $(\forall)\, k, l \in \mathrm{N}, x \in \mathrm{R}^n$:

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant h} (t_i\ (k))\ (x)\ (s_i\ (l))\ (x) = (s\ (l))\ (x);$$

pentru $l \in \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{R}^n$ notăm

$$\mathrm{A}\ (x) = \begin{pmatrix} (t_0\ (0))\ (x) & \ldots & (t_h\ (0))\ (x) \\ \vdots & & \vdots \\ (t_0\ (k))\ (x) & \ldots & (t_h\ (k))\ (x) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}\ (l,\ x) = \begin{pmatrix} (t_0\ \ (0))\ \ (x) & \ldots & (t_h\ \ (0))\ \ (x) & (s\ \ (l))\ (x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (t_0\ \ (k))\ \ (x) & \ldots & (t_h\ \ (k))\ \ (x) & (s\ \ (l))\ \ (x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

atunci rang $\mathrm{A}\ (x) =$ rang $\mathrm{B}\ (l,\ x) = \nu\ (x) + 1 \leqslant h + 1$ deci $(\exists)\ i\ (x,\ 0), \ldots,$ $i\ (x,\ \nu\ (x)),\ k\ (x,\ 0), \ldots,\ k\ (x,\ \nu\ (x)) \in \mathrm{N}$:

$$^{*}1.\ \det\ ((t_i\ \ (x,\ j_1)\ (k\ (x,\ j_2)))\ (x)\ |\ 0 \leqslant j_1,\ j_2 \leqslant \nu\ (x)) \neq 0.$$

$* 2.$ $(\forall)\ k \in \mathrm{N}$:

$(\exists)$ (unic) $\lambda(k, x, 0), \ldots, \lambda(k, x, \nu(x)) \in \mathrm{R}^1$:

$* 2.1.$ $(\forall)\ 0 \leqslant i \leqslant h$:

$$(t_i(k))(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu(x)} \lambda(k, x, j)(t_i(k(x, j)))(x)$$

$$* 2.2.\ (s(l))(x) = \Big(\sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu(x)} \lambda(k, x, j)\Big)(s(l))(x) \text{ cu } l \in \mathrm{N}$$

dar $(\exists)\ \delta > 0$:

$(\forall)\ y \in \mathrm{S}(x, \delta)$:

det $\mathrm{A}_0(x, y) \neq 0$ unde

$$\mathrm{A}_0(x, y) = ((t_{i(x, j_1)}(k(x, j_2)))(y) \mid 0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant \nu(x))$$

deci pentru $y \in \mathrm{S}(x, \delta)$ se pot considera constante numerele naturale $\nu(y), i(y, 0), \ldots, i(y, \nu(y)), k(y, 0), \ldots, k(y, \nu(y))$
atunci $(\forall)\ y \in \mathrm{S}(x, \delta)$, $k \in \mathrm{N}$:

$**$ 1) det $\mathrm{A}_0(x, y) \neq 0$

$**$ 2)
$$\begin{pmatrix} \lambda(k, y, 0) \\ \vdots \\ \lambda(k, y, \nu(x)) \end{pmatrix} = (\mathrm{A}_0(x, y))^{-1} \begin{pmatrix} (t_{i(x, 0)}(k))(y) \\ \vdots \\ (t_{i(x, \nu(x))}(k))(y) \end{pmatrix}$$

deci $\lambda(k, ., 0), \ldots, \lambda(k, ., \nu(x)) \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{S}(x, \delta))$ şi $\sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu(x)} \lambda(k, ., j) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu(x)} a'_j(x, .)(t_{i(x, j)}(k))(.)$ unde $a'_0(x, .), \ldots, a'_{\nu(x)}(x, .) \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{S}(x, \delta))$; fie $\varphi \in \mathcal{D}_n$ cu suportul conţinut în $\mathrm{S}(x, \delta/2)$; atunci conform cu $*$ 2.2.

$$\int_{\mathrm{R}^n} (s(l))(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu(x)} \int_{\mathrm{R}^n} (t_{i(x, j)}(k))(y)\, a'_j(x, y)(s(l))(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

dar $a'_j(x, .)(s, (l))(.)\ \varphi(.) \in \mathcal{D}_n$ cu $0 \leqslant j \leqslant \nu(x)$ şi k fiind arbitrar în relaţia de sus, rezultă

$$\int_{\mathrm{R}^n} (s(l))(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu(x)} < t_{i(x, j)}, a'_j(x, .)(s(l))(.)\ \varphi(.) >$$

cum însă $t_i \in \mathcal{O}_0$ cu $0 \leqslant i \leqslant h$ rezultă

$$\int_{\mathrm{R}^n} (s(l))(y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Deci $(\forall)\ l \in \mathrm{N}$, $x \in \mathrm{R}^n$:

$(\exists)\ \delta > 0$:

$(\forall)\ y \in \mathrm{S}(x, \delta/2)$:

$(s(l))(y) = 0$

de unde rezultă evident $s = u(0)$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki, *Topologie générale*. vol. II, III, IX, X, Paris, 1940.
2. — *Espace vectoriels topologiques*. vol. I, Paris, 1953.
3. N. Dunford and I. T. Schwartz, *Linear Operators*. New York, London, 1958.
4. И. М. Гельфанд – Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, том II, Москва, 1958.
5. T. Iamanaka, *Une extension de la théorie des distributions* de M. I. Korevaar. Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 1957.
6. I. Korevaar, *Distributions defined by fundamental sequences*, Ind. Math., **17**, 1955.
7. G. Marinescu, *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1959.
8. Ł Mikusinski, *Calcul operaţional*. Varşovia, 1957.
9. M. Nicolescu, *Analiză matematică*, vol. II şi III, Bucureşti, 1958.
10. E. Rosinger, *Definirea spaţiului distribuţiilor $\mathcal{D}'_n$ prin completarea unui spaţiu de funcţii continue*. Com. Acad. R.P.R., **6**, 641–650 (1962).
11. — *Structuri pseudotopologice*. St. cerc. mat., **14**, *2*, 223–251 (1963).
12. — *Structuri pseudotopologice (II)*. St. cerc. mat., **16**, *9*, 1085–1110 (1964).
13. L. Schwartz, *Théorie des distributions*. vol. I, II, Paris, 1957.

O NOUĂ PROBLEMĂ LA LIMITĂ PENTRU ECUAȚIA CĂLDURII ÎN DOUĂ VARIABILE INDEPENDENTE

DE

ANDREI A. SUSEA

Fie un domeniu dreptunghiular D, definit în planul variabilelor $(y,\ \theta)$ prin relația :

$$D = \{(y,\ \theta)/\,|\,y\,| \leqslant 1,\ |\,\theta\,| \leqslant \pi\}.$$

Problema 1. Să se determine funcția $B\,(y,\ \theta)$ definită pe domeniul D și de clasă C^2 în ambele variabile, care satisface condițiile :

1) Este soluție a ecuației :

$$\underline{\cap}\, B \equiv \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \xi \frac{\partial B}{\partial \theta} = 0. \tag{1}$$

2) Este pară în y, adică :

$$B\,(y,\ \theta) = B\,(-y,\ \theta). \tag{2}$$

3) Mediile în raport cu y și θ sînt

$$M_y B = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} B\,(y,\ \theta)\,\mathrm{d}y = \beta\,\cos\theta, \tag{3}$$

$$M_\theta B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B\,(y,\ \theta)\,\mathrm{d}\theta = 0, \tag{4}$$

unde β este o constantă pozitivă.

Această problemă provine din calculul pierderilor curenților turbionari în plăci feromagnetice plate în cazul liniar și a fost studiată din punct de vedere aplicativ de N. W. Mc.Lachlan [1] și O. I. Butler [2].

În cele ce urmează, ne propunem să cercetăm o problemă mai generală de acest tip pe care, pentru ușurința limbajului, vom conveni s-o numim a doua problemă la limită pentru ecuația căldurii.

ST. CERC. MAT., TOM., 18, NR. 5, P. 731–739, BUCUREȘTI, 1966

Problema 1'. Să se determine funcţia $B(y, \theta)$ definită pe domeniul D şi de clasă C^2 în ambele variabile, care satisface condiţiile.

1) Este soluţie a ecuaţiei neomogene

$$\underline{\cap}\, B \equiv \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} - \xi \frac{\partial B}{\partial \theta} = F(y, \theta). \tag{1'}$$

2) Verifică relaţia (2).

3) Sînt date mediile în raport cu y şi θ

$$M_y B = f(\theta), \tag{3'}$$

$$M_\theta B = g(y), \tag{4'}$$

unde $f(\theta)$ este de clasă C^1 pe intervalul $[-\pi, \pi]$, $g(y)$ este de clasă C^2 pe intervalul $[0,1]$ şi $F(y, \theta)$ este continuă pe domeniul D.

Pentru ca problema 1' să admită soluţie, trebuie ca funcţiile $f(\theta)$ şi $g(y)$ să satisfacă în plus următoarele condiţii de compatibilitate:

a) $g(y)$ să fie pară.

b) $M_y g = M_\theta f$.

c) $F(y, \theta)$ trebuie să fie pară în y.

Într-adevăr, ţinînd seama de (1'), (2) şi (4') rezultă a) şi c), iar conform teoremei lui Fubini rezultă b).

În continuare, printr-un studiu amănunţit al sistemului de condiţii date, vom stabili cîteva echivalenţe între condiţiile acestui sistem şi alte condiţii pe care le vom folosi în continuare.

Fie deci sistemul (α) format din relaţiile (1'), (2), (3') şi (4'); prin aplicarea mediei în raport cu relaţia (1') se obţine:

$$M_\theta \underline{\cap}\, B = M_\theta F \tag{5}$$

de unde:

$$M_\theta \left[\frac{\partial B}{\partial \theta}\right] = \frac{1}{\xi} M_\theta \left[\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right] - \frac{1}{\xi} M_\theta F \tag{5'}$$

sau

$$B(y, \pi) - B(y, -\pi) = \frac{2\pi}{\xi}(g'' - M_\theta F). \tag{6}$$

Reciproc, pornind de la (6):

$$\xi M_\theta \left[\frac{\partial B}{\partial \theta}\right] = (g'' - M_\theta F) \tag{6'}$$

şi pe baza lui (1')

$$M_\theta \left[\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\right] = g'' \tag{7}$$

de unde

$$M_\theta B = g + A_1 y + A_2. \tag{8}$$

Cum funcția $B\,(y,\ \theta)$ este pară în y, rezultă că $A_1 = 0$ și ținînd seama de acest lucru, să aplicăm relației (8) media în raport cu y.

$$M_y M_\theta B = M_y g + M_y A_2. \tag{8'}$$

Conform lui b) și a faptului că $M_y A_2 = A_2$ rezultă $A_2 = 0$ și deci echivalența este demonstrată.

Pe de altă parte, prin derivarea în raport cu y a condiției (2) obținem:

$$\frac{\partial B(y,\theta)}{\partial y} = -\frac{\partial B(-y,\theta)}{\partial y}$$

sau pentru $y = 0$

$$\left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{y=0} = 0. \tag{9}$$

De aici deducem că se poate calcula funcția numai pe domeniul D_1 definit de

$$D_1 = \{(y,\ \theta)/0 \leqslant y \leqslant 1,\ |\,\theta\,| \leqslant \pi\}$$

și folosind relația (9).

Cum din (3′) rezultă ușor relația:

$$\int_0^1 B\,(y,\ \theta)\,\mathrm{d}y = f\,(\theta) \tag{3''}$$

și reciproc, atunci putem enunța:

PROPOZIȚIA 1. *Următoarele sisteme de condiții:*

1) *sistemul* (α);

2) *sistemul* (β) *format din* (1′), (2′), (3″) *și*

3) *sistemul* (γ) *format din* (1′), (9), (3″) *și* (6) *sînt echivalente.*

Vom folosi în continuare sistemul (β) pe domeniul D_1.

TEOREMA 1 (DE UNICITATE). *Sistemul* (β) *admite în clasa* C^2 *o soluție unică definită pe domeniul* D_1.

Într-adevăr, să presupunem că ar exista două soluții $B_1\,(y,\ \theta)$ și $B_2\,(y,\ \theta)$ ale sistemului (β), atunci diferența lor:

$$B\,(y,\ \theta) = B_1\,(y,\ \theta) - B_2\,(y,\ \theta)$$

verifică sistemul omogen atașat lui (β) (notat cu (β')) format din relațiile (1), (2′), (6) și

$$\int_0^1 B\,(y,\ \theta)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{7}$$

Fie funcția complexă $B^*\,(y,\ \theta)$ cu următoarele proprietăți:

1) $B^*\,(y,\ \theta)$ verifică sistemul (β'),

2) $\operatorname{Re} B^*\,(y,\ \theta) = B\,(y,\ \theta)$.

Deoarece $B^{\star}(y, \theta)$ este de clasă C^2 pe D_1 (compact), admite derivate parţiale de ordinul I mărginite şi deci este dezvoltabilă în serie Fourier cu coeficienţi funcţii de y:

$$B^{\star}(y, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(y) \exp(in\,\theta), \tag{8}$$

unde

$$C_n(y) = M_\theta\,[B^{\star}(y, \theta) \exp(-in\,\theta)]. \tag{9}$$

Acum vom aplica o integrare prin părţi:

$$2\pi\, C_n(y) = -\frac{1}{in} B^{\star}(y, \theta) \exp(-in\,\theta)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2\pi}{in} M_\theta\left[\frac{\partial B^{\star}}{\partial \theta} \exp(-in\,\theta)\right]. \tag{10}$$

Ţinînd seama că $B^{\star}(y, \theta)$ verifică relaţia:

$$B^{\star}(y, \pi) - B^{\star}(y, -\pi) = 0,$$

rezultă

$$2\pi\, C_n(y) = \frac{2\pi}{in} M_\theta\left[\frac{\partial B^{\star}}{\partial \theta} \exp(-in\,\theta)\right] \tag{10'}$$

conform lui (1)

$$2\pi\, C_n(y) = \frac{2\pi}{in\,\xi} M_\theta\left[\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \cdot \exp(-in\,\theta)\right] \tag{11}$$

de unde

$$C_n(y) = \frac{1}{in\xi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_\theta\,[B^{\star}(y, \theta) \exp(-in\,\theta)] \tag{11'}$$

şi pe baza lui (9):

$$C_n''(y) - i\xi\, n\, C_n(y) = 0. \tag{12}$$

Notînd $\alpha_n = \sqrt{\frac{n\xi}{2}}$, soluţia ecuaţiei va avea forma:

$$C_n(y) = A_{1,n} \exp[\alpha_n (1+i)\, y] + A_{2,n} \exp[-\alpha_n (1+i)\, y]. \tag{13}$$

Deci

$$\begin{aligned} B^{\star}(y, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{&A_{1,n} \exp[\alpha_n (1+i)\, y] + \\ &+ A_{2,n} \exp[-\alpha_n (1+i)\, y]\} \exp.\,(in\ \theta) \end{aligned} \tag{8''}$$

şi conform lui (2)

$$C_n(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha_n (1+i)\, y, \tag{13'}$$

unde n este întreg şi diferit de zero.

Integrăm (13′) între 0 şi 1 :

$$\int_0^1 C_n(y)\,dy = A_n \int_0^1 \operatorname{ch} \alpha_n (1+i)\, y\, dy$$

sau

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dy \int_{-\pi}^{\pi} B^{\star}(y\ \theta) \exp(-in\ \theta)\, d\theta = A_n K_n, \tag{14}$$

unde

$$K_n = \int_0^1 \operatorname{ch} \alpha_n (1+i)\, y dy = \frac{\operatorname{sh} \alpha_n (1+i)}{\alpha_n (1+i)}.$$

Se vede că pentru $n \neq 0$, $K_n \neq 0$.

Aplicînd relației (14) teorema lui Fubini, obținem

$$M_\theta [\exp(-in\ \theta)]\ M_y B^{\star}(y,\ \theta) = A_n K_n. \tag{14′}$$

şi pe baza lui (7),

$$A_n K_n = 0,$$

cum K_n este nenul, rezultă că $A_n = 0$, oricare ar fi $n \neq 0$; dacă $n = 0$, A_n este evident nul (aceasta este ceva banal).

Dar o serie Fourier cu toți coeficienții nuli este identic nulă şi deci :

$$B^{\star}(y,\ \theta) \equiv 0$$

de unde

$$\operatorname{Re} B^{\star}(y,\ \theta) \equiv B(y,\ \theta) \equiv 0$$

sau

$$B_1(y,\ \theta) \equiv B_2(y,\ \theta)$$

şi unicitatea este demonstrată.

Pentru calculul exact al soluției $B(y,\ \theta)$ este suficient să folosim relația (14) şi condițiile sistemului (β).

Cum f este de clasa C^1 pe intervalul $[-\pi,\ \pi]$, ea admite o dezvoltare Fourier de forma :

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta). \tag{12}$$

Introducem funcția complexă $f^{\star}(\theta)$ cu proprietățile :

(13)
1) $\operatorname{Re} f^{\star}(\theta) = f(\theta)$
2) $f^{\star}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \exp(in\ \theta)$

cu :

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\star}(\theta) \exp(-in\ \theta)\ d\theta, \tag{14}$$

unde

$$d_n = \frac{a_n - i\, b_n}{2}. \tag{15}$$

Înmulţim (3″) cu $\frac{1}{2\pi}$ exp $(-\, in\, \theta)$ şi integrăm între limitele $-\pi$ şi π

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-\, in\, \theta)\, \mathrm{d}\theta \int_0^1 B^\star(y, \theta)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^\star(\theta) \exp(-\, in\, \theta)\, \mathrm{d}\theta. \tag{16}$$

Permutînd integralele din primul membru şi ţinînd seama de (14) obţinem

$$\int_0^1 C_n(y)\, \mathrm{d}y = d_n. \tag{16′}$$

Dar $C_n\ (y)$ verifică ecuaţia diferenţială :

$$C_n''(y) - i\, \xi\, n\, C_n(y) = (-1)^{n-1}\, [M_\theta F(y, \theta) - g''(y)]. \tag{17}$$

Dacă $\widetilde{C}_n\ (y)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei (17), atunci soluţia generală este :

$$C_n(y) = A_{1,n} \exp[\alpha_n (1+i)\, y] + A_{2,n} \exp[-\, \alpha_n (1+i)\, y] + \widetilde{C}_n(y), \tag{18}$$

unde $\alpha_n = \sqrt{\frac{n\xi}{2}}$.

Utilizînd (2) se obţine

$$C_n(y) = A_n \operatorname{ch}\, [\alpha_n (1+i)\, y] + \widetilde{C}_n(y). \tag{19}$$

Integrăm (19) între limitele 0 şi 1 şi ţinînd seama de (16′) se obţine :

$$d_n = A_n \frac{\operatorname{sh} \alpha_n (1+i)}{\alpha_n (1+i)} + \int_0^1 \widetilde{C}_n(y)\, \mathrm{d}y. \tag{20}$$

Pentru uşurinţă vom nota :

$$\int_0^1 \widetilde{C}_n(y)\, \mathrm{d}y = \beta_n \tag{21}$$

de unde

$$A_n = \frac{\alpha_n (d_n - \beta_n)(1+i)}{\operatorname{sh} \alpha_n (1+i)}. \tag{22}$$

Trebuie specificat că, pentru o prezentare compactă, am utilizat formula (20) şi în cazul $n = 0$ înţelegînd că A_0 este dat de limita :

$$\lim_{n \to 0} \frac{\alpha_n (d_n - \beta_n)(1+i)}{\operatorname{sh}\ \alpha_n\ (1+i)}.$$

Soluţia generală $B^*(y,\theta)$ va avea forma, dacă seria este convergentă:

$$B^*(y,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_n(d_n-\beta_n)(1+i)}{\operatorname{sh}\alpha_n(1+i)}\operatorname{ch}[\alpha_n(1+i)\,y]\exp(in\theta) \tag{23}$$

şi prin calculul părţii reale obţinem soluţia $B(y,\theta)$ a sistemului (β), soluţie ce se exprimă evident sub forma de serie Fourier reală cu coeficienţi funcţii de y.

Observaţia 1. Prin aplicarea acestei metode la problema 1 se obţin următoarele concluzii:

1) Soluţia problemei 1 este unică

2) Forma soluţiei este:

$$\begin{aligned} B(y,\theta)=\frac{2\alpha\beta}{\operatorname{ch}2\alpha-\cos 2\alpha}\{[(&\sin\alpha\operatorname{ch}\alpha-\cos\alpha\operatorname{sh}\alpha)\sin\alpha y\operatorname{sh}\alpha y+\\ &+(\sin\alpha\operatorname{ch}\alpha+\cos\alpha\operatorname{sh}\alpha)\cos\alpha y\operatorname{ch}\alpha y]\cos\theta-[(\sin\alpha\operatorname{ch}\alpha+\\ &+\cos\alpha\operatorname{sh}\alpha)\sin\alpha y\operatorname{sh}\alpha y-(\sin\alpha\operatorname{ch}\alpha-\cos\alpha\operatorname{sh}\alpha)\cos\alpha y\operatorname{ch}\alpha y]\cdot\sin\theta\}\end{aligned} \tag{24}$$

şi coincide cu soluţia obţinută prin verificările practice.

Dacă în plus funcţiile $f(\theta)$ şi $F(y,\theta)$ verifică relaţiile:

$$f(-\pi)=f(\pi),$$
$$F(y,-\pi)=F(y,\pi),$$

atunci se pot prelungi prin periodicitate avînd următoarele proprietăţi:

1) $\bar f(\theta+2\pi)=\bar f(\theta)$,

2) $\bar f(\theta)=f(\theta)$, pentru $|\theta|\leqslant\pi$,

3) $\bar F(y,\theta+2\pi)=\bar F(y,\theta)$,

4) $\bar F(y,\theta)=F(y,\theta)$, pentru $|\theta|\leqslant\pi$.

În acest caz este evident că şi soluţia $B(y,\theta)$ admite o prelungire prin periodicitate şi deci problema este rezolvată pe toată banda cuprinsă între $-\pi$ şi π.

Fie funcţia ajutătoare $\widetilde{B}(y,\theta)$ definită prin:

$$\widetilde{B}(y,\theta)=\int_0^y\int_{-\pi}^{\theta}B(y,\theta)\,dy\,d\theta. \tag{25}$$

Propoziţia 2. *Funcţia $\widetilde{B}(y,\theta)$ verifică sistemul (δ) format din condiţiile:*

$$1)\ \underline{\cap}_{-\pi}\widetilde{B}(y,\theta)=\widetilde{F}(y,\theta) \tag{26}$$

$$2)\ \widetilde{B}(0,\theta)=\widetilde{B}(y,-\pi)=0 \tag{27}$$

$$3)\ \widetilde{B}(1,\theta)=\widetilde{f}(\theta) \tag{28}$$

$$4)\ \widetilde{B}(y,\pi)=\widetilde{g}(y) \tag{29}$$

unde:

$$\widetilde{f}\,(\theta)=\int_{-\pi}^{\theta} f\,(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{30}$$

$$\widetilde{g}\,(y)=\int_{0}^{y} g\,(y)\,\mathrm{d}y \tag{31}$$

$$\widetilde{F}\,(y,\,\theta)=\int_{0}^{y}\int_{-\pi}^{\theta} F\,(y,\,\theta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta \tag{32}$$

iar $\underline{\cap}_{-\pi}$ *este un operator definit prin:*

$$\underline{\cap}_{-\pi}=\underline{\cap}+\xi\,\frac{\partial}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=-\pi}\,. \tag{33}$$

Într-adevăr, dacă pornim de la formula (25) se obțin ușor condițiile (27), (28) și (29).

Pentru demonstrarea condiției (26) folosim relațiile:

$$\int_{-\pi}^{\theta}\int_{0}^{y}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\theta}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{y}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y \tag{34}$$

sau

$$\int_{-\pi}^{\theta}\int_{0}^{y}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\theta}\left[\frac{\partial B}{\partial y}\bigg|_{0}^{y}\right]\mathrm{d}\theta$$

de unde

$$\int_{-\pi}^{\theta}\int_{0}^{y}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\theta}\frac{\partial B}{\partial y}\,\mathrm{d}\theta$$

deci

$$\int_{-\pi}^{\theta}\int_{0}^{y}\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\theta}\frac{\partial^2 \widetilde{B}}{\partial y^2}\,. \tag{35}$$

Pe de altă parte,

$$\int_{0}^{y}\int_{-\pi}^{\theta}\frac{\partial B}{\partial y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{y}\mathrm{d}y\int_{-\pi}^{\theta}\frac{\partial B}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

sau

$$\int_{0}^{y}\int_{-\pi}^{\theta}\frac{\partial B}{\partial\theta}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{y}B\,(y,\theta)\,\mathrm{d}y-\left[\int_{0}^{y}B\,(y,\theta)\,\mathrm{d}y\right]_{\theta=-\pi}$$

și, în sfîrșit,

$$\int_{0}^{y}\int_{-\pi}^{\theta}\frac{\partial B}{\partial\theta}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta=\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{0}^{y}\int_{-\pi}^{\theta}B\,(y,\,\theta)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta-\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{0}^{y}\int_{-\pi}^{\theta}B\,(y,\,\theta)\right]_{\theta=-\pi}$$

adică

$$\int_{0}^{y}\int_{-\pi}^{\theta}\frac{\partial B}{\partial\theta}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta=\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial\theta}-\frac{\partial\widetilde{B}}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=-\pi}\,.$$

Ținînd seama de relațiile (1'), (31), (35) și (37), rezultă relația (26).

Aflarea unei funcții ce verifică sistemul (δ) este desigur o problemă Dirichlet pentru ecuația (26).

În cazul neliniar se consideră ecuația [1]:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - \xi \frac{\partial B}{\partial \theta} = F(y, \theta) \tag{1''}$$

și condițiile (2), (3') și (4').

Fie (β'') sistemul format din condițiile (1''), (2), (3') și (4') și introducînd o funcție ajutătoare de tipul (25):

$$\widetilde{H}(y, \theta) = \int_0^y \int_{-\pi}^{\theta} H\,[B(y, \theta)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta \tag{25'}$$

putem extinde propoziția 2.

PROPOZIȚIA 3. *Funcțiile* $\widetilde{H}(y, \theta)$ *și* $\widetilde{B}(y, \theta)$ *verifică sistemul* (δ') *format din condițiile*:

1) $$\frac{\partial^2 \widetilde{H}}{\partial y^2} - \frac{\partial \widetilde{B}}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial \widetilde{B}}{\partial \theta}\bigg|_{\theta = -\pi} = \widetilde{F}(y\ \theta)$$ (26') *și* (27)–(29).

Demonstrația este analoagă cu cea de la propoziția (2).

Practic, în electrotehnică, funcția $H = H(B)$ este dată de alura ciclului de histerezis, iar $F(y, \theta) \equiv 0$.

Dacă notăm prin 1'' problema găsirii unei funcții care să verifice sistemul (β''), atunci putem trage următoarele concluzii:

1. Problema 1' se obține din 1'', prin aproximarea histerezisului cu bisectoarea întîi.
2. Pentru producție trebuie rezolvată problema 1'' (în cazul $F(y, \theta) \equiv 0$), fie prin procedee analogice, fie prin procedee cifrice.
3. Deoarece nu există o formulă analitică pentru ciclul de histerezis, acesta trebuie aproximat prin diverse funcții, lucru ce îngreunează mult calculul.
4. În totalitatea ei, problema 1'' nu este actualmente rezolvată prin procedee numerice, iar rezolvarea ei în viitor va aduce economii mari în proiectarea și fabricarea generatoarelor de înaltă frecvență.

Primită la redacție la 29 septembrie 1965

Institutul de cercetare și proiectare
pentru industria electrotehnică
(I.C.P.E.), București

BIBLIOGRAFIE

1. MC. LACHLAN N. W., *An investigation into the magnetic behaviour of iron at very high frequencies with the aid of a Poulsen-arc generator.* J. IEE, **54**, 480 (1916).
2. BUTLER O. I., MANG C. Y., *The predetermination of the magnetic properties of ferromagnetic laminae at power and audio frequencies.* J. IEE, **95**, II, 25 (1948).
3. SUBBA RAO V., TECH M., PH. D., *Losses in ferromagnetic laminations due to saturation.* Proc. IEE, **111**, 2111 (1964).

---

[1] Vezi [3].

Ținând seama de relațiile (1), (8), (35) și (37), rezultă relația (28). Atunci când [illegible] se verifică [illegible] care este [illegible] o problemă Dirichlet [illegible] (29).

În cazul [illegible] se consideră ecuația (1'):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} [illegible] \frac{B}{6} = F(y, \theta) \qquad (1')$$

și condițiile (2), (3) [illegible].

În [illegible] din condițiile (1') [illegible] (3) [illegible] de [illegible]:

$$H(y, \theta) = \int\int [illegible] F(y, \theta)\, d\eta\, d\theta [illegible]$$

[illegible] propoziția 2.

[illegible] funcția $F(y, \theta)$ [illegible] sistemul (1') [illegible]:

$$[illegible] \frac{\partial H}{\partial \theta} [illegible] \qquad (21), (20)$$

Demonstrația este [illegible] de la propoziția 2.

Practic, [illegible] funcția F [illegible] este dată de [illegible] $F(y, \theta) = 0$.

[illegible] problema [illegible]:

1. Problema [illegible]

2. [illegible] problema [illegible] A [illegible]

3. [illegible]

4. [illegible] problema [illegible] numerice, [illegible] rezolvarea [illegible] generalizată [illegible].

Primit la redacție la [illegible] septembrie [illegible]

Institutul [illegible]
[illegible]
București

BIBLIOGRAFIE

1. [illegible]
2. [illegible]
3. [illegible]

O ECUAŢIE PRIVIND CORPURILE CONVEXE ŞI APLICAŢII LA CORPURILE ASOCIATE UNUI CORP CONVEX

DE

DAN VOICULESCU

În lucrare se face un studiu analitic al corpurilor asociate unui corp convex, introduse de Hammer, aducînd uşurări în studiul suprafeţelor reductibile. De asemenea, ultimul capitol prezintă un interes aparte, raportat la unele rezultate recente ale lui Zamfirescu privind seriile liniare de corpuri convexe.

I. INTRODUCERE

Considerăm mulţimea $\mathcal{K}^n$ a corpurilor convexe mărginite şi topologic închise din spaţiul euclidian n — dimensional E^n. Fie $K \in \mathcal{K}^n$, notăm $\mathcal{B}$ $(K) =$ Fr. K şi cu $\mathcal{E}$ (K) mulţimea punctelor extremale ale lui K. Acoperirea convexă a unei mulţimi de puncte $M \subset E^n$, o vom nota cu E (M).

Pentru K_1, $K_2 \in \mathcal{K}^n$ adunarea şi amplificarea cu numere reale sînt definite prin relaţiile $K_1 + K_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in K_1, \ x_2 \in K_2\}$ şi respectiv $\lambda K = \{ \lambda x : x \in K\}$. Se ştie că $K_1 + K_2 \in \mathcal{K}^n$ şi $\lambda K \in \mathcal{K}^n$. Proprietăţile algebrice legate de aceste operaţii pot fi rezumate în formulele : $K_1 + K_2 = K_2 + K_1$; $(K_1 + K_2) + K_3 = K_1 + (K_2 + K_3)$; $\lambda K_1 + \lambda K_2 = \lambda(K_1 + K_2)$; $(\lambda_1 + \lambda_2)$ $K = \lambda_1$ $K + \lambda_2 K$ dacă $\lambda_1 \lambda_2 \geqslant 0$. Prin extensiune vom aplica aceste operaţii şi unor mulţimi oarecare de puncte. În acest caz cea de-a doua lege de distributivitate de mai sus nu se mai menţine.

Domeniul vectorial al unui corp convex K este corpul convex D $(K) = K - K$, unde prin $K - K$ se înţelege $K + (-1)$ K. Mulţimea $\mathcal{K}^n$ este împărţită astfel în clase disjuncte de corpuri convexe cu acelaşi domeniu vectorial (vom însemna cu Δ (K) clasa corpurilor cu domeniul vectorial D (K)). Mulţimea domeniilor vectoriale ale corpurilor $K \in \mathcal{K}^n$ coincide cu mulţimea corpurilor convexe din E^n care au centru de sime-

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 741–745, BUCUREŞTI, 1966

trie în origine. Într-adevăr, dacă K are centru de simetrie în origine, atunci $D\ (1/2\ K-1/2\ K) = K$, deoarece $K = -K$ şi reciproc: orice domeniu vectorial are centru de simetrie în originea lui E^n, [2], [5].

În legătură cu domeniile vectoriale menţionăm egalitatea $D\ (K_1) + D\ (K_2) = D\ (K_1+K_2)$, care se demonstrează uşor. Definind suma a două clase $\Delta\ (K_1) + \Delta\ (K_2) = \{ x_1 + x_2 : x_1 \in \Delta\ (K_1), x_2 \in \Delta(K_2)\}$, relaţia de mai sus ne dă $\Delta\ (K_1) + \Delta\ (K_2) \subset \Delta\ (K_1+K_2)$.

II. ECUAŢIA $K_1 + \mathcal{C} = K_2$ ÎN $\mathcal{K}^n$

Fie ecuaţia $K_1 + \mathcal{C} = K_2$, unde $K_i \in \mathcal{K}^n$ $(i = 1, 2)$ sînt corpuri convexe date, iar $\mathcal{C} \in \mathcal{K}^n$ trebuie determinat. Ecuaţia nu are întotdeauna soluţie, de exemplu pentru $K_1 \supset K_2$ (incluziunea fiind strictă).

TEOREMA 1. *Ecuaţia* $K_1 + \mathcal{C} = K_2$ *admite cel mult o soluţie.*

Demonstraţie. Să admitem existenţa a două soluţii distincte $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$, $y \in \mathcal{C}$; $y \notin \mathcal{C}'$, $\mathcal{C}+K_1 = \mathcal{C}' + K_1 = K_2$. Atunci $y+K_1 \subset \mathcal{C}' + K_1$, adică pentru orice $x \in K_1$ există $x' \in K_1$ şi $y' \in \mathcal{C}'$ astfel încît $x+y = x'+y'$, echivalent cu $x-x' = y' - y$. Ducînd prin $y \notin \mathcal{C}'$ hiperplane suport la $\mathcal{C}'$, obţinem un con, deci mulţimea $M_1 = \left\{\dfrac{y'-y}{\|y'-y\|} : y' \in \mathcal{C}'\right\}$ va fi formată dintr-o porţiune a sferei $S\ (0;\ 1) = \{ x : \|x\| = 1)$, care poate fi inclusă în interiorul unei emisfere M, adică $M_1 \subset \mathcal{I}\ M$ ([4]: interiorul lui M relativ la topologia de pe $S\ (0;1)$). Fie atunci $p \in S\ (0;\ 1)$ punctul în care diametrul perpendicular pe hiperplanul care conţine sfera $(n-2)$-dimensională care delimitează pe M, intersectează $M' = S\ (0;\ 1) \cap \complement \mathcal{I}\ M$. Luînd $x \in K_1$, astfel încît imaginea sa sferică să conţină pe p, avem:

$$M_2 = \left\{\frac{x-x'}{\|x-x'\|} : x' \in K_1\right\} \subset M'.$$

Rezultă atunci $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, deci egalitatea $x-x' = y' - y$ este imposibilă, adică ceea ce trebuia demonstrat.

O consecinţă importantă a acestei teoreme este echivalenţa pentru corpuri convexe a relaţiilor $K + X = K + Y$ cu $X = Y$ şi respectiv $K + X \subset K + Y$ cu $X \subset Y$.

Deoarece $K_1 + \mathcal{C} = K_2$ implică $D\ (K_1) + D\ (\mathcal{C}) = D\ (K_2)$, şi această ecuaţie pentru $D\ (\mathcal{C})$ are cel mult o soluţie, deducem că $\Delta\ (K_1)$ şi $\Delta\ (K_2)$ fiind date, $\Delta\ (\mathcal{C})$ este determinat în mod unic.

TEOREMA 2. *Dacă ecuaţia* $K_1 + \mathcal{C} = K_2$ *admite o soluţie* $\mathcal{C}$, *atunci* $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{p \in K_1} (K_2 - p)$.

Demonstraţie. Din teorema precedentă rezultă că: $\mathcal{C} = \{ x : x+K_1 \subset K_2\}$. Dar atunci: $x \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x + K_1 \subset K_2 \Leftrightarrow x + p \in K_2, \forall\ p \in K_1 = x \in K_2 - p,\ \forall\ p \in K_1 \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{p \in K_1} (K_2 - p)$.

Rezultatele din acest paragraf au un caracter mai mult algebric şi nu rezolvă complet problema, vom putea totuşi cu ajutorul lor să obţinem cîteva proprietăţi legate de corpurile asociate unui corp convex.

III. CORPURILE ASOCIATE UNUI CORP CONVEX

Vom începe cu stabilirea a trei propoziţii ajutătoare.

1) $\bigcap\limits_{p\in K_1} (K_2 + \lambda p) = \{x : x - \lambda K_1 \subset K_2\}$.

Demonstraţia poate fi găsită în cadrul demonstraţiei teoremei 2.

2) *Dacă* $E\,(M) = K_1$, *atunci avem* : $\bigcap\limits_{p\in K_1} (K_2 + \lambda p) = \bigcap\limits_{p\in M} (K_2 + \lambda p)$.

Într-adevăr, avem :

$$x \in \bigcap_{p\in K_1} (K_2 + \lambda p) \Leftrightarrow x - \lambda K_1 \subset K_2$$

$$x \in \bigcap_{p\in M} (K_2 + \lambda p) \Leftrightarrow x - \lambda M \subset K_2 .$$

Cum însă K_2 este convex, el conţine o dată cu o mulţime de puncte şi acoperirea ei convexă, deci : $x - \lambda M \subset K_2 \Leftrightarrow x - \lambda K_1 \subset K_2$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

3) $\bigcup\limits_{p\in K_1} (p + K_2) = K_1 + K_2$. (Demonstraţia este evidentă).

Observăm că propoziţiile 1) şi 3) se menţin şi atunci cînd K_1 şi K_2 sînt mulţimi oarecare de puncte din E^n.

Preston C. Hammer a introdus în 1951 corpurile $\mathcal{C}\,(r)$, asociate unui corp convex $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}\,(r) = \begin{cases} \bigcap\limits_{p\in \mathcal{B}(\mathcal{C})} (p + r\,(\mathcal{C} - p)) \text{ cînd } 0 < r \leqslant 1, \\ \bigcup\limits_{p\in \mathcal{B}(\mathcal{C})} (p + r\,(\mathcal{C} - p)) \text{ cînd } r > 1. \end{cases}$$

P. C. Hammer a arătat [1] în cazul bidimensional că aceste corpuri sînt convexe, iar T. Zamfirescu a extins [3] demonstraţia la cazul n-dimensional. Hammer a stabilit [1] existenţa unui număr $r_i \in [1/2, 1]$ pentru fiecare corp $\mathcal{C}$, astfel încît :

$\mathcal{C} = (\mathcal{C}\,(r))\,(r/(2\,r - 1))$ dacă $r \geqslant r_i$,

$\mathcal{C} \supset (\mathcal{C}\,(r))\,(r/(2\,r - 1))$ dacă $r < r_i$ (incluziunea e strictă).

Corpul convex $\mathcal{C}$ este reductibil, complet reductibil sau ireductibil, după cum $r_i < 1$, $r_i = 1/2$ sau $r_i = 1$, [1]. Numărul r_i se numeşte numărul de reductibilitate iar $\mathcal{C}\,(r_i)$ corpul de reductibilitate ale lui $\mathcal{C}$, [4].

TEOREMA 3. *Avem*

$$\mathcal{C}\,(r) = \begin{cases} \bigcap\limits_{p\in \mathcal{C}} (p + r\,(\mathcal{C} - p)) \textit{ cînd } 0 < r \leqslant 1 \\ \bigcup\limits_{p\in \mathcal{C}} (p + r\,(\mathcal{C} - p)) \textit{ cînd } r > 1. \end{cases}$$

Demonstrație. Cazul $r \in (0, 1]$ este o consecință a propoziției 2). În cazul $r > 1$, propoziția 3) ne dă

$$\bigcup_{p \in \mathcal{B}(\mathcal{C})} (p + r(\mathcal{C} - p)) = (1 - r)\,\mathcal{B}(\mathcal{C}) + r\,\mathcal{C},$$

$$\bigcup_{p \in \mathcal{C}} (p + r(\mathcal{C} - p)) = (1 - r)\,\mathcal{C} + r\mathcal{C}.$$

Cum însă $\mathcal{C}(r)$ este convex, rezultă :

$$(1 - r)\,\mathcal{B}(\mathcal{C}) + r\mathcal{C} = \mathcal{C}(r) = E\,((\mathcal{C}(r)) = (1 - r)\,\mathcal{C} + r\mathcal{C}.$$

Teorema 4. *Avem*

$$\mathcal{C}(r) = \bigcap_{p \in \mathcal{C}} (p + r(\mathcal{C} - \mathcal{C})).$$

Demonstrație. a) $r \in (0, 1]$. Propoziția 1) ne dă $\mathcal{C}(r) = \bigcap\limits_{p \in \mathcal{C}} (p + r(\mathcal{C} - p)) = \{x : x - (1 - r)\,\mathcal{C} \subset r\mathcal{C}\}$ și $\bigcap\limits_{p \in \mathcal{C}} (p + r(\mathcal{C} - \mathcal{C})) = \{x : x - \mathcal{C} \subset r(\mathcal{C} - \mathcal{C})\}$. Dar $x - \mathcal{C} \subset r\,(\mathcal{C} - \mathcal{C})$ se mai poate scrie $x - (1 - r)\,\mathcal{C} - r\,\mathcal{C} \subset r\mathcal{C} - r\mathcal{C}$, sau, ținînd seama de una din consecințele teoremei 1, $x - (1 - r)\,\mathcal{C} \subset r\mathcal{C}$. Invers, adunînd la $x - (1 - r)\,\mathcal{C} \subset r\mathcal{C}$ de ambele părți $-r\mathcal{C}$, obținem $x - \mathcal{C} \subset r\,(\mathcal{C} - \mathcal{C})$.

b) $r > 1$. Teorema 3 ne dă $\mathcal{C}(r) = (1 - r)\,\mathcal{C} + r\mathcal{C}$, relație care adunată cu $-\mathcal{C} = -\mathcal{C}$ se transformă în relația echivalentă $\mathcal{C}(r) - \mathcal{C} = r\,(\mathcal{C} - \mathcal{C})$ sau $\mathcal{C}(r) = \{x : x - \mathcal{C} \subset r\,(\mathcal{C} - \mathcal{C})\} = \bigcap\limits_{p \in \mathcal{C}} (p + r\,(\mathcal{C} - \mathcal{C}))$.

Teorema 5. *Ecuația* $K - (1 - r)\,\mathcal{C} = r\mathcal{C}$, *unde* $r > 0$, *are soluție dacă și numai dacă* $r \geqslant r_i$.

Demonstrație. Dacă $r > 1$, atunci $K - (1 - r)\,\mathcal{C} = r\,\mathcal{C} \Leftrightarrow K = \mathcal{C}(r)$.

Rămîne de cercetat cazul $r \leqslant 1$. Evident, trebuie ca $r \geqslant 1/2$ pentru ca să existe o soluție. Să presupunem că există o soluție, atunci din teoremele 2, 3 și propoziția 1), rezultă $K = \mathcal{C}(r)$. Vom arăta că atunci $K\,(r/(2r - 1)) = \mathcal{C}$, de unde va rezulta $r \geqslant r_i$. Înmulțind ecuația cu r și cu $(r - 1)$, obținem $r^2\,\mathcal{C} = rK + (r^2 - r)\,\mathcal{C}$ și $(r^2 - r)\,\mathcal{C} = (r - 1)\,K + (r - 1)^2\,\mathcal{C}$. Adunînd, găsim după reducere : $r^2\,\mathcal{C} = rK + (r - 1)\,K + (r - 1)^2\,\mathcal{C}$. Ținînd seama că $r \in [1/2, 1]$, avem $(r - 1)^2\,\mathcal{C} + (2r - 1)\,\mathcal{C} = r\,K + (r - 1)\,K + (r - 1)^2\,\mathcal{C}$, adică : $\mathcal{C} = (r/(2r - 1))\,K + ((r - 1)/(2r - 1))\,K = K\,(r/(2r - 1))$. Dacă $r \geqslant r_i$, atunci se verifică ușor că $\mathcal{C}(r) - (1 - r)\,\mathcal{C} = r\,\mathcal{C}$.

Cu ajutorul relației $\mathcal{C}(r) = r\,\mathcal{C} + (1 - r)\,\mathcal{C}$ putem demonstra formulele :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathcal{C}_k(r) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\mathcal{C}_k\right)(r), \quad (r \geqslant 1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\mathcal{C}(r_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\right) \cdot \mathcal{C}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k r_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k}\right), \quad (r_k \geqslant 1,\ \lambda_k \geqslant 0).$$

Relaţii asemănătoare, pentru $r \in [r_i, 1]$, se pot găsi folosind faptul că $\mathcal{C}(r) - (1-r)\,\mathcal{C} = r\,\mathcal{C}$; de asemenea, putem obţine şi alte rezultate de acest gen.

Primită la redacţie la 25 noiembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. P. C. HAMMER, *Convex bodies associated with a convex body.* Proc. of the Amer. Math. Soc., **5** (1951).
2. P. VINCENSINI, *Questions liées à la notion de géométrie différentielle globale.* Conferinţă la Colocviul de Geometrie diferenţială globală, Bucureşti, 29 iunie—4 iulie 1964.
3. T. ZAMFIRESCU, *Sur les corps associés à un corps convexe.* Revue Roumaine de math. pures et appl., **11**, *6* (1966).
4. — *Reducibility of convex bodies.* Proc, London math. Soc.
5. — *Réductibilité et séries linéaires de corps convexes.* L'enseignement math. de Genève, **XI** (1965).

ASUPRA UNEI MIŞCĂRI STAŢIONARE TRIDIMENSIONALE CU SUPRAFAŢA LIBERĂ ÎNTR-UN MEDIU POROS OMOGEN

DE

PETRIŞOR MAZILU

(Iaşi)

Se consideră mişcarea datorită unui izvor de intensitate constantă, plasat sub suprafaţa liberă a unui fluid incompresibil care ocupă la momentul iniţial un semispaţiu.

Folosindu-se formula lui Green, se indică o metodă de aproximaţii succesive pentru determinarea suprafeţei libere.

1. Fie $-Q$ debitul unui izvor plasat într-un mediu poros omogen de coeficient de filtraţie k, sub suprafaţa liberă a unui fluid incompresibil care se presupune că la momentul iniţial a ocupat un semispaţiu.

Suprafaţa liberă Σ tinde la mari distanţe către un plan orizontal w. Alegem acest plan drept plan (xOy) şi axa de simetrie a mişcării, orientată vertical în jos, drept axă Oz.

Potenţialul vitezelor, funcţia armonică φ, satisface următoarele condiţii [1]:

$$\varphi\big|_{\Sigma} = kz \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0, \tag{2}$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi}\,\frac{1}{\rho} + \varphi^{*}\,;\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-l)^2}, \tag{3}$$

unde φ^{*} e o funcţie armonică regulată peste tot în domeniul ocupat de fluid.

$$\varphi \to 0 \text{ pentru } \rho \to \infty. \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 747-751, BUCUREŞTI, 1966

Considerăm funcția armonică f, reprezentabilă sub formă de potențial de simplu strat pe planul w.

Excluzînd din domeniul mișcării regiunile exterioară unei semisfere $\sum_R$ cu centrul în origine, de rază R și interioară unei sfere $\sum_\varepsilon$, cu centrul în punctul A, de rază ε, vom aplica o formulă a lui Green pentru funcțiile f și φ. Aplicarea acestei formule a mai fost făcută în legătură cu studiul altor probleme de hidrogazodinamică subterană [2], [3]. Trecînd la limită, pentru $R \to \infty$ și $\varepsilon \to 0$, alegînd sensul normalei exterior domeniului, obținem :

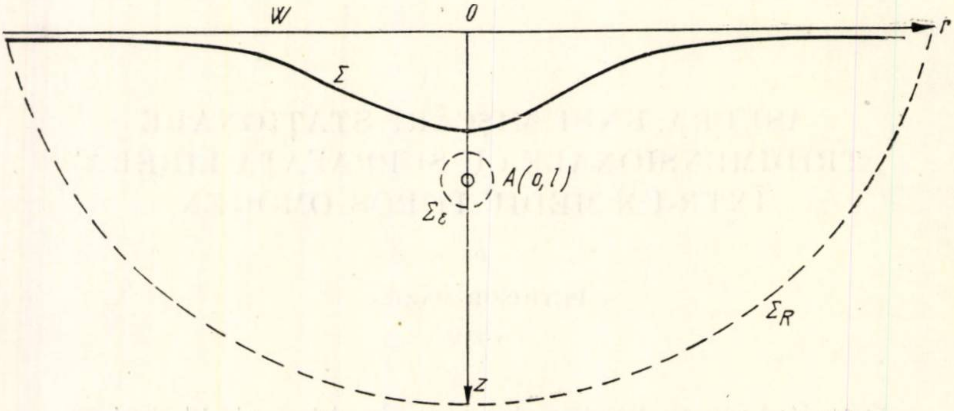


Fig. 1

$$\iint_\Sigma z \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \frac{Q}{k} f(A). \tag{5}$$

Deoarece z și f sînt funcții armonice regulate în domeniul mărginit de suprafața $\sum$ și de planul w,

$$\iint_\Sigma z \frac{\partial f}{\partial n} \, \mathrm{d}s = \iint_w f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \iint_\Sigma f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

deci (5) este echivalentă cu :

$$\iint_\Sigma f \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \iint_w f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = - \frac{Q}{k} f(A). \tag{6}$$

Se constată că există o singură suprafață care să verifice ecuația funcțională (6), oricare ar fi funcția f, satisfăcînd condițiile impuse.

Presupunînd contrariul, anume că $\sum_1$ și $\sum_2$ avînd ecuațiile $z = z_1(x, y)$ și $z = z_2(x, y)$, sînt două suprafețe pentru care avem adevărată egalitatea (6), rezultă :

$$\iint_w f[x, y, z_1(x, y)] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_w f[x, y, z_2(x, y)] \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{7}$$

Trecînd în membrul stîng şi aplicînd teorema creşterilor finite, obţinem

$$\iint_w \frac{\partial f}{\partial z}\,[x,\ y,\ \zeta(x_1\, y)]\,[z_1(x,\ y)-z_2(x,\ y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

$\zeta\,(x,\ y)$ fiind cuprins între $z_1\,(x,\ y)$ şi $z_2\,(x,\ y)$, oricare ar fi $(x,\ y)$.

Din această ultimă egalitate rezultă, dacă ţinem seama că funcţia f este arbitrară, că $z_1\,(x,\ y) = z_2\,(x,\ y)$, deci cele două suprafeţe coincid.

2. Problema prezentînd simetrie axială, restrîngem clasa funcţiilor f, mărginindu-ne doar la cele care prezintă simetrie radială. În acest caz ecuaţia funcţională (6) devine, după transformări simple:

$$\int_0^\infty rf[r,\ z(r)]\,\mathrm{d}r-\int_0^\infty rf\,[r,\ 0]\,\mathrm{d}r=-\frac{\frac{Q}{k}}{2\pi}f(A). \tag{8}$$

Dezvoltînd în serie după puterile lui z,

$$f[r,z]=f\,(r,0]+z\frac{\partial f}{\partial z}\,[r,\ 0]+\frac{z^2}{2\,!}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,[r,\ 0]+\ldots\ldots$$

şi introducînd în (8) obţinem:

$$\int_0^\infty rz\,(r)\,\frac{\delta f}{\delta z}\,[r,\ 0]\,\mathrm{d}r+\frac{1}{2\,!}\int_0^\infty rz^2\,(r)\,\frac{\partial^2 f}{\partial\, z^2}\,\mathrm{d}r+\ldots\ldots=-\frac{\frac{Q}{k}}{2\pi}f(A). \tag{9}$$

Să notăm $\lambda=\frac{Q}{k}$ şi să admitem că are loc dezvoltarea:

$$z\,(r)=\lambda z_1\,(r)+\lambda^2\,z_2\,(r)+\lambda^3\,z_3\,(r)+\ldots\ldots \tag{10}$$

Introducînd această dezvoltare în (9) şi grupînd după puterile lui λ, obţinem:

$$\lambda\int_0^\infty rz_1\,(r)\,\frac{\partial f}{\partial z}\,[r,\ 0]\,\mathrm{d}r+\lambda^2\left\{\int_0^\infty rz_2(r)\frac{\partial f}{\partial z}\,[r,\ 0]+\frac{1}{2\,!}\int_0^\infty rz_1^2\,(r)\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,[r,\ 0)]\,\mathrm{d}r\right\}+$$

$$+\,\lambda^3\,\{\ldots\}+\ldots=-\frac{\lambda}{2\pi}\,f(A).$$

Identificînd coeficienţii lui λ găsim:

$$\int_0^\infty rz_1\,(r)\,\frac{\partial f}{\partial z}\,[r,\ 0]\,\mathrm{d}r=-\frac{1}{2\pi}f(A), \tag{11}$$

$$\int_0^\infty rz_2\,(r)\,\frac{\partial f}{\partial z}\,[r,\ 0],\ \mathrm{d}r+\frac{1}{2\,!}\int_0^\infty rz_1^2\,(r)\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,\mathrm{d}r=0, \tag{12}$$

. . . .

Dar, $f\ (A)$ fiind soluţia problemei lui Neuman pentru semispaţiu,

$$f(A) = -\int_0^\infty r \frac{\frac{\partial f}{\partial z}[r, 0]}{\sqrt{r^2 + l^2}}\, \mathrm{d}r,$$

introducînd în (11) rezultă :

$$\int_0^\infty \left[r z_1(r) - \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}} \right] \frac{\partial f}{\partial z}[r, 0]\, \mathrm{d}r = 0,$$

deci

$$z_1(r) = \frac{1}{2\pi \sqrt{r^2 + l^2}}. \tag{13}$$

Ţinînd seamă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

integrînd prin părţi, notînd derivatele în raport cu r cu accente, avem :

$$\int_0^\infty r z_1^2(r) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}[r, 0]\, \mathrm{d}r = -2 \int_0^\infty [r z_1(r) z_1'(r)]' f[r, 0]\, \mathrm{d}r.$$

Egalitatea (12) devine :

$$\int_0^\infty r z_2(r) \frac{\partial f}{\partial z}\, \mathrm{d}r = \int_0^\infty [r z_1(r) z_1'(r)]' f[r, 0]\, \mathrm{d}r. \tag{14}$$

Dar cum :

$$f(r, 0] = -\frac{1}{2\pi} \iint_w^0 \frac{r_1 \frac{\partial f}{\partial z}[r_1, 0]\, \mathrm{d}r_1\, \mathrm{d}\theta}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2 r_1 r \cos\theta}}$$

rezultă

$$\int_0^\infty r z_2(r) \frac{\partial f}{\partial z}[r, 0]\, \mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [r z_1(r) z_1'(r)] \iint_w \frac{r_1 \frac{\partial f}{\partial z}[r_1, 0]\, \mathrm{d}r_1\, \mathrm{d}\theta}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2 r_1\, r \cos\theta}}. \tag{15}$$

Putem interverti ordinea de integrare în integrala din membrul drept. Aceasta se constată uşor, dacă se aplică formula lui Green funcţiilor armonice, potenţiali de simplu strat,

$$A[r, z] = \int_0^\infty r_1\, \alpha(r_1) \left[\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2 r_1 r \cos\theta}} \right] \mathrm{d}r_1$$

$$B[r, z] = \int_0^\infty r_1\, \beta(r_1) \left[\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2\, r_1 r \cos\theta}} \right] \mathrm{d}r_1,$$

pentru :

$$\alpha(r_1) = \frac{\partial f}{\partial z}[r_1, 0]'$$

$$\beta(r_1) = \frac{1}{r}[r z_1(r) z_1'(r)].$$

Intervertind şi renotînd cu r_1 variabila de integrare, obţinem din (15) :

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty r_1 z_2(r) \frac{\partial f}{\partial z}[r_1,\ 0]\,\mathrm{d}r_1 = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r_1 \frac{\partial f}{\partial z}[r_1,\ 0]\left\{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{[r z_1(r) z_1'(r)]'\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos\theta}}\right\}\mathrm{d}r_1. \end{aligned} \tag{16}$$

Rezultă :

$$z_2(r_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{\pi 2} \frac{[r z_1(r) z_1'(r)]'\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos\theta}}. \tag{17}$$

Putem calcula uşor valoarea $z_2(0)$:

$$\begin{aligned} z_2(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{[r z_1(r) z_1'(r)]'}{r}\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{(r^2+l^2)^2} + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} l^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{(r^2+l^2)^3} = \frac{1}{4\pi l^3}. \end{aligned}$$

Deci :

$$z(0) = \lambda z_1(0) + \lambda^2 z_2(0) + \lambda^3 z_3(0) + \ldots = \frac{Q}{2\pi k l} + \frac{Q^2}{4\pi k^2 l^3} + \ldots \tag{18}$$

Să notăm cu $h = z\,(0)$, adîncimea maximă a suprafeţei libere. Reţinînd în (18) primii doi termeni, găsim legătura dintre debitul Q şi adîncimea maximă h :

$$h = \frac{Q}{2\pi k l} + \frac{Q^2}{4\pi k^2 l^3}.$$

Rezolvînd această ecuaţie de gradul doi pentru necunoscuta Q, rezultă :

$$Q = \sqrt{k^2 l^4 + 4\pi k^2 l^3 h} - k l^2.$$

Se obţine în acest fel în prima aproximaţie o relaţie între debitul izvorului negativ, denivelarea suprafeţei libere şi coeficientul de filtraţie.

Primită la redacţie la 23 septembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. P. IA. POLUBARINOVA-KOCINA, *Teoria dvijenia gruntovih vod*. Moscova, 1952.
2. B. LE FVR, *Mécaniques des fluides dans les milieux poreux*. Université de Paris, 1962, p. 84.
3. PIERRE HUARD DE LA MARRÉ, C.R. de l'Acad. de Sci., Paris, 272, p. 1125.

O DEFINIȚIE GEOMETRICĂ A UNOR FORME ALE LUI ANDRÉ WEIL CE SE POT ASOCIA UNEI CONEXIUNI INFINITEZIMALE

DE

NICOLAE TELEMAN

În lucrarea de față dăm o definiție geometrică a unor forme ale lui André Weil. Generalizînd în mai multe dimensiuni procedeul de definire geometrică a formei de curbură prin transportul pe un paralelogram infinitezimal, obținem un operator a cărui urmă este o formă a lui André Weil de un anumit ordin.

Problema interpretării geometrice a formelor lui André Weil ne-a fost pusă de C. Teleman.

Fie A_m un spațiu cu conexiune afină de dimensiune m. Să considerăm punctul $x_0 \in A_m$ și $(x^1, \ldots, x^m)$ un sistem de coordonate locale într-o vecinătate a punctului x_0; vom presupune că punctul x_0 are coordonatele $(0, \ldots, 0)$.

Fie $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant m$ un sistem oarecare de $n \leqslant m$ indici; pentru ușurință vom lua primele n numere naturale.

Să luăm în punctul x_0 un vector $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^m)$ tangent contravariant.

Vom transporta vectorul λ pe drumuri formate din porțiuni pe care variază cîte o singură dată una din coordonate, drumuri ce încep în punctul $(0, 0, \ldots, 0)$ și au capătul în punctul $(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^n, 0, 0, \ldots, 0)$. Dacă pe un astfel de drum variază pe rînd coordonatele x^i cu indicii în ordinea $i_1, \ldots, i_n$, vom asocia acestui drum permutarea de n obiecte $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, și vom nota drumul $\gamma\,(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Ecuațiile de paralelism pe un drum pe care variază numai coordonata de ordinul i sînt:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda^j}{\mathrm{d}x^i} = \lambda^s\ \Gamma^j_{si} \tag{1}$$

astfel încît, ca rezultat al transportului vectorului λ pe acest drum se obține vectorul μ, care dezvoltat după formula lui Taylor, are expresia :

$$(2)\quad \mu^k = \lambda^s \left[\delta_s^k + \Gamma_{si}^{(1)k}\, \mathrm{d}x^i + \frac{1}{2\,!}\, \Gamma_{si}^{(2)k}\, (\mathrm{d}x^i)^2 + \ldots + \frac{1}{n\,!}\, \Gamma_{si}^{(n)k}\, (\mathrm{d}x^i)^n \right],$$

unde $\lambda^s\ \Gamma_{si}^{(l)k}$ este derivata de ordinul l în raport cu x^i, dedusă din sistemul (1).

Fie $\mu_{(i_1\, i_2 \ldots\, i_n)}$ vectorul obținut prin transportul vectorului λ pe drumul $\gamma_{(i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_n)}$.

Ne propunem să calculăm :

$$(3)\qquad \sum_{\tau \in P_n} \sigma(\tau)\, \mu_\tau ,$$

unde P_n este mulțimea permutărilor de n obiecte iar $\sigma(\tau)$ este signatura permutării τ.

Din relația (2) deducem că :

$$\mu^{j_n}_{(i_1,\, i_2, \ldots,\, i_n)} = \lambda^s \left[\delta_s^{j_1} + \Gamma_{si_1}^{(1)j_1}\, \mathrm{d}x^{i_1} + \frac{1}{2\,!}\, \Gamma_{si_1}^{(2)j_1} (\mathrm{d}x^{i_1})^2 + \ldots + \frac{1}{n\,!}\, \Gamma_{si_1}^{(n)j_1}\, (\mathrm{d}x^{i_1})^n \right] \times$$

$$\times \left[\delta_{j_1}^{j_2} + \Gamma_{j_1 i_2}^{(1)j_2}\, \mathrm{d}x^{i_2} + \frac{1}{2\,!}\, \Gamma_{j_1 i_2}^{(2)j_2} (\mathrm{d}x^{i_2})^2 + \ldots + \frac{1}{n\,!}\, \Gamma_{j_1 i_2}^{(n)j_2} (\mathrm{d}x^{i_2})^n \right] \times$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(4)\qquad \times \left[\delta_{j_{n-2}}^{j_{n-1}} + \Gamma_{j_{n-2} i_{n-1}}^{(1)j_{n-1}}\, \mathrm{d}x^{i_{n-1}} + \frac{1}{2\,!}\, \Gamma_{j_{n-2} i_{n-1}}^{(2)j_{n-1}} (\mathrm{d}x^{i_{n-1}})^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n\,!}\, \Gamma_{j_{n-2} i_{n-1}}^{(n)j_{n-1}}\, (\mathrm{d}x^{i_{n-1}})^n \right] \times \left[\delta_{j_{n-1}}^{j_n} + \Gamma_{j_{n-1} i_n}^{(1)j_n}\, \mathrm{d}x^{i_n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\,!}\, \Gamma_{j_{n-1} i_n}^{(2)j_n} (\mathrm{d}x^{i_n})^2 + \ldots + \frac{1}{n\,!}\, \Gamma_{j_{n-1} i_n}^{(n)j_n}\, (\mathrm{d}x^{i_n})^n \right],$$

unde $\Gamma_{j_{\iota-1} i_\iota}^{(k)j_1}$ sînt calculați în punctul $M_{i_1\, i_2 \ldots\, i_{\iota-1}}$ ce are toate coordonatele nule cu excepția coordonatelor de ordinele $i_1, i_2, \ldots\, i_{\iota-1}$ egale respectiv cu $\mathrm{d}x^{i_1}, \ldots, \mathrm{d}x^{i_{\iota-1}}$. Cu ajutorul formulei lui Taylor vom exprima valoarea funcțiilor $\Gamma_{j_{\iota-1} i_\iota}^{(k)j_\iota}$ prin valoarea acestor funcții și ale derivatelor parțiale ale acestora, calculate în punctul $x_0\,(0, 0, \ldots, 0)$.

Fie

$$\eta = \begin{cases} n \text{ pentru } n \text{ par}, \\ n - 1 \text{ pentru } n \text{ impar}. \end{cases}$$

PROPOZIȚIA 1. *Toți termenii din* (4) *de ordin* $g \leqslant \eta$, *ce conțin în expresia lor diferențiala unei variabile la o putere mai mare sau egală cu* 2 *sau o derivată parțială de ordin* $\geqslant 2$ *precum și monoamele de grad* $g \leqslant \eta - 1$, *se reduc în suma* (3).

Demonstraţie. Forma unui monom din produsul (4) este (ţinînd seamă şi de dezvoltarea funcţiilor $\Gamma^{(k)j_\iota}_{j_{\iota-1}i_\iota}$ în sumă Taylor în punctul $(0, 0, \ldots, 0)$):

$$
\begin{aligned}
&\lambda^s K\cdot\frac{1}{k_{\alpha_1}!}\cdot\frac{1}{k_{\alpha_2}!}\cdots\frac{1}{k_{\alpha_p}!}\,(D^{l_{\alpha_1}}\,\Gamma^{(k_{\alpha_1})\,j_{\alpha_1}}_{s i_{\alpha_1}})\cdot\\
(5)\qquad &\cdot(D^{l_{\alpha_2}}\,\Gamma^{(k_{\alpha_2})\,j_{\alpha_2}}_{j_{\alpha_1}j_{\alpha_2}})\ldots(D^{l_{\alpha_p}}\,\Gamma^{(k_{\alpha_p})\,j_{\alpha_p})}_{j_{\alpha_{p-1}}j_{\alpha_p}})\cdot[(\mathrm{d}x^{i_{\alpha_1}})^{k_{\alpha_1}}\,\omega^{l_{\alpha_1}}]\cdot\\
&\cdot[(\mathrm{d}x^{i_{\alpha_2}})^{k_{\alpha_2}}\,\omega^{l_{\alpha_2}}]\ldots[(\mathrm{d}x^{i_{\alpha_p}})^{k_{\alpha_p}}\,\omega^{l_{\alpha_p}}],
\end{aligned}
$$

în care am întrodus operatori diferenţiali de forma

$$D^l=\frac{\partial^l}{\partial x^{l_1}\ldots\partial x^{l_p}},\qquad (l=l_1+\ldots+l_p)$$

în care, eventual, indicii $l_1, \ldots, l_p$ se repetă,

$$\omega^l=\mathrm{d}x^{l_1}\ldots\mathrm{d}x^{l_p}$$

iar K este o constantă ce depinde numai de operatorii D^l (depinde de coeficienţii dezvoltării funcţiilor $\Gamma^{(k)j_\iota}_{j_{\iota-1}i_\iota}$ în sumă Taylor, în punctul $(0, 0, \ldots, 0)$).

Remarcăm că indicii $i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_p}$ ce apar în (5) figurează în aceeaşi ordine în permutarea $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ şi că toţi indicii $i_{\beta_1}, \ldots, i_{\beta_{l_{\alpha_1}}}$ apar în aceeaşi permutare înaintea elementului i_{α_ι}. Reciproc, pentru orice sistem de indici $i_{\alpha_1}\ldots, i_{\alpha_p}, l_1, \ldots, l_p$ care satisfac proprietăţile de mai sus în raport cu permutarea $(i_1, \ldots, i_n)$, există un termen (monom) din produsul (4) ce se exprimă cu ajutorul acestor indici, cu aceeaşi semnificaţie ca şi indicii din produsul (5).

Dacă monomul (5) este de grad $g \leqslant \eta$ şi conţine diferenţiala unei variabile la o putere $\geqslant 2$, sau dacă $g \leqslant \eta - 1$, atunci există un indice $\xi \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ce nu apare nici în şirul $i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_p}$, nici în expresia operatorilor D^l.

Ţinînd seama de aceasta, sînt posibile numai două cazuri:

a) mai există cel puţin un element ζ cu aceeaşi proprietate ca şi ξ,

b) ξ este singurul indice cu proprietatea enunţată. În cazul a) vom împărţi mulţimea permutărilor P_n în clase formate din cîte două permutări, una din permutările clasei obţinîndu-se din cealaltă prin transpunerea elementelor ξ şi ζ între ele. Dacă pentru una din permutările unei clase apare monomul (5), atunci şi din cealaltă permutare a clasei apare acest monom şi cum signaturile celor două permutări sînt contrarii, monoamele (5) din suma (3) se reduc.

Vom analiza acuma cazul b).

Să presupunem că avem o permutare τ din care poate rezulta şi monomul (5).

Vom introduce în mulţimea permutărilor din care rezultă monomul (5) o relaţie de echivalenţă: două permutări vor fi echivalente dacă diferă, eventual, doar prin poziţia elementului ξ.

Clasa din care face parte permutarea τ se poate construi în modul următor : ştergem elementul ξ în τ, pe care îl juxtapunem apoi înaintea celorlalţi $n-1$ indici din τ, păstraţi în aceeaşi ordine. Fie această permutare τ_0. Transpunînd apoi pe ξ cu elementul de la dreapta sa din τ_0, obţinem permutarea τ_1, echivalentă cu τ_0 şi τ. În modul acesta, pentru orice $k \leqslant n-2$ putem construi permutarea τ_{k+1} obţinută prin transpunerea în τ_k a elementului ξ cu elementul de la dreapta sa.

Constatăm că o clasă de echivalenţă este formată din n elemente τ_k şi că paritatea a două permutări consecutive τ_k, τ_{k+1} este contrarie.

Pe de altă parte, din cauză că există doar un singur indice ξ neutilizat în exprimarea monomului (5), rezultă că monomul este de gradul $g \geqslant n-1$.

Dacă în monomul (5) apare diferenţiala unei variabile la o putere $\geqslant 2$, atunci $g \geqslant n$ şi cum $g \leqslant \eta \leqslant n$, rezultă $\eta = n$.

Dacă monomul (5) este de grad $g \leqslant \eta - 1 \leqslant n-1$ şi cum $g \geqslant n-1$, rezultă $\eta - 1 = n - 1$.

Deci în ambele cazuri $n = \eta$; dar aceasta se întîmplă numai pentru n par. Ţinînd seama de cele demonstrate mai sus, rezultă că suma termenilor asemenea din (3), corespunzători elementelor unei clase de echivalenţă este nulă.

Pentru a termina demonstraţia vom considera un monom din (4) ce conţine cel puţin o derivată parţială de ordin $\geqslant 2$, însă toate diferenţialele din acest monom sînt la puterea întîi.

Fie i_a, i_b cei mai mici indici ai variabilelor în raport cu care se face prima derivare parţială.

Din cauza că toate diferenţialele acestui monom sînt la puterea întîi, indicii i_a, i_b nu mai apar în exprimarea celorlalţi factori din acest monom.

Vom împărţi mulţimea permutărilor din care rezultă acest monom în clase de echivalenţă formate din cîte două elemente : perechea unei permutări într-o clasă se obţine prin transpunerea elementelor i_a, i_b între ele.

Suma signaturilor permutărilor din fiecare clasă este nulă.

Din propoziţia de mai sus rezultă că avem relaţia (abstracţie făcînd de termenii de ordin $> \eta$) :

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & \sum_{\tau\in P_n} \sigma(\tau)\, \mu_\tau^{j_n} \sum_{\tau \in P_n} \sigma(\tau)\, \lambda^s \left[\delta_s^{j_1} + \Gamma_{s i_s}^{j_1}\, \mathrm{d}x^{i_2} \right] \times \\
& \times \left[\delta_{j_1}^{j_2} + \left(\Gamma_{j_1 i_2}^{j_2} + \frac{\partial \Gamma_{j_1 i_2}^{j_2}}{\partial x^{i_1}}\, \mathrm{d}x^{i_1} \right) \mathrm{d}x^{i_2} \right] \times \left[\delta_{j_2}^{j_3} + \left(\Gamma_{j_2 i_3}^{j_3} + \frac{\partial \Gamma_{j_2 i_3}^{j_3}}{\partial x^{i_1}} \mathrm{d}x^{i_1} + \right.\right. \\
& \qquad\qquad \left.\left. + \frac{\partial \Gamma_{j_2 i_3}^{j_3}}{\partial x^{i_2}} \mathrm{d}x^{i_2} \right) \mathrm{d}x^{i_3} \right] \times \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \times \left[\delta_{j_{n-2}}^{j_{n-1}} + \left(\Gamma_{j_{n-2} i_{n-1}}^{j_{n-1}} + \frac{\partial \Gamma_{j_{n-2} i_{n-1}}^{j_{n-1}}}{\partial x^{i_1}} \mathrm{d}x^{i_1} + \ldots + \frac{\partial \Gamma_{j_{n-2} i_{n-1}}^{j_{n-1}}}{\partial x^{i_{n-2}}} \mathrm{d}x^{i_{n-2}} \right) \mathrm{d}x^{i_{n-1}} \right] \times \\
& \times \left[\delta_{j_{n-1}}^{j_n} + \left(\Gamma_{j_{n-1} i_n}^{j_n} + \frac{\partial \Gamma_{j_{n-1} i_n}^{j_n}}{\partial x^{i_1}} \mathrm{d}x^{i_1} + \ldots + \frac{\partial \Gamma_{j_{n-1} i_n}^{j_n}}{\partial x^{i_{n-1}}} \mathrm{d}x^{i_{n-1}} \right) \mathrm{d}x^{i_n} \right] .
\end{aligned}
$$

și că în suma (6) toți termenii de ordin $< \eta$, precum și toți termenii de ordin η ce conțin o putere $\geqslant 2$ a unei diferențiale, se reduc.

În consecință, vom analiza numai suma monoamelor de grad η din (6) ce nu conțin diferențiala unei variabile decît la puterea 1.

Forma unui astfel de monom este: (dacă $\omega = \mathrm{d}x^1 . \mathrm{d}x^2 \dots \mathrm{d}x^n$, ștergîndu-se, eventual, din produs diferențiala variabilei x^θ al cărei indice lipsește în expresia de mai jos):

$$(7)\qquad \Gamma^{j_{\alpha_1}}_{s i_{\alpha_1}} \Gamma^{j_{\alpha_2}}_{j_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} \dots \Gamma^{j_{\alpha_c}}_{j_{\alpha_{c-1}} i_{\alpha_c}} \frac{\partial \Gamma^{j_{\beta_1}}_{j_{\alpha_c} i_{\beta_1}}}{\partial x^{i_{\gamma_1}}} \Gamma^{j_{\lambda_1}}_{j_{\beta_1} i_{\lambda_1}} \dots \Gamma^{j_{\lambda_\alpha}}_{j_{\lambda_{d-1}} i_{\lambda_d}} \dots$$

$$\dots \frac{\partial \Gamma^{j_{\beta_p}}_{j_{\mu_f} i_{\beta_p}}}{\partial x^{i_{\gamma_p}}} \Gamma^{j_{\nu_1}}_{j_{\beta_p} i_{\nu_1}} \dots \Gamma^{j_{\nu_g}}_{j_{\nu_{g-1}} i_{\nu_g}} \omega$$

(în formula de mai sus indicii j se folosesc exclusiv ca indici muți de sumare).

Acestui monom îi vom asocia schema:

$$(8)\qquad \begin{array}{cccccccccccccc} i_{\alpha_1}, & i_{\alpha_2}, & \dots, & i_{\alpha_c}, & i_{\beta_1}, & i_{\lambda_1}, & \dots, & i_{\lambda_d}, & i_{\beta_2}, & \dots, & i_{\beta_p}, & i_{\nu_1}, & \dots, & i_{\nu_g} \\ & & & & \Big| & & & & \Big| & & \Big| & & & \\ & & & & i_{\gamma_1} & & & & i_{\gamma_2} & & i_{\gamma_p} & & & \end{array}$$

Fiind dat monomul (7), lui i se asociază în mod unic schema (8) și reciproc, fiind dată schema (8) în care:

a) toți indicii ce apar în schemă sînt distincți doi cîte doi,

b) $c + d + \dots + g + 2p = \eta$,

există un singur monom (7) de grad η ce conține diferențiala unei variabile cel mult la puterea 1 căruia îi corespunde schema (8).

Dacă monomul (7) apare din permutarea τ, atunci:

c) indicii ce sînt notați în (8) pe linia superioară apar în aceeași ordine în permutarea τ,

d) în permutarea τ indicele i_{γ_k} $(k = 1, \dots, p)$ este înaintea indicelui i_{β_k}.

Reciproc, dacă este dată o schemă (8) ce verifică condițiile a), b), din orice permutare τ ce verifică condițiile c) și d) rezultă cîte un monom (7).

Pentru a calcula suma (6), vom considera toate schemele ce îndeplinesc condițiile a), b) și vom evalua coeficienții monoamelor corespunzătoare din suma (6).

PROPOZIȚIA 2. *Oricare ar fi schema* (8) *ce îndeplinește condițiile* a), *și* b), *suma monoamelor asemenea cu monomul* (7) *din suma* (6) *ce corespund mulțimii permutărilor ce verifică condițiile* c) *și* d) *și în care cel puțin între doi indici consecutivi* i_{β_k}, $i_{\beta_{k+1}}$ *se află cel puțin doi indici* i_{γ_α}, i_{γ_β} *sau, eventual (în cazul cînd* n *e impar) cel puțin un indice* i_{γ_α} *și* θ (θ *fiind indicele* $\leqslant n$ *distinct de toți indicii schemei* (8)), *se reduc în suma* (6).

Demonstrație. Remarcăm că pentru n impar, dacă din permutarea τ rezultă monomul (7), schimbînd poziția elementului θ, se obține o nouă permutare din care poate, de asemenea, rezulta monomul (7). Vom împărți mulțimea permutărilor τ ce verifică condițiile c), d) și care au proprietatea că există cel puțin doi indici consecutivi i_{β_k}, $i_{\beta_{k+1}}$ între care se află cel puțin doi indici i_{γ_a}, i_{γ_b} sau eventual, (pentru n impar), cel puțin un indice i_{γ_a} și θ, în clase de echivalență : fiecărei permutări din această familie îi asociem permutarea obținută prin transpoziția primilor doi indici i_{γ_a}, i_{γ_b}, sau i_{γ_a}, θ ce se află între doi indici consecutivi i_{β_k}, $i_{\beta_{k+1}}$.

Dacă o permutare face parte din familie, perechea sa face parte, de asemenea, din familie.

Suma signaturilor permutărilor din aceeași pereche e nulă, de unde rezultă afirmația făcută mai sus.

Din propoziția 2 rezultă că permutările din care rezultă monomul (7) și pentru care, eventual, monoamele (7) nu se reduc în (6), au structura următoare :

— verifică condiția c) ;

— i_{γ_1} se află înaintea lui i_{β_1} ;

— i_{γ_k} se află între $i_{\beta_{k-1}}$, i_{β_k} $(k = 2, \ldots, p)$, și

— eventual, θ se află după i_{β_p}.

Vom numi această structură redusă.

PROPOZIȚIA 3. *Dacă cel puțin unul dintre numerele* c, $d, \ldots, g$ *este impar, monoamele* (7) *se reduc în* (6).

Demonstrație. Fie f unul dintre numerele impare : putem presupune $f \neq g$, căci dacă g este impar, atunci mai există cel puțin un număr f $(f \neq p)$ impar, suma $c + d + \ldots + g = \eta - 2p$ fiind pară.

Vom introduce în mulțimea permutărilor τ de structură redusă o relație de echivalență ; două permutări vom spune că sînt echivalente dacă diferă, eventual, doar prin poziția elementului $i_{\gamma_{\iota+1}}$. Dar elementul $i_{\gamma_{\iota+1}}$ poate ocupa doar $f + 1$ poziții, pentru ca permutarea să rămînă de structură redusă. Repetînd raționamentul făcut în demonstrația propoziției 1, cazul b), vedem că suma signaturilor permutărilor din fiecare clasă este nulă, de unde rezultă că aportul acestor permutări, prin monomul (7), e nul în suma (6).

PROPOZIȚIA 4. *Suma monoamelor* (7) *din* (6), *cărora le corespunde schema* (8), *este* :

$$\sigma((i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_c}, i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, \ldots, i_{\gamma_p}, i_{\beta_p}, i_{\nu_1}, \ldots, i_{\nu_g}, (\theta)))\cdot M,$$

unde M este monomul (7).

Demonstrație. Din propoziția 2 și 3 rezultă că e suficient să considerăm permutările de structură redusă, cu toți c, $d, \ldots, g$ numere pare.

Vom introduce în această mulțime de permutări o relație de echivalență : două permutări vom spune că sînt echivalente dacă diferă, eventual, prin poziția elementului i_{γ_1}. În fiecare clasă de echivalență se găsesc $c + 1$ permutări și procedînd la fel ca în demonstrația propoziției 1, cazul b), putem pune permutările fiecărei clase într-un șir astfel încît signaturile lor să alterneze. Signatura permutărilor ce se află la cele două capete ale șirului este în surplus cu o unitate față de signatura contrarie (c este par).

Rezultă că suma signaturilor permutărilor dintr-o clasă este :

$$\sigma((\ldots i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, \ldots)).$$

Prin urmare suma signaturilor permutărilor de structură redusă este egală cu suma signaturilor de structură redusă în care elementul i_{γ_1} se află la stînga lui i_{β_1}, între ei ne mai fiind nici un alt indice.

Vom împărţi această nouă mulţime de permutări în clase de echivalenţă : într-o clasă vor intra toate permutările ce diferă, eventual, doar prin poziţia elementului i_{γ_2}. Repetînd raţionamentul precedent, găsim că suma signaturilor dintr-o nouă clasă este :

$$\sigma((\ldots i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, \ldots, i_{\gamma_2}, i_{\beta_2}, \ldots)).$$

Repetînd raţionamentul pentru toţi $k = 2, 3, \ldots, p$, şi eventual, pentru elementul θ, ajungem la concluzia că suma signaturilor permutărilor de structură redusă este :

— pentru n par

$$\sigma((i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_c}, i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, \ldots, i_{\gamma_p}, i_{\beta_p}, i_{\nu_1}, \ldots, i_{\nu_g}));$$

— pentru n impar

$$\sigma((i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_c}, i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, \ldots, i_{\gamma_p}, i_{\beta_p}, i_{\nu_1}, \ldots, i_{\nu_g}, (\theta)).$$

Din cele demonstrate pînă acum rezultă că :

$$\sum_{\tau\in P_n} \sigma(\tau)\, \mu_{\tau}^{j_n} = \sum \sigma((i_{\alpha_1}, \ldots, i_{\alpha_c}, i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, \ldots, i_{\gamma_p}, i_{\beta_p}, i_{\nu_1}, \ldots, i_{\nu_g}, (\theta))\cdot$$

(9)

$$\cdot\, \lambda^s\, \Gamma^{j_{\alpha_1}}_{s i_{\alpha_1}}\, \Gamma^{j_{\alpha_2}}_{j_{\alpha_1} i_{\alpha_2}} \ldots \frac{\partial \Gamma^{j_{\beta_1}}_{j_{\alpha_c} i_{\beta_1}}}{\partial x^{i_{\gamma_1}}} \ldots \frac{\partial \Gamma^{j_{\beta_p}}_{j_{\mu_f} i_{\beta_p}}}{\partial x^{i_{\gamma_p}}}\, \Gamma^{j_{\nu_2}}_{j_{\beta_p} i_{\nu_1}} \ldots \Gamma^{j_n}_{j_{\beta^p_{g-1}} i_{\nu_g}} \cdot \omega$$

unde suma se extinde la toate schemele (8) ce verifică condiţiile a), b) şi condiţia ca toţi $c, d, \ldots, g$ să fie pari.

Acum ne vom ocupa de mulţimea schemelor (8).

Ne fixăm η indici distincţi dintre cei n aleşi.

Cu aceşti η indici $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_\eta}$ vom forma toate grupele :

$$i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, i_{\gamma_2}, i_{\beta_2}, \ldots, i_{\gamma_\nu}, i_{\beta_\nu}$$

(10)
$$\left(\nu = \frac{\eta}{2}\right)$$

cu $i_{\gamma_k} < i_{\beta_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Vom grupa elementele schemei (8) în perechi şi apoi vom numerota aceste perechi :

— elementele $i_{\beta_k}, i_{\gamma_k}$ $(k = 1, \ldots, p)$ formează o pereche

— $i^k_{\alpha_{2q-1}}, i^k_{\alpha_{2q}}$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$ formează o pereche, unde folosim notaţia $\alpha^0_i, \alpha^1_i, \ldots, \alpha^p_i$ pentru $\alpha_i, \lambda_i, \ldots, \mu_i, \ldots, \nu_i$.

Vom numerota aceste perechi din (8), începînd de la stînga.

Introducem în mulţimea schemelor (8) după operaţii:

1° Operaţia A_k operează numai asupra perechii de ordinul k din (8) modificînd-o astfel:

a) dacă perechea este $\begin{array}{c} i_{\beta_l} \\ | \\ i_{\gamma_l} \end{array}$, A_k o transformă în perechea: $i_{\gamma_l} i_{\beta_l}$;

b) dacă perechea este $i_{\alpha^k_{2q-1}}$, $i_{\alpha^k_{2q}}$, A^k o transformă în:

$$\begin{array}{c} i_{\alpha^k_{2q}} \\ | \\ i_{\alpha^k_{2q-1}} \end{array}$$

2° Operaţia B_k transformă numai perechea de ordinul k din (8) modificînd-o astfel:

a) dacă perechea este: i_{β_ι}, i_{γ_ι}, B_k o transformă în perechea i_{γ_ι}, i_{β_ι};

b) dacă perechea este $\begin{array}{c} i_{\beta_\iota} \\ | \\ i_{\gamma_\iota} \end{array}$, B_k o transformă în: $\begin{array}{c} i_{\gamma_\iota} \\ | \\ i_{\beta_\iota} \end{array}$.

Constatăm că aplicarea unei operaţii A nu schimbă coeficientul monomului corespunzător din (9), în timp ce operaţia B schimbă semnul.

Vom remarca faptul că orice schemă (8) se obţine aplicînd un produs de operaţii A şi B unei singure scheme (10).

Vom însuma toţi termenii din (9) ce corespund tuturor schemelor (8) ce se obţin aplicînd operatorii, A, B unei scheme (10).

Fie S o schemă (10) şi $S_{A,B}$ mulţimea schemelor ce rezultă din S prin aplicarea operatorilor A, B.

Vom introduce în $S_{A,B}$ o relaţie de echivalenţă: două scheme vom spune că sînt echivalente dacă rezultă una din cealaltă prin aplicarea operatorilor A_1, B_1.

Vom însuma monoamele din (9) ce corespund schemelor echivalente.

Suma acestora va fi, ţinînd seama de proprietăţile operatorilor A, B:

$$\sum \sigma\left((i_{\gamma_1},\ i_{\beta_1},\ldots)\right) \lambda^s \left(\Gamma^{j\gamma_1}_{si_{\gamma_1}} \Gamma^{j\beta_1}_{j_{\gamma_1} i_{\beta_1}} + \frac{\partial \Gamma^{j\beta_1}_{si_{\beta_1}}}{\partial x^{i_{\gamma_1}}} - \Gamma^{j\gamma_1}_{si_{\beta_1}} \Gamma^{j\beta_1}_{j_{\gamma_1} i_{\gamma_1}} - \frac{\partial \Gamma^{j\beta_1}_{sj_{\gamma_1}}}{\partial x^{i_{\beta_1}}}\right) \cdot$$

$$\cdot\, \Gamma \ldots \Gamma \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \Gamma \ldots \omega.$$

unde suma se extinde la toate clasele de echivalenţă relativ la relaţia introdusă.

Aplicînd pe rînd operatorii A_k, B_k $(k = 2,\ 3\ldots, n)$ şi factorizînd mulţimea claselor obţinute la etapa l prin relaţia de echivalenţă introdusă de A_{l+1}, B_{l+1}, avem

$$\sum_{\tau \in P_n} \sigma(\tau)\, \mu^{j_\nu}_{\tau} =$$

$$= \sum (-1)^\nu \sigma\left((i_{\gamma_1}, i_{\beta_1}, \ldots, i_{\gamma_\nu}, i_{\beta_\nu}(\theta)\right) \lambda^s \Gamma^{j_1}_{si\, \gamma_1 i_{\beta_1}} \Gamma^{j_2}_{j_1 i_{\gamma_2} i_{\beta_2}} \ldots \Gamma^{j_\nu}_{j_{\nu-1} i_{\gamma_\nu} i_{\beta_\nu}}$$

unde

$$\Gamma^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{,k}\,.$$

Am demonstrat deci următoarea :

PROPOZIȚIE. a) *Pentru n par* :

$$\sum_{\tau \in P_n} \sigma(\tau)\, \mu^{j_\nu}_{\tau} =$$

$$= \sum (-1)^\nu \sigma((i_{\gamma_1},\, i_{\beta_1},\, \ldots,\, i_{\gamma_\nu},\, i_{\beta_\nu}))\, \lambda^s\, \Gamma^{j_1}_{s i_{\gamma_1} i_{\beta_1}}\, \Gamma^{j_2}_{j_1 i_{\gamma_2} i_{\beta_2}} \ldots \Gamma^{j_\nu}_{j_{\nu-1} i_{\gamma_\nu} i_{\beta_\nu}}\, \omega$$

$$(i_{\gamma_k} < i_{\beta_k})$$

cu $\omega = \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^n$.

b) *Pentru n impar*

$$\sum_{\tau \in P_n} \sigma(\tau)\, \mu^{j_\nu}_{\tau} = \sum (-1)^\nu \sigma((i_{\gamma_1},\, i_{\beta_1},\, \ldots,\, i_{\gamma_\nu},\, i_{\beta_\nu},\, \theta)) \cdot$$

$$\cdot\, \lambda^s\, \Gamma^{j_1}_{s i_{\gamma_1} i_{\beta_1}}\, \Gamma^{j_2}_{j_1 i_{\gamma_2} i_{\beta_2}} \ldots \Gamma^{j_\nu}_{j_{\nu-1} i_{\gamma_\nu} i_{\beta_\nu}} \cdot \omega_\theta$$

cu $\omega_\theta = \dfrac{\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x^{i_\theta}}$.

În ambele cazuri sumele sînt extinse la toate sistemele de de $\eta = \begin{cases} n \text{ pentru } n \text{ par} \\ n-1 \text{ pentru } n \text{ impar} \end{cases}$ indici distincți doi cîte doi

Să considerăm operatorul $\widetilde{\Omega}_\nu$ definit astfel :

$$(\widetilde{\Omega}_\nu\, \lambda)^{j_\nu} = \Omega^{j_1}_s \wedge \Omega^{j_2}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \Omega^{j_\nu}_{j_{\nu-1}}\, \lambda^s,$$

unde $\Omega^i_j = \dfrac{1}{2}\, \Gamma^i_{j\alpha\beta}\, \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta$.

Componenta produsului $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_2}$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_{2\nu})$ din (12) este tocmai suma (3) abstracție făcînd de un factor multiplicativ constant.

Urma operatorului $\widetilde{\Omega}_\nu$ va fi o formă exterioară de ordin 2ν invariantă la subgrupul adjunct al grupului structural.

Introducem notația :

$$\Omega_\nu = S_p\,(\Omega^\nu) = \Omega^{j_1}_{j_\nu} \wedge \Omega^{j_2}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \Omega^{j_\nu}_{j_{\nu-1}}$$

unde $\Omega = \| \Omega^i_j \|$.

Remarcăm faptul că toată construcția de mai sus poate fi făcută pentru orice conexiune infinitezimală într-un spațiu fibrat vectorial peste corpul real sau complex.

PROPOZIŢIE. *Pentru fibrări vectoriale peste corpul complex formele* Ω_ν *constitue un sistem de generatori ai inelului caracteristic al lui André Weil.*

Pentru a demonstra această propoziţie vom arăta că formele lui Chern [1] se pot exprima cu ajutorul formelor Ω_ν.

Se ştie că formele Φ_ν ale lui Chern [1] ale unei fibrări vectoriale, se pot defini prin formula :

$$\det\left(\lambda I + \frac{\Omega}{2\pi i}\right) = \lambda^q I + \lambda^{q-1}\Phi_1 + \ldots + \Phi_q,$$

unde q este dimensiunea complexă a fibrei.

Să considerăm inelul I al formelor exterioare complexe de grad par. Inelul I este comutativ şi unitar.

Pentru matricea $\frac{1}{2\pi i}\,\Omega$ care are elementele în acest inel, avem formulele lui Newton [2] :

$$k\Phi_k = \Omega_k^* + \Phi_1 \wedge \Omega_{k-1}^* + \Phi_2 \wedge \Omega_{k-2}^* + \ldots + \Phi_{k-1} \wedge \Omega_1^*,$$

unde $\Omega_\nu^* = S_p\left(\frac{\Omega}{2\pi i}\right)^\nu = \frac{\Omega_\nu}{(2\pi i)^\nu}$.

Rezultă că, într-adevăr, formele lui Chern se exprimă cu ajutorul formelor Ω_ν.

Cum însă clasele de coomologie ale formelor lui Chern formează o bază a inelului caracteristic al unei fibrări vectoriale complexe, rezultă că aceeaşi proprietate o au şi clasele formelor Ω_ν.

Primită la redacţie 5 octombrie 1965.

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. S. S. CHERN, *Complex manifolds*, Chicago, 1956, § 12.
2. I. CREANGĂ şi C. HAIMOVICI *Algebră lineară*. Bucureşti, 1962.
3. K. NOMIZU and S. KOBAYASCHI, *Foundations of differential geometry*.
4. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială*. vol. I—II. III. Ed. Acad. R.P.R., 1957, 1964.

ASUPRA UNOR PROPRIETĂŢI ALE FUNCŢIILOR VECTORIALE SLAB DERIVABILE

DE

IOANA CIORĂNESCU

Derivabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă reală a fost studiată de Laurent Schwartz [1]
În lucrarea de faţă vom stabili anumite proprietăţi legate de derivabilitatea funcţiilor definite pe domenii din R^n cu valori într-un spaţiu local convex, cvasicomplet, ce se transpun din topologia slabă în cea tare sub o formă ce intervine mai des în aplicaţii.
Vom folosi ca model rezultatul lui Dunford şi Hille [2], care stabilesc pentru funcţii definite pe un domeniu din planul complex şi cu valori într-un spaţiu Banach, o teoremă de echivalenţă a olomorfiei în sens tare cu cea în sens slab, rezultat extins şi la cazul unui spaţiu local convex cvasicomplet [3].

Vom stabili următorul rezultat :

PROPOZIŢIE. *Fie* $G \subset R^n$ *un domeniu din* R^n *şi fie* $t \to u(t)$ *o funcţie definită în* G *cu valori în spaţiul* X, *local convex cvasicomplet, astfel încît pentru orice* $x^* \in X^*$ *funcţia scalară* $x^*[u(t)]$ *să fie de clasă* C^{l+1}. *Atunci* $u(t)$ *este de clasă* C^l *în sens tare, iar derivatele sale de ordinul* l *în sens tare sînt funcţii vectoriale lipschitziene în topologia tare.*

Vom demonstra întîi că dacă $x^*[u(t)]$ este de clasă C^1 pentru orice $x^* \in X^*$, atunci $u(t)$ este de clasă C^0 în topologia tare.

Într-adevăr, pentru orice $x^* \in X^*$ şi G_0 compact, $G_0 \subset G$ şi orice $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ cu $t, t + h \in G_0$, avem

$$\left|\frac{x^*[u(t+h)] - x^*[u(t)]}{\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i|}\right| - \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} D_i x^*[u(t+l_i)]h_i\right|}{\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i|} \leqslant M(x^*, u, G_0)$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5, P. 763–767, BUCUREŞTI, 1966

unde $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$, iar M este o majorantă a derivatelor parţiale ale funcţiei $x^* [u(t)]$ în domeniul $G_0 \subset G$.

S-a obţinut deci mărginirea în sens slab a mulţimii $\left\{ \frac{u(t+h) - u(t)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i|} \right\}$ oricare ar fi h, cu $t + h \in G_0$, de unde rezultă şi mărginirea ei în topologia tare. Prin urmare, oricare ar fi vecinătatea U a originei lui X dintr-un sistem fundamental de vecinătăţi, există λ astfel încît

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i|} \in \lambda U,$$

adică $u(t+h) - u(t) \in \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i| \right) \lambda U$, iar pentru h suficient de mic, încît $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i| \right) \lambda \leqslant 1$, avem $u(t+h) - u(t) \in U$. Rezultă că $u(t+h) - u(t) \to 0$ în X cînd $h \to 0$, adică continuitatea funcţiei $u(t)$ în orice domeniu compact $G_0 \subset G$.

Să considerăm acum cazul $l = 1$, adică fie $x^* [u(t)]$ de clasă C^2, pentru orice $x^* \in X^*$. Fie G_0 un compact din G şi $h = (0, \ldots, 0, h_i, 0, \ldots, 0)$, $k = (0, \ldots, 0, k_i, 0, \ldots, 0)$ astfel încît $t + h$, $t + k$ să fie în G_0

Să evaluăm expresia

$$E = \frac{1}{h_i - k_i} \left(\frac{x^* [u(t+h)] - x^* [u(t)]}{h_i} - \frac{x^* [u(t+k)] - x^* [u(t)]}{k_i} \right).$$

Pentru aceasta să notăm cu

$$g(t, h) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h_i}.$$

Atunci,

$$E = \frac{x^* [g(t, h)] - x^* [g(t, k)]}{h_i - k_i} = D_i x^* [g(t, l)],$$

cu $l = (0, \ldots, 0, l_i, 0, \ldots, 0)$ şi $h_i \leqslant l_i \leqslant k_i$.

Deoarece

$$D_i x^* [g(t, l)] = \frac{D_i x^* [u(t+l)] \cdot l_i - (x^* [u(t+l)] - x^* [u(t)])}{l_i^2},$$

iar

$$x^* [u(t+l)] = x^* [u(t)] + l_i \cdot D_i x^* [u(t)] + \frac{l_i^2}{2} \cdot D_i^2 x^* [u(t + \theta l)],$$

$$D_i x^* [u(t+l)] = D_i x^* [u(t)] + l_i \cdot D_i^2 x^* [u(t + \theta' l)];$$

înlocuind în E, găsim

$$|D_i\, x^*[g(t, l)]| = \left| \frac{l_i^2\, D_i^2\, x^*\, [u\,(t + \theta' l)] - \frac{l_i^2}{2} D_i^2\, x^*\, [u\,(t + \theta l)]}{l_i^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |D_i^2\, x^*\, [u\,(t + \theta' l)]| + \frac{1}{2} |D_i^2\, x^*\, [u\,(t + \theta l)]| \leqslant M\,(x^*, u, G_0),$$

$D_i^2\, x^*\, [u\, (t)]$ fiind mărginite în G_0. Rezultă deci că mulţimea $\left\{\frac{g\,(t, h) - g\,(t, k)}{h_i - k_i}\right\}$, cu t, $t + h$, $t + k$ în G_0, este slab mărginită în X, deci ea este şi tare mărginită, adică pentru orice vecinătate U dintr-un sistem fundamental de vecinătăţi ale originei lui X, există λ cu proprietatea că

$$\frac{g\,(t, h) - g\,(t, k)}{h_i - k_i} \in \lambda U,$$

oricare ar fi h şi k astfel încît $t + h$, $t + k$ să fie în G_0.

Rezultă de aici că

$$g(t, h) - g(t, k) \in (|h_i| + |k_i|)\, \lambda U,$$

iar pentru h_i, k_i suficient de mici încît $(|h_i| + |k_i|)\, \lambda \leqslant 1$, avem $g\,(t, h) - g\,(t, k) \in U$. Prin urmare $\{g\,(t, h)\}$ este un şir fundamental pentru $h \to 0$. Spaţiul X fiind cvasicomplet, există limita acestui şir, care este tocmai derivata în sens tare în raport cu variabila t_i a funcţiei $u\,(t)$.

S-a demonstrat astfel existenţa derivatelor parţiale ale funcţiei $u\,(t)$ în raport cu cele n variabile în orice compact $G_0 \subset G$. Avem evident

$$D_i\, x^*\, [u(t)] = x^*\, [D_i\, u(t)].$$

Însă fiecare derivată $D_i\, x^*\, [u\,(t)]$ este de clasă C^1, $x^*\, [u\,(t)]$ fiind presupusă de clasă C^2. Deci fiecare $D_i\, u\,(t)$ este de clasă C^1 în sens slab şi după cele demonstrate în prima parte rezultă că $D_i\, u\,(t)$ este de clasă C^0 în sens tare, ceea ce implică faptul că funcţia $u\,(t)$ este de clasă C^1 în topologia tare.

Derivatele $D_i\, u\,(t)$ sînt funcţii vectoriale lipschitziene.

Într-adevăr, pentru orice $x^* \in X^*$, t, $t + h$, $t + k \in G_0 \subset G$, cu $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, avem

$$\left| \frac{x^*\, [D_i\, u\,(t + h)] - x^*\, [D_i\, u\,(t + k)]}{\sum_{i=1}^{n} |h_i - k_i|} \right| =$$

$$= \frac{|D_i\, x^*\, [u\,(t + h)] - D_i\, x^*\, [u\,(t + k)]|}{\sum_{i=1}^{n} |h_i - k_i|} = \frac{\left| \sum_{j=1}^{n} D_{ij}^2\, x^*\, [u\,(t + l_j)]\, (h_j - k_j) \right|}{\sum_{i=1}^{n} |h_i - k_i|} \leqslant$$

$$\leqslant M\,(x^*, u).$$

Rezultă că mulţimea

$$\frac{D_i\, u\,(t+h) - D_i\, u\,(t+k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} |h_i - k_i|}$$

e slab mărginită în X, deci şi tare mărginită, adică mărginită în fiecare seminormă a lui X.

Dacă $|\cdot|_\alpha$ este o astfel de seminormă, obţinem

$$|D_i\, u\,(t+h) - D_i\, u\,(t+k)|_\alpha \leqslant M_\alpha \sum_{i=1}^{n} |h_i - k_i|.$$

Fie acum $u\,(t)$ de clasă C^{l+1} în sens slab, cu $l \geqslant 2$; după cele demonstrate, rezultă că $u\,(t)$ este de clasă C^1 în sens tare, iar derivatele sale $D_i\, u\,(t)$ sînt de clasă C^l în sens slab. Cum $l \geqslant 2$, se deduce în mod asemănător că fiecare $D_i\, u\,(t)$ este de clasă C^1 în sens tare, deci $u\,(t)$ este de clasă C^2 în sens tare, iar derivatele de ordinul doi $D_j\, D_i\, u\,(t)$ sînt de clasă C^{l-1} în sens slab.

După $l-1$ etape, rezultă că $u\,(t)$ este de clasă C^{l-1} în sens tare, iar derivatele sale parţiale de ordinul $l-1$ în sens tare sînt de clasă C^2 în sens slab; aceasta implică însă că ele sînt de clasă C^1 în sens tare, deci $u\,(t)$ este de clasă C^l în topologia tare.

COROLARUL 1. *Dacă funcţia vectorială $u\,(t)$ definită pe un domeniu $G \subset R^n$ cu valori în spaţiul local convex X, cvasicomplet, este de clasă C^∞ în sens slab, atunci ea este de clasă C^∞ şi în sens tare.*

COROLARUL 2. *Fie $P\,(D)$ un operator cu derivate parţiale hipoeliptic şi fie $u\,(t)$ o funcţie definită pe un domeniu $G \subset R^n$ cu valori în spaţiul X local convex, cvasicomplet, astfel încît pentru orice $x^* \in X^*$ să avem în G*

$$P\,(D)\ (x^*\,[u\,(t)]) = 0.$$

Atunci $u(t)$ e de clasă C^∞ în sens tare şi avem $P(D)\,u(t) = 0$.

Într-adevăr, cum $P\,(D)$ este un operator hipoeliptic, pentru orice $x^* \in X^*$, $x^*\,[u\,(t)]$ este de clasă C^∞, [4], deci, după corolarul 1, rezultă că $u\,(t)$ este de clasă C^∞ în sens tare. Cum în acest caz:

$D^k\, x^*\,[u\,(t)] = x^*\,[D^k\, u\,(t)]$ oricare ar fi k natural, rezultă că $P(D)\; u(t) = 0$ în G, derivările făcîndu-se în sens tare.

În particular, o funcţie slab armonică sau slab poliarmonică este tare armonică respectiv tare poliarmonică. Acest rezultat observat anterior de M. Nicolescu [5] ne-a condus la nota de faţă.

Adăugat la corectură: Autoarea a luat cunoştinţă recent de lucrarea *Derivatives of vector valued functions*", Mathematika, **5**, 1958, p. 9–10, a lui R. Edwards în care se dau rezultate care deşi nu sînt identice cu ale noastre, sînt foarte asemănătoare.

Primită la redacţie la 19 martie 1965

Institutul de matematică al Academiei R.P.R.,
Bucureşti, str. M. Eminescu nr. 47

BIBLIOGRAFIE

1. L. Schwartz, *Un lémme sur la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle.* Annalles de l'Institut Fourier, **2**, 17–18 (1950).
2. E. Hille, R. Phillips, *Functional analysis and semi-groups.* 1957.
3. Shibata, *On vector valued functions.* Sci Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, **5**, 20–32 (1955).
4. Г. Е. Шилов, *Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэфициентами. Успехи мат. наук*, **14**, (1959) *5* (*89*)
5. Miron Nicolescu, *Funcții armonice cu valori într-un spațiu Banach.* Conferință în cadrul sesiunii științifice a Universității din București, octombrie, 1964.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

[illegible]

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit.

Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

1966 JUN 6

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOÏLOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 5 P. 635—768, BUCUREŞTI, 1966

I. P. „Informaţia" – c. 3194

43 831

Lei 12

~~F 1269~~
F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

6

TOMUL 18
1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie pe adresa : str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

F1269

TOM. 18, Nr. 6
1966

STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

SUMAR

Pag.

MARIUS I. STOKA, Asupra grupurilor izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din planul euclidian 771

C. TELEMAN, Asupra spațiilor cu conexiune afină constantă și local euclidiană 783

T. RUS, Interpretor pentru mașina DACICC—1 799

B. JANKÓ și M. BALÁSZ, Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda iperbolelor tangente generalizate (II) 817

MIHAELA MIHĂILESCU, Unde elasto-vîsco-plastice în bare cilindrice groase 829

IOANA CIORĂNESCU, Asupra funcțiilor olomorfe (α)-vectoriale 839

GRIGOR MOLDOVAN și ILIE RÎP, Asupra unei inegalități din teoria aproximării funcțiilor de două variabile prin polinoamele lui Bernstein 845

ȘT. MITITELU, Asupra sintezei multipolilor $(p-q)$ cu contacte fără repetiții 855

EFTIMIE I. GRECU, Cîmpuri de vectori paraleli în spații Riemann cu conexiune constantă 869

P. STAVRE, Asupra contactului a două curbe ale unui spațiu cu conexiune afină L_n 879

RADU POPESCU, Numărul tipurilor de multipoli $(1-k)$ după produsul dintre subgrupul alternant și subgrupul negațiilor. (Subgrupuri ale grupului hiperoctaedric) 889

RADU POPESCU, Numărul tipurilor de funcții booleene după produsul dintre subgrupul alternat și subgrupul negațiilor (Subgrupuri ale grupului hiperoctaedric) 895

HENRI MOSCOVICI, Asupra unor construcții geometrice legate de omologia singulară a spațiilor fibrate 909

ANDREI VERONA, Asupra unor spații fibrate universale . . . 919

VINCENȚIU DUMITRU și VASILE IONESCU, Rezolvarea numerică a unei clase de probleme de programare neliniară . 933

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 769–942 BUCUREȘTI, 1966

ASUPRA GRUPURILOR IZOMORFE CU GRUPUL TRANSFORMĂRILOR ORTOGONALE DIN PLANUL EUCLIDIAN

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se determină formele canonice la care pot fi reduse grupurile în două şi trei variabile izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din planul euclidian

Fie $E_2(x, y)$ planul euclidian de coordonate x, y şi

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + \alpha, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + \beta, \end{cases}$$

grupul transformărilor ortogonale. Transformările infinitezimale ale acestui grup sînt

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \ X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x},$$

avînd structura

$$(1) \qquad (X_1X_2) = 0, \quad (X_1X_3) = X_2, \quad (X_2X_3) = -X_1.$$

În cele ce urmează vom determina formele canonice ale grupurilor în două şi trei variabile care au structura (1), forme canonice care ne sînt necesare pentru anumite probleme de geometrie integrală.

I

Fie R_2 un spaţiu cu două dimensiuni de coordonate x^1, x^2.

Să demonstrăm mai întîi următoarea lemă :

Grupurile în două variabile izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din planul euclidian sînt tranzitive.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 771–781 BUCUREŞTI, 1966

Într-adevăr, fie

$$X_1 f = \xi_1^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad X_2 f = \xi_2^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad X_3 f = \xi_3^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad (i = 1, 2)$$

cei trei operatori ai unui grup cu structura (1). Presupunînd că acest grup este intranzitiv, rezultă

$$\xi_2^i = \lambda \xi_1^i, \quad \xi_3^i = \mu \xi_1^i,$$

unde λ și μ sînt două funcții nenule.

Cu aceste valori, ecuația $(X_1 X_2) = 0$ ne dă

$$\xi_1^1 \left(\xi_1^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \xi_1^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \xi_1^2 \left(\xi_1^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \xi_1^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) = 0,$$

de unde deducem

$$\xi_1^1 \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} + \xi_1^2 \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

Analog, din ecuația $(X_1 X_3) = X_2$, rezultă

$$\xi_1^1 \frac{\partial \mu}{\partial x^1} + \xi_1^2 \frac{\partial \mu}{\partial x^2} = \lambda, \tag{3}$$

iar din ecuația $(X_2 X_3) = - X_1$

$$\xi_1^1 \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x^1} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x^1} \right) + \xi_1^2 \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial x^2} \right) + 1 = 0. \tag{4}$$

Ținînd seama în ecuația (4) de (2) și (3), obținem

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

relație imposibilă.

Să demonstrăm acum că:

Prin schimbări de parametri putem reduce orice subgrup cu doi parametri al unui grup G_3 cu structura (1) la forma

$$G_2 \equiv [X_1, X_2].$$

Fie

$$Y_1 = a_h X_h, \quad Y_2 = b_h X_h, \qquad (h = 1, 2, 3)$$

cei doi operatori ai subgrupului G_2.

Dacă $a_1 = a_2 = 0$, rezultă că $a_3 \neq 0$ și printr-o schimbare de parametri putem presupune că $a_3 = 1$, deci

$$Y_1 = X_3.$$

Luînd în loc de operatorul Y_2 pe

$$Z_2 = Y_2 - b_3 Y_1 = b_1 X_1 + b_2 X_2$$

şi punînd condiţia ca

$$(Y_1 Z_2) = c_1 Y_1 + c_2 Z_2$$

deducem

$$b_1 = b_2 = 0$$

ceea ce este imposibil.

Dacă $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, putem lua $a_2 = 1$ şi deci

$$Y_1 = X_2 + a_3 X_3.$$

Luînd ca al doilea operator al grupului pe

$$Z_2 = Y_2 - b_2 Y_1 = b_1 X_1 + b_3' X_3.$$

şi punînd condiţia ca

$$(Y_1 Z_2) = c_1 Y_1 + c_2 Z_2 ,$$

rezultă $a_3 = b_3' = 0$, deci obţinem subgrupul

$$G \equiv [X_1, X_2].$$

În sfîrşit, dacă $a_1 \neq 0$, luînd $a_1 = 1$, avem

$$Y_1 = X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3.$$

Considerînd în loc de Y_2 operatorul

$$Z_2 = Y_2 - b_1 Y_1 = b_2' X_2 + b_3' X_3,$$

pentru ca operatorii Y_1 şi Z_2 să formeze grup trebuie ca $a_3 = b_3' = 0$ şi regăsim subgrupul G_2 de mai sus.

Să considerăm acum în spaţiul R_2 grupul G_3 definit de operatorii

$$X_h f = \xi_h^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad (i = 1, 2;\ h = 1, 2, 3),$$

cu structura (1).

Să presupunem întîi că subgrupul $G_2 \equiv [X_1, X_2]$ este tranzitiv. În acest caz, printr-o schimbare de variabile, putem reduce operatorul $X_1 f$ la forma

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

Condiţia de tranzitivitate a grupului G_2 se scrie în acest caz

(5) $$\xi_2^2 \neq 0.$$

Cu această valoare ecuaţia $(X_1 X_2) = 0$ ne dă

$$\frac{\partial \xi_2^1}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2^2}{\partial x^1} = 0,$$

deci

$$\xi_2^i = \xi_2^i(x^2), \qquad (i = 1, 2).$$

Să facem acum schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1 + \varphi(x^2), \quad x'^2 = \psi(x^2), \qquad \left(\frac{d\psi}{dx^2} \neq 0\right)$$

care păstrează forma operatorului $X_2 f$.

Prin aceasta, operatorul $X_1 f$ devine

$$X_2 f = \left[\xi_2^1(x^2) + \xi_2^2(x^2)\frac{d\varphi}{dx^2}\right]\frac{\partial f}{\partial x'^1} + \xi_2^2(x^2)\frac{d\psi}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial x'^2}.$$

Dar ţinînd seama de condiţia (5) şi luînd

$$\varphi = -\int \frac{\xi_2^1(x^2)}{\xi_2^2(x^2)}\, dx^2, \quad \psi = \int \frac{dx^2}{\xi_2^2(x^2)},$$

obţinem

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x'^2}.$$

Putem deci presupune că operatorii $X_1 f$ şi $X_2 f$ sînt

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţiile $(X_1 X_3) = X_2$ şi $(X_2 X_3) = -X_1$, obţinem

$$\frac{\partial \xi_3^1}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial \xi_3^1}{\partial x^2} = -1, \quad \frac{\partial \xi_3^2}{\partial x^1} = 1, \quad \frac{\partial \xi_3^2}{\partial x^2} = 0,$$

adică

$$\xi_3^1 = -x^2 + c_1, \qquad \xi_3^2 = x^1 + c_2, \qquad (c_1, c_2 = \text{const.}).$$

Rezultă că

$$X_3 f = (-x^2 + c_1)\frac{\partial f}{\partial x^1} + (x^1 + c_2)\frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x^1 + c_2, \qquad \overline{x}^2 = x^2 - c_1$$

care conservă forma operatorilor $X_1 f$ şi $X_2 f$, găsim

$$X_3 f = -\overline{x}^2\frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1} + \overline{x}^1\frac{\partial f}{\partial \overline{x}^2}.$$

Deci, dacă grupul G_3 are un subgrup G_2 tranzitiv, el poate fi redus la forma canonică

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 f = -x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Să presupunem acum că grupul G_2 este intrazitiv. În acest caz, ţinînd seama că grupul G_3 este tranzitiv, rezultă că, printr-o schimbare de variabile, putem obţine

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

Din ecuaţiile $(X_1 X_3) = X_2$, $(X_2 X_3) = -X_1$, rezultă

$$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial x^1} = -\xi_2^i, \quad \frac{\partial \xi_2^i}{\partial x^1} = \xi_1^i, \quad (i = 1,\ 2). \tag{6}$$

De aici deducem

$$\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial (x^1)^2} + \xi_1^i = 0,$$

de unde

$$\xi_1^i = \varphi_i(x^2) \cos x^1 + \psi_i(x^2) \sin x^1,$$

care înlocuite în (6) ne dau

$$\xi_2^i = \varphi_i(x^2) \sin x^1 - \psi_i(x^2) \cos x^1.$$

Făcînd acum schimbarea de variabile

$$x'^1 = x + \lambda(x^2), \quad x'^2 = \mu(x^2), \quad \left(\frac{d\mu}{dx^2} \neq 0\right),$$

care păstrează forma operatorului $X_3 f$, obţinem

$$\begin{aligned} X_1 f = \{&[\varphi_1 \cos\lambda - \psi_1 \sin\lambda + \lambda'(\varphi_2 \cos\lambda - \psi_2 \sin\lambda)] \cos x'^1 + \\ &+ [\varphi_1 \sin\lambda + \psi_1 \cos\lambda + \lambda'(\varphi_2 \sin\lambda + \psi_2 \cos\lambda)] \sin x'^1\} \frac{\partial f}{\partial x'^1} + \\ &+ \mu' [(\varphi_2 \cos\lambda - \psi_2 \sin\lambda) \cos x'^1 + (\varphi_2 \sin\lambda + \psi_2 \cos\lambda) \sin x'^1] \frac{\partial f}{\partial x'^2}. \end{aligned}$$

Dacă alegem pe $\lambda(x^2)$ ca soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\lambda'(\varphi_2 \cos\lambda - \psi_2 \sin\lambda) + \varphi_1 \cos\lambda - \psi_1 \sin\lambda = 0$$

şi pe $\mu(x^2)$ dat de

$$\mu(x^2) = -\int \frac{dx^2}{\varphi_2 \cos\lambda - \psi_2 \sin\lambda},$$

obținem

$$X_1 f = A(x'^2) \sin x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^1} + [-\cos x'^1 + B(x'^2) \sin x'^1] \frac{\partial f}{\partial x'^2}$$

și

$$X_2 f = -A(x'^2) \cos x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^1} + [-\sin x'^1 - B(x'^2) \cos x'^1] \frac{\partial f}{\partial x'^2}.$$

Punînd condiția ca $(X_1 X_2) = 0$, găsim

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x'^2} + A^2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x'^2} + AB = 0.$$

Acest sistem are soluțiile

$$1^\circ \quad A = 0, \quad B = k, \quad (k = \text{const.})$$

$$2^\circ \quad A = \frac{1}{x'^2 + k_1}, \quad B = \frac{k_2}{x'^2 + k_1}.$$

În cazul 1°, avem

$$X_1 f = (-\cos x'^1 + k \sin x'^1) \frac{\partial f}{\partial x'^2}, \; X_2 f =$$

$$= (-\sin x'^1 - k \cos x'^1) \frac{\partial f}{\partial x'^2}, \; X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x'^1},$$

sau luînd în loc de X_1 și X_2 operatorii $\dfrac{X_1 + kX_2}{1 + k^2}$, $\dfrac{-kX_1 + X_2}{1 + k^2}$, găsim grupul

$$X_1 f = -\cos x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^2}, \; X_2 f = -\sin x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^2}, \; X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x'^1}.$$

În cazul 2°, prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \overline{x}^1 = \sqrt{(x'^2 + k_1)^2 + k_2^2} \cos\left(x'^1 + \operatorname{arctg} \dfrac{k_2}{x'^2 + k_1}\right), \\ \overline{x}^2 = \sqrt{(x'^2 + k_1)^2 + k_2^2} \sin\left(x'^1 + \operatorname{arctg} \dfrac{k_2}{x'^2 + k_1}\right), \end{cases}$$

obținem

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1}, \; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^2}, \; X_3 f = -\overline{x}^2 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1} + \overline{x}^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^2},$$

grup găsit în cazul precedent.

Deci, dacă grupul G nu are un subgrup G_2 tranzitiv, el poate fi redus la forma canonică

$$X_1 f = -\cos x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_2 f = -\sin x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

Rezultă

TEOREMĂ. *Grupurile G_3 în două variabile izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din plan pot fi reduse la una din formele canonice*

$$[\mathrm{I}]\quad X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_3 f = -x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

$$[\mathrm{II}]\quad X_1 f = -\cos x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_2 f = -\sin x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

II

Ne vom ocupa acum de grupurile în trei variabile cu structura (1). Fie R_3 un spaţiu cu trei dimensiuni de coordonate x^1, x^2, x^3 şi G_3 un grup tranzitiv din acest spaţiu cu structura (1). Să notăm cu

$$X_1 f = \xi_1^i \frac{\partial f}{\partial x^i},\ X_2 f = \xi_2^i \frac{\partial f}{\partial x^i},\ X_3 f = \xi_3^i \frac{\partial f}{\partial x^i},\qquad (i = 1, 2, 3)$$

cei trei operatori ai grupului G_3.

Printr-o schimbare de variabile putem reduce unul din aceşti operatori la forma $\frac{\partial f}{\partial x^1}$. Avem deci de considerat două cazuri şi anume

$$1^\circ\ X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1},\quad 2^\circ\ X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

În cazul 1°, din ecuaţia $(X_1 X_2) = 0$ rezultă

$$\frac{\partial \xi_2^i}{\partial x^1} = 0,$$

adică

$$\xi_2^i = \xi_2^i (x^2, x^3),\qquad (i = 1, 2, 3).$$

Dacă facem schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1 + \varphi_1 (x^2, x^3),\ x'^2 = \varphi_2 (x^2, x^3),\ x'^3 = \varphi_3 (x^2, x^3)$$

care păstrează forma operatorului $X_1 f$, obţinem

$$X_2 f = \left(\xi_2^1 + \xi_2^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} + \xi_2^3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^3}\right) \frac{\partial f}{\partial x'^1} + \left(\xi_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} + \xi_2^3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^3}\right) \frac{\partial f}{\partial x'^2} + \\ + \left(\xi_2^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^2} + \xi_2^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}\right) \frac{\partial f}{\partial x'^3}.$$

Vom determina pe φ_1, φ_2, φ_3 cu condițiile

$$\xi_2^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} + \xi_2^3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^3} + \xi_1^1 = 0,$$

$$\xi_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} + \xi_2^3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^3} = 1,$$

$$\xi_2^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^2} + \xi_2^3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3} = 0.$$

Putem deci reduce operatorul $X_2 f$ la forma

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x'^2}.$$

Rezultă că putem presupune că avem

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Cu aceste valori, ecuațiile $(X_1 X_3) = X_2$ și $(X_2 X_3) = - X_1$ ne dau

$$\frac{\partial \xi_3^1}{\partial x^1} = 0, \ \frac{\partial \xi_3^1}{\partial x^2} = -1, \frac{\partial \xi_3^2}{\partial x^1} = 1, \ \frac{\partial \xi_3^2}{\partial x^2} = 0, \ \frac{\partial \xi_3^3}{\partial x^1} = \frac{\partial x_3^3}{\partial x^2} = 0,$$

deci

$$\xi_3^1 = - x^2 + \lambda_1(x^3), \qquad \xi_3^2 = x^1 + \lambda_2(x^3), \quad \xi_3^3 = \lambda_3(x^3).$$

Din condiția ca grupul G_3 să fie tranzitiv, rezultă $\lambda_3 \neq 0$.
Vom face acum schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1 + \psi_1(x^3), \quad x'^2 = x^2 + \psi_2(x^3), \quad x'^3 = \psi_3(x^3), \quad \left(\frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}x^3} \neq 0\right)$$

care conservă forma operatorilor $X_1 f$ și $X_2 f$.
Avem

$$X_3 f = \left(- x'^2 + \lambda_3 \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x^3} + \psi_2 + \lambda_1\right) \frac{\partial f}{\partial x'^1} + \left(x'^1 + \lambda_3 \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x^3} - \psi_1 + \lambda_2\right) \frac{\partial f}{\partial x'^2} +$$

$$+ \lambda_3 \frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}x^3} \frac{\partial f}{\partial x'^3}.$$

Luînd funcţiile ψ_1, ψ_2, ψ_3 ca soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} \lambda_3 \dfrac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x^3} + \psi_2 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 \dfrac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x^3} - \psi_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 \dfrac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}x^3} = 1, \end{cases}$$

obţinem

$$X_3 f = - x'^2 \frac{\partial f}{\partial x'^1} + x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^2} + \frac{\partial f}{\partial x'^3}.$$

Rezultă că, în cazul 1°, putem reduce grupul G_3 la forma

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_3 f = - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

În cazul 2°, din ecuaţiile $(X_1 X_3) = X_2$ şi $(X_2 X_3) = - X_1$ rezultă

$$\xi_1^i = \frac{\partial \xi_2^i}{\partial x^1}, \quad \xi_2^i = - \frac{\partial \xi_1^i}{\partial x^1}.$$

De aici deducem

$$\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial (x^1)^2} + \xi_1^i = 0,$$

adică

$$\xi_1^i = \varphi_i (x^2, x^3) \cos x^1 + \psi_i (x^2, x^3) \sin x^1$$

şi deci

$$\xi_2^i = \varphi_i (x^2, x^3) \sin x^1 - \psi_i (x^2, x^3) \cos x^1 .$$

Dacă facem schimbarea de variabile

$$x'^1 = x^1 + \lambda_1 (x^2, x^3), \; x'^2 = \lambda_2 (x^2, x^3), \; x'^3 = \lambda_3 (x^2, x^3),$$

care păstrează forma operatorului $X_3 f$. Obţinem

$$X_1 f = \Bigg[\left(\varphi_1 + \varphi_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^2} + \varphi_3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^3} \right) \cos (x'^1 - \lambda_1) +$$

$$+ \left(\psi_1 + \psi_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^2} + \psi_3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^3} \right) \sin (x'^1 - \lambda_1) \Bigg] \frac{\partial f}{\partial x'^1} +$$

$$+ \Bigg[\left(\varphi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + \varphi_3 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^3} \right) \cos (x'^1 - \lambda_1) + \left(\psi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + \psi_3 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^3} \right) \sin (x'^1 - \lambda_1) \Bigg] \frac{\partial f}{\partial x'^2} +$$

$$+ \Bigg[\left(\varphi_2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^2} + \varphi_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^3} \right) \cos (x'^1 - \lambda_1) + \Bigg(\psi_2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^2} + \psi_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^3} \sin (x'^1 - \lambda_1) \Bigg] \frac{\partial f}{\partial x'^3}.$$

Luînd funcţiile λ_1, λ_2, λ_3 ca soluţii ale sistemului

$$\left(\varphi_1 + \varphi_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^2} + \varphi_3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^3}\right) \sin \lambda_1 + \left(\psi_1 + \psi_2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^2} + \psi_3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^3}\right) \cos \lambda_1 = 0,$$

$$\left(\varphi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + \varphi_3 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^3}\right) \sin \lambda_1 + \left(\psi_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^2} + \psi_3 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^3}\right) \cos \lambda_1 = 1,$$

$$\left(\varphi_2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^2} + \varphi_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^3}\right) \sin \lambda_1 + \left(\psi_2 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^2} + \psi_3 \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^3}\right) \cos \lambda_1 = 0,$$

rezultă că

$$X_1 f = A_1 (x'^2, x'^3) \cos x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^1} + [A_2 (x'^2, x'^3) \cos x'^1 + \sin x'^1] \frac{\partial f}{\partial x'^2} + $$
$$+ A_3 (x'^2, x'^3) \cos x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^3},$$

$$X_2 f = A_1 (x'^2, x'^3) \sin x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^1} + [A_2 (x'^2, x'^3) \sin x'^1 - \cos x'^1] \frac{\partial f}{\partial x'^2} + $$
$$+ A_3 (x'^2, x'^3) \sin x'^1 \frac{\partial f}{\partial x'^3}.$$

Condiţia de tranzitivitate a grupului se scrie în acest caz

$$A_3 \neq 0.$$

Înlocuind aceste valori în ecuaţia $(X_1 X_2) = 0$, deducem

$$A_1^2 + \frac{\partial A_1}{\partial x'^2} = 0, \quad A_1 A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial x'^2} = 0, \quad A_1 A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial x'^2} = 0,$$

care are soluţiile:

a) $A_1 = 0, \quad A_2 = A_2(x'^3), \quad A_3 = A_3 (x'^3)$

b) $A_1 = \dfrac{1}{x'^2 + \alpha_1 (x'^3)}, \; A_2 = \dfrac{\alpha_2 (x'^3)}{x'^2 + \alpha_1 (x'^3)}, \; A_3 = \dfrac{\alpha_3 (x'^1)}{x'^2 + \alpha_1 (x'^3)}$

În cazul a) prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x'^1, \; \overline{x}^2 = x'^2 - \int \frac{A_2 (x'^3) \, \mathrm{d} x'^3}{A_3 (x'^3)}, \; \overline{x}^3 = \int \frac{\mathrm{d} x'^3}{A_3 (x'^3)},$$

obţinem

$$X_1 f = \sin \overline{x}^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1} + \cos x^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^2}, \; X_2 f = - \cos \overline{x}^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1} + \sin \overline{x}^1 \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^2}, \; X_3 = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1}.$$

În cazul b) prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = x'^1,\ \overline{x}^2 = x'^2 + \alpha_1(x'^3),\ \overline{x}^3 = \int \frac{\mathrm{d}x'^3}{A_3(x'^3)},$$

obținem

$$X_1 f = \frac{\cos \overline{x}^1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1} + \left[\frac{\alpha(\overline{x}^3) \cos \overline{x}^1}{\overline{x}^2} + \sin \overline{x}^1 \right] \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\cos \overline{x}^1}{\overline{x}^2} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^3},$$

$$X_2 f = \frac{\sin \overline{x}^1}{\overline{x}^2} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1} + \left[\frac{\alpha(\overline{x}^3) \sin \overline{x}^1}{\overline{x}^2} - \cos \overline{x}^1 \right] \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\sin \overline{x}^1}{\overline{x}^2} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^3},$$

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial \overline{x}^1}.$$

Rezultă

TEOREMĂ. *Grupurile în trei variabile tranzitive izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din plan pot fi reduse la una din formele canonice*

$$[\mathrm{I}]\ X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x^1},\ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x^2},\ X_3 f = -\, x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$[\mathrm{II}]\ X_1 f = \sin x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \cos x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3},\ X_2 f = -\cos x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} +$$

$$+ \sin x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3},\ X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x^1},$$

$$[\mathrm{III}]\ X_1 f = \frac{\cos x^1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial x^1} + \left[\frac{\alpha(x^3) \cos x^1}{x^2} + \sin x^1 \right] \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\cos x^1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_2 f = \frac{\sin x^1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial x^1} + \left[\frac{\alpha(x^3) \sin x^1}{x^2} - \cos x^1 \right] \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\sin x^1}{x^2} \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}.$$

Primită la redacție la 27 decembrie 1965

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

ASUPRA SPAŢIILOR CU CONEXIUNE AFINĂ CONSTANTĂ ŞI LOCAL EUCLIDIANĂ

DE

C. TELEMAN

Se indică o metodă ce permite determinarea tuturor algebrelor liniare A, comutative şi asociative, de rang finit. Procedeul indicat permite determinarea algebrelor A de rang n, cînd se cunosc algebrele A de rang $n-1$, prin rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare.

1. Să notăm cu C^n spaţiul afin complex cu n dimensiuni şi să presupunem că avem în C^n o conexiune afină Γ'^i_{jk}, constantă şi local euclidiană, coeficienţii Γ'^i_{jk} fiind numere complexe.

Spaţiul C^n, dotat cu conexiunea $\Gamma' = (\Gamma'^i_{jk})$, admite grupul G' al translaţiilor

$$y'^i = y^i + a^i \tag{1}$$

ca grup de automorfisme. Acest grup este abelian şi tranzitiv.

Pe de altă parte, fiecare punct al lui C^n este inclus într-o vecinătate, în care se pot introduce coordonate carteziene, deci coordonate în care conexiunea are toate componentele nule. Dacă $t : (y) \rightarrow (x)$ este o transformare a coordonatelor y^i în coordonatele carteziene x^i, într-o vecinătate din C^n, transformarea t transformă grupul G' într-un grup local G de automorfisme ale spaţiului euclidian afin complex $(x^1,\ldots,x^n)$, local tranzitiv şi comutativ. Un astfel de grup local este generat de transformări infinitezimale de forma

$$X_i = c^j_i\, \partial_j + p^k_{ij}\, x^j\, \partial_k, \qquad (i = 1,\ldots,n), \tag{2}$$

unde c^j_i, p^k_{ij} sînt constante complexe şi unde am notat cu ∂_i transformările infinitezimale

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 783–797, BUCUREŞTI, 1966

Grupul local G fiind local tranzitiv în vecinătatea considerată, presupunînd că originea este un punct al vecinătății, trebuie să avem

$$|c^j_i| \neq 0. \tag{4}$$

În acest caz, putem lua în locul operatorilor X_i combinații lineare de X_i de forma

$$X'_i = \partial_i + p'^{k}_{ij}\, x^j\, \partial_k. \tag{5}$$

Constantele p'^{k}_{ij} trebuie să fie astfel încît grupul G generat de operatorii X'_i să fie comutativ, deci notînd cu $(X'_i,\, X'_j)$ paranteza Poisson a doi operatori, să avem

$$(X'_i,\, X'_j) = 0, \qquad (i, j = 1,\ldots,n). \tag{6}$$

Paranteza Poisson $(X'_i,\, X'_j)$ este dată de formula

$$(X'_i,\, X'_j) = (p'^{k}_{ji} - p'^{k}_{ij})\, \partial_k + (p'^{k}_{ir}\, p^{s}_{jk} - p'^{k}_{jr} - p'^{s}_{ik})\, x^r\, \partial_s \tag{7}$$

și formulele (6) dau condițiile

$$p'^{k}_{ij} = p'^{k}_{ji}, \tag{8}$$

$$p'^{k}_{ir}\, p'^{s}_{jk} = p'^{k}_{jr}\, p'^{s}_{ik}. \tag{9}$$

Reciproc, dacă presupunem că am găsit un sistem de operatori (5) verificînd condițiile (8), (9), există o transformare de coordonate

$$x^i = \varphi^i(y^1, \ldots, y^n), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

care transformă operatorii X'_i în operatorii

$$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{10'}$$

și transformata conexiunii nule în variabilele x^i, prin (10), va fi o conexiune afină local euclidiană Γ' în variabilele y^i, care admite un grup local, generat de operatorii (10′), ca grup de automorfisme. În acest caz, Γ' este o conexiune constantă. Deci :

Determinarea conexiunilor afine local euclidiene constante este echivalentă cu determinarea grupurilor lineare, comutative și local tranzitive.

Se știe, pe de altă parte, că problema de mai sus este echivalentă cu problema determinării algebrelor lineare comutative și asociative.

Noi vom arăta că rezolvarea acestor probleme se poate face prin rezolvarea unor sisteme de ecuații succesive, lineare și omogene. Pentru a ajunge la acest rezultat, vom utiliza valorile proprii ale operatorilor X'_i, care în general sînt numere complexe, precum și spațiile invariante corespunzătoare acestor valori. Aceasta explică faptul că am considerat conexiuni în spațiul afin complex.

2. Să vedem acuma condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească n operatori de forma

(11) $$X_i = \partial_i + p^k_{ij}\, x^j\, \partial_k, \qquad (i,\ j,\ k = 1,\ldots,n)$$

pentru ca ei să fie permutabili doi cîte doi. Putem scrie

(12) $$X_i = \partial_i + Y_i,$$

unde Y_i sînt *operatorii omogeni* asociaţi operatorilor X_i, deci

(13) $$Y_i = p^k_{ij}\, x^j\, \partial_k.$$

Avem formulele

$$(X_i,\ X_j) = (\partial_i,\ Y_j) - (\partial_j,\ Y_i) + (Y_i,\ Y_j)$$

şi condiţiile $(X_i,\ X_j) = 0$ sînt echivalente cu

(14) $$(\partial_i,\ Y_j) = (\partial_j,\ Y_i)$$

(15) $$(Y_i,\ Y_j) = 0.$$

Formulele (14) dau, ţinînd seama de (13),

(16) $$p^k_{ji} = p^k_{ij}$$

deci p^k_{ij} sînt simetrici în indicii $i,\ j$.

Formulele (15) arată că Y_i generează o algebră Lie lineară omogenă şi comutativă. După o teoremă a lui Sophus Lie, relativă la algebrele Lie lineare omogene rezolubile, putem alege un sistem de coordonate carteziene în spaţiul C^n, astfel încît să avem în aceste coordonate

(17) $$p^k_{ij} = 0, \qquad (j > k),$$

deci astfel încît matricile asociate operatorilor Y_i să aibă toate forma triunghiulară.

Combinînd cu formulele (16), rezultă că avem

(18) $$p^k_{ij} = 0, \qquad (i > k \text{ sau } j > k)$$

deci pot fi nenuli numai coeficienţii p^k_{ij} pentru care avem simultan $i \leqslant k,\ j \leqslant k$.

De aici rezultă că operatorul Y_n este de forma

(19) $$Y_n = p^n_{n\alpha}\, x^\alpha\, \partial_n + p^n_{nn}\, x^n\, \partial_n, \qquad (\alpha < n)$$

sau notînd pentru moment

(20) $$p^n_{n\alpha} = p_\alpha, \quad p^n_{nn} = p,$$

mai putem scrie

(21) $$Y_n = p_\alpha\, x^\alpha\, \partial_n + p\, x^n\, \partial_n, \qquad (\alpha < n).$$

Din formulele (16), (18) rezultă, pentru $\alpha < n$, $\beta < n$,

$$p^n_{\alpha n} = p_\alpha, \quad p^\beta_{\alpha n} = 0, \tag{22}$$

deci operatorii Y_α sînt de forma

$$Y_\alpha = p^\gamma_{\alpha\beta}\, x^\beta\, \partial_\gamma + p^n_{\alpha\beta}\, x^\beta\, \partial_n + p_\alpha\, x^n\, \partial_n, \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ < n) \tag{23}$$

sau, notînd

$$Y'_\alpha = p^\gamma_{\alpha\beta}\, x^\beta\, \partial_\gamma, \qquad (\alpha,\ \beta,\ \gamma < n), \tag{24}$$

mai putem scrie

$$Y_\alpha = Y'_\alpha + p^n_{\alpha\lambda}\, x^\lambda\, \partial_n + p_\alpha\, x^n\, \partial_n, \qquad (\lambda < n). \tag{25}$$

Din ultima relaţie rezultă

$$\begin{aligned}(Y_\alpha,\ Y_\beta) = (Y'_\alpha,\ Y'_\beta) &+ (p^n_{\alpha\lambda}\, p_\beta - p^n_{\beta\lambda}\, p_\alpha)\, x^\lambda\, \partial_n + \\ &+ [p^n_{\beta\lambda}\, Y'_\alpha(x^\lambda) - p^n_{\alpha\lambda}\, Y'_\beta(x^\lambda)]\, \partial_n\end{aligned} \tag{26}$$

sau, ţinînd seama de (24), mai putem scrie

$$(Y_\alpha,\ Y_\beta) = (Y'_\alpha,\ Y'_\beta) + [p^n_{\alpha\lambda}\, p_\beta - p^n_{\beta\lambda}\, p_\alpha + p^n_{\beta\mu}\, p^\mu_{\alpha\lambda} - p^n_{\alpha\mu}\, p^\mu_{\beta\lambda}]\, x^\lambda\, \partial_n. \tag{27}$$

Condiţiile $(Y_\alpha,\ Y_\beta) = 0$, $(Y_\alpha,\ Y_n) = 0$ sînt echivalente cu

$$(Y'_\alpha,\ Y'_\beta) = 0, \tag{28}$$

$$p^\gamma_{\alpha\beta}\, p_\gamma - p_\alpha\, p_\beta = 0, \tag{28'}$$

$$p^n_{\alpha\mu}\,(\delta^\mu_\lambda\, p_\beta - p^\mu_{\beta\lambda}) = p^n_{\beta\mu}\,(\delta^\mu_\lambda\, p_\alpha - p^\mu_{\alpha\lambda}). \tag{29}$$

Se mai pot face unele precizări asupra coeficienţilor p^i_{jk}. Anume se ştie că fiind dat un sistem de operatori lineari omogeni Y_i, permutabili doi cîte doi, putem descompune spaţiul C^n într-o sumă directă de subspaţii invariante faţă de fiecare din operatorii Y_i, astfel încît fiecare din aceşti operatori să aibă în fiecare din subspaţiile descompunerii o singură valoare proprie distinctă. Aceasta revine a spune că există un sistem de coordonate carteziene în C^n, astfel că indicii $1,\dots,n$ se grupează în p clase $g_1 = \{1, 2,\dots, m_1\}$, $g_2 = \{m_1 + 1,\dots, m_1 + m_2\},\dots$, $g_p = \{m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1} + 1,\dots, n\}$ astfel încît să avem pentru fiecare indice i,

$$p^k_{ij} = 0, \qquad (j \in g_\lambda,\ k \in g_\mu,\ \lambda \neq \mu) \tag{30}$$

$$p^j_{ij} = \rho_{i,\lambda}, \qquad (j \in g_\lambda), \tag{31}$$

(nu se face suma in raport cu j!)

Presupunînd că am ales de la început un astfel de sistem de coordonate, condiţiile (30), (31) se păstrează dacă înlocuim operatorii X_i prin n combinaţii lineare, linear independente, de X_i şi putem alege aceste combinaţii astfel încît X_i să fie tot de forma (11). În acest caz, condițiile (16) rămîn și ele adevărate; combinînd aceste condiții cu (30), rezultă că avem

$$p^k_{ij} = 0, \quad (\{k\} \neq \{i\} \text{ sau } \{k\} \neq \{j\}), \tag{32}$$

unde am notat cu $\{i\}$ clasa g_λ care conține indicele i, deci

$$\{i\} = g_\lambda \text{ dacă } i \in g_\lambda. \tag{33}$$

Relațiile (11), (32) arată că operatorul X_i conține numai variabilele x^j și operatorii ∂_k cu $j,\ k \in \{i\}$. Determinarea operatorilor X_i se reduce deci la determinarea lor pentru fiecare din clasele $g_1, \ldots, g_p$.

Să presupunem atunci că avem o singură clasă $\lambda = \{1,\ldots,n\}$. În acest caz, numit *cazul special*, formulele (31) dau

$$p^1_{i1} = p^2_{i2} = \ldots = p^n_{in} = \rho_i, \quad (i = 1, 2,\ldots,n). \tag{34}$$

Presupunînd $n > 1$, din formula (19) rezultă

$$\rho_n = 0, \quad \text{deci } p^n_{nn} = 0 \tag{35}$$

și din (22) deducem

$$p_\alpha = \rho_\alpha, \tag{36}$$

astfel încît formulele (28′), (29) devin

$$p^\gamma_{\alpha\beta}\, \rho_\gamma = \rho_\alpha\, \rho_\beta \tag{36'}$$

$$p^n_{\alpha\mu}\,(\delta^\mu_\lambda\, \rho_\beta - p^\mu_{\beta\lambda}) = p^n_{\beta\mu}\,(\delta^\mu_\lambda\, \rho_\alpha - p^\mu_{\alpha\lambda}), \quad (\alpha, \beta, \lambda, \mu < n). \tag{37}$$

Formulele (25), (28), (35), (36), (37) permit să se construiască sisteme de n operatori permutabili *de tip special*, plecînd de la un sistem de $(n - 1)$ operatori Y'_α $(\alpha = 1,\ldots,n - 1)$ de tip special, și formînd operatorii

$$Y_\alpha = Y'_\alpha + p^n_{\alpha\lambda}\, x^\lambda\, \partial_n + \rho_\alpha\, x^n\, \partial_n, \qquad (\alpha < n) \tag{38}$$

$$Y_n = \rho_\alpha\, x^\alpha\, \partial_n, \tag{39}$$

unde ρ_α sînt dați de formulele (34), iar $p^n_{\alpha\lambda}$ sînt cantități ce verifică formulele (37).

Deci : *sistemele permutabile de tip special se pot construi prin recurență în raport cu dimensiunea n, trecerea de la o dimensiune n—1 la dimensiunea n necesitînd rezolvarea unui sistem de ecuații lineare și omogene (37), în necunoscutele* $p^n_{\alpha\beta}$, $(\alpha,\ \beta < n)$, *care formează o matrice simetrică datorită relațiilor (16)* [1].

Pentru $n = 1$, avem un singur operator,

$$Y_1 = \rho_1\, x^1\, \partial_1. \tag{40}$$

---

[1] Utilizînd acest rezultat, I. Drăghici a determinat la sugestia noastră spațiile local euclidiene cu conexiune constantă cu patru dimensiuni [1].

Pentru a trece la cazul $n = 2$, să observăm că sistemul (37) nu conține nici o condiție în p^2_{11}, astfel încît putem lua p^2_{11} arbitrar și obținem sistemul de operatori

$$(41)\qquad \begin{aligned} Y_1 &= \rho_1 (x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2) + p^2_{11} x^1 \partial_2 \\ Y_2 &= \rho_1 x^1 \partial_2 . \end{aligned}$$

Pentru a trece la cazul $n = 3$, să scriem ecuațiile (37) întîi pentru $\lambda = 1$ și apoi pentru $\lambda = 2$. Obținem atunci ecuațiile

$$(42)\qquad p^3_{\alpha 1} \rho_\beta - p^3_{\alpha\mu} p^\mu_{\beta 1} = p^3_{\beta 1} \rho_\alpha - p^3_{\beta\mu} p^\mu_{\alpha 1},$$

$$(43)\qquad p^3_{\alpha 2} \rho_\beta - p^3_{\alpha\mu} p^\mu_{\beta 2} = p^3_{\beta 2} \rho_\alpha - p^3_{\beta\mu} p^\mu_{\alpha 2} .$$

Avem o singură alegere pentru α, β semnificativă, deci putem lua $\alpha = 1$, $\beta = 2$; ecuațiile precedente devin, ținînd seama că $\rho_2 = 0$,

$$(44)\qquad - p^3_{1\mu} p^\mu_{21} = p^3_{21} \rho_1 - p^3_{2\mu} p^\mu_{1.}$$

$$(45)\qquad - p^3_{1\mu} p^\mu_{22} = p^3_{22} \rho_1 - p^3_{2\mu} p^\mu_{12} ;$$

ținînd seama de (41), găsim o singură condiție

$$(46)\qquad p^3_{12} \rho_1 = p^3_{22} p^2_{11} .$$

Avem deci pentru $n = 3$ sistemul de operatori

$$(47)\qquad \begin{aligned} Y_1 &= \rho_1 (x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2 + x^3 \partial_3) + p^2_{11} x^1 \partial_2 + p^3_{11} x^1 \partial_3 + p^3_{12} x^2 \partial_3 , \\ Y_2 &= \rho_1 x^1 \partial_2 + p^3_{12} x^1 \partial_3 + p^3_{22} x^2 \partial_3 , \\ Y_3 &= \rho_1 x^1 \partial_3 . \end{aligned}$$

unde p^3_{12}, p^3_{22} sînt legați prin relația (46).

Să observăm că valorile proprii ale operatorilor Y_2, Y_3 sînt toate nule; această proprietate se menține, în general, pentru toți operatorii $Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$, după cum se poate arăta ușor prin inducție.

Rezultă că în ecuațiile (37) trebuie să punem

$$(48)\qquad p^\lambda_{\alpha\lambda} = \rho_\alpha = 0, \qquad (\alpha > 1)$$

iar pentru $\alpha = 1$, știm că avem

$$(48')\qquad p^i_{1i} = \rho_1, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

În aceste condiții, ecuațiile (37) se mai pot scrie

$$(49)\qquad \sum_{i=1}^{n} p^n_{\alpha i}\, p^i_{\beta\lambda} = \sum_{i=1}^{n} p^n_{\beta i}\, p^i_{\alpha\lambda}, \qquad (\alpha, \beta, \lambda < n).$$

Aceste ecuații se mențin dacă punem $\alpha = n$, deoarece cei doi membri sînt atunci egali cu $p^1_{\beta\lambda} \rho_1$, $p^n_{n\lambda} p^n_{\beta n} = p_\lambda p_\beta$ și egalitatea lor rezultă din (36′). De asemenea, cei doi membri ai ecuației (49) rămîn egali dacă punem $\lambda = n$, deoarece în acest caz ei au aceeași expresie

$$p^n_{\alpha n}\, p^n_{\beta n}.$$

În sfîrșit, putem observa că raționamentele făcute pentru n se mențin pentru $n-1$, $n-2,\ldots,2$, astfel încît ajungem la concluzia că p^k_{ij} verifică condițiile

$$(50) \qquad p^i_{jl}\, p^l_{km} = p^i_{kl}\, p^l_{jm}, \quad (i, j, k, l, m = 1,\ldots,n),$$

unde suma se face în raport cu l. Într-adevăr, presupunînd aceste ecuații verificate pentru i, j, k, l, $m < n$, ele se mențin pentru $i = n$; j, k, l, m, $\leqslant n$ în virtutea formulelor (49) și se mențin pentru $i < n$; j, k, l, $m \leqslant n$, deoarece, în acest caz, coeficienții p^i_{jl} cu j sau $l > i$ sînt nuli. Ecuațiile (50) coincid cu ecuațiile (9) și era deci de așteptat să ajungem la ele.

Să revenim la ecuațiile (37) și să presupunem că avem $\rho_1 \neq 0$. Pentru $\lambda = n-1$, obținem identitate, iar pentru $\lambda = n-2$ se găsește

$$(51) \qquad p^n_{\alpha n-1}\, p^{n-1}_{\beta n-2} = p^n_{\beta n-1}\, p^{n-1}_{\alpha n-2}.$$

Pentru $\alpha = n-1$ și $n-2 > 1$, deci $n > 3$, rezultă

$$(52) \qquad p^n_{n-1\, n-1}\, p^{n-1}_{\beta n-2} = 0,$$

deci dacă există un indice β pentru care $p^{n-1}_{n-2\beta} \neq 0$, atunci trebuie să luăm

$$(53) \qquad p^n_{n-1\, n-1} = 0.$$

Dacă toți $p^{n-1}_{\beta n-2}$ sînt nuli, ecuațiile (51) sînt identic verificate în $p^n_{n-1\alpha}$.

Dacă există un coeficient $p^{n-1}_{\beta_0 n-2}$ nenul, din (52) deducem

$$(54) \qquad p^n_{\alpha n-1} = \frac{p^{n-1}_{\alpha n-2}}{p^{n-1}_{\beta_0 n-2}}\, p^n_{\beta_0 n-1} \qquad (\alpha < n-1)$$

și aceste relații permit să determinăm coeficienții $p^n_{\alpha n-1}$, alegînd arbitrar $p^n_{\beta_0 n-1}$.

Punînd $p^n_{\beta_0 n-1}/p^{n-1}_{\beta_0 n-2} = c_n$, ecuațiile (54) se mai pot scrie

$$(55) \qquad p^n_{\alpha n-1} = c_n\, p^{n-1}_{\alpha n-2}, \qquad (\alpha < n-1).$$

Să scriem acuma relațiile (37) pentru $\lambda = n-3$:

$$(56) \qquad p^n_{\alpha n-2}\, p^{n-2}_{\beta n-3} + p^n_{\alpha n-1}\, p^{n-1}_{\beta n-3} = p^n_{\beta n-2}\, p^{n-2}_{\alpha n-3} + p^n_{\beta n-1}\, p^{n-1}_{\alpha n-3}.$$

Dacă $p^{n-2}_{\beta n-3}$ sînt toți nuli, avem noi condiții pentru $p^n_{\alpha n-1}$, care ar putea să conducă la $c_n = 0$; anume obținem

$$(57) \qquad c_n\,(p^{n-1}_{n-2\alpha}\, p^{n-1}_{\beta n-3} - p^{n-1}_{\beta n-2}\, p^{n-1}_{\alpha n-3}) = 0$$

și dacă parantezele din ultima relație nu sînt toate nule, trebuie să luăm

$c_n = 0$. Dacă există un $p^{n-2}_{\beta\, n-3} \neq 0$, scriind formulele (55) pentru $n - 1$ în loc de n, obținem

$$p^{n-1}_{\alpha\, n-2} = c_{n-1}\, p^{n-2}_{\alpha\, n-3} \tag{58}$$

și formulele (55) devin

$$p^{n}_{\alpha\, n-1} = c_n\, c_{n-1}\, p^{n-2}_{\alpha\, n-3}, \tag{59}$$

astfel încît putem scrie, în loc de (56),

$$p^{n-2}_{\alpha\, n-3}\,(c_n\, c_{n-1}\, p^{n-1}_{\beta\, n-3} - p^{n}_{\beta\, n-2}) = p^{n-2}_{\beta\, n-3}\,(c_n\, c_{n-1}\, p^{n-1}_{\alpha\, n-3} - p^{n}_{\alpha\, n-2}).$$

Cu ipoteza făcută mai sus, $p^{n-2}_{\beta\, n-3} \neq 0$, aceste ultime relații conduc la formule de forma

$$p^{n}_{\alpha\, n-2} = c_n\, c_{n-1}\, p^{n-1}_{\alpha\, n-3} + d_n\, p^{n-2}_{\alpha\, n-3}. \tag{60}$$

3. Să presupunem acuma că avem un sistem de n operatori (11), permutabili doi cîte doi. Există atunci o transformare de coordonate în spațiul C^n,

$$x^i = \varphi^i\,(y^1, \ldots, y^n), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{61}$$

care transformă operatorii X_i în $\partial'_i = \dfrac{\partial}{\partial y^i}\cdot$ Această transformare de coordonate va verifica condițiile

$$\partial'_i = \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^i}\, \partial_j = \partial_i + p^k_{ij}\, x^j\, \partial_k \tag{62}$$

și rezultă formulele

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^i} = \delta^j_i + p^j_{ik}\, \varphi^k. \tag{63}$$

Pe de altă parte, formulele de transformare ale unei conexiuni afine

$$\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial y^\alpha\, \partial y^\beta} = \Gamma^j_{pq}\, \frac{\partial \varphi^p}{\partial y^\alpha}\, \frac{\partial \varphi^q}{\partial y^\beta} - \Gamma'^{p}_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^p} \tag{64}$$

dau, cînd punem $\Gamma^j_{pq}\,(x) = 0$,

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^p}\, \Gamma'^{p}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial y^\alpha\, \partial y^\beta}\,; \tag{65}$$

ultimele formule se mai scriu, ținînd seama de (63),

$$(\delta^j_r + p^j_{rk}\, \varphi^k)\, \Gamma'^{r}_{\alpha\beta} = -\, p^j_{\alpha k}\,(\delta^k_\beta + p^k_{\beta s}\, \varphi^s) \tag{66}$$

sau încă

$$\Gamma'^{j}_{\alpha\beta} + \varphi^k\, p^j_{rk}\, \Gamma'^{r}_{\alpha\beta} = -\, p^j_{\alpha\beta} - p^j_{\alpha k}\, p^k_{\beta s}\, \varphi^s. \tag{67}$$

Scriind ultima formulă sub forma

$$(p^j_{ks}\,\Gamma'^k_{\alpha\beta} + p^j_{k\alpha}\,p^k_{s\beta})\,\varphi^s = -\,(\Gamma'^j_{\alpha\beta} + p^j_{\alpha\beta}), \tag{68}$$

pentru ca $\Gamma'^k_{\alpha\beta}$ să fie constante trebuie să avem

$$\Gamma'^j_{\alpha\beta} = -\,p^j_{\alpha\beta} \tag{69}$$

$$p^j_{ks}\,\Gamma'^k_{\alpha\alpha} = -\,p^j_{k\alpha}\,p^k_{s\beta} \tag{70}$$

şi aceste ecuaţii sînt compatibile dacă avem

$$p^j_{ks}\,p^k_{\alpha\beta} = p^j_{k\alpha}\,p^k_{s\beta}\,;$$

ultimele condiţii sînt îndeplinite datorită formulelor (50).

Comparînd cu rezultatele de la § 2, putem enunţa următoarea: TEOREMĂ. *Componentele unei conexiuni afine constante şi local euclidiene în spaţiul complex* C^n *se pot aduce la o formă canonică în modul următor: se pot împărţi indicii* $1, \ldots, n$ *în clase*

$$g_\lambda = \{m_1 + \ldots + m_{\lambda-1} + 1, \ldots, m_1 + \ldots + m_\lambda\}$$

astfel încît să avem

(71) $\Gamma^i_{jk} \neq 0$ *numai dacă* $\{i\} = \{j\} = \{k\}$ *şi* $j,\ k \leqslant i$;

(72) $\Gamma^i_{ji} \neq 0$ *numai dacă* j *este primul indice al clasei* $\{i\}$;

(73) $\Gamma^i_{\alpha\beta} = 0$ *dacă* i *este primul indice în clasa* $\{i\}$ *şi* $\alpha \neq i$.

După cum am arătat în §2, această formă canonică conduce la determinarea tuturor conexiunilor afine constante local euclidiene, prin inducţie şi prin rezolvarea unor sisteme de ecuaţii lineare şi omogene.

Să observăm că pentru $i > j$, din ecuaţiile (63) rezultă

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^i} = 0, \qquad (i > j) \tag{74}$$

deci φ^j nu depinde decît de variabilele $x^1, \ldots, x^j$; iar pentru $i = j$, se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^j} = 1 + \rho_1\,\varphi^1. \tag{75}$$

Din (74) rezultă că φ^1 este funcţie numai de y^1, iar ecuaţia (75) dă pentru $j = 1$,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi^1}{\mathrm{d}y^1} = 1 + \rho_1\,\varphi^1,$$

de unde rezultă

$$1 + \rho_1\,\varphi^1 = C\,e^{\rho_1 y^1} \tag{76}$$

dacă $\rho_1 \neq 0$ şi

$$\varphi_1 = y^1 + C \tag{77}$$

dacă $\rho_1 = 0$, C fiind în ambele cazuri o constantă de integrare.

Pentru $j > 1$, ecuaţia (75) dă

$$\varphi^j = (1 + \rho_1 \varphi^1)\, y^j + \psi^j (y^1, \dots, y^{j-1}). \tag{78}$$

Introducînd aceste valori în (63) pentru $1 < i < j$, obţinem

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^i} = p^j_{i1}\, \varphi^1 + \dots + p^j_{ij-1}\, \varphi^{j-1} \tag{79}$$

şi această formulă permite să se stabilească, prin inducţie în raport cu $j > i$, că $\varphi^{i+1}, \dots, \varphi^n$ sînt polinoame în y^i, anume că φ^j este un polinom de grad cel mult $j - i + 1$ în y^i, $(j > i)$. Pentru $i = 1, j > 1$ formulele (64) devin

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^1} = p^j_{11}\, \varphi^1 + \dots + p^j_{1j-1}\, \varphi^{j-1} + \rho_1\, \varphi^j.$$

Dacă $\rho_1 = 0$, rezultă că φ^j sînt polinoame în y^1 de grade cel mult respectiv j. Rezultă că în cazul $\rho_1 = 0$, transformarea $(x) \to (y)$ este de forma

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 + c \\ x^2 &= y^2 + \psi^2 (y^1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x^i &= y^i + \psi^i (y^1, \dots, y^{i-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n &= y^n + \psi^n (y^1, \dots, y^{n-1}), \end{aligned} \tag{80}$$

unde ψ^i sînt polinoame în y^j, $(j < i)$, gradul lui ψ^i în y^j fiind cel mult $i - j + 1$.

Din relaţia (76) rezultă că $\rho_1 = 0$ este o condiţie necesară pentru ca transformarea $(x) \to (y)$ să fie biunivocă, deci este o condiţie necesară pentru ca spaţiul C^n dotat cu conexiunea (69) să fie echivalent în mare cu spaţiul euclidian. Formulele (80) arată că $\rho_1 = 0$ este şi o condiţie suficientă de echivalenţă globală a celor două spaţii.

Să observăm că ρ_1 este legat de conexiunea contractată a conexiunii (69) prin formula

$$\Gamma'_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \Gamma'^j_{\alpha j} = - n\, \delta^1_\alpha \rho_1$$

şi obţinem *teorema lui Mocanu* [2] :

Condiţia necesară şi suficientă ca spaţiul C^n dotat cu o conexiune afină constantă să fie echivalent în mare cu spaţiul euclidian, este ca curbura, tensiunea şi conexiunea contractată să fie nule.

În cazul echivalenţei globale, prof. G. Vrănceanu a arătat că transformarea $(x) \rightarrow (y)$ este o transformare cremoniană întreagă[1]. Formulele (80) arată că putem enunţa un rezultat mai precis :

Echivalenţa globală a spaţiului C^n dotat cu o conexiune constantă euclidiană, cu spaţiul euclidian, este dată de o transformare a lui Jonquière.

Acest rezultat a fost, de asemenea, obţinut pe altă cale, de P. Mocanu.

4. Să considerăm algebra lineară A, asociată conexiunii după această metodă acad. Gr. C. Moisil şi indicată în [3], p. 361. Această algebră este formată din punctele spaţiului C^n, considerate ca vectori şi înmulţirea este definită prin formulele

$$e_i e_j = \Gamma'^k_{ij} e_k, \tag{81}$$

unde e_i este vectorul de componente $x^j = \delta^j_i$. Din formulele (50), (71) — (73) rezultă că această algebră este comutativă şi asociativă şi că avem pentru $i > 1$,

$$e_j e_i = \Gamma^k_{ji} e_k, \qquad (k > i,\ k > j) \tag{82}$$

şi

$$e_1 e_i = \rho_1 e_i + \Gamma^k_{1i} e_k, \qquad (k > i). \tag{83}$$

Aceste formule arată că $e_2, \ldots, e_n$ generează un ideal $\mathcal{J}$ al algebrei A şi că idealul $\mathcal{J}$ este nilpotent, adică pentru orice element t din $\mathcal{J}$, avem $t^n = 0$. Într-adevăr, din formula (82) rezultă că t^α este o combinaţie numai de $e_{\alpha+1}, \ldots, e_n$, deci $t^n = 0$. Dacă $\rho_1 \neq 0$, avem

$$e_1^2 = \rho_1 e_1 \neq 0,$$

deci în acest caz $\mathcal{J}$ este *radicalul* algebrei A, deci idealul său nilpotent maximal. Dacă $\rho_1 = 0$, A este o algebră nilpotentă. Avem deci următoarea formă a teoremei lui Mocanu :

TEOREMĂ. *Condiţia necesară şi suficientă ca spaţiul C^n dotat cu o conexiune afină constantă să fie euclidian (echivalent în mare cu spaţiul euclidian afin), este ca algebra asociată să fie comutativă, asociativă şi nilpotentă.*

5. Un grup abelian linear cu n parametri în spaţiul C^n poate să nu fie local tranzitiv în nici un punct al spaţiului C^n. De exemplu, grupul cu doi parametri în C^2,

$$x'^2 = x^1 + ax^2 + b$$

$$x'^2 = x^2$$

lasă invariante dreptele $x^2 =$ const. Deci condiţia pusă grupului G de a fi local tranzitiv este necesară pentru a putea scrie formulele (2) cu $|c^i_j| \neq 0$.

---

[1] [3], p. 386.

Se poate arăta că fiind dat un grup Lie local comutativ, într-un spaţiu cu n dimensiuni, printr-o transformare de coordonate putem aduce operatorii lui la forma canonică

$$X_s = \partial'_s, \; X_\alpha = q^s_\alpha(y^\beta)\, \partial'_s, \; \left(\partial'_s = \frac{\partial}{\partial y^s}\right), \; (s=1, \ldots, r; \; \alpha, \beta = r+1, \ldots, n)$$

dacă presupunem că dimensiunea varietăţilor de tranzitivitate, din vecinătatea în care s-a făcut transformarea de coordonate, este r; varietăţile de tranzitivitate fiind date de ecuaţiile $y^\alpha = 0$. Să vedem în ce caz un astfel de grup poate proveni dintr-un grup linear. Pentru aceasta, trebuie să putem rezolva ecuaţiile de forma

$$X_s = \frac{\partial}{\partial y^s} = p^j_{si}\, x^i\, \partial_j + \partial_s, \qquad \left(\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$X_\alpha = q^s_\alpha \frac{\partial}{\partial y^s} = p^j_{\alpha i}\, x^i\, \partial_j$$

cu p^j_{ki} constante. Din ultimele ecuaţii rezultă, eliminînd operatorii $\partial'_s = \dfrac{\partial}{\partial y^s}$,

$$q^s_\alpha(\partial_s + p^j_{si}\, x^i\, \partial_j) = p^j_{\alpha i}\, x^i\, \partial_j \tag{84}$$

şi egalînd coeficienţii lui ∂_j, obţinem

$$q^s_\alpha(\partial^j_s + p^j_{si}\, x^i) = p^j_{\alpha i}\, x^i. \tag{85}$$

Primele r (din aceste) ecuaţii se pot rezolva în jurul originii prin formulele de forma

$$q^t_\alpha = \theta^t_s(x)\, p^s_{\alpha i}\, x^i, \qquad (s, t = 1, \ldots, r) \tag{86}$$

θ^t_s fiind funcţii raţionale $\theta^t_s = \dfrac{\eta^t_s(x)}{\varphi(x)}$, cu numitorul

$$\varphi(x) = |\delta^t_s + p^t_{si}\, x^i|.$$

Înlocuind expresiile (86) în (85), obţinem, pentru $j = \beta > r$, relaţiile

$$\theta^s_t\, p^t_{\alpha i}\, x^i\, p^\beta_{sk}\, x^k = p^\beta_{\alpha i}\, x^i$$

sau înmulţind cu φ,

$$\eta^s_t\, p^t_{\alpha i}\, p^\beta_{sk}\, x^i\, x^k - \varphi p^\beta_{\alpha i}\, x^i = 0, \tag{87}$$

relaţie pentru care primul membru are în origine derivatele parţiale egale cu $-p^\beta_{\alpha i}$. Trebuie să avem deci

$$p^\beta_{\alpha i} = 0. \tag{88}$$

Din condiţia de permutabilitate

$$(X_\alpha, X_s) = p^t_{\alpha i}\, p^j_{si}\, x^i\, \partial_j - p^t_{\alpha s}\, \partial_t - p^k_{si}\, p^t_{\alpha k}\, x^i\, \partial_t = 0$$

deducem relaţiile

$$p^r_{\alpha s} = 0,$$

astfel încît operatorii X_α capătă în variabilele x forma

$$(89) \qquad X_\alpha = p^t_{\alpha\beta}\, x^\beta\, \partial_t, \qquad (\alpha, \beta = s + 1, \ldots, n;\ t = 1, \ldots, r)$$

şi rezultă că numărul operatorilor X_α poate fi cel mult $r(n - r)$. Acest maxim este atins pentru sistemul de operatori

$$X_s = \partial_s, \qquad (s = 1, \ldots, r)$$
$$X_{\alpha s} = x^\alpha\, \partial_s, \qquad (\alpha = r + 1, \ldots, n).$$

Acest sistem generează grupul linear comutativ cu $r + r(n - r)$ parametrii, c^s_α, c^s, format din transformările

$$x'^s = x^s + c^s_\alpha\, x^\alpha + c^s$$
$$x'^\alpha = x^\alpha.$$

Numărul $r + r(n - r)$ este maxim pentru $r = \dfrac{n + 1}{2}$ şi rezultă teorema:

Un grup linear comutativ în spaţiul C^n poate avea cel mult $\dfrac{(n^2 - 1)}{4}$ parametri.

6. Să observăm acuma că grupurile lineare comutative în C^n se pot extinde la spaţiul proiectiv complex P^n.

Reciproc, orice grup linear comutativ al spaţiului P^n se obţine extinzînd la P^n un grup linear (comutativ) definit într-un spaţiu afin complex C^n_0, obţinut scoţînd din P^n un anumit hiperplan.

Într-adevăr, fie

$$X_\alpha = p^k_{\alpha j}\, x^j\, \partial_k, \qquad (\alpha = 1, \ldots N),$$

operatorii grupului comutativ G, definiţi într-un sistem de coordonate omogene $x^0, \ldots, x^n$ în P^n.

Prin inducţie în raport cu N se poate arăta, aplicînd un procedeu binecunoscut în teoria grupurilor lineare, că operatorii X_α au un hiperplan invariant comun. Într-adevăr, pentru $n = 1$, operatorul X_1 admite cel puţin un hiperplan invariant, corespunzînd unei valori proprii ρ_1 a matricii (p^k_{1j}).

Să presupunem că operatorii $X_1, \ldots, X_{N-1}$ admit hiperplanul invariant

$$\xi_0\, x^0 + \xi_1\, x^1 + \ldots + \xi_n\, x^n = 0$$

şi că acest hiperplan corespunde pentru X_α valorii proprii ρ_α a matricii $(p^k_{\alpha j})$; avem atunci relaţiile

$$p^k_{\alpha j}\, \xi_k = \rho_\alpha\, \xi_j, \qquad (\alpha = 1, \ldots, N - 1),$$

care se pot scrie simbolic sub forma

$$X_\alpha(\xi) = \rho_\alpha \xi . \tag{90}$$

Aplicînd operatorul X_N, avem

$$X_\alpha(X_N(\xi)) = X_N(X_\alpha(\xi)) = X_N(\rho_\alpha \xi) = \rho_\alpha X_N(\xi),$$

ceea ce arată că hiperplanul $X_N(\xi)$ avînd coeficienţii

$$\xi'_i = p^j_{Ni} \xi_j$$

este, pentru fiecare $\alpha < N$, o soluţie a ecuaţiei (90). Soluţiile comune ale ecuaţiilor (90) pentru $\alpha = 1, \ldots, N-1$ formează deci un spaţiu linear invariant faţă de X_N, în care operatorul X_N, dacă nu este nul, va admite un hiperplan invariant ξ şi acest hiperplan va fi invariant şi pentru $X_1, \ldots, X_{N-1}$.

Transformările X_α se vor scrie ca transformări lineare, în orice sistem de coordonate lineare neomogene, relative la alegerea lui ξ ca hiperplan de la infinit.

Rezultă că *determinarea grupurilor lineare abeliene în C^n este echivalentă cu determinarea grupurilor lineare abeliene în spaţiul proiectiv P^n.*

Ca aplicaţie a acestui rezultat, să căutăm să determinăm conexiunile afine proiectiv euclidiene Γ'^i_{jk} în C^n, avînd conexiunea proiectivă asociată, a lui Thomas [3]

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma'^i_{jk} - \frac{\delta^i_j}{n+1}\Gamma'_k - \frac{\delta^i_k}{n+1}\Gamma'_j, \; \Gamma'_j = \Gamma'^i_{ji}$$

constantă. Pentru aceasta, să observăm că pentru o conexiune Γ'^i_{jk} de acest tip, curbele autoparalele admit grupul G' al translaţiilor din C^n ca grup de automorfisme. Într-un sistem de coordonate carteziene pentru conexiunea Γ'^i_{jk}, ales într-o vecinătate V a lui C^n, grupul G' devine un grup local G, proiectiv, abelian şi tranzitiv în V. În aceste coordonate, conexiunea spaţiului C^n are forma

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j .$$

Presupunînd determinat grupul G, obţinem conexiunea Γ' aplicînd conexiunii Γ transformarea care transformă grupul G într-un grup de translaţii.

În rezumat, avem următoarea

TEOREMĂ. *Următoarele probleme sînt echivalente* :

1°. *Determinarea algebrelor lineare complexe comutative şi asociative cu n dimensiuni.*

2°. *Determinarea grupurilor lineare, abeliene, local tranzitive în spaţiul afin complex C^n.*

3°. *Determinarea grupurilor lineare, abeliene, local tranzitive în spaţiul proiectiv complex P^n.*

4°. *Determinarea spaţiilor cu conexiune afină constantă, local euclidiene.*

5°. *Determinarea spaţiilor cu conexiune afină, proiectiv euclidiene, cu conexiunea lui Thomas asociată constantă.*

Să observăm că unei algebre comutative asociative nilpotente îi corespunde un spaţiu cu conexiune afină constantă echivalent în mare cu spaţiul euclidian şi deci un grup linear global tranzitiv în spaţiul C^n.

7. În ultimul caz, deci al algebrelor nilpotente sau al grupurilor lineare abeliene şi tranzitive G din C^n, se poate observa că G conţine subgrupuri Γ discrete în C^n, cu $2n$ generatori liberi, de exemplu subgrupul ce se transformă în grupul translaţiilor unitare, reale şi pur imaginare, cînd transformăm grupul G într-un grup de translaţii G'. Spaţiul cît C^n/Γ constituie un tor complex T^n, pe care se poate introduce o conexiune afină, completă şi local euclidiană, proiectînd conexiunea euclidiană a spaţiului C^n.

Avem deci:

TEOREMĂ. *Fiecărei algebre lineare complexe A comutativă, asociativă şi nilpotentă, avînd înmulţirea definită de formulele*

$$e_i\, e_j = -\Gamma^k_{ij}\, e_k$$

i se poate asocia o clasă de grupuri lineare discrete în spaţiul C^n, conţinute în grupul Lie generat de operatorii

$$X_i = \partial_i + \Gamma^k_{ij}\, x^j\, \partial_k$$

şi deci algebrei A i se mai asociază o familie de toruri complexe cu conexiunea afină local euclidiene.

Aceste toruri T^n depind de alegerea grupului Γ' de translaţii din grupul G'. Notînd cu C'^n spaţiul afin complex în care acţionează grupul G', torurile T^n se pot defini şi ca spaţii cît ale lui C'^n, dotat cu conexiunea constantă Γ^i_{jk} şi în acest caz T^n primeşte prin proiecţie sisteme de coordonate ce se leagă prin translaţiile din Γ' ; sistemele de coordonate introduse de C^n în T^n sînt dimpotrivă legate din transformările lineare ale grupului Γ.

Primită la redacţie la 18 ianuarie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică a
Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. I. DRĂGHICI, *Spaţii V_4 cu conexiune constantă local euclidiene.* Analele Universităţii Bucureşti, (sub tipar).
2. P. MOCANU, *Espaces à connexion affine constante équivalents en grand avec l'espace euclidien.* Comunicările Academiei, 2, 389—395 (1952).
3. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle,* vol. II, Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957.

INTERPRETOR PENTRU MAŞINA DACICC-1 [1]

DE

T. RUS
Cluj

În lucrare se descrie interpretorul realizat în limbajul maşinii DACICC — 1, pentru operatorii aritmetici, pornindu-se de la limbajul arborilor. Se prezintă de asemenea schema logică a algoritmului acestui interpretor.

§ 1. PROBLEMA AUTOMATIZĂRII PROGRAMĂRII

Problema programării pentru maşinile cifrice de calcul (m.c.c.) în forma ei simplă poate fi formulată ca şi problema descrierii unui proces dat în termenii operaţiilor elementare ale maşinii, sau, cu alte cuvinte, în limba maşinii. Urmează deci că procesul de rezolvare a unei probleme cu ajutorul unei m.c.c. este în prealabil descris în alţi termeni.

În cazul în care această descriere iniţială a procesului de calcul nu este o descriere într-o limbă formală a algoritmului de rezolvare a problemei respective, prin programare apare în primul rînd problema descrierii într-o limbă formală a acestui proces. În cazul în care procesul de calcul este descris într-o limbă formală, problema programării devine problema traducerii scrierii algoritmului din limba formală în limba maşinii.

În etapa actuală a cercetărilor în domeniul programării pentru maşinile cifrice de calcul, un rol deosebit revine problemei traducerii automate (cu ajutorul maşinii) a algoritmului de rezolvare a unei probleme, scris într-o limbă formală, în limba maşinii, sau în program. Cu alte cuvinte, este din ce în ce mai actuală rezolvarea problemei automatizării programării.

După cum se arată în lucrarea [1], problema automatizării programării se poate formula sub forma următoarelor două probleme :

A) Problema construirii unei limbi formale comode pentru descrierea algoritmilor.

---

[1] Lucrarea prezentată la „Colocviul de teoria funcţiilor convexe cu aplicaţii la calculul numeric", ţinut la Cluj în 1—5 iulie 1965.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 799—815 BUCUREŞTI, 1966

B) Problema construirii unui algoritm universal, care realizează traducerea oricărui algoritm scris în limba formală construită prin rezolvarea problemei A), în limba unei mașini cifrice de calcul.

Oricare ar fi rezolvarea pe care am adopta-o pentru problema A), adică pentru orice limbă formală aleasă pentru descrierea algoritmilor, se pot indica două moduri de a soluționa problema B). Unul dintre acestea constă din așa-numita metodă a interpretării, iar celălalt din așa-numita metodă a compilării.

În metoda interpretării, algoritmul descris în limba formală introdus în mașină servește ca informație pentru îndeplinirea acestuia. În acest scop lucrează un anumit program special, numit interpretor, care analizează fiecare unitate elementară de informație a algoritmului, asigurînd îndeplinirea operației descrisă de aceasta, precum și trecerea la o nouă unitate elementară de informație.

În metoda compilării, algoritmul descris în limba formală, introdus în mașină, servește ca informație pentru stabilirea programului algoritmului respectiv în limba mașinii. Acest program executat la mașină asigură îndeplinirea algoritmului respectiv. În scopul realizării traducerii lucrează un anumit program, numit translator, care realizează traducerea algoritmului din limba formală inițială în limba mașinii.

Pentru eliminarea unor insuficiențe ale ambelor metode, insuficiențe bine precizate în [1], se preconizează utilizarea unei metode combinate, care constă în traducerea descrierii inițiale a algoritmului din limba formală într-o oarecare limbă intermediară, adaptată specificului limbii unei mașini date. Traducerea obținută se consideră drept informație pentru un interpretor.

În cele ce urmează vom avea în vedere descrierea algoritmului unui interpretor în ipoteza că algoritmul de rezolvare a problemei este deja descris în limbajul arborilor, după cum vom vedea mai jos.

§ 2. LIMBAJUL ARBORILOR

Să considerăm o mulțime M de obiecte matematice, determinată prin apartenența elementelor ei la diferite tipuri de elemente matematice cum sînt constantele, variabilele, relațiile, operațiile etc.

Mulțimea simbolurilor care notează elementele lui M o notăm cu A. În continuare prin N notăm mulțimea numerelor întregi și pozitive.

Considerăm funcția δ definită pe A și cu valori în N, $\delta : A \to N$, pentru care presupunem că mulțimea valorilor ei este finită, și anume o considerăm ca fiind numerele $0, 1, \ldots, p$.

Spunem că elementele n_1 și n_2, $n_1, n_2 \in A$ sînt echivalente dacă $\delta(n_1) = \delta(n_2)$.

În felul acesta mulțimea A este împărțită de către funcția δ în clasele de echivalență $A_1, A_2, \ldots, A_p$. În clasa de echivalență A_i intră elementele $n \in A$ pentru care $\delta(n) = i$. Elementele lui A_i se vor numi în continuare operații i-nare ale mulțimii M. Mulțimea A_i se consideră descompusă în trei submulţimi disjuncte A_i^1, A_i^2, A_i^3, care corespund tipurilor de operaţii : legături, functori şi relaţii.

Pentru cazul $i = 0$, elementele lui A_0 se numesc operaţii cu 0-argumente şi sînt de fapt constantele, variabilele, şi alte obiecte matematice ce diferă de tipul operaţie şi care intră în mulţimea M.

Elementele de bază ale limbajului arborilor sînt aşa-numiţii arbori marcaţi. Aceştia se definesc în felul următor :

Definiţia 1. Se numeşte arbore marcat un graf conex şi orientat care nu conţine cicluri şi care satisface condiţiile :

1. Există un singur nod în care nu intră nici o săgeată. Acesta se va numi rădăcina arborelui.

2. Oricare nod al arborelui este marcat de un element al mulţimii A după următoarea regulă : dacă din nodul respectiv pleacă i săgeţi, atunci el este marcat de un element al clasei A_i, $i = 0, 1, \ldots, p$. Nodurile marcate de elementele clasei A_0 se vor numi vîrfuri.

3. În fiecare nod al arborelui intră cel mult o săgeată.

Vom nota în continuare arborii cu litera a (cu indici dacă este cazul), iar nodurile cu (n), unde n este simbolul care marchează nodul respectiv.

În mulţimea arborilor astfel definiţi vom introduce acum o operaţie pe care o numim operaţie de compunere. Ea se defineşte în felul următor : fie arborii $a_1, a_2, \ldots, a_p$ daţi şi fie elementul $n \in A_p$. Prin compunerea arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$ cu ajutorul elementului $n \in A_p$ înţelegem arborele a, a cărei rădăcină este marcată de elementul n şi din care pleacă p săgeţi, care intră respectiv în rădăcinile arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Notăm acest arbore prin $a = ((n), a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Definiţia 2. Spunem că două noduri oarecare (n_p) şi (n_q) ale unui arbore a sînt legate printr-un drum dacă există în arborele a o mulţime de noduri $\{(n_0), (n_1), \ldots, (n_l)\}$ care satisface condiţiile :

1. $(n_p) = (n_0)$, $(n_q) = (n_l)$.

2. $(n_i) \rightarrow (n_{i+1})$ sau $(n_{i+1}) \rightarrow (n_i)$, $i = 0, 1, \ldots, l-1$.

Numărul l va fi numit lungimea drumului dintre nodurile (n_p) şi (n_q) şi va fi notat cu $l = l[(n_p), (n_q)]$.

Definiţia 3. Se numeşte subarbore al unui arbore a o mulţime de noduri $\{(n_1), (n_2), \ldots, (n_p)\}$ ale arborelui a în care există un singur nod (n') cu proprietatea că este legat de toate celelalte noduri ale mulţimii prin drumuri de lungime $l \geqslant 1$. Nodul (n') se va numi rădăcina subarborelui respectiv.

Subarborii unui arbore a de rădăcină (n) pentru care avem $l[(n), (n')] = 1$ se vor numi subarbori principali ai lui a.

Definiţia 4. Spunem că nodurile $(n_1), (n_2), \ldots, (n_p)$ ale unui arbore a formează nivelul k al acestuia, dacă, (n) fiind rădăcina arborelui a, avem $l[(n), (n_i)] = k$, $i = 1, 2, \ldots, p$, şi pentru orice nod (n') al arborelui a care nu aparţine mulţimii $\{(n_1), (n_2), \ldots, (n_p)\}$ avem $l[(n), (n')] \neq k$.

În afara noţiunilor deja definite, se mai pot defini şi alte noţiuni legate de arbori şi care fac din aceştia elemente cu care se poate opera uşor. Dintre acestea mai amintim doar noţiunea de egalitate a doi arbori.

Definiția 5. Spunem că doi arbori a_1 și a_2 sînt egali dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

1. Numărul nivelelor arborelui a_1 este egal cu numărul nivelelor arborelui a_2.

2. Numărul nodurilor de pe nivelul k al arborelui a_1 este egal cu numărul nodurilor de pe nivelul k al arborelui a_2, oricare ar fi $0 \leqslant k \leqslant K$, K fiind numărul nivelelor celor doi arbori.

3. Dacă $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sînt simbolurile care marchează nodurile $(\ )_1, (\ )_2, \ldots, (\ )_p$, de pe nivelul k al arborelui a_1 și dacă $n'_1, n'_2, \ldots, n'_p$ sînt simbolurile care marchează nodurile $(\ )'_1, (\ )'_2, \ldots, (\ )'_p$ de pe nivelul k al arborelui a_2, ordinea în care sînt luate nodurile pe nivelul k în cei doi arbori fiind aceeași, atunci $n_i = n'_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$, egalitatea fiind aici înțeleasă în sens grafic [2].

Dacă condiția 3 de mai sus se înlocuiește cu condiția ca n_i și n'_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, să aparțină aceleiași clase de echivalență a lui A, atunci obținem o altă noțiune de egalitate pe care o numim egalitate slabă.

Definiția 6. Spunem că arborii a_1 și a_2 sînt egali (slab egali) pînă la nivelul k dacă subarborii lor, care au și ca rădăcini, rădăcinile arborilor a_1 și a_2 respective, și posedă un număr de k nivele, sînt egali (slab egali).

Pentru ca arborele să devină un obiect cu care să se poată opera ușor cu mașina, se reprezintă cu ajutorul unei matrici, care nu este altceva decît un masiv bidimensional de informație.

Fie pentru aceasta arborele a dat. Reprezentăm acest arbore cu ajutorul unei matrici $H = (\alpha_{ij})$, astfel ca fiecărui nod al arborelui a să-i corespundă o linie a matricei H, și anume în felul următor : dacă $(n) \in a$, atunci acestuia îi corespunde linia $\alpha_{i1}\ \alpha_{i2} \ldots \alpha_{i\,k+2}$ a matricei H, în care $\alpha_{i1} = \delta(n)$, $\alpha_{i2} = n$, $\alpha_{i3}, \ldots, \alpha_{i\,k+2}$ fiind un șir de indici care iau valorile $0, 1, \ldots, p$ și care determină poziția nodului (n) în arborele a. Pentru aceasta $\alpha_{i3}, \alpha_{i4}, \ldots, \alpha_{ik+2}$ se citește în felul următor :

Dacă $\alpha_{i3} = \alpha_{i4} = \ldots = \alpha_{ip} = 0$, atunci nodul respectiv se găsește pe nivelul $p + 1$ al arborelui a, iar dacă (n_0) este rădăcina arborelui a, atunci $\alpha_{i3}, \alpha_{i4}, \ldots, \alpha_{ik+2}$ indică drumul care leagă pe (n_0) de (n), drum pe care îl putem reprezenta sub forma $(n_0) \to (n_1) \to \ldots \to (n)$, unde (n_i) este nodul de pe nivelul i al arborelui a și anume al $\alpha_{i\,p+i+1}$-lea nod de pe nivelul 1 al subarborelui arborelui a care are ca rădăcină nodul (n_{i-1}) al arborelui a, fiind situat pe nivelul $i - 1$ al acestuia.

Construirea matricei H se face cu ajutorul unei metode recursive [6] care pornește de la linia atașată rădăcinii arborelui a și care este de forma $\delta(n_0)\ n_0\ 00\ldots01$.

Operația de compunere a arborilor se transpune asupra matricilor în felul următor : fie arborii $a_1, a_2, \ldots, a_p$ și fie $n \in A$. Considerăm arborele $a = ((n), a_1, a_2, \ldots, a_p)$ compus din $a_1, a_2, \ldots, a_p$ cu ajutorul lui n. Dacă $H_1, H_2, \ldots, H_p$, sînt matricile care reprezintă arborii $a_1, a_2, \ldots, a_p$, atunci în lucrarea [6] se construiesc algoritmii C_1 și C_2 cu proprietățile că

$$C_1(n;\ H_1,\ H_2, \ldots, H_p) = H$$

$$C_2(H) = n;\ H_1,\ H_2, \ldots, H_p.$$

Limbajul arborilor va consta deci din mulţimea $\mathfrak{A}$ a arborilor marcaţi de elementele mulţimii A în care este definită o operaţie de compunere. Elementele de bază ale acestui limbaj vor fi formate din arborii formaţi dintr-un singur nod, marcat de elemente ale clasei A_0. După cum se arată în lucrarea [4], pentru orice cuvînt bine construit în limba formală construită în [3] se poate construi un algoritm care transformă acest cuvînt într-un arbore. În lucrarea [5] se definesc patru operaţii asupra arborilor şi se descriu doi algoritmi în această limbă cu ajutorul operaţiilor definite, algoritmi care rezolvă unele probleme nearitmetice care pot fi formulate (formalizate) în limbajul arborilor. Ca şi un caz particular pentru aceşti algoritmi este indicat şi algoritmul unui interpretor. Lucrarea de faţă va cuprinde descrierea amănunţită a acestui interpretor, care a fost realizat (tradus) în limba maşinii DACICC—1.

§ 3. ALGORITMUL UNUI INTERPRETOR AL FORMULELOR ARITMETICE

Să considerăm formula $y = f(x)$ şi să presupunem că funcţia $f(x)$ poate fi reprezentată cu ajutorul unui arbore. După cum am mai spus, în lucrarea [6] se indică o metodă de codificare a unui arbore cu ajutorul unei matrici. Pentru clarificarea expunerii să considerăm exemplul următor :

$$y = \frac{(x+1)\,(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Arborele care reprezintă această funcţie este reprezentat în figura 1. Matricea care codifică arborele din figura 1 este următoarea :

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
2 & \times & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & \sqrt{} & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
2 & - & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & + & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
2 & + & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
0 & x & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
2 & \pi & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
0 & x & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2
\end{array}$$

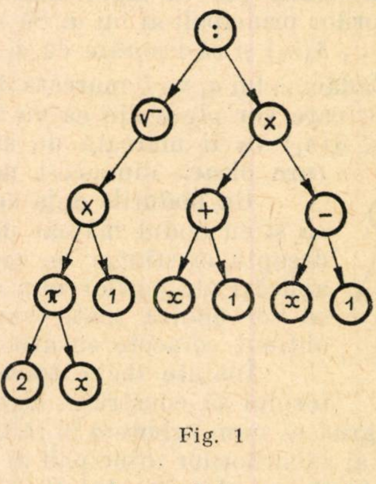


Fig. 1

În lucrarea [6], prima coloană a acestei matrici s-a numit vector grad, a doua coloană s-a numit vector nod, iar celelalte coloane formează aşa-numita matrice de indici.

Pentru scopul pe care îl urmărim în continuare, este suficient să considerăm numai vectorul nod și vectorul grad al matricei care codifică un arbore oarecare a. Să notăm atunci vectorul nod prin $N = (n_1, n_2, \ldots, n_l)$ iar vectorul grad prin $G = (g_1, g_2, \ldots, g_l)$.

Se vede imediat că, dat fiind arborele a, vectorii N și G se obțin în felul următor : n_1 este simbolul care marchează rădăcina arborelui a, iar $g_1 = \delta(n_1)$; n_2 este simbolul care marchează primul nod de pe nivelul unu al arborelui a, numărat de la dreapta spre stînga, iar $g_2 = \delta(n_2)$; n_3 este următorul nod de pe nivelul unu numărat în același fel, $g_3 = \delta(n_3)$, ș.a.m.d. pînă se epuizează toate nodurile de pe nivelul unu. Procesul continuă pe urmă prin considerarea următorului nivel al arborelui a, ș.a.m.d. pînă ce se epuizează toate nivelele arborelui a.

Facem acum observația că valoarea funcției δ este determinată și de arborele în care apare nodul (n) care intră prin n în domeniul funcției δ. De exemplu, pentru simbolul + admitem că avem $2 \leqslant \delta(+) < \infty$. În general, admitem că avem $r \leqslant \delta(n) < \infty$.

TEOREMĂ. *Oricare ar fi arborele a, el este complet caracterizat de vectorii N și G.*

Demonstrația acestei teoreme revine la a arăta că dat fiind arborele a, vectorii N și G sînt unic determinați, și invers, dat fiind vectorii N și G, arborele a este unic determinat. Prima parte a acestei afirmații urmează imediat din construcția celor doi vectori. Pentru demonstrarea celei de-a doua părți vom descrie algoritmul de construire a arborelui a din vectorii N și G.

Primul pas al acestui algoritm constă în construirea rădăcinii arborelui a, care va fi marcată de simbolul n_1, și din care vor pleca $\delta(n_1)$ săgeți (fig. 2).

Al doilea pas al algoritmului constă din construirea rădăcinilor subarborilor principali ai lui a. Să numerotăm acești subarbori cu indicii $1, 2, \ldots, \delta(n_1)$ și să-i notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_{\delta(n_1)}$.

Rădăcina lui a_1 va fi marcată de simbolul n_{1+1} deci de n_2 iar numărul săgeților care vor pleca din ea va fi $\delta(n_2)$. În general, rădăcina lui a_i, $1 \leqslant i \leqslant \delta(n_1)$ va fi marcată de simbolul n_{i+1}, iar numărul săgeților care pleacă din acest nod va fi $\delta(n_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, \delta(n_1)$.

Cu nodurile deja construite se procedează în mod analog ca și cu nodul marcat de n_1, considerîndu-le în ordine de la dreapta la stînga. Se vede ușor că după un număr finit de aplicări ale pașilor unu și doi ai algoritmului descris mai sus, se vor epuiza toate componentele vectorului N și arborele obținut coincide cu arborele a inițial.

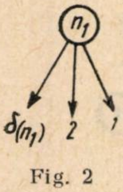


Fig. 2

Înainte de a trece la descrierea algoritmului interpretorului să construim algoritmul de descompunere al vectorilor nod și grad ai unui arbore a în rădăcina acestui arbore și în vectorii nod și grad ai subarborilor principali ai lui a. Acest algoritm este de altfel un caz particular al algoritmului C_2 despre care vorbeam mai sus.

Fie deci arborele a și fie $N = (n_1, n_2, \ldots, n_l)$ și $G = (g_1, g_2, \ldots, g_l)$ vectorii nod și grad ai acestuia.

Primul pas al algoritmului constă în marcarea elementelor n_1 şi g_1 care sînt respectiv simbolul ce marchează rădăcina arborelui a şi numărul săgeţilor care pleacă din această rădăcină.

La pasul al doilea al algoritmului se construieşte vectorul nod şi vectorul grad al subarborelui principal al lui a care are ca rădăcină cel mai de la dreapta nod de pe nivelul 1 al arborelui a. Să notăm cu N_1 şi G_1 aceşti vectori. Pentru construirea lor să mai considerăm numerele variabile h şi h' care pentru început presupunem că sînt $h = 1$ şi $h' = 1$.

Elementele lui N_1 şi G_1 se vor nota în ordine cu n_i^1 şi g_i^1 şi se obţin astfel:

$$n_1^1 = n_{h+1}; \quad g_1^1 = g_{h+1}.$$

Se calculează apoi valorile lui h şi h' după formulele:

$$g = \sum_{i=1}^{h'} g_{h+i},$$

$$h' = g,$$

$$h = 1 + \sum_{i=1}^{h'} g_i.$$

Elementele următoare ale vectorilor N_1 şi G_1 vor fi atunci

$$n_2^1 = n_{h+1},\ n_3^1 = n_{h+2}, \ldots, n_s^1 = n_{h+h'}$$

$$g_2^1 = g_{h+1},\ g_3^1 = g_{h+2}, \ldots, g_s^1 = g_{h+h'}.$$

Acest proces continuă atîta timp cît numărul $g = \sum_{i=1}^{h'} g_{h+i}$ este diferit de zero.

Dacă $g = 0$, procesul se opreşte, iar componentele $n_1^1, n_2^1, \ldots, n_s^1$ şi $g_1^1, g_2^1, \ldots, g_s^1$ obţinute reprezintă vectorii nod şi grad N_1 şi G_1 căutaţi. Această afirmaţie rezultă din următoarele două observaţii:

Observaţia 1. Deoarece h iniţial este 1 şi din numerotarea nodurilor arborelui a înseamnă că n_{h+1} este simbolul care marchează rădăcina primului subarbore principal al lui a. Analog pentru g_{h+1}.

Observaţia 2. Numărul $h = 1 + \sum_{i=1}^{h'} g_i$ reprezintă numărul nodurilor lăsate la o parte, pe nivelele superioare nivelului pe care se găseşte nodul marcat de n_{h+1}, iar numărul $g = \sum_{i=1}^{h'} g_{h+i}$ reprezintă numărul săgeţilor care pleacă din nodurile pe care deja le-am parcurs în procesul construirii subarborelui respectiv.

Procesul descris mai sus se repetă pentru valorile iniţiale ale lui h şi $h' = 1, 2, \ldots, g_1$, obţinînd respectiv vectorii N_1, G_1; N_2, G_2; $\ldots$; N_{g1}, G_{g1}, care reprezintă de fapt subarborii principali $a_1, a_2, \ldots, a_{g1}$ ai arborelui a.

Cu ajutorul algoritmului descris mai sus, vom trece acum la descrierea algoritmului interpretorului. Fie pentru aceasta N_1 şi G_1 vectorii nod şi grad ai arborelui care reprezintă formula pe care dorim s-o calculăm. Să notăm cu n numărul nivelelor acestui arbore şi cu l numărul nodurilor sale.

Algoritmul interpretorului va fi compus din trei paşi. La primul pas se descompun vectorii N_1 şi G_1 care reprezintă arborele a în vectorii $N_1^1, G_1^1; N_1^2, G_1^2; \dots; N_1^{g_1}, G_1^{g_1}$, care reprezintă subarborii principali ai arborelui a, şi în elementele n_1 şi g_1 care reprezintă simbolul care marchează rădăcina lui a şi numărul săgeţilor care pleacă din această rădăcină. n_1 şi g_1 vor servi în continuare ca prime elemente ale unor vectori $'N_1$ şi $'G_1$, ce vor reprezenta vectorul nod şi vectorul grad al arborelui a' obţinut din a în urma unei analize făcută de algoritmul de mai sus asupra vectorilor N_1 şi G_1.

La al doilea pas al algoritmului se verifică dacă vectorii N_1^i, G_1^i obţinuţi la primul pas reprezintă un arbore cu două nivele. Dacă, de exemplu, N_1^i, G_1^i reprezintă un astfel de arbore, atunci avem :

$$N_1^i = (n_1^i, n_2^i, \dots, n_{l_i}^i)$$

$$G_1^i = (g_1^i, g_2^i, \dots, g_{l_i}^i)$$

$$g_1^i = l_i - 1.$$

În acest caz operaţia n_1^i se execută asupra mărimilor $n_2^i, n_3^i, \dots, n_{l_i}^i$ şi se trece rezultatul sub forma vectorului nod şi a vectorului grad al unui arbore cu un singur nivel, în dreapta simbolului n_1 şi respectiv g_1 pe care le-am păstrat la început.

Dacă nici unul dintre vectorii N_1^i, G_1^i nu îndeplineşte condiţia $g_1^i = l_i - 1$, se trece la primul pas al algoritmului pentru vectorii N_1^i, G_1^i, $i = 1, 2, \dots, g_i$, ale căror elemente n_1^i, g_1^i se aşează în dreapta şirului construit, ale cărui prime elemente erau n_1 şi g_1.

Acest proces continuă de n ori după care se face $n := n - 1$.

Pasul al treilea al algoritmului este acela corespunzător operaţiei de calcul pe care credem că nu este necesar să-l descriem. Subliniem doar că dacă acest pas se înlocuieşte cu unul corespunzător algoritmului de construire a comenzilor operaţiilor, interpretorul devine translator.

După ce s-a făcut $n := n - 1$, se trece la primul pas al algoritmului pentru vectorii $'N_1$, $'G_1$, cu care se procedează analog ca şi cu N_1, G_1.

Procesul se opreşte atunci cînd avem $n = 1$. Rezultatul apare sub forma vectorului nod şi a vectorului grad al unui arbore format dintr-un singur nod.

Pentru ilustrarea algoritmului descris mai sus să considerăm următorul exemplu : să se calculeze cu ajutorul interpretorului valoarea expresiei

$$E = \frac{(a + b)(a - b)}{2ab} + \frac{b^2 - a^2}{2ab} + \frac{a - b}{ab}.$$

Arborele care reprezintă această expresie este prezentat în figura 3. Vectorii nod şi grad corespunzători arborelui din figura 3 sînt

$$N_1 = (+, :, :, :, -, \times, -, \times, \times, \times, a, b, a, b, \pi, \pi, a, b, 2, -, +, a, b, 2, a, 2, b, 2, a, b, a, b)$$

$$G_1 = (3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

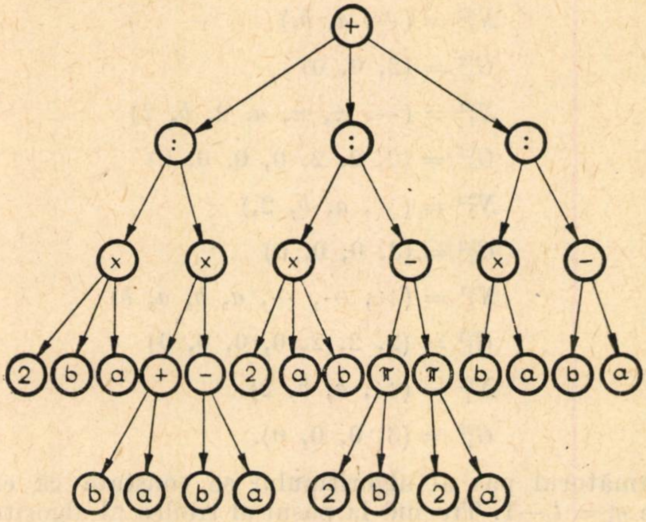


Fig. 3

Am notat cu π operaţia de ridicare la putere.

La primul pas, algoritmul interpretorului aplicat lui N_1 şi G_1 va construi următorii vectori :

$$'N_1 = (+,$$

$$'G_1 = (3,$$

şi

$$N_1^1 = (:, -, \times, a, b, a, b,)$$

$$G_1^1 = (2, 2, 2, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_1^2 = (:, -, \times, \pi, \pi, a, b, 2, a, 2, b, 2)$$

$$G_1^2 = (2, 2, 3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_1^2 = (:, \times, \times, -, +, a, b, 2, a, b, a, b)$$

$$G_1^2 = (2, 2, 3, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Deoarece pentru nici unul dintre aceşti vectori condiţia $g_1^i = l_i - 1$ nu este îndeplinită, cu vectorii N_1^i, G_1^i, pentru $i = 1, 2, 3$, se procedează ca şi cu vectorii N_1 şi G_1. În felul acesta avem :

$$\begin{aligned}
'N_1 &= (+,\ :,\ :,\ :,\\
'G_1 &= (3,\ 2,\ 2,\ 2,\\
N_1^{11} &= (-,\ a,\ b)\\
G_1^{11} &= (2,\ 0,\ 0,)\\
N_1^{12} &= (+,\ a,\ b,)\\
G_1^{12} &= (2,\ 0,\ 0)\\
N_1^{21} &= (-,\ \pi,\ \pi,\ a,\ 2,\ b,\ 2)\\
G_1^{21} &= (2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\\
N_1^{22} &= (\times,\ a,\ b,\ 2,)\\
G_1^{22} &= (3,\ 0,\ 0,\ 0)\\
N_1^{31} &= (\times,\ -,\ +,\ a,\ b,\ a,\ b)\\
G_1^{31} &= (2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\\
N_1^{32} &= (\times,\ a,\ b,\ 2)\\
G_1^{32} &= (3,\ 0,\ 0,\ 0).
\end{aligned}$$

La următorul pas al algoritmului se constată că există vectori pentru care $g_1^i = l_i - 1$. Trecînd la pasul al treilea al algoritmului pentru aceşti vectori, adică la pasul de calcul, avem

$$\begin{aligned}
'N_1 &= (+,\ :,\ :,\ :,\ r_1,\ r_2,\ -,\ r_3,\ x,\ r_4,\\
'G_1 &= (3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,
\end{aligned}$$

unde $r_1 = a - b$, $r_2 = a + b$, $r_3 = 2ab$, $r_4 = 2\,ab$. Vectorii N_1^{21}, G_1^{21}, N_1^{31}, G_1^{31} se descompun apoi cu ajutorul primului pas al algoritmului în :

$$\begin{aligned}
N_1^{211} &= (\pi,\ a,\ 2)\\
G_1^{211} &= (2,\ 0,\ 0)\\
N_1^{212} &= (\pi,\ b,\ 2)\\
G_1^{212} &= (2,\ 0,\ 0)\\
N_1^{311} &= (-,\ a,\ b),\\
G_1^{311} &= (2,\ 0,\ 0)\\
N_1^{312} &= (+,\ a,\ b)\\
G_1^{312} &= (2,\ 0,\ 0).
\end{aligned}$$

La următorul pas al aplicării algoritmului, deoarece toţi vectorii obişnuiţi la pasul precedent satisfac condiţia $g_1^i = l_i - 1$, se vor executa numai operaţii de calcul. În urma acestora vom avea

$$'N_1 = (+,\ :,\ :,\ :,\ r_1,\ r_2,\ -,\ r_3,\ \times,\ r_4,\ r_5,\ r_6,\ r_7,\ r_8)$$

$$'G_1 = (3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Arborele reprezentat de vectorii $'N_1$ şi $'G_1$ este prezentat în figura 4.

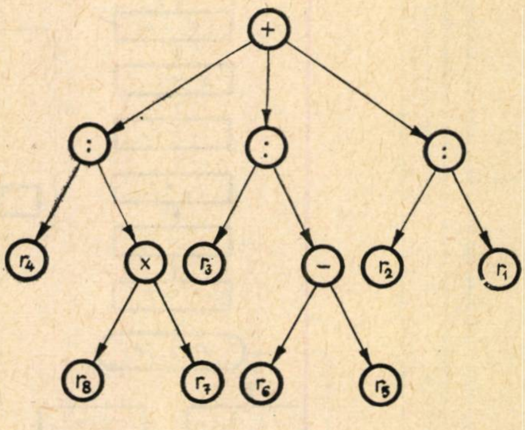


Fig. 4

Procedînd cu $'N_1$ şi $'G_1$ în mod absolut analog ca şi cu N_1 şi G_1, după aplicarea algoritmului de mai sus de încă trei ori se obţine soluţia problemei.

Pentru descrierea schemei logice a programului algoritmului descris mai sus, ne vom folosi de noţiunea de algoritm adresă [7] precum şi de următoarea distribuţie a memoriei:

Notăm cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ şi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ adresele memoriei operative în care se păstrează vectorii N_1 şi G_1. Cu $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{l_i}^1$ şi $\beta_1^1, \beta_2^1, \ldots, \beta_l^1$ notăm adresele în care se vor păstra vectorii N_1^i, G_1^i precum şi descompunerile lor, iar cu $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \ldots, \alpha_l^2$ şi $\beta_1^2, \beta_2^2, \ldots, \beta_l^2$ notăm adresele în care se vor păstra vectorii $'N_1$ şi $'G_1$. În afară de acestea, mai avem adresele $\omega, \omega_1, \omega_2, \rho, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ al căror conţinut este următorul:

$$'\omega = n;\ '\omega_2 = n;\ '\rho = l;\ '\varepsilon_0 = 0;\ '\varepsilon_1 = 1,$$

unde, după cum am mai spus, n reprezintă numărul nivelelor arborelui a iar l reprezintă numărul nodurilor arborelui a.

Schema logică a algoritmului adresă a interpretorului se compune din trei blocuri. Blocul $\mathcal{J}$, reprezentat în figura 5, are rolul de a verifica dacă este necesară descompunerea vectorilor N_1 şi G_1. El serveşte oarecum drept bloc de conducere a lucrului realizat de celelalte blocuri.

Blocul $\mathcal{D}$ care are schema prezentată în figura 6, are rolul de a executa descompunerea vectorilor N_1 şi G_1.

Blocul $\mathcal{C}$ care are schema prezentată în figura 7, are rolul de a executa calculele respective.

În afara acestor blocuri, deoarece se presupune că şirurile $\{\alpha_i^1, \beta_i^1\}$ şi $\{\alpha_i^2, \beta_i^2\}$ pentru $i = l, 2, \ldots, 1$ se pot păstra în memoria externă a

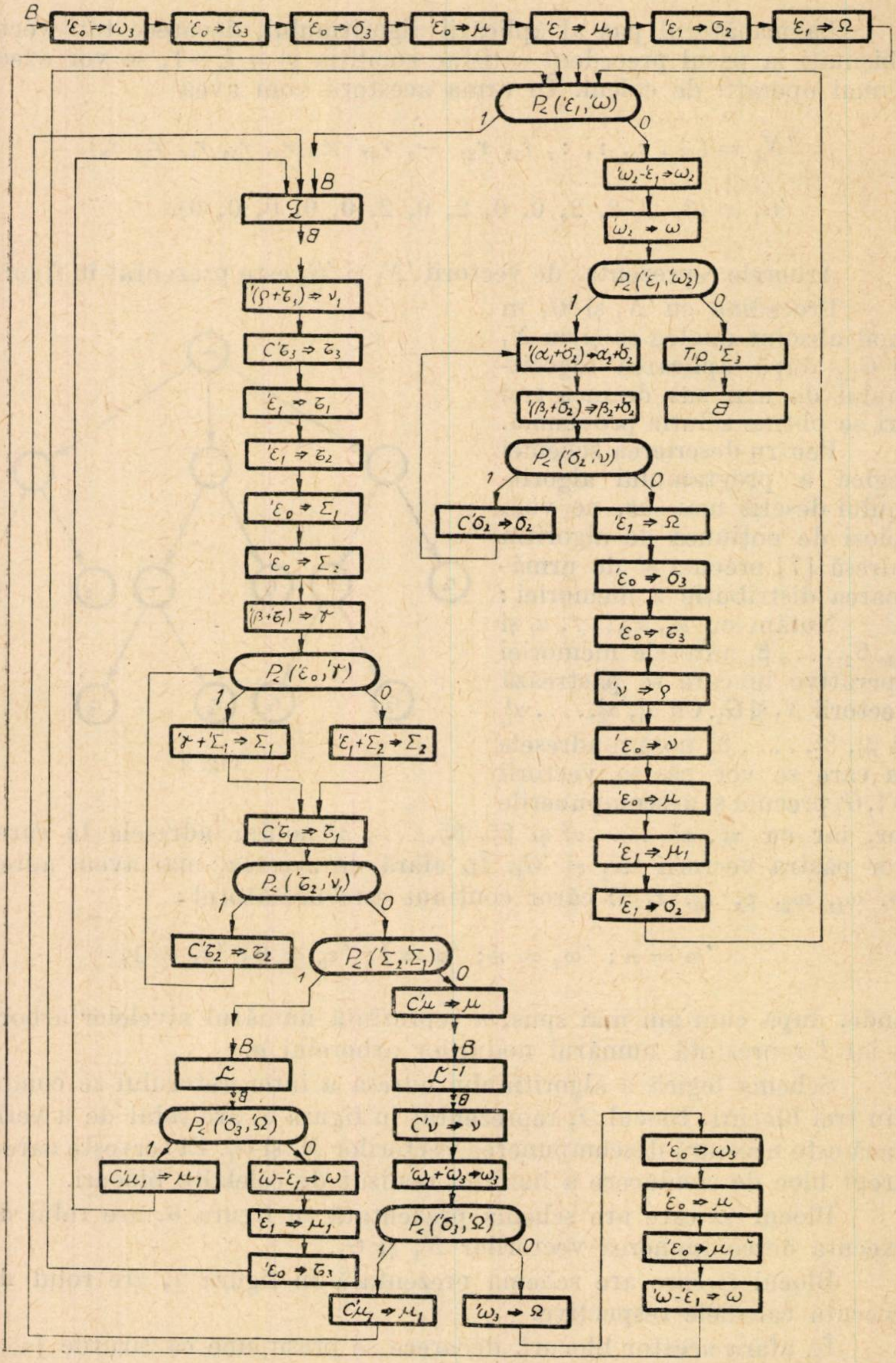

B
'ε₀ ⇒ ω₃
'ε₀ ⇒ τ₃
'ε₀ ⇒ σ₃
'ε₀ ⇒ μ
'ε₁ ⇒ μ₁
'ε₁ ⇒ σ₂
'ε₁ ⇒ Ω
P<('ε₁,'ω)
1
0
'ω₂-'ε₁ ⇒ ω₂
'ω₁ ⇒ ω
P<('ε₁,'ω₂)
'(α₁+'σ₂) ⇒ α₂+'σ₂
'(β₁+'σ₂) ⇒ β₂+'σ₂
P<('σ₂,'ν)
C'σ₂ ⇒ σ₂
Tip 'Σ₃
B
'ε₁ ⇒ Ω
'ε₀ ⇒ σ₃
'ε₀ ⇒ τ₃
'ν ⇒ ρ
'ε₀ ⇒ ν
'ε₀ ⇒ μ
'ε₁ ⇒ μ₁
'ε₁ ⇒ σ₂
B
𝒵
B
'(ρ+'τ₁) ⇒ ν₁
C'τ₃ ⇒ τ₃
'ε₁ ⇒ τ₁
'ε₁ ⇒ τ₂
'ε₀ ⇒ Σ₁
'ε₀ ⇒ Σ₂
'(β+'τ₁) ⇒ γ
P<('ε₀,'γ)
'γ+'Σ₁ ⇒ Σ₁
'ε₁+'Σ₂ ⇒ Σ₂
C'τ₁ ⇒ τ₁
P<('τ₂,'ν₁)
C'τ₂ ⇒ τ₂
P<('Σ₂,'Σ₁)
C'μ ⇒ μ
B
ℒ
B
P<('σ₃,'Ω)
C'μ₁ ⇒ μ₁
'ω-'ε₁ ⇒ ω
'ε₁ ⇒ μ₁
'ε₀ ⇒ τ₃
B
ℒ⁻¹
B
C'ν ⇒ ν
'ω₁+'ω₃ ⇒ ω₃
P<('σ₃,'Ω)
C'μ₁ ⇒ μ₁
'ω₃ ⇒ Ω
'ε₀ ⇒ ω₃
'ε₀ ⇒ μ
'ε₀ ⇒ μ₁
'ω-'ε₁ ⇒ ω

Fig. 5

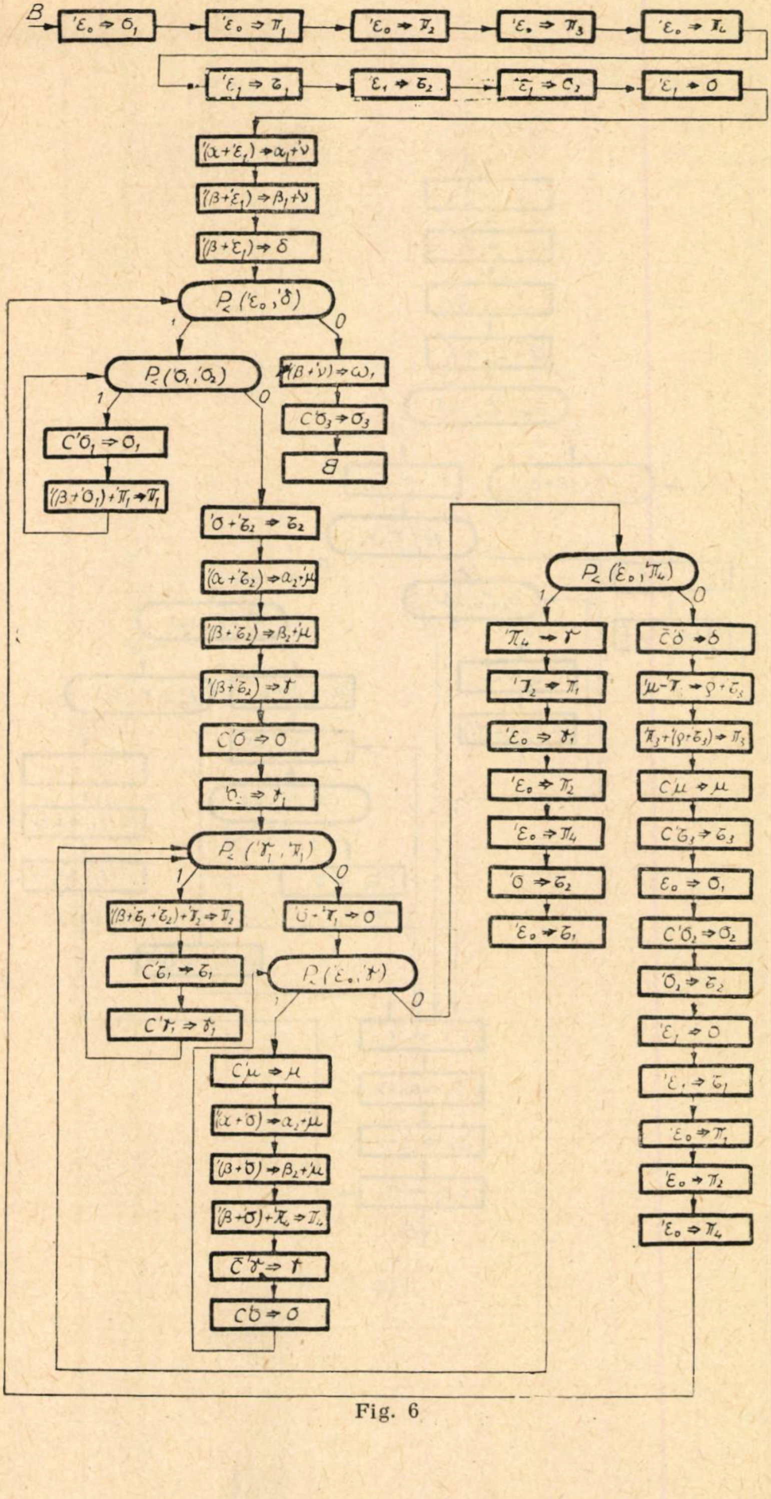

B
'ε₀ ⇒ σ₁
'ε₀ ⇒ π₁
'ε₀ ⇒ π₂
'ε₀ ⇒ π₃
'ε₀ ⇒ π₄
'ε₁ ⇒ τ₁
'ε₁ ⇒ τ₂
'ε₁ ⇒ c₂
'ε₁ ⇒ σ
'(α+'ε₁) ⇒ α₁+'ν
'(β+'ε₁) ⇒ β₁+'ν
'(β+'ε₁) ⇒ δ
P<('ε₀,'δ)
1
0
P<('σ₁,'σ₂)
1
0
C'σ₁ ⇒ σ₁
'(β+'σ₁)+'π₁ ⇒ π₁
'(β+'ν) ⇒ ω₁
C'σ₃ ⇒ σ₃
B
'σ+'τ₂ ⇒ τ₂
'(α+'τ₂) ⇒ α₂+'μ
'(β+'τ₂) ⇒ β₂+'μ
'(β+'τ₂) ⇒ γ
C'σ ⇒ σ
'σ ⇒ γ₁
P<('γ₁,'π₁)
1
0
'(β+'τ₁+'τ₂)+'π₂ ⇒ π₂
C'τ₁ ⇒ τ₁
C'γ₁ ⇒ γ₁
'σ+'γ₁ ⇒ σ
P<('ε₀,'γ)
1
0
C'μ ⇒ μ
'(α+'σ) ⇒ α₂+'μ
'(β+'σ) ⇒ β₂+'μ
'(β+'σ)+'π₄ ⇒ π₄
C'γ ⇒ γ
C'σ ⇒ σ
P<('ε₀,'π₄)
1
0
'π₄ ⇒ γ
'π₂ ⇒ π₁
'ε₀ ⇒ γ₁
'ε₀ ⇒ π₂
'ε₀ ⇒ π₄
'σ ⇒ τ₂
'ε₀ ⇒ τ₁
C'δ ⇒ δ
'μ-'γ ⇒ ρ+τ₃
'π₃+'(ρ+τ₃) ⇒ π₃
C'μ ⇒ μ
C'τ₃ ⇒ τ₃
ε₀ ⇒ σ₁
C'σ₂ ⇒ σ₂
'σ₂ ⇒ τ₂
'ε₁ ⇒ σ
'ε₁ ⇒ τ₁
'ε₀ ⇒ π₁
'ε₀ ⇒ π₂
'ε₀ ⇒ π₄

Fig. 6

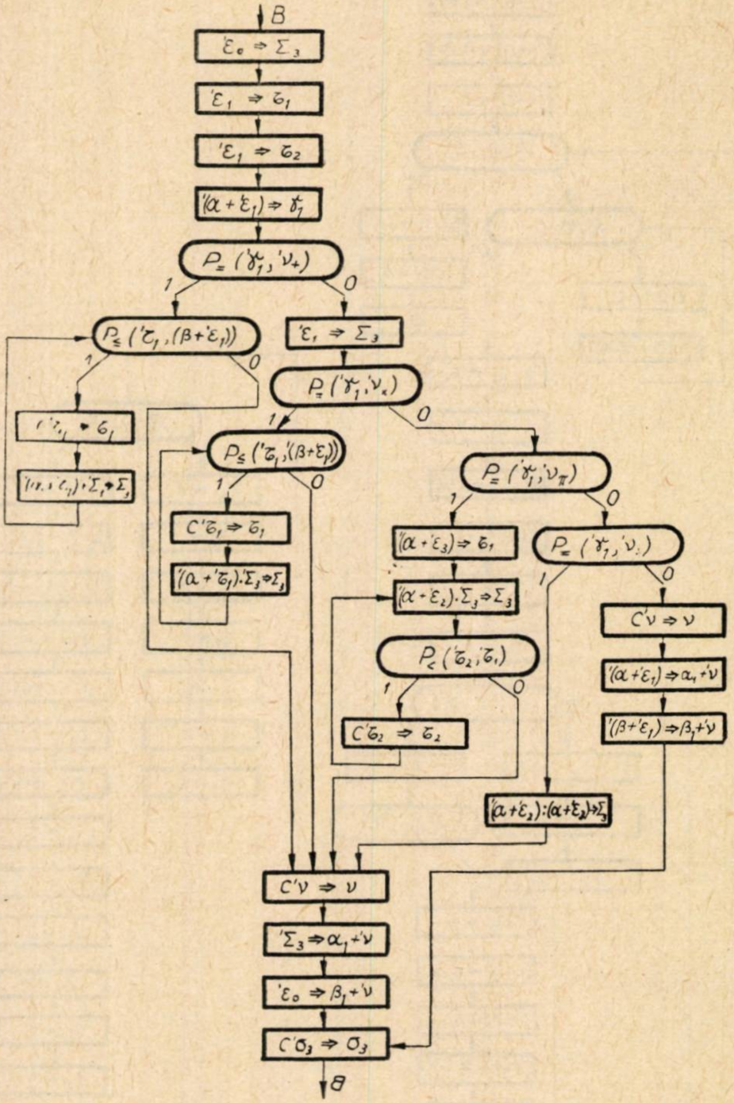

B
'ε₀ ⇒ Σ₃
'ε₁ ⇒ τ₁
'ε₁ ⇒ τ₂
'(α + 'ε₁) ⇒ γ₁
P₌ ('γ₁, 'ν₊)
1
0
P≤ ('τ₁, '(β + 'ε₁))
'ε₁ ⇒ Σ₃
1
0
P₌ ('γ₁, 'ν×)
C'τ₁ ⇒ τ₁
'(α + 'τ₁)·'Σ₃ ⇒ Σ₃
1
0
P≤ ('τ₁, '(β + 'ε₁))
1
0
C'τ₁ ⇒ τ₁
'(α + 'τ₁)·'Σ₃ ⇒ Σ₃
P₌ ('γ₁, 'νπ)
1
0
'(α + 'ε₃) ⇒ τ₁
P₌ ('γ₁, 'ν:)
'(α + 'ε₂)·'Σ₃ ⇒ Σ₃
1
0
P< ('τ₂, 'τ₁)
1
0
C'τ₂ ⇒ τ₂
C'ν ⇒ ν
'(α + 'ε₁) ⇒ α₁ + 'ν
'(β + 'ε₁) ⇒ β₁ + 'ν
'(α + 'ε₂) : (α + 'ε₂) ⇒ Σ₃
C'ν ⇒ ν
'Σ₃ ⇒ α₁ + 'ν
'ε₀ ⇒ β₁ + 'ν
C'σ₃ ⇒ σ₃
B

Fig. 7

maşinii (după cum se procedează la DACICC$-$1), în figura 8 este prezentată schema logică a algoritmului adresă care realizează transporturile necesare.

Pentru uşurarea descifrării acestor scheme adăugăm că am notat mai sus prin $\alpha_j + i$, $\beta_j + i$, $j = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, 1$, adresele şirurilor $\{\alpha_i^1, \beta_i^1\}$ şi $\{\alpha_i^2, \beta_i^2\}$ iar prin $\alpha + i$ şi $\beta + i$ am notat adresele şirului $\{\alpha_i, \beta_i\}$.

Programul interpretorului a fost realizat în limba maşinii DACICC$-$1 şi ocupă un loc de 400 cuvinte adresă în memoria operativă. Experienţele făcute cu acesta au arătat că în cazurile în care se cere să se calculeze valorile unor expresii aritmetice complicate se obţine economie de timp şi de muncă destul de mare. Spre exemplu valoarea expresiei de mai sus se calculează în 6 secunde. S-a putut observa de asemenea că un astfel de program devine foarte util dacă se foloseşte ca subprogram al unei biblioteci.

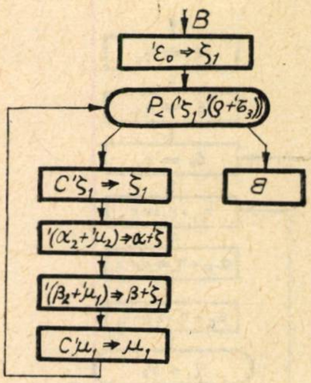


Fig. 8

§ 4. EXTINDERI ALE ALGORITMULUI INTERPRETORULUI

După cum deja am observat, interpretorul operatorilor aritmetici devine util şi comod de folosit ca şi un subprogram al unei biblioteci. În cele ce urmează vom nota prin $\mathcal{I}$ acest interpretor, şi vom construi schemele logice ale unor procese ciclice în care se poate folosi cu succes acest program.

Considerăm pentru început următoarea problemă : să se calculeze valoarea funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ pentru valorile $(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_k^j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, în ipoteza că funcţia f se poate reprezenta sub forma unui arbore.

Să notăm cu N_1 şi G_1 vectorul nod şi vectorul grad al reprezentării matriciale a arborelui care reprezintă funcţia f. De asemenea, notăm prin $C_{x_1}, C_{x_2}, \ldots, C_{x_k}$ nişte coduri pe care le ataşăm variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Presupunem că N_1 şi G_1 se păstrează în memoria externă într-un loc standard, de exemplu în adresele $\alpha_0 + i$, $\beta_0 + i$. Pentru descrierea algoritmului adresă care rezolvă problema de mai sus cu ajutorul interpretorului vom mai folosi următoarele adrese : $'\varepsilon_1 = 1$, $'\varepsilon_0 = 0$, $'\nu_1 = n$, $'\nu_2 = l$, $'\nu_3 = k$, $'\eta_1 = i$, $'\eta_2 = j$, $'\eta_3 = k$, $'c_i = C_{x_1}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Cu aceste notaţii, schema logică a algoritmului adresă care rezolvă problema pusă mai sus este prezentată în figura 9.

Programul acestui algoritm în limba maşinii DACICC$-$1 nu ocupă decît un număr de 40 de cuvinte adresă.

O altă problemă, în a cărei rezolvare se poate aplica cu succes interpretorul $\mathcal{I}$, este următoarea : să se rezolve ecuaţia $F(X) = 0$, cu ajutorul metodei iteraţiilor. Pentru aceasta se transformă ecuaţia $F\ (X) = 0$ în ecuaţia echivalentă cu ea $X - \varphi(X) = 0$. Dacă $\varphi(X)$ îndeplineşte anumite condiţii privind convergenţa procesului iterativ, atunci pornind de la o valoare oarecare X_0 se poate rezolva problema de mai sus cu ajutorul schemei

$$X_{n1} = \varphi(X_n).$$

Procesul continuă pînă cînd diferenţa a două iteraţii succesive satisface condiţia $|X_{n+1} - X_n| < \varepsilon$, ε fiind un număr determinat de precizia soluţiei căutate. În ipoteza că φ se poate reprezenta cu ajutorul unui arbore, ca şi la prima problemă, în rezolvarea ei putem folosi interpretorul $\mathcal{J}$. Algoritmul adresă care rezolvă această problemă are schema logică prezentată în figura 10.

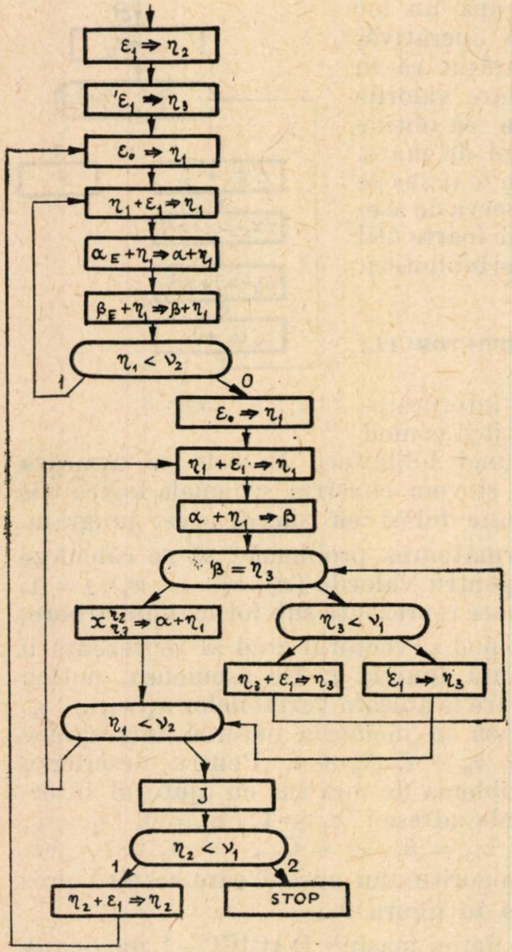

ε₁ ⇒ η₂
'ε₁ ⇒ η₃
ε₀ ⇒ η₁
η₁ + ε₁ ⇒ η₁
α_E + η₁ ⇒ α + η₁
β_E + η₁ ⇒ β + η₁
η₁ < ν₂
1
0
ε₀ ⇒ η₁
η₁ + ε₁ ⇒ η₁
α + η₁ ⇒ β
β = η₃
x^{η₂}_{η₃} ⇒ α + η₁
η₃ < ν₁
η₃ + ε₁ ⇒ η₃
'ε₁ ⇒ η₃
η₁ < ν₂
J
η₂ < ν₁
1
2
η₂ + ε₁ ⇒ η₂
STOP

Fig. 9

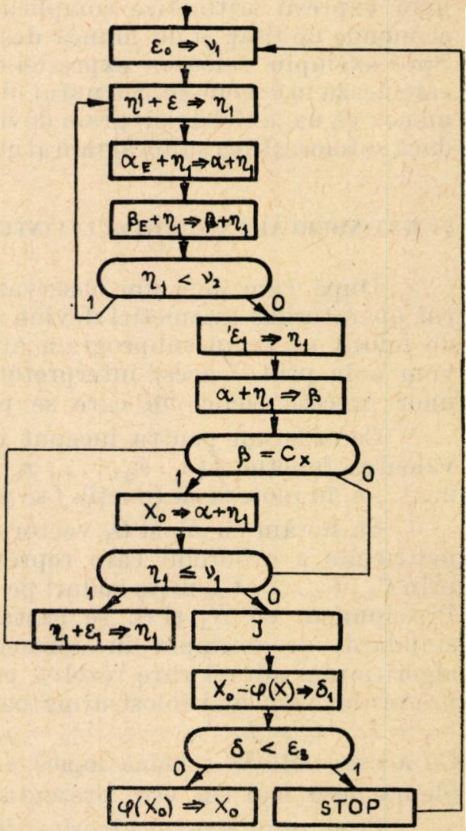

ε₀ ⇒ ν₁
η¹ + ε ⇒ η₁
α_E + η₁ ⇒ α + η₁
β_E + η₁ ⇒ β + η₁
η₁ < ν₂
1
0
'ε₁ ⇒ η₁
α + η₁ ⇒ β
β = C_x
1
0
X₀ ⇒ α + η₁
η₁ ≤ ν₁
1
0
η₁ + ε₁ ⇒ η₁
J
X₀ − φ(X) ⇒ δ₁
δ < ε₃
0
1
φ(X₀) ⇒ X₀
STOP

Fig. 10

În afară de codificările folosite şi în celelalte scheme, aici am folosit şi codificarea $'\varepsilon_3 = \varepsilon$. De asemenea, operatorul

$$'\beta = C_x$$

poate fi mai complicat sau mai simplu după cum X este o variabilă sau un vector. O aplicaţie imediată a schemei de mai sus se găseşte la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare cu ajutorul metodei lui Gauss-Seidel.

Primită la redacţie la 20 noiembrie 1965

Institutul de calcul
al Academiei Republicii Socialiste România
— Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. M. P. ШУРА-БУРА, А. П. ЕРШОВ, *Машинные языки и автоматическое программирование.* Тр. четверт. всес. мат. Съезда, Ленинград, 1961, **I**, 243—250 (1963).
2. А. А. МАРКОВ. *Теория логорифмов*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **XLII**, Москва, 1964.
3. T. RUS, *Asupra unui sistem formal I.* St. cerc. mat., **15**, *4*, 459—470 (1964).
4. T. RUS, *Asupra unui sistem formal II.* St. cerc. mat., **15**, *5*, 595—615 (1964).
5. T. RUS, *Algoritmi de prelucrare a expresiilor formale cu ajutorul maşinilor cifrice de calcul.* St. cerc. mat., **16**, *9*, 1129—1139 (1964).
6. T. RUS, *Asupra reprezentării matriciale a arborilor.* St. cerc. mat., **16**, *9*, 1179—1185 (1964).
7. Е. Л. ЮЩЕНКО, *Адриное программирование.* Государственное издательство технической литературы, УССР, Киев, 1963.

DESPRE REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE PRIN METODA IPERBOLELOR TANGENTE GENERALIZATE (II)

DE

B. JANKÓ și M. BALÁZS

(Cluj)

Se studiază rezolvarea aproximativă a ecuațiilor operaționale neliniare $P(x)=0$ prin metoda generalizată a iperbolelor tangente. Se stabilesc noi condiții de existență a soluției respectiv de convergență a metodei pentru cazul cînd $\bar{\eta}_0 < \eta_0$.

Fie ecuația operațională $P(x) = 0$, unde despre $P(x)$ presupunem că este o operație neliniară definită într-un domeniu S complet și convex al spațiului normat X cu valori în X, este continuă și admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 3 inclusiv.

Să luăm metoda de iterație

$$x_{n+1} = x_n - \left[I - \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\right]^{-1}\Gamma_n P(x_n), \tag{1}$$

unde $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$. La aplicarea acestui procedeu alegem aproximația inițială $x_0 \in S \subset X$ iar apoi elementele $x_i \in S$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ se calculează succesiv prin formula (1).

În lucrarea de față vom stabili cîteva teoreme referitoare la existența soluției ecuației $P(x) = 0$, precum și convergența metodei date prin algoritmul (1).

TEOREMA 1. *Pentru aproximația inițială* x_0 *să fie îndeplinite următoarele condiții :*

1°. *Există operația inversă* Γ_0 *a derivatei Fréchet* $P'(x_0)$ *și are loc delimitarea*

$$\|\Gamma_0\| \leqslant B_0.$$

2°. $$\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \bar{\eta}_0.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 817–828, BUCUREȘTI, 1966

3°. *Derivatele Fréchet de ordinul 2 respectiv 3 sînt uniform mărginite în domeniul* $S(x_0, r)$

$$\| P''(x) \| \leqslant M, \ \| P'''(x) \| \leqslant N,$$

unde $S(x_0, r)$ *este o sferă în spațiul* X *cu centrul în* x_0 *și de rază* $r = \frac{16}{9} \bar{\eta}_0$.

4°. $$\bar{h}_0 = B_0 M \bar{\eta}_0 \leqslant \frac{1}{2} \cdot$$

5°. $$\sigma_0 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{N}{3 B_0 M^2 \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0\right)}}{\left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0\right)\left(1 - \frac{3}{2} \bar{h}_0\right)} \leqslant 2.$$

În aceste condiții, ecuația operațională $P(x) = 0$ *are o soluție* $x^* \in S(x_0, r)$ *și* x^* *este limita șirului* (x_n). *Rapiditatea convergenței este dată de următoarea inegalitate :*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant 2^{1-2n} (2 \bar{h}_0)^{3^n - 1} \bar{\eta}_0 \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0\right)^{-1} \cdot$$

Demonstrație. Demonstrăm că pentru x_1 condițiile $1^0 - 5^0$ sînt satisfăcute.

a) Folosind condițiile $1^0 - 4^0$, formula (1) și teorema lui Banach, obținem

$$\| \Gamma_1 \| \leqslant \frac{B^0}{1 - \frac{\bar{h}^0}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}_0}} = B_0 \frac{2 - \bar{h}_0}{2 - 3 \bar{h}_0} = B_1, \tag{2}$$

unde $B_1 > B_0$ și $B_1 \leqslant 4 B_0$; deci condiția 1^0 este îndeplinită pentru aproximația x_1.

b) Să considerăm formula lui Taylor pentru operația $\Gamma_0 P(x)$,

$$\begin{aligned} &\| \Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 P(x_0) - (x_1 - x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) (x_1 - x_0)^2 \| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{6} \| \Gamma_0 P'''(\xi_0) \| \| x_1 - x_0 \|^3, \end{aligned} \tag{3}$$

unde $\xi_0 = x_0 + t(x_1 - x_0)$. Din formula (1) pentru $n = 0$ se ajunge ușor la relația (vezi [1])

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 P(x_0) + (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) (x_1 - x_0)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) [\Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) (x_1 - x_0)] (x_1 - x_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) folosind condiţiile $1^0 - 4^0$ obţinem că

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{\bar\eta_0\, \bar h_0}{2\left(1 - \frac{1}{2}\, \bar h^0\right)^2} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{N}{3\, B_0\, M^2 \left(1 - \frac{1}{2}\, \bar h^0\right)}\right] \tag{5}$$

Utilizînd relaţia evidentă $\Gamma_1 = H_0\, \Gamma_0$, unde

$$H_0 = \{I - \Gamma_0\, [P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1}$$

şi

$$\| H_0 \| \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{\bar h_0}{1 - \frac{1}{2}\, \bar h_0,}},$$

se obţine

$$\| \Gamma_1\, P(x_1) \| \leqslant \frac{\bar\eta_0\, \bar h_0^2}{2\left(1 - \frac{1}{2}\, \bar h_0\right)\left(1 - \frac{3}{2}\, \bar h_0\right)} \left[\frac{1}{2} + \frac{N}{3\, B_0\, M^2 \left(1 - \frac{1}{2}\, \bar h_0\right)}\right]. \tag{6}$$

Introducînd notaţia

$$\bar\eta_1 = \| \Gamma_1\, P\,(x_1) \|\,, \tag{7}$$

condiţia 2° este satisfăcută pentru x_1 şi din relaţia (6) folosind condiţia 5° rezultă că

$$\bar\eta_1 \leqslant \bar h_0^2\, \bar\eta_0 \leqslant \frac{\bar\eta_0}{4}. \tag{8}$$

c) Cum vom vedea mai jos, x_1 şi ξ_0 rămîn în sfera $S(x_0, r)$, deci condiţia 3^0 este satisfăcută.

d) Folosind inegalităţile (8) şi (2) şi că $\bar h_0 \leqslant \frac{1}{2}$, obţinem

$$\bar\eta_1\, B_1\, M = \bar h_1 \leqslant 4\, \bar h_0^3 \leqslant \bar h_0,$$

deci şi condiţia 4° este satisfăcută.

e) Din $B_1 > B_0$ şi $\bar h_1 \leqslant \bar h_0$ rezultă uşor că

$$\sigma_1 < \sigma_0 \leqslant 2.$$

Deci am constatat că condiţiile $1^0 - 5^0$ sînt satisfăcute pentru x_1, unde constantele B_0, $\bar\eta_0$, $\bar h_0$, σ_0 au fost înlocuite respectiv cu B_1, $\bar\eta_1$, $\bar h_1$, σ_1.

Cu metoda inducției complete se demonstrează ușor următoarele relații :

$$(9) \qquad B_n \leqslant 4\, B_{n-1}, \qquad \text{unde } B_n = \frac{B_{n-1}(2 - \overline{h}_{n-1})}{2 - 3\, \overline{h}_{n-1}} \text{ și } B_n > B_{n-1}$$

$$(10) \qquad \overline{\eta}_n \leqslant \overline{\eta}_{n-1}\, \overline{h}^2_{n-1}, \quad \text{unde } \overline{\eta}_n = \| \Gamma_n\, P(x_n) \|$$

$$(11) \qquad \overline{h}_n \leqslant 4\, \overline{h}^3_{n-1}, \qquad \text{unde } \overline{h}_n = B_n\, M\, \overline{\eta}_n \text{ și } \overline{h}_n \leqslant \overline{h}_{n-1}$$

$$(12) \qquad \sigma_n \leqslant 2, \qquad \text{unde } \sigma_n \leqslant \sigma_{n-1}.$$

În demonstrarea acestor relații se folosește relația evidentă

$$\Gamma_{n+1} = H_n\, \Gamma_n$$

unde

$$H_n = \{I - \Gamma_n\, [P'(x_n) - P'(x_{n+1})]\}^{-1}$$

și

$$\| H_n \| \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{h}_{n-1}}{1 - \dfrac{1}{2}\, \overline{h}_{n-1}}}$$

precum și formula lui Taylor.

Din inegalitățile (10) și (11) rezultă că

$$(13) \qquad \overline{\eta}_n \leqslant 2^{-2n}\, (2\, \overline{h}_0)^{3^n - 1}\, \overline{\eta}_0 .$$

Din formula (1) avem

$$x_{n+1} - x_n = - \left[I - \frac{1}{2}\, \Gamma_n\, P''(x_n)\, \Gamma_n\, P(x_n) \right]^{-1} \Gamma_n\, P(x_n)$$

de unde obținem

$$(14) \qquad \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \frac{\overline{\eta}_n}{1 - \dfrac{1}{2}\, \overline{h}_0} .$$

Folosind inegalitățile (13) și (14) obținem

$$(15) \qquad \| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \frac{\overline{\eta}_0}{1 - \dfrac{1}{2}\, \overline{h}_0}\, 2^{1-2n}\, (2\, \overline{h}_0)^{3^n - 1}\, (1 - 2^{-2p}).$$

Sfera S fiind completă, rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n \to +\infty} x_n .$$

Dacă în relaţia (15) facem $p \to +\infty$, atunci se obţine

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\bar{\eta}_0}{1 - \frac{1}{2}\bar{h}_0} \cdot 2^{1-2n} (2\,\bar{h}_0)^{3^n - 1}.$$

Acum să arătăm că x_n şi $\xi_{n-1} = x_{n-1} + t_{n-1}(x_n - x_{n-1})$ rămîn în sferă $S(x_0, r)$. În adevăr, conform inegalităţii (14) avem

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \| x_1 - x_2 \| + \ldots + \| x_{n-1} - x_n \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\bar{h}_0} (\bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_1 + \ldots + \bar{\eta}_n) \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\bar{h}_0} \left(\bar{\eta}_0 + \frac{\bar{\eta}_0}{4} + \ldots + \frac{\bar{\eta}_0}{4^n} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{\eta}_0}{1 - \frac{1}{2}\bar{h}_0} \cdot \frac{4}{3} \leqslant \frac{16}{9} \bar{\eta}_0 .$$

Verificarea inegalităţii $\| x_0 - \xi_{n-1} \| \leqslant \frac{16}{9}\, \bar{\eta}_0$ se face în mod analog.

Arătăm, în sfîrşit, că x^* satisface ecuaţia operaţională $P(x) = 0$. În acest scop să scriem identitatea analoagă cu identitatea (4) sub forma

$$P(x_n) + P'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} P''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} P''(x_n) \left[\Gamma_n P''(x_n)\, \Gamma_n P(x_n)(x_{n+1} - x_n) \right] (x_{n+1} - x_n).$$

Atunci din formula analoagă cu formula (3) se obţine delimitarea

$$\| P(x_{n+1}) \| \leqslant \frac{1}{4} B_n M^2 \frac{\bar{\eta}_n^3}{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{h}_n\right)^2} + \frac{1}{6} \frac{N \bar{\eta}_n^3}{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{h}_n\right)^3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{h}_n^2 \bar{\eta}_n}{B_n} \left[\frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{2}\bar{h}_n\right)^2} + \frac{N}{6\, B_n M^2 \left(1 - \frac{1}{2}\bar{h}_n\right)^3} \right] \leqslant \tag{5'}$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{\bar{h}_n^2 \bar{\eta}_n}{B_n} \left(1 + \frac{N}{6\, B_n M^2}\right).$$

Din relaţia (5′) rezultă că pentru $n \to +\infty$, $\lim \| P(x_n) \| = 0$. Deoarece operaţia $P(x)$ este continuă şi $x_n \to x^*$, obţinem

$$\lim_{n \to \infty} P(x_n) = P(x^*) = 0.$$

Observații. 1. Într-o lucrare anterioară [1] ne-am folosit de condiția

$$h_0 = B_0\, \eta_0\, M \leqslant \frac{1}{2},$$

unde constanta η_0 delimitează

$$\| x_1 - x_0 \| < \eta_0 .$$

S-ar putea întîmpla însă cazul cînd $h_0 > \frac{1}{2}$, iar $\bar{h}_0 \leqslant \frac{1}{2}$, $\bar{\eta}_0$ fiind mai mic decît η_0. Din acest motiv s-au stabilit teorema 1, precum și teoremele următoare din lucrarea de față.

2. Teorema 1 se poate demonstra și în cazul cînd

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{N}{3\, B_0\, M^2}}{\left(1 - \dfrac{1}{2}\, \bar{h}_0\right)^2 \left(1 - \dfrac{3}{2}\, \bar{h}_0\right)} \leqslant 2,$$

unde însă $\sigma_0 < \bar{\sigma}_0$.

TEOREMA 2. *Fie îndeplinite următoarele condiții :*

1°. $\| \Gamma(x) \| \leqslant B < +\infty$ *pentru orice* $x \in S$, *unde* $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ *și* S *este o sferă în* X *definită de inegalitatea* $\| x - x_0 \| \leqslant K \dfrac{\bar{\eta}}{1 - \dfrac{1}{2}\, \bar{h}}$,

$$K = \sum_{i=0}^{\infty} (\bar{h}\, \bar{f})^{3^i - 1}$$

2°. $$\| \Gamma_0\, P(x_0) \| \leqslant \bar{\eta} < +\infty .$$

3°. *Există derivatele de tip Fréchet pînă la ordinul 3 inclusiv și ele sînt uniform mărginite*

$$\| P''(x) \| \leqslant M, \| P'''(x) \| \leqslant N$$

4°. $\bar{h} = B\, \bar{\eta}\, M < 2$ *și* $h \cdot f < 1$

unde am folosit notația

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{2\left(1 - \dfrac{1}{2}\, \bar{h}\right)^3} \left[1 + \frac{N}{3\, B\, M^2}\right].$$

În aceste condiții, ecuația operațională $P(x) = 0$ *are o soluție* $x^* \in S$ *și șirul aproximațiilor succesive calculate cu ajutorul formulei* (1) *tinde către* x^*. *Rapiditatea convergenței este dată de inegalitatea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\bar{\eta}}{1 - \dfrac{1}{2}\, \bar{h}} \cdot K \cdot (\bar{h}\, \bar{f})^{3^n - 1} .$$

Demonstraţie. Avem

$$\| x_1 - x_0 \| = \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1} \Gamma_0 P(x_0).$$

Deoarece

$$\frac{1}{2} \| \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \frac{1}{2} B M \bar{\eta} = \frac{1}{2} \bar{h} < 1$$

conform teoremei lui Banach, există $\left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1}$ şi avem

$$\| I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)]^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}}$$

de unde

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{\bar{\eta}}{1 - \frac{1}{2} \bar{h}}.$$

Să delimităm pe $\| \Gamma_1 P(x_1) \|$. Folosind formula lui Taylor, se obţine uşor

$$\| P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{4} \| P''(x_0) \{ \Gamma_0 P''(x_0) [\Gamma_0 P(x_0)] (x_1 - x_0) \} (x_1 - x_0) \| +$$

$$+ \frac{N}{6} \| x_1 - x_0 \|^3 \leqslant \left[\frac{1}{4} M^2 B \left(1 + \frac{\bar{h}}{2} \right) + \frac{N}{6} \right] \| x_1 - x_0 \|^3,$$

unde am folosit inegalitatea

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \left(1 + \frac{\bar{h}}{2} \right) \| x_1 - x_0 \|.$$

Avem mai departe

$$\| P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{2} \left[M^2 B + \frac{N}{3} \right] \| x_1 - x_0 \|^3 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{h}^2}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h} \right)^2 B} \left[1 + \frac{N}{3 B M^2} \right] \| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{\bar{h}^2 \bar{\eta}}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h} \right)^3 B} \left[1 + \frac{N}{3 B M^2} \right]$$

de unde

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{\bar{h}^2 \bar{\eta}}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h} \right)^3} \left[1 + \frac{N}{3 B M^2} \right].$$

Deoarece avem

$$\frac{\bar{h}^2}{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)^3}\left[1+\frac{N}{3\,B\,M^2}\right]<1$$

rezultă că

$$\|\Gamma_1\,P(x_1)\|\leqslant\bar{\eta}.$$

Să evaluăm pe $\|x_2-x_1\|$. Avem

$$\|x_2-x_1\|=\left\|\left[I-\frac{1}{2}\,\Gamma_1\,P''(x_1)\,\Gamma_1\,P(x_1)\right]^{-1}\Gamma_1\,P(x_1)\right\|,$$

unde

$$\frac{1}{2}\,\|\Gamma_1 P''(x_1)\,\Gamma_1\,P(x_1)\|\leqslant\frac{1}{2}\,B\,M\,\bar{\eta}=\frac{1}{2}\,\bar{h}<1$$

deci

$$\|x_2-x_1\|\leqslant\frac{\bar{h}^2\bar{\eta}}{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)^4}\left[1+\frac{N}{3\,B\,M^2}\right]\leqslant\frac{\bar{\eta}}{1-\frac{1}{2}\bar{h}}$$

sau

$$\|x_2-x_1\|\leqslant\frac{\bar{h}^2}{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)^3}\left[1+\frac{N}{3\,B\,M^2}\right]\|x_1-x_0\|$$

sau

$$\|x_2-x_1\|\leqslant\frac{B^2\,M^2}{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)}\left[1+\frac{N}{3\,B\,M^2}\right]\|x_1-x_0\|^3=$$

$$=B^2\,M^2\,\bar{\jmath}^2\left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)^2\|x_1-x_0\|^3.$$

Deoarece $\bar{h}\cdot\bar{\jmath}<1$, avem

$$\|x_2-x_1\|<\|x_1-x_0\|.$$

Prin inducţie completă se stabileşte uşor că

$$\|\Gamma_n\,P(x_n)\|\leqslant\bar{\eta},\quad\|\Gamma_{n-1}\,P(x_{n-1})\|<\left(1+\frac{1}{2}\bar{h}\right)\|x_n-x_{n-1}\|,$$

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\frac{\bar{h}^2\,\bar{\eta}}{2\left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)^4}\left[1+\frac{N}{3\,B\,M^2}\right]\leqslant\frac{\bar{\eta}}{1-\frac{1}{2}\bar{h}},$$

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant B^2\,M^2\,\bar{\jmath}^2\left(1-\frac{1}{2}\bar{h}\right)^2\|x_n-x_{n-1}\|^3.$$

Astfel ajungem la următoarea delimitare

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant (\bar{h}\,\bar{f})^{3^n-1} \frac{\bar{\eta}}{1-\dfrac{1}{2}\bar{h}}.$$

Avem inegalităţile

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \| x_1 - x_2 \| + \ldots + \| x_{n-1} - x_n \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{\eta}}{1-\dfrac{1}{2}\bar{h}} \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{h}\,\bar{f})^{3^i-1} < \frac{K\bar{\eta}}{1-\dfrac{1}{2}\bar{h}}$$

de unde rezultă că aproximaţiile $x_n \in S$ pentru orice n.

Avînd în vedere că S este completă pe baza inegalităţii

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \frac{\bar{\eta}}{1-\dfrac{1}{2}\bar{h}} \sum_{i=n}^{n+p-1} (\bar{h}\,\bar{f})^{3^i-1} < \frac{\bar{\eta}\cdot K}{1-\dfrac{1}{2}\bar{h}} (\bar{h}\,\bar{f})^{3^n-1}$$

rezultă că $x_n \to x^* \in S \subset X$.

Dacă în ultima inegalitate facem $p \to +\infty$, atunci avem

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\bar{\eta}K}{1-\dfrac{1}{4}\bar{h}} (\bar{h}\,\bar{f})^{3^n-1}.$$

Faptul că x^* este soluţia ecuaţiei $P(x) = 0$ se demonstrează exact la fel ca şi în cazul teoremei 1.

Observaţie. Teorema se poate demonstra şi cu delimitări mai precise folosindu-ne de

$$\bar{f}^2 = \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{2}\bar{h}\right)^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{N}{3\,B\,M^2\,(2-\bar{h})}\right].$$

TEOREMA 3. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile* 1°, 2° *şi* 4° *de la teorema* 1, *iar în locul condiţiilor* 3° *şi* 5° *de la aceeaşi teoremă, avem :*

3°. *Derivata lui Fréchet de ordinul al doilea satisface condiţia lui Lipschitz :*

$$\| P''(x_1) - P''(x_2) \| \leqslant K \| x_1 - x_2 \|$$

în sfera $S\,(x_0,\, r)$ *de la teorema* 1 *şi este mărginită de constanta* M :

5°.
$$\sigma_0^{(1)} = \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{K}{3\,B_0 M^2\left(1-\dfrac{1}{2}\bar{h}_0\right)}}{\left(1-\dfrac{1}{2}\bar{h}_0\right)\left(1-\dfrac{3}{2}\bar{h}_0\right)} \leqslant 2,$$

unde K este constanta lui Lipschitz.

Atunci ecuaţia $P(x) = 0$ are o soluţie $x^* \in S$ care este limita şirului de aproximaţie (x_n). Rapiditatea convergenţei se caracterizează prin aceeaşi delimitare ca şi în cazul teoremei 1.

Demonstraţie. În condiţia 3^0 avem ([2])

$$\| P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{6} \| x_1 - x_0 \|^3 .$$

Este evident că şi în acest caz avem

$$\| \Gamma_1 \| \leqslant \frac{B_0 (2 - \overline{h}_0)}{2 - 3 \overline{h}_0} = B_1, \; B_1 > B_0, \; B_1 < 4 B_0, \; \Gamma_1 = H_0 \Gamma_0 .$$

Însă în acest caz

$$\| \Gamma_0 P(x_1) - \Gamma_0 P(x_0) - (x_1 - x_0) - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \Gamma_0 \| \| P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_0 K}{6} \| x_1 - x_0 \|^3$$

de unde

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{\overline{\eta}_0 h_0^2}{2\left(1 - \frac{1}{2} \overline{h}_0\right)^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{K}{3 B_0 M^2 \left(1 - \frac{1}{2} \overline{h}_0\right)} \right]$$

şi astfel

$$\| \overline{\eta}_1 \| = \| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \frac{\overline{\eta}_0 \overline{h}_0^2}{2\left(1 - \frac{1}{2} \overline{h}_0\right)\left(1 - \frac{3}{2} \overline{h}_0\right)} \left[\frac{1}{2} + \frac{K}{3 B_0 M^2 \left(1 - \frac{1}{2} \overline{h}_0\right)} \right].$$

Se introduce

$$\sigma_0^{(1)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{K}{3 B_0 M^2 \left(1 - \frac{1}{2} \overline{h}_0\right)}}{\left(1 - \frac{1}{2} \overline{h}_0\right)\left(1 - \frac{3}{2} \overline{h}_0\right)} .$$

Dacă $\sigma_0^{(1)} \leqslant 2$, atunci $\bar{\eta}_1 \leqslant \bar{h}_0^2 \bar{\eta}_0$. Presupunem că $\bar{h}_0 \leqslant \frac{1}{2}$. În acest caz avem și aici:

$$\begin{aligned} \| \Gamma_1 \| &\leqslant B_1 \leqslant 4 B_0 \\ \bar{\eta}_1 &\leqslant \bar{h}_0^2 \bar{\eta}_0 \\ \bar{h}_1 &\leqslant 4 \bar{h}_0^3 \\ \sigma_1^{(1)} &\leqslant 2 \end{aligned}$$

și, în general,

$$\begin{aligned} B_n &\leqslant 4 B_{n-1} \\ \bar{\eta}_n &\leqslant \bar{h}_{n-1}^2 \bar{\eta}_{n-1} \\ h_n &\leqslant 4 \bar{h}_{n-1}^3 \\ \sigma_n^{(1)} &\leqslant 2. \end{aligned}$$

Restul demonstrației se face în mod analog cu demonstrarea teoremei 1.

Teorema 4. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* 1⁰, 2⁰ *și* 4⁰ *cu*

$$\tilde{f}^2 = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}\bar{h}\right)^3}\left[1 + \frac{K}{3BM^2}\right]$$

ale teoremei 2, *iar în locul condiției* 3° *a teoremei* 2 *avem condiția*:

3°. *Derivata Fréchet de ordinul al doilea satisface condiția lui Lipschitz în sfera* $S(x_0, r)$ *de la teorema* 2 *și este mărginită de constanta* M, *atunci au loc afirmațiile teoremei* 2.

Teorema 5. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* 1°, 2° *și* 4° *ale teoremei* 1, *iar în locul condițiilor* 3° *și* 5° *ale teoremei* 1 *avem condițiile*:

3°. *Derivata Fréchet de ordinul al doilea satisface condiția lui Hőlder*

$$\| P''(x_1) - P''(x_2) \| \leqslant H \| x_1 - x_2 \|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1$$

în sfera $S(x_0, r)$ *de la teorema* 1 *și este mărginită de constanta* M;

5°.

$$\sigma_0^{(\alpha)} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{2^\alpha \cdot H \cdot \bar{\eta}_0^{\alpha-1}}{(\alpha+1)(\alpha+2) B_0 M^2 (2 - \bar{h}_0)^\alpha}}{\left(1 - \frac{1}{2}\bar{h}_0\right)\left(1 - \frac{3}{2}\bar{h}_0\right)} \leqslant 1;$$

atunci au loc afirmațiile teoremei 1.

Observație. În demonstrarea acestei teoreme în locul formulei lui Taylor se folosește formula cunoscută ([2])

$$\left\| P(x) - P(x_0) - \frac{P'(x_0)}{1\,!}(x - x_0) - \frac{P''(x_0)}{2\,!}(x - x_0)^2 \right\| \leqslant \frac{H}{(1+\alpha)(2+\alpha)} \| x - x_0 \|^{2+\alpha}.$$

TEOREMA 6. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* 1⁰, 2⁰ *și* 4⁰ *cu*

$$\overset{\approx}{\overline{f}}{}^2=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\,\overline{h}\right)^3}\left[\frac{1}{2}+\frac{H}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,B.M^2}\right]$$

ale teoremei 2, *iar în locul condiției* 3° *a teoremei* 2 *avem condiția* :

3°. *Derivata Fréchet de ordinul* 2 *satisface condiția lui Hölder în sfera* $S(x_0, r)$ *de la teorema* 2 *și este mărginită de constanta* M, *atunci au loc afirmațiile teoremei* 2.

Primită la redacție la 25 octombrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1 B. JANKÓ, *Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale nelineare prin metoda iperbolelor tangente generalizate* (I). St. cerc. Mat. (Cluj) **XIV**, *2*, 265—271 (1963).

2. B. A. ВЕРГАИМ, *Об условиях применения метода Ньютона.* ДАН, **110,** *5*, 719—722/1965.

UNDE ELASTO-VÎSCO-PLASTICE ÎN BARE CILINDRICE GROASE

DE

MIHAELA MIHĂILESCU

Propagarea undelor în bare cilindrice este studiată în cazul a două coordonate spaţiale, utilizînd drept lege constitutivă o generalizare a legii Sokolovski-Malvern din cazul unidimensional.

Se găsesc două tipuri de unde : o undă longitudinală şi una transversală precum şi o discontinuitate staţionară. Viteza undelor este egală cu cea a undelor elastice datorită formei particulare a legii constitutive utilizate.

Dacă coeficienţii ce intervin în legea constitutivă sînt funcţii de tensiune şi deformaţie, vitezele undelor vor depinde şi ele de aceste funcţii ; în acest caz, pentru ca unda longitudinală şi cea transversală să poată fi separate este necesar ca materialul să posede o anumită anizotropie exprimată matematic prin două relaţii suplimentare pe care trebuie să le îndeplinească funcţiile de tensiune şi deformaţie ce intervin în coeficienţii legii constitutive.

1° INTRODUCERE

Primele lucrări teoretice şi experimentale în domeniul propagării undelor elasto-plastice în bare cilindrice, se referă la bare metalice subţiri. În acest caz, starea de tensiune şi deformaţie poate fi considerată unidimensională, ceea ce simplifică considerabil problema, nu numai matematic dar şi din punct de vedere experimental. De asemenea s-a presupus iniţial (H. A. Rahmatulin 1945) că influenţa vitezei de deformare este neglijabilă, astfel încît relaţia între σ şi ε este dată sub formă întreagă $\sigma = f(\varepsilon)$. Utilizînd o astfel de relaţie între tensiune şi deformaţie, undele longitudinale ce se propagă în bară au viteza :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c(\varepsilon) = \pm\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)^{1/2}.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 829–838, BUCUREŞTI, 1966

În 1948, V. V. Sokolovski introduce în expresia legii constitutive un termen exprimînd influenţa vitezei de deformare asupra curbei $\sigma \sim \varepsilon$. Pentru materiale perfect plastice, viteza de deformare plastică era considerată funcţie de tensiune

$$\dot{\varepsilon}^p = g(\sigma - \sigma_s),$$

unde σ_s este limita de plasticitate la întindere-compresiune, iar g era considerată funcţie liniară de argumentul său; astfel legea constitutivă avea forma

$$E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + k(|\sigma| - \sigma_s).$$

Extinzînd în 1951, pentru materiale ecruisabile, legea constitutivă utilizată de Sokolovski, L. E. Malvern propune relaţia

$$\dot{\varepsilon}^p = g(\sigma, \varepsilon)$$

cu

$$g(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{b}\left[e^{\frac{\sigma - f(\varepsilon)}{a}} - 1\right], \qquad a, b = \text{const.}$$

viteza undelor longitudinale obţinute fiind egală cu cea a undelor elastice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c_0 = \pm \left(\frac{E_0}{\rho}\right)^{1/2}$$

În sfîrşit, în 1963, N. Cristescu utilizează drept lege constitutivă o relaţie cvasiliniară între σ şi ε sub forma

$$\dot{\varepsilon} = \varphi(\sigma, \varepsilon)\,\dot{\sigma} + \psi(\sigma, \varepsilon)$$

astfel încît vitezele undelor nu mai sînt constante şi egale cu cele ale undelor elastice, ca în cazul Malvern, ci sînt date de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c(\sigma, \varepsilon) = \pm \left(\frac{\varphi}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Teoria unidimensională se poate aplica, evident, numai în cazul barelor subţiri; într-adevăr, mişcarea transversală a materialului nu este considerată, ceea ce simplifică şi relaţia între σ şi ε.

Considerînd, în 1952, propagarea undelor plane în materiale cu extindere laterală mare (problema axial simetrică), Wood utilizează drept lege constitutivă o relaţie de forma

$$\sigma_x - \sigma_y = \sigma(\varepsilon_x^p),$$

unde $\sigma(\varepsilon_x^p)$ este dată de diagrama tensiune-deformație din cazul unidimensional; această expresie derivă direct din condiția de plasticitate (v. Mises sau Tresca). În felul acesta se poate calcula diagrama $\sigma_x \sim \varepsilon_x$ ținînd seama și de mișcarea transversală a particulelor materialului, iar viteza undelor diferă de cea obținută de Rahmatulin. Rezultatele obținute de Wood se apropie mai mult de rezultatele experimentale, comparativ cu cazul unidimensional, atît în domeniul elastic cît și în cel plastic.

Totuși, în lucrarea lui Wood, unda fiind considerată plană în direcția axei barei, tensiunile tangențiale nu sînt luate în considerație. Tratarea completă a problemei axial simetrice în bare groase este expusă de Plass în 1960; în ecuații intervin patru componente ale tensiunii și cele patru componente corespunzătoare ale deformației, iar legea constitutivă utilizată este o generalizare a legii de tip Malvern. Astfel în domeniul plastic sînt satisfăcute relațiile

$$E_0\, \dot\varepsilon_x^p = g(\sigma_x - \sigma_{xs}),$$

$$E_0\, \dot\varepsilon_r^p = -\frac{1}{2}\, g(\sigma_x - \sigma_{xs}),$$

$$\dot\varepsilon_\theta^p = \dot\gamma_{rx}^p = 0,$$

unde g este o funcție liniară de $\sigma_x - \sigma_{xs}$, iar σ_{xs} limita de plasticitate la întindere-compresiune. Bineînțeles, ca în cazul unidimensional considerat de Malvern, undele obținute, cea longitudinală și cea transversală, au vitezele egale cu vitezele undelor elastice

$$c_1^2 = \frac{E_0(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$c_2^2 = \frac{G_0}{\rho} = \frac{E_0}{2\rho(1+\nu)}.$$

În lucrarea de față se reia cazul expus de Plass, renunțîndu-se însă la anumite simplificări utilizate de autor atît referitor la starea de tensiune și deformație cît și la legea constitutivă.

2°. ECUAȚIILE DE MIȘCARE ȘI DE CONTINUITATE

Bara fiind presupusă cilindrică, se utilizează, pentru ușurința calculului, coordonatele cilindrice r, θ, x (fig. 1). Dacă încărcarea la capătul barei este simetrică, suprafața laterală fiind liberă de tensiuni, atunci datorită simetriei, $\tau_{\theta x}$ şi $\tau_{\theta r}$ sînt nule; componentele deplasării sînt u_x şi u_r, iar deformaţiile şi vitezele vor fi date de relaţiile:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, && v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t},\\
&\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, && v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t},\\
&\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, &&\\
&\gamma_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}. &&
\end{aligned}
$$

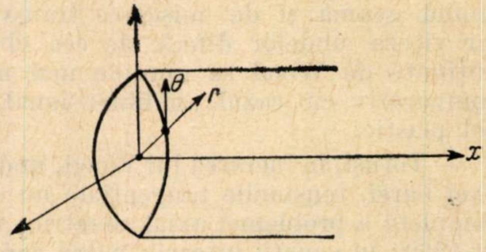


Fig. 1

Ecuaţiile de mişcare în coordonate cilindrice sînt:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\tau_{rx}}{r} = \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial t}\\
&\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho\,\frac{\partial v_r}{\partial t}
\end{aligned}
$$

şi pe baza relaţiilor (1), ecuaţiile de continuitate se scriu:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x},\\
&\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial r},\\
&\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} = \frac{v_r}{r},\\
&\frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Se presupune că materialul se comportă elastic pînă la atingerea limitei de plasticitate, iar descărcarea dintr-un stadiu plastic are loc, de asemenea, elastic. Deci, în domeniul elastic de încărcare comportamentul materialului este descris de legea lui Hooke:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&E_0\,\varepsilon_x^e = \sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta),\\
&E_0\,\varepsilon_r^e = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_x),\\
&E_0\,\varepsilon_\theta^e = \sigma_\theta - \nu(\sigma_x + \sigma_r),\\
&G_0\,\gamma_{rx}^e = \tau_{rx}.
\end{aligned}
$$

3°. LEGEA CONSTITUTIVĂ ÎN DOMENIUL PLASTIC

a) Dacă drept lege constitutivă în domeniul plastic se consideră o generalizare a legii utilizate de Malvern pentru cazul unidimensional, sub forma :

$$(5)\qquad \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}{\partial t} = g_{ij}(\sigma_x, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rx}, \varepsilon_x, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{rx}),$$

unde funcţiile g_{ij} depind de componentele tensiunii şi ale deformaţiei, şi sînt alese în mod convenabil din datele experimentale, atunci deformaţia totală este legată de tensiuni prin :

$$(6)\qquad \begin{aligned} &E_0 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \nu\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t}\right) = g_x, \\ &E_0 \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + \nu\left(\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial t}\right) = g_r, \\ &E_0 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + \nu\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial t}\right) = g_\theta, \\ &G_0 \frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial t} = g_{rx}. \end{aligned}$$

Sistemul format din relaţiile (2), (3), (6) conţine cele 10 funcţii necunoscute ale problemei : $\sigma_x, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rx}, \varepsilon_x, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{rx}, v_x, v_r$, iar pentru rezolvarea sa, se ataşează condiţiile iniţiale şi condiţiile la limită pe baza şi suprafaţa laterală a barei.

Caracteristicile acestui sistem sînt date de ecuaţiile

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{E_0(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}(\varphi_x^2 + \varphi_r^2) - \varphi_t^2 = 0, \\ &\frac{G_0}{\rho}(\varphi_x^2 + \varphi_r^2) - \varphi_t^2 = 0, \\ &\varphi_t = 0 \quad \text{(de 6 ori)}, \end{aligned}$$

unde $\varphi(x, r, t) = 0$ este suprafaţa caracteristică, iar φ_x, φ_r, φ_t derivatele parţiale ale funcţiei φ în raport cu x, r, t, respectiv.

Prima ecuaţie corespunde undelor longitudinale, ce se propagă cu viteza

$$(8)\qquad c_1^2 = \frac{E_0(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}$$

iar a doua, undelor transversale, a căror viteză este

$$c_2^2 = \frac{G_0}{\rho}. \tag{9}$$

Se observă că vitezele celor două unde sînt identice cu vitezele undelor elastice; acest lucru era de aşteptat, întrucît în relaţiile (5) derivatele parţiale ale deformaţiei plastice nu depind decît de tensiuni şi deformaţii, nu şi de derivatele lor.

Caracteristicile ale căror ecuaţii sînt date de primele două relaţii din (7), sînt conurile:

$$(x - x_0)^2 + (r - r_0)^2 - c_1^2(t - t_0)^2 = 0$$

$$(x - x_0)^2 + (r - r_0)^2 - c_2^2(t - t_0)^2 = 0.$$

Deci undele, în cazul cînd întreaga suprafaţă a secţiunii de capăt a barei este solicitată, vor fi două plane ce trec prin axa Or şi sînt înclinate faţă de axa Ot, cu un unghi de tangentă c_1 respectiv c_2, reprezentînd înfăşurătoarele undelor ce pleacă din fiecare punct al capătului lovit al barei.

Pentru a găsi relaţiile diferenţiale satisfăcute pe o suprafaţă caracteristică, se efectuează schimbarea de coordonate

$$x'_\alpha = x'_\alpha(x, r, t), \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{10}$$

astfel încît

$$x'_3 = \varphi(x, r, t). \tag{11}$$

Atunci x'_1 şi x'_2 vor fi coordonate pe suprafaţa caracteristică iar relaţiile căutate sînt:

— pentru unda longitudinală

$$\begin{aligned}
&\varphi_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x'_\beta} \cdot \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, t)} + \varphi_r \frac{\partial \sigma_r}{\partial x'_\beta} \cdot \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(r, t)} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x'_\beta}\left[\varphi_r \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, t)} + \right.\\
&\left. + \varphi_x \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(r, t)}\right] - \frac{\partial v_x}{\partial x'_\beta}\left[2G_0 \varphi_r \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, r)} - \rho\varphi_t \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, t)}\right] + \\
&+ \frac{\partial v_r}{\partial x'_\beta}\left[2G_0 \varphi_x \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, r)} + \rho\varphi_t \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(r, t)}\right] - \\
&- \frac{1}{1 + \nu}\left[\frac{(1 - \nu)\varphi_x^2 + \nu\varphi_r^2}{1 - 2\nu} g_x + \frac{\nu\varphi_x^2 + (1 - \nu)\varphi_r^2}{1 - 2\nu} g_r + \right.\\
&\left. + \frac{\nu}{1 - 2\nu}(\varphi_x^2 + \varphi_r^2)\left(g_\theta - \frac{E_0 v_r}{r}\right) - \frac{1 + \nu}{r}\varphi_t(\varphi_x \tau_{rx} + \varphi_r(\sigma_r - \sigma_\theta))\right] = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\beta = 1, 2$$

— pentru unda transversală

$$
\begin{aligned}
&\varphi_r \frac{\partial \sigma_x}{\partial x'_\beta} \cdot \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, t)} - \varphi_x \frac{\partial \sigma_r}{\partial x'_\beta} \cdot \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(r, t)} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x'_\beta}\left[- \varphi_x \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, t)} + \right.\\
&\left. + \varphi_r \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(r, t)}\right] + \frac{\partial v_x}{\partial x'_\beta}\left[\rho \varphi_t \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(r, t)} + 2\, G_0\, \varphi_x \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, r)}\right] + \\
&+ \frac{\partial v_r}{\partial x'_\beta}\left[- \rho \varphi_t \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, t)} + 2 G_0\, \varphi_r \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, r)}\right] + \\
&+ \left[\varphi_x\, \varphi_t \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \varphi_r\, \varphi_t \frac{\tau_{rx}}{r} + \varphi_x \varphi_r \frac{g_r - g_x}{1 + \nu} - (\varphi_x^2 - \varphi_r^2)\, g_{rx}\right] = 0, \quad \beta = 1, 2
\end{aligned} \tag{13}
$$

iar pentru $\varphi_t = 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x'_\beta} \cdot \frac{\partial x'_\beta}{\partial t} = \frac{v_r}{r}\\
&\left(G_0 \frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial x'_\beta} - \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x'_\beta}\right) \cdot \frac{\partial x'_\beta}{\partial t} = g_{rx}\\
&\left[\nu \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x'_\beta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial x'_\beta}\right) - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial x'_\beta}\right] \frac{\partial x'_\beta}{\partial t} = g_r - \frac{E_0}{r} v_r\\
&\frac{\partial}{\partial x'_\beta} \left[E_0\, \varepsilon_x - \sigma_x + \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\right] \frac{\partial x'_\beta}{\partial t} = g_x,\\
&\frac{\partial}{\partial x'_\beta} \left[E_0\, \varepsilon_r - \sigma_r + \nu(\sigma_x + \sigma_\theta)\right] \frac{\partial x'_\beta}{\partial t} = g_r,\\
&\left[\varphi_r^2 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x'_\beta} + \varphi_x^2 \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial x'_\beta} - \varphi_x\, \varphi_r \frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial x'_\beta}\right] \frac{\partial x'_\beta}{\partial t} - \frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, r)}\left[\varphi_r \frac{\partial v_x}{\partial x'_\beta} - \varphi_x \frac{\partial v_r}{\partial x'_\beta}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{14}
$$

În relațiile (12), (13) și (14) se face sumarea după β, cu $\beta = 1, 2$, iar $\frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, r)}$, $\frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(x, t)}$, $\frac{D(x'_\beta, \varphi)}{D(r, t)}$ reprezintă determinanții funcționali ai funcțiilor x'_β și φ relativ la variabilele x, r, t.

Salturile derivatelor funcțiilor necunoscute la traversarea unei suprafețe caracteristice, sînt date de :

$$
\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right] = h_j\, \varphi_{x_k}, \tag{15}
$$

unde u_j sînt funcțiile necunoscute, $j = 1, 2, \ldots, 10$, iar x_k variabilele independente x, r, t · h_j sînt soluțiile sistemului omogen

$$
\omega_{ij}\, h_j = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 10) \tag{16}
$$

cu ω_{ij} determinantul caracteristic al sistemului iniţial. Efectuînd calculul funcţiilor h_j din sistemul (16), se determină salturile proprii fiecărei suprafeţe caracteristice :

$$\begin{aligned}
h_{\sigma_x} &= AE_0\varphi_t^4\,[\rho(1-\nu^2)\,\varphi_t^2(G_0\varphi_x^2+G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)-E_0\varphi_r^2(G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)]\\
h_{\sigma_r} &= -AE_0\varphi_t^4\,[-\rho\varphi_t^2\nu(1+\nu)\,(G_0\varphi_x^2+G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)+E_0G_0\varphi_x^2\,\varphi_r^2]\\
h_{\sigma_\theta} &= A\nu E_0\varphi_t^4\,[\rho(1+\nu)\,\varphi_t^2-E_0\varphi_r^2]\,(G_0\varphi_x^2+G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)\\
h_{\tau_{rx}} &= -AE_0G_0\varphi_x\varphi_r\varphi_t^4\,[\rho(1+\nu)\,\varphi_t^2-E_0\varphi_r^2]\\
h_{\varepsilon_x} &= A(1+\nu)\,\varphi_t^4\,\{(G_0\varphi_x^2+G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)\,[\rho\varphi_t^2\,(2\nu^2+\nu-1)-\nu E_0\varphi_r^2]-\\
&\quad -E_0\varphi_r^2(\rho\varphi_t^2-G_0\varphi_r^2)\}\\
h_{\varepsilon_r} &= -A(1+\nu)\,\varphi_r^2\varphi_t^4\,[-\nu(G_0\varphi_x^2+G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)+G_0\varphi_x^2] \qquad (17)\\
h_{\varepsilon_\theta} &= 0 \text{ pt. } \varphi_t\neq 0\\
h_{\varepsilon_\theta} &\neq 0 \text{ pt. } \varphi_t=0\\
h_{\gamma_{rx}} &= -AE_0\varphi_x\varphi_r\varphi_t^4\,[\rho\varphi_t^2(1+\nu)-E_0\varphi_r^2]\\
h_{v_x} &= A(1+\nu)\,E_0\varphi_x\varphi_t^5[(1-\nu)\,(G_0\varphi_x^2+G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)+G_0\varphi_r^2]\\
h_{v_r} &= A(1+\nu)\,E_0\varphi_r\varphi_t^5\,[-\nu(G_0\varphi_x^2+G_0\varphi_r^2-\rho\varphi_t^2)+G_0\varphi_x^2]\\
A &= \text{const.}
\end{aligned}$$

Astfel, din expresiile funcţiilor h_j se deduce că unda longitudinală poartă discontinuităţile derivatelor tuturor funcţiilor necunoscute, în afară de derivatele lui ε_θ care sînt continue la traversarea acestei unde.

Unda transversală poartă aceleaşi discontinuităţi, însă în afară de derivatele lui ε_θ, la traversarea acestei unde sînt continue şi derivatele lui σ_θ.

În ceea ce priveşte discontinuitatea staţionară $\varphi_t = 0$, la traversarea ei sînt continue toate derivatele în raport cu timpul şi derivatele celor două viteze v_x şi v_r.

Se remarcă faptul că undele sînt cuplate, neexistînd unde de dilatare şi de forfecare distincte.

b) Dacă în loc de a considera drept funcţii necunoscute componentele ε_{ij} ale deformaţiei totale, se consideră în mod distinct partea elastică ε_{ij}^e, prin relaţiile (4) şi partea plastică ε_{ij}^p, prin relaţiile (5), sistemul obţinut posedă aceleaşi caracteristici ca şi în cazul a).

Datorită formei speciale a relaţiilor (5), din (15) rezultă imediat că discontinuităţile derivatelor deformaţiei plastice apar numai în lungul caracteristicelor $\varphi_t=0$; discontinuităţile derivatelor deformaţiei elastice se propagă de-a lungul tuturor caracteristicilor în mod analog cu cazul elastic.

c) O altă relaţie posibilă între tensiuni şi deformaţii se obţine prin generalizarea legii unidimensionale cvasiliniare :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = f(\sigma,\varepsilon)\,\frac{\partial\sigma}{\partial t} + g(\sigma,\varepsilon). \tag{18}$$

În cazul de față, legea constitutivă are forma:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = f_{ij}^{kl} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial t} + g_{ij} \tag{19}$$

cu sumare după indicii k și l; funcțiile f_{ij}^{kl} și g_{ij} depind de toate componentele tensiunii și deformației. Relațiile (19) se scriu detaliat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} &= f_{11} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + f_{12} \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + f_{13} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + f_{14} \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial t} + g_x \\
\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} &= f_{21} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + f_{22} \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + f_{23} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + f_{24} \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial t} + g_r \\
\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} &= f_{31} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + f_{32} \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + f_{33} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + f_{34} \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial t} + g_\theta \\
\frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial t} &= f_{41} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + f_{42} \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + f_{43} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} + f_{44} \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial t} + g_{rx}
\end{aligned} \tag{20}$$

Adăugînd (20) la relațiile (2) și (3), se obține sistemul de ecuații necesar pentru rezolvarea problemei; spre deosebire însă de cazul a), determinantul caracteristic al acestui sistem nu mai poate fi pus sub forma unui produs, deci suprafețele caracteristice ale sistemului nu mai pot fi separate în mod distinct decît dacă funcțiile f_{ij} îndeplinesc două condiții suplimentare.

Într-adevăr, determinantul sistemului este de forma

$$\begin{aligned} D = {} & a\varphi_x^4 + c\varphi_r^4 + \rho^2\varphi_t^4 + b\varphi_x^2\,\varphi_r^2 + \rho d\varphi_x^2\,\varphi_t^2 + \rho e\varphi_r^2\,\varphi_t^2 + \\ & + f\varphi_x^3\varphi_r + g\varphi_x\varphi_r^3 + \rho h\varphi_x\varphi_r\varphi_t^2, \end{aligned} \tag{α}$$

unde $a, b, c, \ldots, h$ sînt funcții de minorii determinantului

$$F = |f_{ij}|.$$

Expresia de mai sus a lui D poate fi pusă sub forma unui produs

$$D = [a_1\varphi_x^2 + b_1\varphi_x\,\varphi_r + c_1\varphi_r^2 + \rho\varphi_t^2]\,[a_2\varphi_x^2 + b_2\varphi_x\varphi_r + c_2\varphi_r^2 + \rho\varphi_t^2] \tag{β}$$

numai dacă funcțiile $a, b, c, \ldots, h$ satisfac două relații suplimentare ce se obțin din identificarea celor două expresii (α) și (β).

Aceste două condiții suplimentare reprezintă anumite restricții impuse anizotropiei materialului. În caz contrar, propagarea discontinuităților nu se mai face de-a lungul unor suprafețe distincte.

În cazul particular

$$f_{i4} = f_{4i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{21}$$

cele două condiții suplimentare ce trebuie satisfăcute de funcțiile f_{ij}, se reduc la una singură

$$F_{23}^{13} + F_{13}^{23} + f_{33}f_{44} = F_{13}^{13} + F_{23}^{23}, \tag{22}$$

unde

$$F^{ij}_{kl} = \begin{vmatrix} f_{ik} & f_{il} \\ f_{jk} & f_{jl} \end{vmatrix} \tag{23}$$

iar suprafețele caracteristice sînt date de ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho f_{44}}(\varphi_x^2+\varphi_r^2)+\varphi_t^2=0 \\ &\frac{1}{\rho F^{123}_{123}}[F^{23}_{23}\varphi_x^2+F^{13}_{13}\varphi_r^2]+\varphi_t^2=0 \\ &\varphi_t=0 \end{aligned} \tag{24}$$

cu

$$F^{123}_{123} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

Din a doua relație din (24) se observă imediat că vitezele de propagare în direcțiile x și r nu mai sînt în general egale, ca în cazul precedent, deoarece F^{13}_{13} și F^{23}_{23} pot fi diferiți; de asemenea aceste viteze nu mai sînt constante, ci depind de punctul respectiv de pe suprafața caracteristică. Prima ecuație din (24) corespunde undei transversale, iar a două undei longitudinale.

În cazul a) condiția (22) reprezenta binecunoscuta legătură între modulul lui Young E_0 și modulul de forfecare G_0 :

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}.$$

Primită la redacție la 7 octombrie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47,
București

BIBLIOGRAFIE

1. Х. А. Рахматулин, *О распространении волны разгрузки*. П. М. М., **IX**, *1* (1945).
2. В. В. Соколовский, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*. П. М. М., **XII**, *3* (1948).
3. L. E. Malvern, *The Propagation of Longitudinal Waves of Plastic Deformation in a Bar of Material Exhibiting a Strain Rate Effect*. J. Appl. Mech., **18**, *2* (1951).
4. N. Cristescu, *On the propagation of elastic plastic waves in metallic rods*. Bull. Acad. Polon., Sér. Sci. Techn., **XI**, *4* (1963).
5. D. S. Wood, *On Longitudinal Plane Waves of Elastic-Plastic Strain in Solids*. J.Appl. Mech., **19**, *4* (1952).
6. H. J. Plass Jr., *Current Research on Plastic Wave Propagation at the University of Texas*. Plásticity, 1960.

ASUPRA FUNCŢIILOR OLOMORFE (α)-VECTORIALE

DE

IOANA CIORĂNESCU

În lucrarea de faţă vom studia raportul ce există între olomorfia (α) în sens tare şi cea în sens slab a unei funcţii de variabilă complexă cu valori într-un spaţiu local convex cvasicomplet. Vom stabili o serie de proprietăţi în legătură cu aceasta legate de polinoamele areolare vectoriale, ce pot fi folosite în unele ecuaţii cu derivate areolare, în cadrul vectorial.

Noţiunea de derivată areolară a fost introdusă pentru prima dată de D. Pompeiu [1], [2] sub forma ei restrînsă şi ea a fost dezvoltată de N. Teodorescu în teza sa de doctorat [3], cu aplicaţii la teoria sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale din elasticitate şi hidrodinamică.

O contribuţie importantă în dezvoltarea ulterioară a teoriei derivatei areolare a fost adusă de lucrările lui Gr. G. Mosil, M. Nicolescu, Vekua şi de lucrările mai recente ale lui N. Teodorescu.

O extindere a noţiunii de derivată areolară la funcţiile de variabilă complexă cu valori într-un spaţiu Banach a fost făcută de Lilly Jeanne Nicolescu [4], obţinînd o serie de rezultate analoage cu cele din cazul scalar.

Vom relua cîteva definiţii ce sînt cuprinse şi în [4] (pentru cazul unui spaţiu Banach).

Fie $f(z)$ o funcţie de variabilă complexă definită şi continuă pe o mulţime E din planul complex cu valori într-un spaţiu local convex, cvasicomplet $\mathfrak{X}$.

Definiţia 1. Vom spune că funcţia $f(z)$ admite o derivată areolară în sens tare în punctul $z_0 \in E$ dacă există un element $\varphi(z_0) \in \mathfrak{X}$, astfel încît :

$$(1) \qquad \frac{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{\delta} \mathrm{d}\omega} - \varphi(z_0)$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 839–844, BUCUREŞTI, 1966

tinde în sens tare către zero, în spaţiul $\mathfrak{X}$ cînd diametrul domeniului δ, mărginit de curba simplă rectificabilă γ (care conţine punctul z_0) tinde la zero.

Funcţia $f(z)$ se numeşte în acest caz monogenă (α) în sens tare în punctul z_0.

DEFINIŢIA 2. O funcţie monogenă (α) în sens tare pe o mulţime deschisă $D \subset E$, a cărei derivată areolară este o funcţie vectorială continuă în sens tare pe D, se numeşte funcţie olomorfă (α) în sens tare în D.

DEFINIŢIA 1′. Dacă în aceleaşi condiţii ca în definiţia 1 expresia (1) este slab convergentă către zero în $\mathfrak{X}$, funcţia $f(z)$ se numeşte monogenă (α) în sens slab în punctul z_0.

DEFINIŢIA 2′. Funcţia $f(z)$, definită pe un domeniu E cu valori în spaţiul $\mathfrak{X}$, este olomorfă (α) în sens slab pe o mulţime deschisă $D \subset E$ dacă, pentru orice funcţională $x^* \in \mathfrak{X}$, funcţia scalară $x^*[f(z)]$ este o funcţie olomorfă (α).

Adoptăm notaţiile din [5] (Vekua).

Vom nota prin $C_{\bar{z}}(D; \mathfrak{X})$ clasa funcţiilor olomorfe (α) în sens tare în D şi cu valori în $\mathfrak{X}$, iar prin $C_{\bar{z}}^{k}(D; \mathfrak{X})$ clasa funcţiilor ce admit derivate areolare continue în sens tare pînă la ordinul k inclusiv.

PROPOZIŢIE. *Dacă funcţia $f(z)$ este olomorfă (α) în sens slab în domeniul D, atunci ea este o funcţie continuă în sens tare în D.*

Pentru demonstrarea acestui rezultat ţinem seama de o proprietate a funcţiilor olomorfe (α) scalare şi anume:

Dacă $\varphi(z)$ este o funcţie scalară olomorfă (α) într-un domeniu D, atunci pentru orice mulţime $\overline{\Delta} \subset D$, mărginită, are loc:

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leqslant M\,|z_2 - z_1|\;|\lg \alpha\,|z_2 - z_1||, \tag{2}$$

unde z_1 şi z_2 sînt arbitrari în Δ iar M şi α sînt două constante pozitive independente de z_1 şi z_2.

Cum pentru orice $x^* \in \mathfrak{X}^*$, $x^*[f(z)]$ este o funcţie olomorfă (α) scalară în D, avem:

$$|x^*[f(z)] - x^*[f(z+h)]| \leqslant M\,|h|\;|\lg \alpha\,|h||$$

pentru orice z, $z + h \in \Delta$, $\overline{\Delta} \subset D$, unde M şi α depind numai de x^*, f şi Δ, dar nu şi de h. Fie acum $h \to 0$; evident, mulţimea

$$\left\{\frac{f(z) - f(z+h)}{h \lg \alpha\,|h|}\right\}_{h \to 0}$$

este slab mărginită în $\mathfrak{X}$, deci ea este mărginită şi în sens tare. Aşadar, oricare ar fi vecinătatea U a originei lui $\mathfrak{X}$ dintr-un sistem fundamental de vecinătăţi, există $\lambda > 0$, astfel încît:

$$\frac{f(z) - f(z+h)}{h \lg \alpha\,|h|} \in \lambda U$$

sau

$$f(z) - f(z+h) \in |h|\;|\lg \alpha\,|h||\cdot \lambda U$$

de unde, pentru h suficient de mic încît

$$|h|\,|\lg \alpha\,|h|\,|\,\lambda \leqslant 1,$$

avem

$$f(z) - f(z+h) \in U,$$

ceea ce arată că $f(z)$ e o funcţie continuă în orice domeniu Δ mărginit, $\overline{\Delta} \subset D$.

Vom demonstra acum :

TEOREMĂ. *Dacă funcţia $f(z)$ de variabilă complexă cu valori în spaţiul local convex cvasicomplet $\mathfrak{X}$ are proprietatea că pentru orice $x^* \in \mathfrak{X}^*$, funcţia scalară $x^*[f(z)] \in C^{l+1}_{\bar z}(D;\mathfrak{X})$, atunci $f(z) \in C^{l}_{\bar z}(D;\mathfrak{X})$, $l \geqslant 1$.*

Fie $f(z)$ cu proprietatea că $x^*[f(z)] \in C^{2}_{\bar z}(D;\mathfrak{X})$, oricare ar fi $x^* \in \mathfrak{X}^*$; să arătăm că $f(z)$ e derivabilă areolar în sens tare în D.

După propoziţia precedentă, rezultă că $f(z)$ este continuă, deci există $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, γ fiind o curbă simplă, rectificabilă din D şi avem

$$x^* \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma x^*[f(z)]\,\mathrm{d}z.$$

Ţinînd seama că pentru $x^* \in \mathfrak{X}^*$ avem :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma x^*[f(z)]\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}\iint_\delta \varphi(\nu)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

unde $\nu = \xi + i\eta$ iar φ e derivata areolară continuă a lui $x^*[f(z)]$ care este o funcţie olomorfă (α) scalară şi folosind inegalitatea (2) să evaluăm :

$$\left| x^*\left(\frac{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\,\delta} - \frac{\int_{\gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\,\delta'} \right) \right| = \left| \frac{\int_\gamma x^*[f(z)]\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\,\delta} - \frac{\int_{\gamma'} x^*[f(z)]\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\,\delta'} \right| =$$

$$= \left| \frac{\iint_\delta \varphi(\nu)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\text{măs}\,\delta} - \frac{\iint_{\delta'} \varphi(\nu)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{\text{măs}\,\delta'} \right| = |\varphi(\nu_0) - \varphi(\nu_0')| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot |\nu_0 - \nu_0'|\,|\lg \alpha\,|\nu_0 - \nu_0'||,$$

unde $\nu_0 \in \delta$, $\nu_0' \in \delta'$. Această inegalitate are loc pentru orice două perechi (γ, δ) şi (γ', δ').

Fie acum δ_n un şir regulat de domenii mărginite de curbele închise rectificabile γ_n tinzînd către un punct $z_0 \in D$.

După cele de mai sus, rezultă că mulţimea :

$$\left\{ \frac{1}{(\nu_n - \nu_m)\lg \alpha\,|\nu_n - \nu_m|}\left(\frac{\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\,\delta_n} - \frac{\int_{\gamma_m} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\,\delta_m} \right) \right\}_{n,\,m \in M}$$

cu $\nu_n \in \delta_n$, $\nu_m \in \delta_m$, este slab mărginită în $\mathfrak{X}$, deci ea e şi tare mărginită.

Aceasta înseamnă că pentru orice vecinătate U a originii lui $\mathfrak{X}$, dintr-un sistem fundamental de vecinătăţi, există $\lambda > 0$ astfel încît :

$$\frac{1}{(\nu_n - \nu_m)\lg\alpha\,|\nu_n - \nu_m|}\left(\frac{\int_{\gamma n} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_n} - \frac{\int_{\gamma m} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_m}\right) \in \lambda U$$

sau

$$\frac{\int_{\gamma n} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_n} - \frac{\int_{\gamma m} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_m} \in |\nu_n - \nu_m|\,|\lg\alpha\,|\nu_n - \nu_m||\,\lambda U$$

Pentru n şi m suficient de mari, putem obţine

$$|\nu_n - \nu_m|\,|\lg\alpha\,|\nu_n - \nu_m||\cdot\lambda \leqslant 1$$

şi deci

$$\frac{\int_{\gamma n} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_n} - \frac{\int_{\gamma m} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_m} \in U.$$

Aceasta înseamnă însă că şirul

$$\left\{\frac{\int_{\gamma n} f(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_n}\right\}_{n \in M}$$

este un şir Cauchy în spaţiul $\mathfrak{X}$, cvasicomplet şi deci acest şir are o limită. Se observă uşor că această limită este independentă de şirul regulat de domenii δ_n care tinde către punctul z_0, deoarece limita acestui şir în sens slab are această proprietate.

Prin urmare $f(z)$ este derivabilă areolar în orice punct din domeniul D. Să notăm cu $\frac{D}{D\bar{z}}f$ derivata areolară a lui $f(z)$; aceasta la rîndul ei este o funcţie olomorfă (α) în sens slab în D şi prin urmare e continuă. Aşadar $f(z)$ este o funcţie olomorfă (α) în sens tare în D.

Fie acum $f(z)$ astfel încît $x^*[f(z)] \in C_{\bar{z}}^{l+1}(D;\ \mathfrak{X})$ pentru orice $x^* \in \mathfrak{X}^*$; după cele demonstrate, rezultă că $f \in C_{\bar{z}}(D;\ \mathfrak{X})$ iar derivata sa areolară $\frac{D}{D\bar{z}}f$ are proprietatea că $x^*\left(\frac{D}{D\bar{z}}f\right) \in C_{\bar{z}}^{l}(D;\ \mathfrak{X})$ pentru orice $x^* \in \mathfrak{X}^*$. Analog rezultă că $\frac{D}{D\bar{z}}f$ este de clasă $C_{\bar{z}}(D;\mathfrak{X})$ şi deci $f \in C_{\bar{z}}^{2}(D;\ \mathfrak{X})$, iar $x^*\left[\frac{D^2 f}{D\bar{z}^2}(z)\right] \in C_{\bar{z}}^{l-1}(D;\ \mathfrak{X})$ pentru orice $x^* \in \mathfrak{X}^*$.

După $l-1$ etape găsim că $f \in C_{\bar{z}}^{l-1}(D;\ \mathfrak{X})$ iar $x^*\left[\frac{D^{l-1}}{D\bar{z}^{l-1}}f\right] \in C_{\bar{z}}^{2}(D;\ \mathfrak{X})$

deci există :

$$\frac{D}{D\bar{z}}\left(\frac{D^{l-1}}{D\bar{z}^{l-1}}f\right)=\frac{D^{l}f}{D\bar{z}^{l}}$$

şi aceasta este continuă, aşadar $f \in C^{l}_{\bar{z}}\ (D\,;\ \mathfrak{X})$.

COROLAR. *Funcția* $f(z) \in C^{\infty}_{\bar{z}}\ (D\,;\ \mathfrak{X})$ *dacă și numai dacă pentru orice* x^*, $x^*\ [f\ (z)] \in C^{\infty}_{\bar{z}}\ (D\,;\ \mathfrak{X})$.

DEFINIȚIA 3. Se numeşte polinom areolar de ordin n în sens tare într-un domeniu D, o funcţie $f(z)$ care admite n derivate areolare succesive în sens tare în D, derivata de ordin n fiind o funcţie olomorfă în D.

DEFINIȚIA 3′. Vom numi polinom areolar de ordin n în sens slab în D, o funcţie $f(z)$ cu proprietatea că pentru orice $x^* \in \mathfrak{X}^*$, $x^*\ [f(z)]$ e un polinom areolar de ordin n scalar.

TEOREMĂ. *Funcția* $f(z)$ *cu valori în* $\mathfrak{X}$ *este un polinom areolar de ordin* n *în sens tare în* D *dacă și numai dacă* $f(z)$ *este un polinom areolar de ordin* n *în sens slab în* D.

Cum $x^*\ [f(z)] \in C^{n}_{\bar{z}}\,(D\,;\ \mathfrak{X})$, oricare ar fi $x^* \in \mathfrak{X}^*$, rezultă că $f(z) \in C^{n-1}_{\bar{z}}(D\,;\ \mathfrak{X})$ după teorema precedentă. Fie

$$\varphi\,(z)=\frac{D^{n-1}f\,(z)}{D\bar{z}^{n-1}}.$$

Avem :

$$\left|\,x^*\left(\frac{\int_{\gamma_n}\varphi\,(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_n}\right)-x^*\left(\frac{\int_{\gamma_m}\varphi\,(z)\,\mathrm{d}z}{\text{măs}\ \delta_m}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\iint_{\delta_n}\frac{Dx^*\ [\varphi]}{D\bar{z}}(\nu)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,\eta}{\text{măs}\ \delta_n}-\frac{\iint_{\delta_m}\frac{Dx^*\ [\varphi]}{D\bar{z}}(\nu)\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{d}\,\eta}{\text{măs}\ \delta_m}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{Dx^*\ [\varphi]}{D\bar{z}}\right)(\nu_n)-\left(\frac{Dx^*\ [\varphi]}{D\bar{z}}\right)(\nu_m)\right|\leqslant M\,|\,\nu_n-\nu_m\,|\,|\ln\alpha\,|\,\nu_n-\nu_m|\,|,$$

unde M depinde numai de x^*, Δ și φ, pentru n și m suficient de mari, deoarece $\dfrac{Dx^*\ [\varphi]}{D\bar{z}}$ este o funcţie olomorfă în D; $\nu_n \in \delta_n$, $\nu_m \in \delta_m$ iar δ_n e un șir regulat de domenii mărginite de curbele γ_n, tinzînd către z_0 arbitrar în $\overline{\Delta} \subset D$.

Putem continua raţionamentul din teorema 1 și va rezulta că $\varphi\ (z)$ e derivabilă areolar în sens tare în D, deci există $\dfrac{D}{D\bar{z}}\ \varphi\ (z)$, care este o funcţie olomorfă în sens slab în $\mathfrak{X}$; datorită echivalenţei olomorfei slabe cu cea tare în spaţiile local convexe [5], rezultă că $\dfrac{D^{n}f}{D\bar{z}^{n}}$ este o funcţie olomorfă şi în topologia tare, deci $f(z)$ e un polinom areolar în sens tare de ordin n în D.

COROLAR. *Funcţia* $f(z)$ *verifică în domeniul* D *ecuaţia*

$$\frac{D^{n+1} f(z)}{D\bar{z}^{n+1}} = 0$$

dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in \mathfrak{X}^*$, *ea verifică ecuaţiile scalare*:

$$\frac{D^{n+1} x^* [f(z)]}{D\bar{z}^{n+1}} = 0.$$

Primită la redacţie la 14 septembrie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. D. POMPEIU, *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rend. del Circolo Math. di Palermo, **33**, 108—113 (1912).
2. D. POMPEIU, *Sur une classe de fonction d'une variabile complexe, et sur certaines equations integrales.* Rend. del Circolo Math. di Palermo, **33** (1913).
3. N. TEODORESCU, *Thèse — La dérivée areolaire et ses applications à la Physique Mathematique,* Paris, 1931.
4. LILLY JEANNE NICOLESCU, *Derivata areolară a funcţiilor de o variabilă complexă cu valori într-un spaţiu Banach.* Com. Acad. R.P.R., **IX**, *10* (1959).
5. I. N. VEKUA, *Ододщение аналитические функции.* Москва, 1959.
6. SHIBATA, *On vector valued fonctions.* Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, **5**, 20—32 (1955).

ASUPRA UNEI INEGALITĂȚI DIN TEORIA APROXIMĂRII FUNCȚIILOR DE DOUĂ VARIABILE PRIN POLINOAMELE LUI BERNSTEIN

DE

GRIGOR MOLDOVAN și ILIE RÎP
(Cluj)

În lucrare se stabilește inegalitatea (29) care dă o delimitare a erorii ce se comite prin înlocuirea derivatei de ordinul $r + s$ a unei funcții $f(x, y)$, continuă împreună cu derivatele sale pînă la ordinul $r + s$ pe domeniul $\Delta : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$, cu derivata de ordinul $r + s$ a polinomului lui Bernstein $B_{m,n}(x, y ; f)$ atașat ei. În cazul particular $r = 0$, $s = 0$ s-a obținut inegalitatea (31), în care constanta ce multiplică modulul de continuitate este mai mică decît cea din inegalitatea (4) stabilită de A. F. Ipatov.

1. O funcție $f(x, y)$ reală și continuă, definită pe o mulțime D închisă și mărginită, poate fi, conform teoremei lui Weierstrass, aproximată uniform de un șir de polinoame. În cele ce urmează în locul mulțimii compacte D vom considera pătratul $\Delta : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$.

O clasă de polinoame folosite pentru aproximarea funcțiilor continue sînt cunoscutele polinoame ale lui Bernstein. Polinomul lui Bernstein de grad (m, n) atașat funcției $f(x, y)$ continuă pe pătratul Δ este

$$B_{m,n}(x, y ; f) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} p_{m,i}(x)\, p_{n,j}(y)\, f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right), \tag{1}$$

unde

$$p_{k,l}(u) = \binom{k}{l} u^{l} (1-u)^{k-l}. \tag{2}$$

Delimitarea erorii de aproximație a funcției $f(x, y)$ prin polinomul $B_{m,n}(x, y ; f)$ poate fi exprimată cu ajutorul modulului de continuitate al acestei funcții

$$\omega(\delta_1, \delta_2) = \max_{\substack{|x_1 - x_2| \leqslant \delta_1 \\ |y_1 - y_2| \leqslant \delta_2 \\ (x_1, y_1),\, (x_2, y_2) \in \Delta.}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)|\ , \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 845–853, BUCUREȘTI, 1966

Astfel, în 1955 A. F. Ipatov [1] a stabilit inegalitatea

$$(4)\qquad |f(x, y) - B_{m,n}(x, y; f)| \leqslant 2\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Se ştie că o inegalitate de acest tip, pentru funcţii de o singură variabilă, a fost obţinută pentru prima dată în 1935 de acad. T. Popoviciu [3]. Se cunosc de asemenea şi alte inegalităţi de acest fel, pentru cazul cînd se consideră o altă definiţie pentru modulul de continuitate şi o altă definiţie pentru polinomul lui Bernstein. Amintim în acest sens lucrările lui D. D. Stancu şi F. Schurer [6].

Considerînd derivata de ordinul $r + s$ a funcţiei $f(x, y)$ continuă, D. D. Stancu [5] a obţinut

$$(5)\qquad |f^{(r,s)}(x, y) - B^{(r,s)}_{m,n}(x, y; f)| < A^{r,s}_{m,n}\,\omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + B^{r,s}_{m,n}\,M_{r,s}(f),$$

în care

$$(6)\qquad A^{r,s}_{m,n} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4r^2 - r}{m}} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4s^2 - s}{n}} + \frac{r}{\sqrt{m}} + \frac{s}{\sqrt{n}},$$

$$(7)\qquad B^{r,s}_{m,n} = \frac{r(r-1)}{2m} + \frac{s(s-1)}{2n} + \frac{r(r-1)}{2m}\cdot\frac{s(s-1)}{2n},$$

$$(8)\qquad M_{r,s}(f) = \sup_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1\\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} |f^{(r,s)}(x, y)|,$$

iar

$$(9)\qquad f^{(r,s)}(x, y) = \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r\,\partial y^s}$$

şi

$$(10)\qquad B^{(r,s)}_{m,n}(x, y; f) = \frac{\partial^{r+s} B_{m,n}(x, y; f)}{\partial x^r\,\partial y^s}.$$

Cu $\omega_{r,s}(\delta_1, \delta_2)$ s-a notat modulul de continuitate al funcţiei $f^{(r,s)}(x, y)$.

Se observă că pentru $r = s = 0$, din (5) rezultă inegalitatea (4).

Scopul acestei lucrări este de a stabili o inegalitate de tipul (5), care în cazul particular $r = s = 0$ să constituie o îmbunătăţire a inegalităţii (4). Totodată se extind rezultatele lucrării [2] la funcţii de două variabile.

2. Derivata de ordinul (r, s) $(0 \leqslant r \leqslant m;\ 0 \leqslant s \leqslant n)$ a polinomului lui Bernstein ataşat funcţiei $f(x, y)$ poate fi scrisă astfel

$$(11)\qquad B^{(r,s)}_{m,n}(x, y; f) = C(m, r)\,C(n, s)\sum_{i=0}^{m-r}\sum_{j=0}^{n-s} p_{m-r,i}(x)\,p_{n-s,j}(y)\,f^{(r,s)}\left(\frac{i + \theta_i r}{m}, \frac{j + \theta'_j s}{n}\right).$$

La această expresie s-a ajuns aplicînd o cunoscută teoremă de medie generalizată şi notînd

$$(12)\qquad \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\rho-1}{\nu}\right)=C(\nu,\rho),\ C(\nu,0)=C(\nu,1)=1.$$

Se introduce polinomul

$$(13)\qquad P^{r,s}_{m,n}(x,y)=\frac{1}{C(m,r)\,C(n,s)}\,B^{(r,s)}_{m,n}(x,y\,;f).$$

Atunci, uşor se constată că avem

$$(14)\qquad \begin{aligned} |f^{(r,s)}(x,y)-B^{(r,s)}_{m,n}(x,y\,;f)| &\leqslant |f^{(r,s)}(x,y)-P^{r,s}_{m,n}(x,y)|+\\ &+[1-C(m,r)\,C(n,s)]\cdot|P^{r,s}_{m,n}(x,y)|. \end{aligned}$$

Ţinînd seama de (11), de notaţiile (8) şi (13) şi de identitatea

$$(15)\qquad \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{m,i}(x)\,p_{n,j}(y)=1$$

se obţine

(16)

$$|P^{r,s}_{m,n}(x,y)|\leqslant\sum_{i=0}^{m-r}\sum_{j=0}^{n-s}p_{m-r,i}(x)\,p_{n-s,j}(y)\left|f^{(r,s)}\left(\frac{i+\theta_i r}{m},\frac{j+\theta'_j s}{n}\right)\right|\leqslant M_{r,s}(f).$$

De asemenea tot din [5] ne este cunoscută inegalitatea

$$(17)\qquad 1-C(m,r)\,C(n,s)\leqslant\frac{r(r-1)}{2m}+\frac{s(s-1)}{2n}+\frac{r(r-1)}{2m}\cdot\frac{s(s-1)}{2n}\,.$$

Pe baza relaţiilor (16) şi (17), inegalitatea (14) devine

$$(18)\qquad |f^{(r,s)}(x,y)-B^{(r,s)}_{m,n}(x,y\,;f)|\leqslant|f^{(r,s)}(x,y)-P^{r,s}_{m,n}(x,y)|+B^{r,s}_{m,n}M_{r,s}(f).$$

Urmează să se dea o delimitare pentru

$$|f^{(r,s)}(x,y)-P^{r,s}_{m,n}(x,y)|\,.$$

În acest scop se vor folosi următoarele proprietăţi ale modulului de continuitate

$$(\mathrm{I})\qquad |f^{(r,s)}(x_1,y_1)-f^{(r,s)}(x_2,y_2)|\leqslant\omega_{r,s}(|x_1-x_2|,\,|y_1-y_2|),$$

$$(\mathrm{II})\qquad \omega(\lambda_1\delta_1,\,\lambda_2\delta_2)\leqslant(]\lambda_1[+]\lambda_2[+1)\,\omega(\delta_1,\,\delta_2)\quad(\delta_1,\,\delta_2>0)$$

pentru $\lambda_1\geqslant 0$, $\lambda_2\geqslant 0$. $]\lambda[$ este cel mai mare număr întreg strict mai mic decît λ.

Prima proprietate este evidentă, iar a doua rezultă imediat ţinînd seama de monotonia modulului de continuitate, de inegalitatea

$$]\lambda[+1\geqslant\lambda,\qquad(\lambda>0)$$

şi de proprietatea

$$\omega(p_1\delta_1,\ p_2\delta_2) \leqslant (p_1 + p_2 - 1)\,\omega(\delta_1,\ \delta_2) \tag{19}$$

(p_1, p_2 sînt numere întregi nenegative) demonstrată de Ipatov [1]. Deci

$$\omega(\lambda_1\delta_1,\ \lambda_2\delta_2) \leqslant \omega(\overline{]\lambda_1[\ +1}\ \delta_1,\ \overline{]\lambda_2[\ +1}\ \delta_2) \leqslant$$

$$\leqslant (]\lambda_1[\ +\ ]\lambda_2[\ + 1)\,\omega(\delta_1,\ \delta_2).$$

Putem scrie

$$|f^{(r,s)}(x,y) - P^{r,s}_{m,n}(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m-r}\sum_{j=0}^{n-s} \left|f^{(r,s)}(x,y) - f^{(r,s)}\left(\frac{i+\theta_i r}{m},\ \frac{j+\theta'_j s}{n}\right)\right| p_{m-r,i}(x)\,p_{n-s,j}(y), \tag{20}$$

unde s-a ţinut seama de identitatea (15).

Proprietatea (I) ne îndreptăţeşte să scriem că

$$\left|f^{(r,s)}(x,y) - f^{(r,s)}\left(\frac{i+\theta_i r}{m},\ \frac{j+\theta'_j s}{n}\right)\right| \leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant \omega_{r,s}\left(\left|x - \frac{i+\theta_i r}{m}\right|,\ \left|y - \frac{j+\theta'_j s}{n}\right|\right) \leqslant \omega_{r,s}\left(\left|x - \frac{i}{m-r}\right| + \frac{r}{m},\ \left|y - \frac{j}{n-s}\right| + \frac{s}{n}\right).$$

Ultimul termen al acestui şir de inegalităţi s-a obţinut avînd în vedere că dacă $0 \leqslant k \leqslant l - t$ şi $0 < t \leqslant l$, atunci

$$\left|z - \frac{k+\theta t}{l}\right| = \left|z - \frac{k}{l-t} + \frac{t}{l}\left(\frac{k}{l-t} - \theta\right)\right| < \left|z - \frac{k}{l-t}\right| + \frac{t}{l},\quad 0 < \theta < 1.$$

Aplicînd proprietatea (II) şi folosind inegalităţile (21), din (20) se obţine succesiv

$$|f^{(r,s)}(x,y) - P^{r,s}_{m,n}(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m-r}\sum_{j=0}^{n-s}\left(1 + \left]\frac{\left|x - \dfrac{i}{m-r}\right| + \dfrac{r}{m}}{\delta_1}\right[+ \left]\frac{\left|y - \dfrac{j}{n-s}\right| + \dfrac{s}{n}}{\delta_2}\right[\right)\cdot \tag{22}$$

$$\cdot\ \omega_{r,s}(\delta_1,\delta_2)\,p_{m-r,i}(x)\,p_{n-s,j}(y) = \left\{1 + \sum_{i=0}^{m-r}\left]\frac{\left|x - \dfrac{i}{m-r}\right| + \dfrac{r}{m}}{\delta_1}\right[\ p_{m-r,i}(x)\ +\right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{n-s}\left]\frac{\left|y - \dfrac{j}{n-s}\right| + \dfrac{s}{n}}{\delta_2}\right[\ p_{n-s,j}(y)\right\}\omega_{r,s}(\delta_1,\ \delta_2).$$

În al treilea termen al șirului de inegalități (22) s-a avut în vedere identitatea (15) și cea analoagă ei în cazul funcțiilor de o singură variabilă

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} p_{\nu,\lambda}(z) = 1.$$

Pentru prima sumă din paranteza acoladă a relației (22), pe care o notăm cu Σ_1, avem

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{1}{\delta_1}\sum_{i=0}^{m-r}{}'\left(\left|x-\frac{i}{m-r}\right|+\frac{r}{m}\right)p_{m-r,i}(x)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{m\delta_1}+\frac{1}{\delta_1}\sum_{i=0}^{m-r}{}'\left|x-\frac{i}{m-r}\right|p_{m-r,i}(x),$$

unde accentul indică faptul că însumarea se face numai pentru acei i pentru care

$$\left|x-\frac{i}{m-r}\right|+\frac{r}{m}>\delta_1. \tag{23}$$

Restul termenilor din Σ_1, pentru care nu are loc această inegalitate, sînt egali cu zero.

Analog pentru a doua sumă, Σ_2, se va indica prin accent faptul că ea se referă numai la acei indici j pentru care

$$\left|y-\frac{j}{n-s}\right|+\frac{s}{n}>\delta_2. \tag{24}$$

Astfel încît se poate scrie

$$|f^{(r,s)}(x,y)-P^{r,s}_{m,n}(x,y)|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{1+\frac{r}{m\delta_1}+\frac{s}{n\delta_2}+\frac{1}{\delta_1}\sum_{i=0}^{m-r}{}'\left|x-\frac{i}{m-r}\right|p_{m-r,i}(x)+\right. \tag{25}$$

$$\left.+\frac{1}{\delta_2}\sum_{j=0}^{n-s}\left|y-\frac{j}{n-s}\right|p_{n-s,j}(y)\right\}\omega_{r,s}(\delta_1,\ \delta_2).$$

3. Se ia

$$\delta_1=\frac{1}{\sqrt{m-r}}+\frac{r}{m}\ \text{ și }\ \delta_2=\frac{1}{\sqrt{n-s}}+\frac{s}{n}\,.$$

Fie k_1 valoarea cea mai mare a lui i pentru care este satisfăcută relația

$$x-\frac{i}{m-r}>\frac{1}{\sqrt{m-r}}$$

și l_1 valoarea cea mai mică a lui i pentru care are loc inegalitatea

$$\frac{i}{m-r} - x > \frac{1}{\sqrt{m-r}} .$$

Se observă că întregii pozitivi k_1 și l_1 au valorile

$$k_1 = \,]\, x(m-r) - \sqrt{m-r}\,[\, ,$$

$$l_1 = [x(m-r) + \sqrt{m-r} + 1]$$

(prin $[a]$ înțelegem partea întreagă a lui a).

Cu aceste notații prima sumă din membrul drept al relației (25) se poate scrie

$$\sum_{i=0}^{m-r}{}' = \sum_{i=0}^{k_1} + \sum_{i=l}^{m-r} , \text{ dacă } x \in ((m-r)^{-1/2}, 1-(m-r)^{-1/2}).$$

În cazul cînd $0 \leqslant x \leqslant (m-r)^{-1/2}$, atunci $\sum_{i=0}^{m-r}{}' = \sum_{i=l_1}^{m-r}$, iar dacă $1-(m-r)^{-1/2} \leqslant x \leqslant 1$, atunci $\sum_{i=0}^{m-r}{}' = \sum_{i=0}^{k_1}$. Acum, așa cum s-a făcut și în [4] și [2], această sumă se poate scrie astfel

$$\sum_{i=0}^{m-r}{}' = \binom{m-r-1}{k_1} x^{k_1+1}(1-x)^{m-r-k_1} + \binom{m-r-1}{l_1-1} x^{l_1}(1-x)^{m-r-l_1+1}. \tag{26}$$

Se introduce funcția

$$F_{m,r}^{k_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant (m-r)^{-1/2} \\ \binom{m-r-1}{k_1} x^{k_1+1}(1-x)^{m-r-k_1} & \text{dacă } (m-r)^{-1/2} < x \leqslant 1. \end{cases} \tag{27}$$

Atunci, suma pe care am luat-o în considerare mai sus, se poate scrie ([4], [2])

$$\sum_{i=0}^{m-r}{}' = F_{m,r}^{k_1}(x) + F_{m,r}^{k_1'}(1-x) , \text{ unde } k_1' = \,]\,(1-x)(m-r) - \sqrt{m-r}\,[,$$

În același fel, notînd

$$]\,y(n-s) - \sqrt{n-s}\,[\, = k_2 ,$$

$$[y(n-s) + \sqrt{n-s} + 1] = l_2 ,$$

a doua sumă din (25) o punem sub forma

$$\sum_{j=0}^{n-s}{}' = F_{n,s}^{k_2}(y) + F_{n,s}^{k_2'}(1-y), \text{ unde } k_2' = \,]\,(1-y)(n-s) - \sqrt{n-s}\,[.$$

Deci inegalitatea (25) devine

$$
\begin{aligned}
&|f^{(r,s)}(x,y)-P^{r,s}_{m,n}(x,y)|\leqslant\\
&\leqslant\Big\{1+\frac{r\sqrt{m-r}}{m+r\sqrt{m-r}}+\frac{s\sqrt{n-s}}{n+s\sqrt{n-s}}+\\
&+\frac{m}{m+r\sqrt{m-r}}\sqrt{m-r}\Big(F^{k_1}_{m,r}(x)+F^{k_1'}_{m,s}(1-x)\Big)+\\
&+\frac{n}{n+s\sqrt{n-s}}\sqrt{n-s}\Big(F^{k_2}_{n,s}(y)+F^{k_2'}_{n,s}(1-y)\Big)\Big\}\cdot\\
&\cdot\,\omega_{r,s}\Big(\frac{1}{\sqrt{m-r}}+\frac{r}{m},\ \frac{1}{\sqrt{n-s}}+\frac{s}{n}\Big).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Ştiind [4] că

$$\max\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\sqrt{\alpha-\beta}\,\{F^{k}_{\alpha,\beta}(u)+F^{k'}_{\alpha,\beta}(1-u)\}=S$$

$$(k=]u(\alpha-\beta)-\sqrt{\alpha-\beta}[,\quad k'=](1-u)(\alpha-\beta)-\sqrt{\alpha-\beta}[),$$

unde

$$S=\frac{20983\sqrt{6}-47022}{46656}$$

$$(S=0{,}093785\ldots)$$

inegalitatea de mai sus devine

$$
\begin{aligned}
&|f^{(r,s)}(x,y)-P^{r,s}_{m,n}(x,y)|\leqslant\\
&\leqslant\Big\{1+\frac{r\sqrt{m-r}+m\cdot S}{m+r\sqrt{m-r}}+\frac{s\sqrt{n-s}+n\cdot S}{n+s\sqrt{n-s}}\Big\}\cdot\\
&\cdot\,\omega_{r,s}\Big(\frac{1}{\sqrt{m-r}}+\frac{r}{m},\ \frac{1}{\sqrt{n-s}}+\frac{s}{n}\Big).
\end{aligned}
$$

În fine, din (18) şi (28), avem

$$
\begin{aligned}
&|f^{(r,s)}(x,y)-B^{(r,s)}_{m,n}(x,y;f)|\leqslant\\
&\leqslant K^{r,s}_{m,n}\,\omega_{r,s}\Big(\frac{1}{\sqrt{m-r}}+\frac{r}{m},\frac{1}{\sqrt{n-s}}+\frac{s}{n}\Big)+B^{r,s}_{m,n}\cdot M_{r,s}(f),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

unde

$$K_{m,n}^{r,s} = 1 + \frac{r\sqrt{m-r} + m \cdot S}{m + r\sqrt{m-r}} + \frac{s\sqrt{n-s} + n \cdot S}{n + s\sqrt{n-s}}, \tag{30}$$

iar $B_{m,n}^{r,s}$ este indicat de relația (7).

4. Din inegalitatea (29) pentru $r = s = 0$ obținem

$$|f(x, y) - B_{m,n}(x, y; f)| \leqslant (1 + 2S)\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{31}$$

unde coeficientul de multiplicare a modulului de continuitate, $1 + 2S = 1{,}187570\ldots$, este mai mic decît cel stabilit de Ipatov [1] (inegalitatea (4)).

De asemenea, dacă $f^{(r,s)}(x, y)$ satisface condiția lui Lipschitz

$$|f^{(r,s)}(x_1, y_1) - f^{(r,s)}(x_2, y_2)| < A\, |x_1 - x_2|^{\alpha} + B\, |y_1 - y_2|^{\beta}$$

$$(0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 < \beta \leqslant 1,\quad A > 0,\quad B > 0),$$

atunci

$$\omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m-r}} + \frac{r}{m}, \frac{1}{\sqrt{n-s}} + \frac{s}{n}\right) \leqslant A\left(\frac{1}{\sqrt{m-r}} + \frac{s}{m}\right)^{\alpha} + B\left(\frac{1}{\sqrt{n-s}} + \frac{s}{n}\right)^{\beta}$$

și inegalitatea (29) primește forma

$$\begin{gathered} |f^{(r,s)}(x, y) - B_{m,n}^{(r,s)}(x, y; f)| \leqslant \\ \leqslant K_{m,n}^{r,s}\left\{A\left(\frac{1}{\sqrt{m-r}} + \frac{r}{m}\right)^{\alpha} + B\left(\frac{1}{\sqrt{n-s}} + \frac{s}{n}\right)^{\beta}\right\} + B_{m,n}^{r,s} \cdot M_{r,s}(f). \end{gathered} \tag{32}$$

5. Dacă se ia

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{m-r}} \text{ și } \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{n-s}},$$

urmînd calea de la punctul **3** se obține

$$\begin{gathered} |f^{(r,s)}(x, y) - B_{m,n}^{(r,s)}(x, y; f)| \leqslant \\ \leqslant \left\{1 + \frac{r}{m}\sqrt{m-r} + \frac{s}{n}\sqrt{n-s} + M_{m,r} + M_{n,s}\right\} \cdot \omega_{r,s}\left(\frac{1}{\sqrt{m-r}}, \frac{1}{\sqrt{n-s}}\right) + \\ + B_{m,n}^{r,s} \cdot M_{r,s}(f), \end{gathered} \tag{33}$$

unde

$$M_{\alpha,\beta} = \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} \sqrt{\alpha - \beta}\, \{\mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{k}(u) - \mathcal{F}_{\alpha,\beta}^{k'}(1 - u)\},$$

iar

$$\mathcal{F}^{k}_{\alpha,\beta}(u) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dacă } \; 0 \leqslant u < \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} - \dfrac{\beta}{\alpha} \text{ și } \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} - \dfrac{\beta}{\alpha} > 0 \\ \dbinom{\alpha-\beta-1}{k} u^{k+1}(1-u)^{\alpha-\beta-k} & \text{dacă} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} - \dfrac{\beta}{\alpha} < u \leqslant 1 \text{ și } \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} - \dfrac{\beta}{\alpha} > 0 \\ 0 \leqslant u \leqslant 1 \; \text{ și } \; \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} - \dfrac{\beta}{\alpha} \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$k = \left] u(\alpha-\beta) + \sqrt{\alpha-\beta} - \frac{\beta(\alpha-\beta)}{\alpha} \right[$$

$$\text{și} \quad k' = \left] (1-u)\,(\alpha-\beta) + \sqrt{\alpha-\beta} - \frac{\beta(\alpha-\beta)}{\alpha} \right[.$$

Inegalitatea (33) este analoagă cu cele existente în literatură, avînd argumentele modulului de continuitate de o formă mai simplă.

Primită la redacţie la 29 octombrie 1965

Facultatea de Matematică-Mecanică
a Universităţii „Babeş-Bolyai'' Cluj.
Institutul de fizică atomică, secţia Cluj.

BIBLIOGRAFIE

1. А. Ф. Ипатов, *Оценка погрешности и порядок приближенных Функций двух переменных полиномами С. Н. Бернштейна.* Уч. Зап. Петрсзав. Госуд. Ун-та, 4, 31–48 (1963).
2. G. Moldovan, *Asupra aproximării funcţiilor continue prin polinoame Bernstein*, Studia Univ. „Babeş-Bolyai'', Seria Math. — Physica (sub tipar).
3. T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, **10**, 49–54 (1935).
4. P. C. Sikkema, *Über den Grad der Approximation mit Bernstein-Polynomen.* Numerische Math., **1**, 221–239 (1959).
5. D. D. Stancu, *Sur l'approximation des dérivées des fonctions par les Dérivées correspondantes de certains polynomes du type Bernstein.* Mathematica, **2(25)**, 335–348 (1960).
6. F. Schurer, *On the order of approximation with generalized Bernstein polynomials.* Indagationes Math., **24**, 484–488 (1962).

ASUPRA SINTEZEI MULTIPOLILOR $(p-q)$ CU CONTACTE FĂRĂ REPETIŢII

DE

ŞT. MITITELU

Lucrarea cuprinde două metode de sinteză pentru multipolii $(p-q)$ cu contacte fără repetiţii.

Prin aceste metode sinteza multipolilor cu contacte fără repetiţii este redusă la sinteza dipolilor de aceiaşi natură.

Prima metodă (Cap. I) permite construirea multipolului cînd se dau toate conductibilităţile χ_{ij} ale sale şi necesită cunoaşterea unui dipol cu contacte fără repetiţii care are funcţia de lucru $F = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1'}^{q'} a_i b_j \chi_{ij}$, unde a_i, b_j sînt diferite între ele şi nu apar în χ_{ij}.

A doua metodă (Cap. II) permite construirea multipolului cînd se dau $p+q-1$, conductibilităţi care verifică proprietatea (P).

Se arată că $p+q-1$ este numărul minim de conductibilităţi care verifică proprietatea (P) necesar pentru sinteza unui multipol $(p-q)$ cu contacte fără repetiţii.

INTRODUCERE

Multipolii cu contacte fără repetiţii sînt multipoli în care fiecare contact apare o singură dată.

Fiecărei variabile din conductibilităţile unui astfel de multipol îi corespunde în multipol un singur contact. Din această cauză realizarea unui multipol cu contacte fără repetiţii se face cu un număr minim de contacte.

Prin sinteza unui multipol cu contacte fără repetiţii înţelegem construirea unui astfel de multipol cînd se dau conductibilităţile sale.

În această lucrare sînt prezentate două metode de sinteză pentru multipolii cu contacte fără repetiţii. Prin aceste metode, sinteza multi-

ST. CERC. MAT.,TOM. 18, NR. 6, P. 855-867, BUCUREŞTI. 1966

polilor cu contacte fără repetiţii este redusă la sinteza dipolilor cu contacte fără repetiţii.

De aceea în consideraţiile ulterioare vom avea la bază teorema de izomorfism a dipolilor echivalenţi tare conecşi cu contacte fără repetiţii din [1]:

Teorema 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca dipolii fără repetiţii tare conecşi* $\mathcal{D}_1$ *şi* $\mathcal{D}_2$ *să fie echivalenţi, este ca ei să fie izomorfi sau să poată fi făcuţi izomorfi efectuînd un număr finit de operaţii de intervertire a subschemelor într-unul din cei doi dipoli.*

De asemenea vom avea nevoie de o metodă de sinteză pentru dipolii cu contacte fără repetiţii.

În această lucrare am folosit metoda dată de ing. I. Muntean în [2] care, deşi are dezavantajul că foloseşte tabloul lui Piesch cu care elementele iniţiale nu se pot determina decît pentru un număr restrîns de scheme, este destul de elegantă din punct de vedere matematic.

Iată punctele esenţiale ale acestei metode.

Se presupune că funcţia de lucru nu conţine elemente în serie sau în paralel; dacă există astfel de elemente, prin transformări simple, funcţia se aduce la forma cerută.

Dacă a, b,...,k sînt elementele iniţiale ale lui f, atunci

$$f = af[a] + bf[b] + \ldots + kf[k],$$

unde $f[i]$ este suma termenilor din f care conţin pe i şi în care se face $i = 1$.

Fie $a^i, b^i, \ldots, k^i$ elementele iniţiale în $f[i]$ şi fie N_i nodul corespunzător elementului i.

În aceste condiţii au loc teoremele:

Teorema 2. *Dacă* n *funcţii* $f[i]$ *au comune* p *braţe* $C^k (k = 1, 2, \ldots, p;$ $p \geqslant n - 1)$, *atunci există un circuit care conţine nodurile* $N_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ *şi braţele* C^k. *La fiecare nod* N_i *sînt legate cel mult două braţe* C^j, C^k. *Restul de braţe, unele sînt elemente iniţiale pentru* $f[i]$, *iar celelalte sînt în serie cu* C^j *sau* C^k.

În felul acesta fiecare nod N_i împarte mulţimea braţelor C^k în două clase şi fixează punctul de legare al elementului i în circuitul serie al elementelor C^k.

Teorema 3. *Dacă două elemente iniţiale* C^p *şi* C^q *ale funcţiilor* $f[p]$ *şi* $f[q]$ *sînt conectate între ele, atunci funcţiile* $f[p, C^p]$ *şi* $f[q, C^q]$ — *unde* $f[i, C^i]$ *este funcţia obţinută din* $f[i]$ *prin eliminarea tuturor elementelor iniţiale* C^k *în afară de* C^i *şi în care se scurtcircuitează* C^i — *au un circuit elementar identic.*

Pentru a putea folosi aceasta, trebuie să existe o conductibilitate a multipolului căreia să i se poată determina cele două grupe de elemente iniţiale şi finale folosind tabloul lui Piesch, aceasta referitor numai la a doua metodă de sinteză (Cap. II), căci la prima metodă (Cap. I), prin însăşi natura ei, se cunosc aceste elemente.

În elaborarea lucrării am primit un ajutor preţios din partea tov. ing. I. Muntean, căruia ţin să-i mulţumesc şi pe această cale.

CAPITOLUL I

În acest capitol este prezentată o metodă prin care sinteza multipolilor cu contacte fără repetiţii este redusă la sinteza dipolilor cu contacte fără repetiţii, în cazul cînd se dau toate conductibilităţile multipolilor.

Să construim un multipol $(p-q)$ cu contacte fără repetiţii ştiind că el realizează conductibilităţile $\chi_{ij}(i=1, 2, \ldots, p;\ j=1', 2', \ldots, q')$[1].

Rezultatul la această problemă este dat de următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Fie* χ_{ij} $(i=1, 2, \ldots, p;\ j=1', 2', \ldots, q')$ *conductibilităţile unui multipol* $(p-q)$ *cu contacte fără repetiţii şi fie* $\mathcal{D}$ *un dipol cu contacte fără repetiţii care realizează funcţia de lucru*

$$F=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1'}^{q'} a_i b_j \chi_{ij},$$

în care variabilele a_i *asociate elementelor iniţiale şi variabilele* b_j *asociate elementelor finale sînt diferite între ele şi altele decît cele care apar în* χ_{ij}.

Pentru a obţine schema multipolului, este suficient să deconectăm în dipolul $\mathcal{D}$ elementele a_i şi b_j, în care nodurile de deconectare a elementelor a_i constituie polii de intrare, iar nodurile de deconectare a elementelor b_j constituie polii de ieşire ai multipolului.

Demonstraţie. Presupunînd cunoscută schema multipolului, se conectează la nodurile de intrare elementele diferite $a_1, \ldots, a_p$, iar celelalte capete ale lor se conectează într-un singur nod $1''$, iar la nodurile de ieşire elementele $b_{1'}, \ldots, b_{q'}$ diferite între ele şi diferite de $a_1, \ldots, a_p$. Celelalte capete ale acestor elemente se conectează în nodul $2''$. Elementele $a_1, \ldots, a_p, b_{1'}, \ldots, b_{q'}$ sînt altele decît cele care apar în multipol.

Se obţine astfel dipolul $\mathcal{D}$ cu funcţia de lucru

$$F=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1'}^{q'} a_i \chi_{ij} b_j=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1'}^{q'} a_i b_j \chi_{ij}.$$

Conform teoremei 1, toţi dipolii cu contacte fără repetiţii care realizează funcţia de lucru F sînt izomorfi. Acest izomorfism al dipolilor

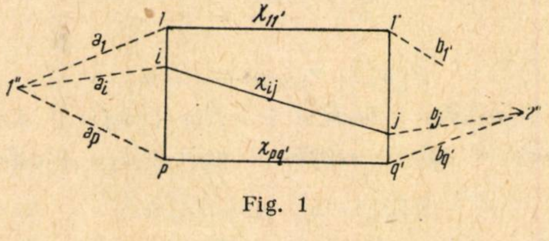


Fig. 1

care realizează pe F include şi izomorfismul multipolilor $(p-q)$ cu contacte fără repetiţii care realizează conductibilităţile χ_{ij}.

---

[1] Indicii cu accent sînt asociaţi polilor de ieşire.

Deconectînd elementele a_i şi b_j în dipolul $\mathcal{D}$, obţinem schema multipolului căutat în care polii de intrare sînt nodurile de deconectare a elementelor a_i, iar polii de ieşire sînt nodurile de deconectare a elementelor b_j.

Pentru un multipol $(1 - k)$ cu contacte fără repetiţii, dipolul cu contacte fără repetiţii asociat multipolului are funcţia de lucru

$$F_1 = a_1 \sum_{j=1'}^{k'} b_j \chi_{1j}.$$

Însă şi dipolul cu contacte fără repetiţii care are funcţia de lucru.

$$F = \sum_{j=1'}^{k'} b_j \chi_{1j}$$

conduce la aceeaşi soluţie; polii de ieşire sînt nodurile de deconectare a elementelor b_j, iar polul de intrare este cel care a rămas.

Deci pentru astfel de multipoli este inutilă introducerea elementului a_1 luînd ca funcţie F pentru multipol, funcţia $F = \sum_{j=1'}^{k'} b_j \chi_{1j}$.

Exemplu. Să se construiască un multipol $(2-2)$ cu contacte fără repetiţii care realizează conductibilităţile:

$$\begin{aligned}
\chi_{11'} &= ab + acdef + bcefk + bcfl + del + dk,\\
\chi_{12'} &= abek + abl + acdfk + bcf + de + dkl,\\
\chi_{21'} &= abdef + ac + bcdel + bcdk + efk + fl,\\
\chi_{22'} &= acek + acl + bcde + bcdkl + f.
\end{aligned}$$

Funcţia F asociată multipolului este:

$$F = p\chi_{11'}m + p\chi_{12'}n + q\chi_{21'}m + q\chi_{22'}n,$$

în care p, q sînt elementele iniţiale, iar m, n, elementele finale.

Avem:

$$\begin{aligned}
F[p] &= \chi_{11'}m + \chi_{12'}n =\\
&= abm + acdefm + bcefkm + bcflm + delm + dkm +\\
&\quad + abekn + abln + acdfkn + bcfn + den + dkln;\\
F[q] &= \chi_{21'}m + \chi_{22'}n =\\
&= abdefm + acm + bcdelm + bcdkm + efkm + flm +\\
&\quad + acekn + acln + bcden + bcdkln + fn.
\end{aligned}$$

Tabloul lui Piesch corespunzător lui F este destul de mare.

Pentru a putea face observaţiile mai uşor, vom face tabloul lui Piesch atît pentru $F[p]$ (tabloul 1) cît şi pentru $F[q]$ (tabloul 2).

Tabloul 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	1	1	—	—	—	—	1	1	1	—	—	—
b	1	—	1	1	—	—	1	1	—	1	—	—
c	—	1	1	1	—	—	—	—	1	1	—	—
d	—	1	—	—	1	1	—	—	1	—	1	1
e	—	1	1	—	1	—	1	—	—	—	1	—
f	—	1	1	1	—	—	—	—	1	1	—	—
k	—	—	1	—	—	1	1	—	1	—	—	1
l	—	—	—	1	1	—	—	1	—	—	—	1
m	1	1	1	1	1	1	—	—	—	—	—	—
n	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	1	1

Tabloul 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	1	—	—	—	—	1	1	—	—	—
b	1	—	1	1	—	—	—	—	1	1	—
c	—	1	1	1	—	—	1	1	1	1	—
d	1	—	1	1	—	—	—	—	1	1	—
e	1	—	1	—	1	—	1	—	1	—	—
f	1	—	—	—	1	1	—	—	—	—	1
k	—	—	—	1	1	—	1	—	—	1	—
l	—	—	1	—	—	1	—	1	—	1	—
m	1	1	1	1	1	1	—	—	—	—	—
n	—	—	—	—	—	—	1	1	1	1	1

Se găseşte că $F[p]$ are elementele iniţiale (b, d), iar $F[q]$ are elementele iniţiale (c, f).

Avem :

$$F[p, b] = am + cefkm + cflm + aekn + aln + cfn;$$

$$F[p, d] = acefm + elm + km + acfkn + en + kln;$$

$$F[q, c] = am + bdelm + bdkm + aekn + aln + bden + bdkln;$$

$$F[q, f] = abdem + ekm + lm + n,$$

unde :

$F[p, b]$ are elementele iniţiale (a, c) sau (a, f), unde c şi f sînt legate în serie ;

$F[p, d]$ are elementele iniţiale (e, k) ;

$F[q, c]$ are elementele iniţiale (a, b) ;

$F[q, f]$ are ca elemente iniţiale una din grupele :

$$(a, k, l, n),\ (b, k, l, n),\ (d, k, l, n) \text{ şi } (e, l, n).$$

Să determinăm elementele iniţiale pentru $F[p, b]$ şi $F[q, f]$.

Observăm că $F[p, b]$ şi $F[q, c]$ avînd comun termenul am, în care m este element final, conform teoremei 3 rezultă că a, b, c sînt contacte în acelaşi nod, deci elementele iniţiale pentru $F[p, b]$ sînt (a, c).

Elementul b fiind conectat la un capăt cu p şi d, iar la celălalt capăt cu a şi c, înseamnă că el nu este conectat cu f, deci grupa (b, k, l, n) nu constituie elementele iniţiale pentru $F[q, f]$.

Din $F[p, b]$ şi $F[q, c]$ se vede că a este conectat cu elementul m, deci a nu este conectat cu f în acelaşi nod, adică (a, k, l, n) nu sînt elemente iniţiale pentru $F[q, f]$.

Observăm că $pdkln$ este conjuncţie a lui F, deci elementele d, k, l, n sînt conectate în serie, şi nu în acelaşi nod.

Prin urmare (e, l, n) sînt elementele iniţiale ale lui $F[q, f]$.

$F[p, d]$ şi $F[q, f]$ avînd comun elementul iniţial e, înseamnă că e este conectat între d şi f.

Mai rămîne să găsim conexiunile lui k şi l în schemă.

Avem

$$F[p, d, k] = m + ln + acfn ;$$
$$F[q, f, l] = m.$$

Aceste funcţii avînd comun pe m, conform teoremei 3 rezultă că elementele k, l se conectează la elementul final m.

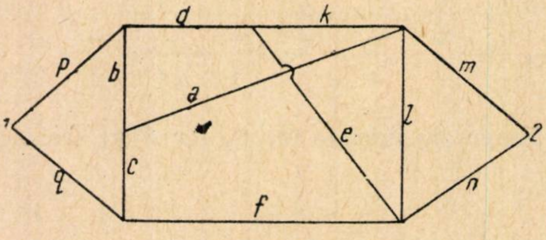


Fig. 2

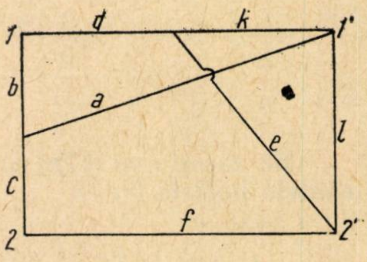


Fig. 3

Acum cunoaştem toate conexiunile schemei care realizează pe F. Această schemă este reprezentată de figura 2, iar un multipol ce verifică conductibilităţile date, de figura 3.

CAPITOLUL II

În acest capitol vom da o altă metodă de sinteză pentru multipoli $(p - q)$ cu contacte fără repetiții, care, spre deosebire de prima, necesită un număr minim de conductibilități.

§ 1. Vom considera întîi multipoli care sînt tare conecși în raport cu fiecare pereche (i, j) dintre un pol de intrare și unul de ieșire.

Evident, conductibilitățile unui astfel de multipol vor fi funcții de aceleași variabile.

TEOREMA 5. *Fie* χ_{ij} $(i = 1,\ldots, k,\ldots, p\,;\, j = 1',\ldots, l',\ldots, q')$ *conductibilitățile unui multipol* $(p-q)$ *tare conex cu contacte fără repetiții și fie* $\mathcal{D}$ *un dipol cu contacte fără repetiții a cărui funcție de lucru este* $\chi_{kl'}$.

Atunci între dipolul $\mathcal{D}$ *și multipolul* $(p-q)$ *există o corespondență prin care polului de intrare al dipolului îi corespunde polul* k *de intrare al multipolului, polului de ieșire al dipolului îi corespunde polul* l' *de ieșire al multipolului, iar celorlalți poli ai multipolului* $(p-q)$ *le corespund acele noduri ale dipolului* $\mathcal{D}$, *în care sînt conectate elementele inițiale și finale ale celorlalte conductibilități* χ_{ij}.

Demonstrație. Conductibilitatea $\chi_{kl'}$ a multipolului este suma conductibilităților circuitelor care unesc polul de intrare k cu polul de ieșire l'. Însă multipolul este tare conex, ceea ce înseamnă că aceste circuite străbat toate elementele multipolului $(p-q)$ cu contacte fără repetiții, deci ceilalți poli ai multipolului sînt noduri interioare pe aceste circuite.

Fie $\mathcal{D}$ un dipol cu contacte fără repetiții a cărui funcție de lucru este $\chi_{kl'}$.

Schemele cu contacte fără repetiții tare conexe care realizează pe $\chi_{kl'}$ sînt echivalente și conform teoremei 1 ele sînt izomorfe.

Interpretînd pe $\chi_{kl'}$ o dată ca funcție de lucru a dipolului $\mathcal{D}$ și o dată ca conductibilitate a multipolului, ambele cu contacte fără repetiții, înseamnă că între dipol și multipol există o corespondență prin care polului de intrare al dipolului $\mathcal{D}$ îi corespunde polul k de intrare al multipolului, iar polului de ieșire al dipolului $\mathcal{D}$ îi corespunde polul l' de ieșire al multipolului. Celorlalți poli ai multipolului $(p-q)$ le corespund în dipol anumite noduri și anume polului P al multipolului îi corespunde nodul N în dipol, care are aceleași elemente incidente ca și P.

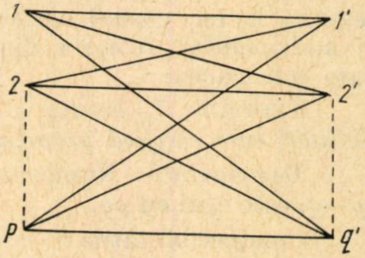


Fig. 4

În consecință, ca graf pentru multipolul $(p-q)$ se poate lua graful dipolului $\mathcal{D}$, în care nodurile puse în evidență de conductibilitățile χ_{ij} vor fi poli ai multipolului.

Fie F_{ij} $(i \in [1, p],\ j \in [1', q'])$[2]) o mulțime de funcții și în plan punctele $1, 2,\ldots, i,\ldots, p$ respectiv $1', 2',\ldots, j',\ldots, q'$. Unim fiecare punct i cu toate punctele j'.

Figura astfel obținută (fig. 4) o numim graf asociat mulțimii de funcții F_{ij}.

---

[2]) Se notează $\{1, 2, \ldots, p\} = [1, p]$ și $\{1', 2', \ldots, q'\} = [1', q']$.

Proprietatea (*P*). Funcţiile F_{ij} $(\{(i, j)\} \subset [1, p] \times [1', q']\,;\ i \in [1, p],$ $j \in [1', q'])$ au proprietatea că dacă indicii $k \in [1, p]$ şi $l' \in [1', q']$ apar la una din ele, anume la $F_{kl'}$, atunci măcar unul din indicii k şi l' mai apare la cel puţin una din celelalte funcţii şi graful asociat este conex.

TEOREMA 6. *Fie* $\chi_{ij}(\{(i, j)\} \subset [1, p] \times [1', q']\,;\ i \in [1, p],\ j \in [1', q'])$ *anumite conductibilităţi ale unui multipol* $(p-q)$ *tare conex cu contacte fără repetiţii care satisfac proprietatea* (P).

În aceste condiţii se pot afla toţi polii multipolului şi se pot cunoaşte care sînt polii de intrare respectiv de ieşire ai multipolului.

Demonstraţie. Printr-o metodă de sinteză oarecare construim un dipol cu contacte fără repetiţii a cărui funcţie de lucru este $\chi_{kl'}$. Conform teoremei 5, graful dipolului constituie graful multipolului. Conductibilităţile date χ_{ij} ne permit să punem în evidenţă polii multipolului.

Să presupunem că conductibilităţile χ_{ij} nu verifică proprietatea (P). În acest caz printre ele se află conductibilitatea $\chi_{kl'}$, ai cărei indici k şi l' nu mai apar la celelalte conductibilităţi şi deci nici graful asociat nu este conex.

Deci cunoaştem elementele iniţiale şi finale ale lui $\chi_{kl'}$, însă nu putem şti care din ele sînt incidente polului k de intrare şi care sînt incidente polului l' de ieşire.

Dacă însă este îndeplinită proprietatea (P), printre χ_{ij}, în afară de $\chi_{kl'}$ se mai află cel puţin o conductibilitate $\chi_{kn'}$ $(n' \neq l')$ sau $\chi_{ml'}$ $(m \neq k)$.

Să presupunem că cunoaştem elementele incidente polului k de intrare al multipolului. Un termen al funcţiei $\chi_{kn'}$ este conductibilitatea unui circuit C care uneşte polul k de intrare cu polul n' de ieşire. Însă cunoaştem elementul incident polului k de intrare. Elementul de la celălalt capăt al circuitului C va fi conectat la polul n' de ieşire.

De asemenea dacă l' este un pol de ieşire cunoscut şi avînd conductibilitatea $\chi_{ml'}$, prin acelaşi procedeu se determină polul de intrare m.

Pentru fiecare din polii de intrare sau de ieşire determinaţi se procedează la fel, găsind astfel toţi polii de intrare şi respectiv de ieşire ai multipolului. Aceasta din cauza că graful asociat conductibilităţilor date este conex.

TEOREMA 7. *Pentru orice multipol* $(p-q)$ *există* $p+q-1$ *conductibilităţi care verifică proprietatea* (P) *şi acest număr este minim.*

Demonstraţie. Numărul total de conductibilităţi ale unui multipol $(p-q)$ este egal cu pq.

Conductibilităţile :

$$\begin{array}{llll}
\chi_{i_1 j_1}, & \chi_{i_2 j_1}, \ldots, & \chi_{i_k j_1} & ; \\
\chi_{i_k j_2}, & \chi_{i_k j_3}, \ldots, & \chi_{i_k j_l} & ; \\
\chi_{i_{k+1} j_l}, & \chi_{i_{k+2} j_l}, \ldots, & \chi_{i_m j_l} & ; \\
\chi_{i_m j_{l+1}}, & \chi_{i_m j_{l+2}}, \ldots, & \chi_{i_m j_n} & ; \\
\chi_{i_{m+1} j_n}, & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \chi_{i_r j_s} \;; \\ \chi_{i_{r+1} j_s},\ \chi_{i_{r+2} j_s}, \dots,\ \chi_{i_p j_s} \;; \\ \chi_{i_p j_{s+1}},\ \chi_{i_p i_{s+2}}, \dots,\ \chi_{i_p j_q} \;, \end{array}$$

unde $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1, 2, \dots, p\}$, $\{j_1, j_2, \dots, j_q\} = \{1', 2', \dots, q'\}$ şi $1 \leqslant k < m < \dots < r \leqslant p$; $1 \leqslant l < n < \dots < s \leqslant q$, verifică proprietatea (P) ; ele sînt în număr de $p + q - 1$ căci liniile în care variază primul indice conţin p conductibilităţi, iar liniile în care variază al doilea indice conţin $q - 1$ conductibilităţi. De asemenea, graful asociat acestor conductibilităţi (fig. 5) este conex.

Demonstrăm prin inducţie că $p + q - 1$ este numărul minim de conductibilităţi care verifică proprietatea (P).

Pentru un dipol, funcţia de lucru $F(= \chi_{11})$ verifică proprietatea (P) şi $1(= 1 + 1 - 1)$ este minim.

Pentru un multipol $p - q$, presupunem că $p + q - 1$ este numărul minim de conductibilităţi care verifică proprietatea (P).

Graful $G_{p,q}$ asociat acestui multipol are $p + q$ vîrfuri şi $p + q - 1$ laturi. Într-un vîrf al său conectăm o extremitate a unui segment şi se obţine un graf $G_{p+1,q}$ cu $p + q + 1$ vîrfuri şi $p + q$ laturi. Însă un asemenea graf este asociat unui multipol $(p + 1) - q$, sau $p - (q + 1)$, pentru care există $p + q$ conductibilităţi care verifică proprietatea (P).

Introducerea unui vîrf în graful $G_{p,q}$ a necesitat introducerea unei singure laturi, obţinînd graful $G_{p+1,q}$. Deci $p + q$ este minim.

Teorema 8. *Pentru a determina toţi polii unui multipol* $(p - q)$ *cu contacte fără repetiţii şi pentru a putea distinge polii de intrare de polii de ieşire sînt necesare şi suficiente* $p + q - 1$ *conductibilităţi* χ_{ij} $(\{(i, j)\} \subset [1, p] \times [1', q'], i \in [1, p], j \in [1', q'])$ *care verifică proprietatea* (P).

Demonstraţie. $p + q - 1$ fiind numărul minim de conductibilităţi care verifică proprietatea (P), rezultă că acest număr de conductibilităţi este necesar.

Suficienţa condiţiei o vom demonstra prin inducţie după p.

Pentru multipoli $(1 - q)\,(p = 1)$, conductibilităţile χ_{1j} $(j = 1', \dots, q')$ sînt în număr de $q = 1 + q - 1$ şi verifică proprietatea (P).

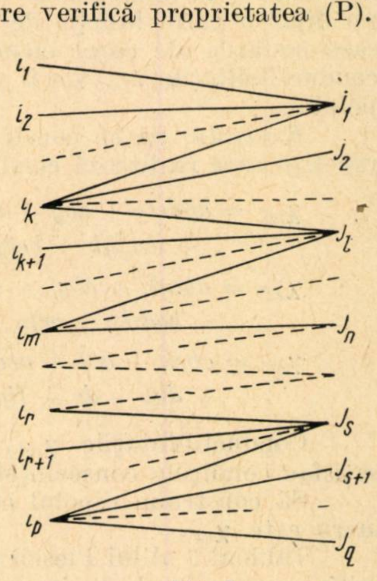


Fig. 5

Cîte o conjuncţie de fiecare conductibilitate χ_{1j} ne permite să determinăm polul de intrare — comun conductibilităţilor χ_{1j} — şi polii de ieşire ai multipolului, după ce a fost construit graful multipolului (teorema 5).

Să presupunem că teorema este adevărată pentru multipoli $(p-q)$ fără repetiţii, deci conductibilităţile χ_{ij} $(\{(i, j)\} \subset [1, p] \times [1', q']$; $i \in [1, p]$, $j \in [1', q'])$, în număr de $p + q - 1$, satisfac proprietatea (P).

Vom demonstra că teorema este adevărată şi pentru multipoli $((p + 1) - q)$.

Deci fie $\chi_{ij}(\{(ij)\} \subset [1, p+1] \times [1', q']$, $i \in [1, p + 1]$, $j \in [1', q'])$ $p+q$ conductibilităţi ale unui multipol $((p + 1) - q)$ fără repetiţii care verifică proprietatea (P) şi care există conform teoremei 7. Din cele $p + q$ conductibilităţi extragem una cu un indice care apare o singură dată. O astfel de conductibilitate există, căci în caz contrar fiecare indice ar apărea cel puţin de două ori şi am avea cel puţin $2k \geqslant p + q + 1$ $(k = \max\,(p + 1, q))$ conductibilităţi, caz exclus de ipoteză, care presupune $p + q$ conductibilităţi.

Celălalt indice al acestei conductibilităţi, fie ea χ_{p+1, j'_0}, mai apare măcar la o conductibilitate din cele $p + q - 1$ conductibilităţi rămase. Aceste $p + q - 1$ conductibilităţi verifică proprietatea (P) şi conform pasului precedent al teoremei se pot determina polii $1, 2, \ldots, p$ de intrare şi polii $1', 2', \ldots, j'_0, \ldots, q'$ de ieşire ai multipolului. Conductibilitatea $\chi_{p+1\, j'_0}$ permite determinarea polului rămas, $p + 1$, al multipolului.

CONSECINŢA 1. Fie χ_{ij} $(\{(i, j)\} \subset [1, p] \times [1', q']$, $i \in [1, p]$, $j \in [1', q'])$ $p + q - 1$ conductibilităţi ale unui multipol $(p - q)$ tare conex cu contacte fără repetiţii care satisfac proprietatea (P).

Pentru a face sinteza multipolului este suficient să se construiască un dipol a cărui funcţie de lucru este una din conductibilităţi date, în care nodurile ale căror elemente incidente sînt iniţiale şi finale pentru conductibilităţile χ_{ij}, vor fi polii de intrare, respectiv de ieşire ai multipolului.

Exemplu. Să se construiască un multipol $(2-2)$ cu contacte fără repetiţii care realizează conductibilităţile :

$$\begin{aligned}\chi_{12'} &= abdefi + abg + acdefg + aci + bcdeil + bcdik + \\ &\quad + bcefgk + bcfgl + degl + dgk + efik + fil\,;\\ \chi_{22'} &= abegk + abgl + acdfgk + aceik + acil + bcdei + \\ &\quad + bcdikl + bcfg + deg + dgkl + fi\,;\\ \chi_{21'} &= abek + abl + acdfk + aceigk + aceigl + bcf + \\ &\quad + dkl + de + fig.\end{aligned}$$

Conductibilităţile $\chi_{12'}$, $\chi_{22'}$, $\chi_{21'}$, depind de aceleaşi variabile şi satisfac condiţiile consecinţei 1.

Să construim dipolul cu contacte fără repetiţii a cărui funcţie de lucru este $\chi_{12'}$.

Tabloul 3 al lui Piesch pentru $\chi_{12'}$, arată că putem lua ca elemente iniţiale grupa (a, k, l), iar ca elemente finale grupa (g, i). Avem :

$$\begin{aligned}\chi_{12'}[a] &= bg + bdrfi + cdefg + ci\,;\\ \chi_{12'}[k] &= bcdi + bcefg + dg + efi\,;\\ \chi_{12'}[l] &= bcdei + bcfg + deg + fi.\end{aligned}$$

Urmărind tabloul 3 găsim că elementele iniţiale pentru :

$\chi_{12'}[a]$ sînt b, c;
$\chi_{12'}[k]$ sînt d, e, f unde e, f sînt în serie;
$\chi_{12'}[l]$ sînt d, e, f unde d, e sînt în serie.

Tabloul 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a	1	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
b	1	—	1	—	—	—	—	—	1	1	1	1
c	—	1	—	1	—	—	—	—	1	1	1	1
d	—	—	1	1	1	—	1	—	1	—	1	—
e	—	—	1	1	—	1	1	—	—	1	1	—
f	—	—	1	1	—	1	—	1	—	1	—	1
g	1	—	—	1	1	—	1	—	—	1	—	1
i	—	1	1	—	—	1	—	1	1	—	1	—
k	—	—	—	—	1	1	—	—	1	1	—	—
l	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	1	1

Pentru $\chi_{12'}[k]$ şi $\chi_{12'}[l]$ sîntem în condiţiile teoremei 2, deci d, e, k se conectează într-un nod şi de asemenea e, f, l se conectează în alt nod. De asemenea avem :

$$\chi_{12'}[a, b] = g + defi\,; \qquad \chi_{12'}[k, d] = g + bci\,;$$

$$\chi_{12'}[a, c] = i + defg\,; \qquad \chi_{12'}[l, f] = i + beg.$$

Deoarece $\chi_{12'}[a, b]$ şi $\chi_{12'}[k, d]$ au comun termenul] g, conform teoremei 3 elementele b, d, g sînt conectate în acelaşi nod. La fel, din $\chi_{12'}[a, c]$ şi $\chi_{12'}[l, f]$, conform aceleaşi teoreme, rezultă că c, f, i sînt conectate în acelaşi nod.

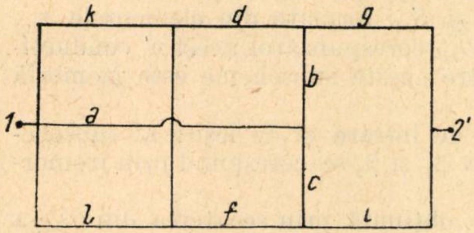


Fig. 6

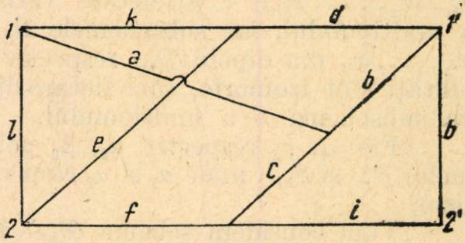


Fig. 7

O schemă care realizează funcţia de lucru $\chi_{12'}$ este figura 6.

Conjuncţia fi a lui $\chi_{22'}$ arată că e, f, l sînt conectate la celălalt pol de intrare 2, iar conjuncţia ed a lui $\chi_{21'}$ arată că polul de ieşire 1′ are incidente elementele b, d, g.

Se găseşte schema unui multipol căutat (fig. 7)

Observaţie. Pentru un multipol $(p - q)$ cu contacte fără repetiţii tare conex numai în raport cu polii k şi l', consecinţa anterioară este încă aplicabilă, căci graful multipolului este dat de graful unui dipol cu contacte fără repetiţii care are funcţia de lucru $\chi_{kl'}$.

§ 2. Pentru a trece la sinteza multipolilor $(p - q)$ cu contacte fără repetiţii care nu sînt tare conecşi, vom avea nevoie de unele consideraţii preliminare.

Dacă o schemă S este de tip Σ, atunci [1]

$$S = \sum (S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

unde S_i sînt subscheme de tip Π sau H, iar dacă S este de tip Π, atunci,

$$S = \prod (S_1, S_2, \ldots, S_n),$$

unde S_i sînt subscheme de tip Σ sau H.

Fie α şi β cei doi poli ai unei subscheme S_i a schemei S.

Dacă considerăm nodurile r, s respectiv k, l ale schemei S, atunci în conductibilităţile totale χ_{rs} şi χ_{kl} apar toate variabilele subschemei S_i, căci orice circuit care vine la unul din polii α sau β ai subschemei S_i şi o intersectează, se ramifică pe toate laturile ei.

Dacă schema S e de tip H, atunci conductibilităţile χ_{rs} şi χ_{kl} conţin fiecare toate variabilele schemei.

În cazul unui multipol cu contacte fără repetiţii care nu e tare conex, conductibilităţile χ_{ij} ale sale nu mai depind toate de aceleaşi variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ asociate elementelor multipolului. Dipolii $\mathcal{D}_{ij}$ sînt tare conecşi. Însă orice dipol $\mathcal{D}_{ij}$, care are funcţia de lucru $\chi_{ij}\,(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_m};\ m \leqslant n)$ a multipolului dat este izomorf cu subschema din multipol care conţine elementele $x_{r_1}, \ldots, x_{r_m}$.

În concluzie la cele anterioare, dacă două conductibilităţi $\chi_{rs'}$ şi $\chi_{kl'}$ ale unui multipol cu contacte fără repetiţii au comune variabilele $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_t}$ $(t < n)$, aceste variabile aparţin aceleiaşi subscheme S a multipolului, iar subschemele $S_{rs'}$, şi $S_{kl'}$ formate din elementele $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_t}$ din dipolii $\mathcal{D}_{rs'}$ respectiv $\mathcal{D}_{kl'}$ corespunzător acestor conductibilităţi sînt izomorfe, căci fiecare dintre aceste subscheme este izomorfă cu subschema S a multipolului.

Fie α_1, β_1 respectiv α_2, β_2 polii de intrare şi de ieşire ai subschemelor $S_{r\varepsilon'}$ şi $S_{kl'}$, unde α_1 şi α_2 respectiv β_1 şi β_2 se corespund prin izomorfism.

Vom considera schema $\mathcal{D}_{kl'} \setminus S_{kl'}$ obţinută prin scoaterea din $\mathcal{D}_{kl'}$ a elementelor $x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_t}$ ale subschemei $S_{kl'}$.

Vom numi reuniune dipolară a dipolilor $\mathcal{D}_{rs'}$ şi $\mathcal{D}_{kl'}$ schema R, obţinută din $\mathcal{D}_{rs'}$ şi $\mathcal{D}_{kl'} \setminus S_{kl'}$ prin conectarea nodurilor α_1 cu α_2 şi β_1 cu β_2.

Evident, dacă se dau $p + q - 1$ conductibilităţi care verifică proprietatea (P), ele conţin toate variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale multipolului.

Fie $\mathcal{R}$ reuniunea dipolară asociată conductibilităţilor multipolului, obţinută din aproape în aproape în felul următor: Se dă $R_1 = R$ şi se consideră reuniunea schemei R_1 şi a unui alt dipol $\mathcal{D}_{mn'}$ cu contacte fără repetiţii, obţinînd reuniunea dipolară R_2 etc.

$\mathcal{R}$ va constitui graful multipolului.

Dacă dintre cele $p + q - 1$ conductibilități date se aleg r ($=$ numărul minim de) conductibilități care conțin toate variabilele multipolului, atunci reuniunea dipolară asociată acestor r conductibilități va fi tot $\mathcal{R}$ din cauza izomorfismului.

Dacă în reniunea dipolară $\mathcal{R}$ se pun în evidență elementele inițiale și finale ale conductibilităților χ_{ij}, se obțin polii de intrare și de ieșire ai multipolului.

Consecința 2. Fie $\chi_{ij}(\{(i,j)\}\subset[1,p]\times[1',q'],\ i\in[1,p], j\in[1',q'])$ $p + q - 1$ conductibilități ale unui multipol ($p - q$) cu contacte fără repetiții, oarecare, care satisfac proprietatea (P).

Pentru a obține schema multipolului, se construiește reuniunea dipolară asociată — care constituie graful multipolului — în care nodurile, ale căror elemente incidente sînt inițiale și finale pentru conductibilitățile χ_{ij}, vor fi polii de intrare, respectiv de ieșire ai multipolului.

Primită la redacție la 1 iulie 1965

Institutul de construcții București

BIBLIOGRAFIE

1. B. A. Trahtenbrat, *Asupra teoriei schemelor cu contacte fără repetiții. Probleme de cibernetică*, Acad. R.P.R., Bibl. anal. rom.-sov., Seria tehnică, nr. *69–70*, 129–217 (1959).
2. I. Muntean, *Asupra problemei sintezei schemelor cu contacte fără repetiții. Probleme de automatizare*, **V**, 115–126 (1963).
3. I. Muntean, *Contribuții la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte și relee*, St. cerc. mat., **15**, *4*, 477–497 (1964).
4. A. V. Kuznețov, *Despre scheme cu contacte fără repetiții și suprapunerile fără repetiții ale funcțiilor algebrei logicii. Probleme de cibernetică*, Acad. R.P.R., Bibl. anal. rom.-sov., Seria tehnică, nr. *69–70*, 218–264 (1959).

CÎMPURI DE VECTORI PARALELI ÎN SPAȚII RIEMANN CU CONEXIUNE CONSTANTĂ

DE

EFTIMIE I. GRECU

În lucrare se demonstrează teorema următoare: Un spațiu Riemann V_n cu conexiune constantă (8) posedă sau nu un cîmp de vectori covarianți paraleli derivînd din potențiali după cum vectorul a_k are sau nu lungimea nulă în raport cu forma φ (8′). Se determină apoi cîmpurile de vectori paraleli ale spațiilor lui Riemann cu conexiune constantă de genul doi.

Se știe că fiind dat un spațiu cu conexiune afină $A_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, se poate asocia acestui spațiu sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$$

sistem ce definește curbele autoparalele ale spațiului A_n. În mod analog, se poate asocia, în mod invariant, spațiului A_n sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$A_{jk}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^j \, \partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial z}{\partial x^i} = 0. \tag{1}$$

Să considerăm pentru aceasta o transformare de variabile

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

și o transformare liniară a funcției z

$$z' = az + b, \tag{2}$$

unde a și b sînt constante.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 869–877, BUCUREȘTI, 1966

Avem :

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = \frac{1}{a} \frac{\partial z'}{\partial x'^r} \frac{\partial x'^r}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \frac{\partial z'}{\partial x'^r} \frac{\partial^2 x'^r}{\partial x^j \partial x^k} \right).$$

Rezultă :

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x'^r} \right) \frac{\partial z'}{\partial x'^i} \right]$$

şi în definitiv

$$A_{jk}(z) = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^r \partial x'^s} + \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial z'}{\partial x'^i} \right) \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \frac{1}{a} A'_{rs}(z') \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k}$$

dacă ţinem seama de legea de transformare a conexiunii

$$\frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^r_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}.$$

Deci sistemul (1) se schimbă în sistemul

$$A'_{jk}(z') = \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^j \partial x'^k} + \Gamma'^i_{jk} \frac{\partial z'}{\partial x'^i} = 0.$$

Sistemul cu derivate parţiale (1) este deci un sistem invariant asociat spaţiului A_n cu condiţia ca funcţia z să fie considerată ca un invariant sau ca o funcţie care suferă chiar o transformare liniară (2).

Sistemul (1) se poate deduce din ecuaţiile transportului paralel al unui vector covariant V_j ce derivă dintr-un potenţial z, deci $V_j = \dfrac{\partial z}{\partial x^j}$.

Într-adevăr, ecuaţiile transportului paralel al unui vector covariant V_j sînt

$$\mathrm{d}V_j + \Gamma^i_{jk} V_i \mathrm{d}x^k = 0.$$

Deci

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial z}{\partial x^i} \right) \mathrm{d}x^k = 0$$

de unde rezultă sistemul (1)

În cazul unui spaţiu Riemann V_n, avem

$$\Gamma^i_{jk} = - \left| \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right|$$

şi atunci sistemul (1) devine

(3) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^j \partial x^k} = \left| \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right| \frac{\partial z}{\partial x^i}.$$

Avînd în vedere cele spuse mai înainte, rezultă că a găsi o soluţie a sistemului (3) revine la a găsi un vector covariant derivînd dintr-un potenţial şi care se transportă în V_n prin paralelism.

În general, dacă spaţiul V_n este oarecare, asemenea vectori nu există, deoarece condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor (3) care se scriu

$$R^i_{jkl} \frac{\partial z}{\partial x^i} = 0, \tag{4}$$

unde R^i_{jkl} este tensorul de curbură al spaţiului V_n, n-au altă soluţie decît soluţia banală $z = \text{const.}$

Deoarece avem :

$$V_j = \frac{\partial z}{\partial x^j} \tag{5}$$

rezultă că sistemul (3) se mai poate scrie

$$\frac{\partial V_j}{\partial x^k} = \begin{vmatrix} i \\ jk \end{vmatrix} V_i \tag{6}$$

iar condiţiile de integrabilitate (4) se scriu

$$R^i_{jkl} V_i = 0. \tag{7}$$

Prin integrarea sistemului (6) se obţin componentele $V_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ale vectorului, iar apoi pentru a determina potenţialul z din care derivă acest vector vom observa că ecuaţiile (5) sînt echivalente cu o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte

$$\mathrm{d}z = V_i \, \mathrm{d}x^i$$

şi atunci pentru a afla pe $z(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ este suficient să calculăm integrala curbilinie între două puncte

$$A_0(x^1_0, x^2_0, \ldots, x^n_0) \text{ şi } A(x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

unde A_0 este un funct fix, integrarea facîndu-se pe un drum format din segmente paralele cu axele de coordonate şi care uneşte cele două puncte, aşa încît z este dat de expresia

$$z = \sum_{i=1}^{n} \int_{x^i_0}^{x^i} V_i \, (x^1, x^2, \ldots, x^i, x^{i+1}_0, \ldots, x^n_0) \, \mathrm{d}x^i.$$

În cele ce urmează vom căuta să determinăm cîmpurile de vectori covarianţi paraleli derivînd din potenţiali ale unor clase speciale de spaţii Riemann.

I

SPAŢII RIEMANN CU CONEXIUNE CONSTANTĂ

Un spaţiu al lui Riemann V_n este cu conexiune constantă dacă exista un sistem de variabile în care simbolurile lui Christoffel de-a doua speţă sînt constante.

Vagner a arătat că o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un spaţiu riemannian V_n, cu formă metrică pozitiv definită, să fie cu conexiune constantă, este ca V_n să aibă o metrică de forma

$$ds^2 = e^{2a_k x^k} c_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{8}$$

unde a_k şi c_{ij} sînt constante, sau spaţiul este produsul topologic a două sau mai multor spaţii avînd această proprietate.

Acad. prof. Gh. Vrănceanu a considerat [1] o metrică de forma (8) fără restricţia ca ea să fie pozitiv definită şi a demonstrat următoarea teoremă :

Abstracţie făcînd de un factor constant, matrica (8) poate fi redusă la una sau alta din formele canonice :

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \varepsilon_s (dx^s)^2}{e^{2x^1}}, \qquad (s = 2, 3, \dots, n) \tag{9}$$

unde $\varepsilon_s = \pm 1$, *dacă lungimea vectorului* a_k, *calculată cu ajutorul formei*

$$\varphi = c_{ij}\, dx^i\, dx^j, \tag{8'}$$

este diferită de zero;

$$ds^2 = \frac{2dx^1dx^2 + \varepsilon_\alpha (dx^\alpha)^2}{e^{2x^1}}, \qquad (\alpha = 3, 4, \dots, n), \tag{10}$$

unde $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, *dacă vectorul* a_k *are lungimea nulă în raport cu forma* φ.

Să considerăm mai întîi spaţiul (9). Asociindu-i energia cinetică corespunzătoare

$$T = \frac{1}{2}\,\frac{(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_s (\dot{x}^s)^2}{e^{2x^1}}, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

atunci geodezicele spaţiului sînt date de ecuaţiile lui Lagrange care se scriu

$$\ddot{x}^1 = (\dot{x}^1)^2 - \varepsilon_s (\dot{x}^s)^2, \quad \ddot{x}^s = 2\dot{x}^1\dot{x}^s$$

De aici rezultă că simbolurile lui Christoffel de speţa a doua, care nu sînt nule, sînt date de formulele

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}\right| = -1, \quad \left|\begin{matrix} 1 \\ ss \end{matrix}\right| = \varepsilon_s, \quad \left|\begin{matrix} s \\ s1 \end{matrix}\right| = -1. \tag{11}$$

În ceea ce priveşte simbolurile lui Riemann de-a doua speţă avem

$$R^i_{jkl} = \left|\begin{matrix} i \\ hk \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} h \\ jl \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} i \\ hl \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} h \\ jk \end{matrix}\right|.$$

Ţinînd seama de (11), rezultă ca acei R^i_{jkl} care nu sînt nuli, sînt daţi de formulele

$$R^p_{sps} = -\varepsilon_s, \qquad (p, s \geqslant 2) \tag{12}$$

Rezultă că condiţiile de integrabilitate (7) devin

$$R^p_{jkl} V_p = 0.$$

Făcînd în aceste formule $j = l \geqslant 2$ şi avînd în vedere (12), obţinem

$$\varepsilon_j V_k = 0, \qquad (k \geqslant 2).$$

Trebuie deci să avem

(13) $$V_s = 0, \qquad (s \geqslant 2).$$

Dacă ţinem seama de (11), atunci ecuaţiile (6) se scriu

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} + V_1 = 0, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x^s} + V_s = 0$$

$$\frac{\partial V_s}{\partial x^1} + V_s = 0, \qquad \frac{\partial V_s}{\partial x^s} - \varepsilon_s V_1 = 0.$$

Acest sistem are evident numai soluţia banală

$$V_i = 0.$$

Înlocuind în (5), obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x^i} = 0 \quad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, n.$$

de unde rezultă

$$z = C,$$

unde C este o constantă de integrare.

Avem în acest mod următoarea teoremă :

Un spaţiu Riemann (9) *nu admite nici un cîmp de vectori covarianţi potenţiali paraleli.*

Considerăm acum spaţiul (10). În acest caz s-a arătat [2] că acei $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$ nenuli sînt daţi de formulele

(14) $$\left|\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}\right| = -2, \quad \left|\begin{matrix} 2 \\ \alpha\alpha \end{matrix}\right| = \varepsilon_\alpha, \quad \left|\begin{matrix} \alpha \\ \alpha 1 \end{matrix}\right| = -1, \quad (\alpha = 3, \ldots, n)$$

iar acei R^i_{jkl} nenuli sînt următorii :

(15) $$R^2_{\beta\beta 1} = -\varepsilon_\beta, \quad R^\beta_{1\beta 1} = 1, \quad (\beta = 3, \ldots, n).$$

Condiţiile de integrabilitate (7) devin

$$R^2_{jkl} V_2 + R^\beta_{jkl} V_\beta = 0.$$

Făcînd în aceste formule $j = k = \beta$, $l = 1$, rezultă $V_2 = 0$, iar dacă facem $j = l = 1$, $k = \beta$, obţinem $V_\beta = 0$. Deci din condiţiile de integrabilitate se obţine

(16) $$V_2 = V_\varkappa = 0.$$

Ținînd seama de (14), ecuațiile (6) se scriu

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} + 2V_1 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^\alpha} + V_\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x^\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^1} + V_\alpha = 0, \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\alpha} - \varepsilon_\alpha V_2 = 0.$$

Integrînd acest sistem și avînd în vedere (16), obținem

$$V_1 = C_1 \mathrm{e}^{-2x^1}, \quad V_2 = 0, \quad V_\alpha = 0. \tag{17}$$

Pentru a afla potențialul z din care derivă acest vector vom integra sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1 \mathrm{e}^{-2x^1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x^\alpha} = 0$$

și obținem

$$z = -\frac{1}{2} C_1 \mathrm{e}^{-2x^1} + \mathrm{C}_2 \tag{18}$$

Avem deci teorema :

Un spațiu Riemann (10) *posedă un cîmp de vectori covarianți potențiali paraleli ale căror componente au expresiile* (17), *iar potențialul z este de expresia* (18).

Reunind rezultatele obținute mai înainte, putem enunța următoarea teoremă :

Un spațiu Riemann (8) *cu conexiune constantă admite sau nu un cîmp de vectori covarianți paraleli derivînd din potențiali după vectorul a_k are sau nu lungimea nulă în raport cu forma* φ (8′).

II

SPAȚII RIEMANN CU CONEXIUNE CONSTANTĂ DE GENUL DOI

În lucrarea [3], acad. Gh. Vrănceanu a arătat că metrica unui spațiu riemannian V_3 cu conexiune constantă de genul doi poate fi redusă la forma canonică

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2mx^3}\left[2\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^3 + (\mathrm{d}x^2)^2\right] + \varepsilon \mathrm{e}^{4mx^3}(\mathrm{d}x^3)^2, \tag{19}$$

unde m este o constantă diferită de zero, altfel spațiul este local euclidian. Ecuațiile geodezicelor se scriu

$$\ddot{x}^1 = m\,(\dot{x}^2)^2, \quad \ddot{x}^2 = -\,2m\,\dot{x}^2\,\dot{x}^3, \quad \ddot{x}^3 = -\,2m\,(\dot{x}^3)^2,$$

de unde rezultă că acei $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$ care nu sînt nuli sînt daţi de formulele

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix}\right| = -m, \quad \left|\begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix}\right| = m, \left|\begin{matrix} 3 \\ 33 \end{matrix}\right| = 2m. \tag{20}$$

Pentru tensorul de curbură se găseşte că

$$R^1_{223} = -m^2, \quad R^2_{323} = m^2, \tag{21}$$

componentele nescrise fiind nule.

Condiţiile de integrabilitate (7) devin

$$R^1_{jkl} V_1 + R^2_{jkl} V_2 = 0.$$

Făcînd $j = k = 2, l = 3$, obţinem $V_1 = 0$, iar dacă facem $j = l = 3$, $k = 2$, obţinem $V_2 = 0$. Deci avem

$$V_1 = V_2 = 0. \tag{22}$$

Ţinînd seama de (20) ecuaţiile (6) devin

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} = \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = \frac{\partial V_1}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + mV_1 = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x^3} - mV_2 = 0,$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x^2} - mV_2 = 0, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x^3} - 2m V_3 = 0.$$

Integrînd acest sistem şi avînd în vedere (22), rezultă

$$V_1 = V_2 = 0, \quad V_3 = A e^{2mx^3}. \tag{23}$$

Sistemul (5) devine

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x^3} = A\, e^{2mx^3},$$

de unde obţinem

$$z = \frac{1}{2} A e^{2mx^3} + B. \tag{24}$$

Avem deci teorema :

Un spaţiu V_3 *cu conexiune constantă de genul doi* (19) *posedă un cîmp de vectori* (23), *iar potenţialul* z *din care derivă acest vector este dat de expresia* (24).

În aceeaşi lucrare [3] s-a demonstrat că metrica (19) poate fi extinsă la un spaţiu V_n sub forma

$$ds^2 = e^{4mx^1} (dx^1)^2 + \varepsilon e^{2mx^1} [2dx^1 dx^2 + \varepsilon_\alpha (dx^\alpha)^2]. \tag{25}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, $(\alpha = 3, 4, \ldots, n)$ care constituie astfel un exemplu de spațiu V_n cu conexiune constantă de genul doi.

Ecuațiile geodezicelor acestui spațiu sînt :

$$\ddot{x}^1 = -2m(\dot{x}^1)^2, \quad \ddot{x}^2 = m\varepsilon_\alpha(\dot{x}^\alpha)^2, \quad \ddot{x}^\alpha = -2m\dot{x}^1\dot{x}^\alpha$$

care ne arată că avem

$$\left|\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right| = 2m, \quad \left|\begin{matrix}2\\\alpha\alpha\end{matrix}\right| = -m\varepsilon_\alpha, \quad \left|\begin{matrix}\alpha\\1\alpha\end{matrix}\right| = m, \tag{26}$$

componentele nescrise fiind nule.

În ceea ce privește R^i_{jkl}, singurele componente nenule sînt

$$R^2_{\beta\beta 1} = -m^2\varepsilon_\beta, \quad R^\beta_{1\beta 1} = m^2. \tag{27}$$

Condițiile de integrabilitate (7) se scriu

$$R^2_{jkl}V_2 + R^\beta_{jkl}V_\beta = 0.$$

Pentru $j = k = \beta$, $l = 1$ se obține $V_2 = 0$, iar pentru $j = l = 1$ $k = \beta$ se obține $V_\beta = 0$. Deci condițiile de integrabilitate ne dau

$$V_2 = V_\alpha = 0. \tag{28}$$

Ținînd seama de (26), ecuațiile (6) se scriu

$$\frac{\partial V_1}{\partial x^1} - 2mV_1 = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x^\alpha} - mV_\alpha = 0$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x^1} = \frac{\partial V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial V_2}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x^1} - mV_\alpha = 0, \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\alpha} + m\varepsilon_\alpha V_2 = 0.$$

Ținînd seama de (28), obținem prin integrare

$$V_1 = C_1 e^{2mx^1}, \quad V_2 = 0, \quad V_\alpha = 0. \tag{29}$$

Sistemul (5) devine

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = C_1 e^{2mx^1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x^\alpha} = 0$$

care are soluția

$$z = \frac{1}{2m} C_1 e^{2mx^1} + C_2. \tag{30}$$

Avem în felul acesta teorema :

Un spațiu V_n (25) cu conexiune constantă de genul doi posedă cîmpul de vectori paraleli (29), *iar potențialul z din care derivă acest vector este dat de expresia* (30).

Primită la redacție la 12 iulie 1965

Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej” București

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială.* vol. I, p. 214—217, 229—230, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.
2. GH. VRĂNCEANU, *Proprietăţi globale ale spaţiilor lui Riemann cu conexiune afină constantă.* St. cerc. mat., **XIII**, *4* (1962).
3. GH. VRĂNCEANU, *Asupra spaţiilor lui Riemann cu conexiune constantă.* St. cerc. mat., **XIII**, *2* (1962).
4. GH. VRĂNCEANU, *Sur les espaces à connexion projective.* Comptes Rendus Hebdomadaires des Sèances de l'Académie des Sciences, Paris, **242**, 61—63 (1955).
5. F. ABRAMOVICI, *Champs paralleles dans les espaces projectifs euclidiens.* Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială, Timişoara, 1955, p. 263—267.
6. P. EISENHART, *Non Riemannian Geometry*, p. 31.
7. E. CARTAN, *La géométrie des espaces de Riemann.* Mémorial des Sciences Mathématiques, **IX**, 54 (1925).
8. A. LOPSCHITZ, *Sugli spazi riemanniani contenenti un campo di giaciture parallele*, Travaux du Séminaire de Kagan, **II—III**, 327—333 (1935).
9. V. şi J. LEVINE, *Fields of parallel vectors in projectively flat spaces.* Duke Mathematical Journal, **16**, 23—32 (1949).
10. YOUNG—CHOW WONG, *A note on Levine Paper*, Duke Mathematical Journal, **20**, 119—125 (1953).

ASUPRA CONTACTULUI A DOUĂ CURBE ALE UNUI SPAȚIU CU CONEXIUNE AFINĂ L_n

DE

P. STAVRE

(Craiova)

În această Notă se studiază contactul a două curbe din L_n folosind formulele din [4], [5] care în cazul unui spațiu V_n duc la rezultate cunoscute.

1. Fie

$$(1.1) \qquad (C) : x^\lambda = x^\lambda (s).$$

O curbă din L_n (unde s este parametru afin pe C) de clasă C^N $(N \geqslant n)$ necesară studiului, iar punctul $P(s_0) = P_0 \in (C)$ să-l considerăm ca origine pentru $s_0 = 0$. Atunci într-o vecinătate V_{P_0} avem :

$$(1.2) \quad x^\lambda - x_0^\lambda = \left(\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 (s - s_0) + \frac{1}{2\,!}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 (s - s_0)^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(s - s_0)^k}{k\,!}\,.$$

Considerăm încă o curbă (C') în aceleaşi condiții ca mai sus şi care să presupunem că are cu (C) un punct comun P_0. Fie S parametru afin pe (C'). În V_{P_0} puntem scrie

$$(1.1') \quad (C')\, \overline{x}^\lambda = \overline{x}^\lambda (S)$$

$$(1.2') \quad \overline{x}^\lambda - \overline{x}_0^\lambda = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{x}^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 (S - S_0) + \frac{1}{2\,!}\left(\frac{\mathrm{d}^2\overline{x}^\lambda}{\mathrm{d}S^2}\right)_0 (S - S_0)^2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_k \frac{(\overline{S} - \overline{S}_0)^k}{k\,!}$$

Putem dezvolta teoria contactului de un anumit ordin în P_0 al curbelor (C), (C') după [1].

În cele ce urmează vom dezvolta teoria contactului pornind de la [5] deoarece pentru cazul cînd L_n este un spațiu Riemann V_n, rezultatele găsite vor duce la rezultate cunoscute din V_n, lucru care în cazul [1] nu se întîmplă. Vom mai dezvolta teoria contactului pentru o clasă de curbe introduse în [4]. În ambele cazuri, folosind procedeul dezvoltării lui $S(s)$,

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 879–887, BUCUREŞTI, 1966

în vecinătatea lui s_0 din [1] calculul se va îngreuna. De aceea vom folosi o altă cale ce poate fi folosită și în cazul [1].

Fie $M \in (C)$, $\overline{M} \in C'$ două puncte ale acestor curbe din vecinătatea VP_0 a lui P_0.

Să presupunem că $\bar{S}$ în VP_0 este o funcție de s derivabilă de $n \geqslant 1$ și cu ultima derivată continuă. Așadar acest lucru se întîmplă și pentru $n = 1$. Să presupunem că derivata de ordinul întîi este diferită de zero în P_0. Să luăm P_0 ca origine atît pentru s pe (C) cît și pentru $\bar{S}$ pe (C'). Adică $s = s_0 = 0$, $\bar{S} = \bar{S}_0 = 0$. Putem scrie într-o vecinătate VP_0

$$(1.3) \qquad \bar{S} = C_1 s + \bar{\alpha}(s)\, s \text{ cu } \lim_{s\to 0} \bar{\alpha}(s) = \bar{\alpha}(0) = 0,$$

unde $C_1 = \left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{S}}{\mathrm{d}s}\right)_0$ este o constantă ($C_1 \neq 0$).

Cum $\bar{S}$ este parametru afin pe (C'), el este determinat pînă la o constantă multiplicativă. Putem lua deci $\bar{S} = C_1 S$ și notînd $\dfrac{1}{C_1} = C \neq 0$ iar $c\bar{\alpha}(s) = \alpha(s)$ putem scrie

$$(1.3') \qquad S = s + s\alpha(s) \text{ cu} \lim_{s\to 0} \alpha(s) = \alpha(0) = 0.$$

Se știe că la această schimbare, vectorii și curburile din formulele Frenet, [3], [5], se multiplică cu o putere a lui C_1. Să presupunem aceste formule scrise chiar pentru cazul nostru (s, S). Observăm că

$$(1.4) \qquad (s \to 0) \Rightarrow (S \to 0)$$

$$(1.5) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{S}{s} = 1.$$

Punctele $M(s)$, $\overline{M}(s)$ din VP_0, unde S, s sînt legate prin (3′), le vom numi puncte corespondente. Evident că $P_0 \in (C)$ este corespondentul lui $P_0 \in (C')$ și reciproc.

Vectorul $\overrightarrow{P_0M}$ are componentele $(x^\lambda - x_0^\lambda)$, iar vectorul $\overrightarrow{P_0\overline{M}}$ are componentele $(\bar{x}^\lambda - \bar{x}_0^\lambda)$ în VP_0.

Putem acum defini noțiunea de contact în mod obișnuit.

DEFINIȚIE. Dacă $M \in (C)$, $\overline{M} \in (C')$ sînt două puncte corespondente oarecare din VP_0, și dacă

$$(1.6) \qquad \lim_{s\to 0} \frac{\overrightarrow{M\overline{M}}}{s^p} = 0 \qquad \text{pt. } p = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\overrightarrow{M\overline{M}}}{s^p} \neq 0 \qquad \text{pt. } p > r,$$

atunci spunem că (C), (C') au în P_0 un contact de ordin r. Ținînd seama de (1.3′), (1.5), (1.6), putem spune că un contact de ordin r în P_0 se caracterizează prin

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &(a_k)_0 = (\bar{a}_k)_0 \qquad \text{pt. } k = 1, 2, \ldots, r,\\ &(a_k)_0 \neq (\bar{a}_k)_0 \qquad \text{pt. } k > r. \end{aligned}$$

Ușurarea calculului coeficienților $(ak)_0$, $(\bar{a}k)_0$ este posibilă dat fiind faptul că este demonstrată existența coordonatelor geodezice de ordin 2, 3, 4 în $P_0 \in C$ din L_n.

Folosim notațiile clasice pentru cazul coordonatelor geodezice de ordin $r - 1$:

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta_1\beta_2} = \frac{\partial\, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta_1}}{\partial x^{\beta_2}}, \ldots, \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta_1\beta_2\ldots\beta_r} = \frac{\partial^{r-1}\ \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta_1}}{\partial x^{\beta_2} \ldots \partial x^{\beta_r}}$$

(unde $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sînt coeficienții conexiunii)

$$(1.8)\qquad (\Lambda^{\lambda}_{\alpha\beta})_0 = \frac{1}{2\,!}(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha})_0$$

$$(\Lambda^{\lambda}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p})_0 = \left(\frac{1}{r\,!}\, \Gamma^{\lambda}_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p)}\right)_0 = 0, \qquad p = 2, \ldots, r.$$

Fie

$$(1.9)\qquad S^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha})$$

care în cazul de mai sus dau

$$(1.10)\qquad (S^{\lambda}_{\alpha\beta})_0 = (\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta})_0 .$$

Să mai notăm cu $S^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ derivata covariantă a tensorului $S^{\lambda}_{\alpha\beta}$ iar cu $\mathfrak{R}^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ tensorul de curbură.

2. *Contactul a două curbe pentru care* $\prod\limits_{i=1}^{n-1} K_i = \text{const} \neq 0$. Dacă în [3] considerăm formulele (1.7) pentru cazul $\eta^{\lambda}_1 = \mu^{\lambda}_1 = \bar{\eta}^{\lambda}_1 = \dfrac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}$ din [4], se pot scrie pentru (C) și (C') formulele

$$(2.1)\ (C)\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s} = \bar{\eta}^{\lambda}_1\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{\delta\bar{\eta}^{\lambda}_1}{\mathrm{d}s} = \bar{K}_i\, \bar{\eta}^{\lambda}_1 - \varepsilon\bar{\eta}^{\lambda}_{i+1}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{\delta\bar{\eta}^{\lambda}_n}{\mathrm{d}s} = \bar{K}_n\, \bar{\eta}^{\lambda}_1 \end{cases} \qquad (C')\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{x}^{\lambda}}{\mathrm{d}S} = \bar{\bar{\eta}}^{\lambda}_1\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{\delta\bar{\bar{\eta}}^{\lambda}_i}{\mathrm{d}S} = \bar{\bar{K}}_i\, \bar{\bar{\eta}}^{\lambda}_1 - \varepsilon\bar{\bar{\eta}}^{\lambda}_{i+1}, \ i=1, 2, \ldots, n-1\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dfrac{\delta\bar{\bar{\eta}}^{\lambda}_n}{\mathrm{d}S} = \bar{\bar{K}}_n\, \bar{\bar{\eta}}^{\lambda}_1 \end{cases}$$

Pentru studiul contactului de un ordin oarecare este necesar să calculăm coeficienții (a_k), $(\overline{a}_k)$ din (1.2), (1.2′).

În expresia lui $(a_{p+1})_0$ intră şi termenul $\left(\dfrac{\delta^p \overline{\eta}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}s^p}\right)_0$, iar în expresia lui $(\overline{a}_{p+1})_0$ intră $\left(\dfrac{\delta^p \overline{\overline{\eta}}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}S^p}\right)_0$

Ținînd seama de (2.1), deducem:

$$\left(\frac{\delta^p \overline{\eta}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}s^p}\right)_0 = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \overline{B}_p^k \overline{\eta}_k^{\lambda} \quad \left(\frac{\delta^p \overline{\overline{\eta}}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}S^p}\right)_0 = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} \overline{\overline{B}}_p^k \overline{\overline{\eta}}_k^{\lambda}, \tag{2.2}$$

unde $\overline{B}'$, $\overline{\overline{B}}$ sînt date de relațiile de recurență:

$$\overline{B}_p^k = \frac{\mathrm{d}\overline{B}_{p-1}^k}{\mathrm{d}s} + \delta_1^k \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+1} \overline{K}_{\alpha} \overline{B}_{p-1}^{\alpha} + \varepsilon \overline{B}_{p-1}^{k-1} \varphi(E, k), \qquad (p \geqslant 2) \tag{2.3}$$

$$\overline{B}_p^{p+1} = \varepsilon^p, \qquad k = p + 1,\ p, \ldots 2, 1$$

(cu convenția $\overline{B}_0^1 = 1$, $\overline{B}_1^1 = K$, $\overline{B}_1^2 = \varepsilon$), unde

$$\varphi(E, k) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } k = 2, 3, \ldots, p \\ 0 \text{ dacă } k = 1,\ p + 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

(φ este deci o funcție de tip Valée — Paussin).

Necesitatea acestei formule de recurență apare din faptul că în cazul unui contact de ordin mai mare uşurează calculul. Se stabileşte o formulă asemănătoare pentru $\overline{\overline{B}}$.

Ținînd seama de acestea, de (2.1) şi (1.8), obținem:

$$\begin{cases} (a_1)_0 = (\overline{\eta}_1^{\lambda})_0 \\ (a_2)_0 = \left(\dfrac{\delta \overline{\eta}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}s}\right)_0 \\ (a_3)_0 = \left(\dfrac{\delta^2 \overline{\eta}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 + (\overline{K}_1 S_1^{\lambda} - \varepsilon S_{12}^{\lambda}) \\ (a_4)_0 = \left(\dfrac{\delta_3 \overline{\eta}_1^{\lambda}}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 + (\overline{K}_1 R_1^{\lambda} - \varepsilon R_{121}^{\lambda} + 2\, S_1^{\lambda}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

unde

$$\begin{cases} (S_1^{\lambda})_0 = (S_{\mu\alpha}^{\lambda} \overline{\eta}_1^{\mu} \overline{\eta}_1^{\alpha})_0, \quad (S_{12}^{\lambda})_0 = (S_{\mu\alpha}^{\lambda} \overline{\eta}_2^{\mu} \overline{\eta}_1^{\alpha})_0 \\ (R_1^{\lambda})_0 = (R_{\mu\omega\alpha}^{\lambda} + 2\, S_{\mu\omega\alpha}^{\lambda}) \overline{\eta}_1^{\mu} \overline{\eta}_1^{\omega} \overline{\eta}_1^{\alpha}, \ (R_{121}^{\lambda})_0 = (R_{\mu\omega\alpha}^{\lambda} + 2\, S_{\mu\omega\alpha}^{\lambda}) \overline{\eta}_1^{\mu} \overline{\eta}_2^{\omega} \overline{\eta}_1^{\alpha}. \end{cases}$$

Se pot scrie formule asemănătoare pentru (C'), doar că avem $\overline{S}$, $\overline{R}$ etc.

Contact de ordinul $r = 1$

Dacă facem $r = 1$, din (1.7) și (2.5) avem:

$$(a_1)_0 = (\bar{a}_1)_0, \quad (\bar{\eta}_1^\lambda)_0 = (\bar{\bar{\eta}}_1^\lambda)_0, \quad (S_1^\lambda)_0 = (\bar{S}_1^\lambda)_0. \tag{2.7}$$

Avem dar rezultatul:

Dacă curbele au un contact de ordinul întîi, au același vector tangent și același vector S_1^λ.

Contact de ordinul $r = 2$

Avem pe lîngă (2.7) în acest caz și $(a_2)_0 = (\bar{a}_2)_0$, adică

$$\left(\frac{\delta \bar{\eta}_1^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 = \left(\frac{\delta \bar{\bar{\eta}}_1^\lambda}{\mathrm{d}S}\right)_0$$

$$(\bar{K}_1 - \bar{\bar{K}}_1)\, \bar{\eta}_1^\lambda - \varepsilon\, (\bar{\eta}_2^\lambda - \bar{\bar{\eta}}_2^\lambda)_0 = 0. \tag{2.8}$$

Considerăm curbele în cazul cel mai general pentru care $\bar{\eta}_1^\lambda$, $V_2 = \bar{\eta}_2^\lambda - \bar{\bar{\eta}}_2^\lambda$ în P_0 nu sînt liniar dependenți; din (2.8) găsim

$$(\bar{K}_1)_0 = (\bar{\bar{K}})_0, \quad (\bar{\eta}_2^\lambda)_0 = (\bar{\bar{\eta}}_2^\lambda)_0. \tag{2.9}$$

Mai obținem:

$$(S_{12}^\lambda)_0 = (\bar{S}_{12}^\lambda)_0 \quad (\bar{K}_1 S_1^\lambda - \varepsilon S_{12}^\lambda)_0 = (\bar{\bar{K}}_1 \bar{\bar{S}}_1^\lambda - \varepsilon \bar{S}_{12}^\lambda)_0 \tag{2.10}$$

Avem rezultatul:

Dacă (C), (C′) au în P_0 un contact de ordinul doi, atunci în P_0 au: același vector tangent, primele curburi egale și, în plus, relațiile (2.10)

Contact de ordinul $r = 3$.

Avem în plus

$$(a_3)_0 = (\bar{a}_3)_0 \text{ de unde} \left(\frac{\delta^2 \bar{\eta}_1^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 = \left(\frac{\delta^2 \bar{\bar{\eta}}_1^\lambda}{\mathrm{d}S^2}\right)_0. \tag{2.11}$$

Vom calcula coeficienții lui (2.2) cu ajutorul lui (2.3) pentru, $p = 2$. Cum $\bar{B}_0^1 = 1$, $\bar{B}_1^1 = \bar{K}_1$, $\bar{B}_1^2 = \varepsilon$ avem

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{B}_2^3 = \varepsilon^2 = 1 \\ &\bar{B}_2^2 = \frac{\mathrm{d}\bar{B}_1^2}{\mathrm{d}s} + \varepsilon \bar{B}_1^1 = \varepsilon \bar{K}_1 \\ &\bar{B}_2^1 = \left(\frac{\mathrm{d}\bar{K}_1}{\mathrm{d}s} + \bar{K}_1^2 - \varepsilon \bar{K}_2\right) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\bar{\bar{B}}_2^3 = \varepsilon^2 = 1 && \text{pt } k = 3\cdot \\ &\bar{\bar{B}}_2^2 = \varepsilon \bar{\bar{K}}_1 && \text{pt } k = 2, \\ &\bar{\bar{B}}_2^1 = \frac{\mathrm{d}\bar{\bar{K}}_1}{\mathrm{d}s} + K_1^2 - \varepsilon \bar{\bar{K}}_2 && \text{pt } k = 1. \end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

Ținînd seama de relațiile dinainte și (2.11), în P_0 avem

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}\bar{K}_1}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\bar{\bar{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right) - \varepsilon\, (\bar{K}_2 - \bar{\bar{K}}_2)\right] \bar{\eta}_1^\lambda + (\bar{\eta}_3^\lambda - \bar{\bar{\eta}}_3^\lambda) = 0. \tag{2.13}$$

Considerînd curbele pentru care $\overline{\eta}_1^\lambda$, $V_3^\lambda = \overline{\eta}_3^\lambda - \overline{\overline{\eta}}_3^\lambda$ nu sînt liniar dependenți, avem

$$(2.14) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\overline{K}_1}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right)_0 - \varepsilon(\overline{K}_2 - \overline{\overline{K}}_2) = 0, \quad (\overline{\eta}_3^\lambda)_0 = (\overline{\overline{\eta}}_3^\lambda)_0,$$

$$(2.15) \qquad (\overline{K}_1\, R_1^\lambda - \varepsilon\, R_{121}^\lambda + 2\, S_1^\lambda)_0 = (\overline{\overline{K}}_1\, \overline{R}_1^\lambda - \varepsilon\, \overline{R}_{121}^\lambda + 2\, \overline{S}_1^\lambda)_0.$$

Așadar avem rezultatele :

Contactul de ordinul trei al curbelor (*C*), (*C'*) *în* P_0 *se caracterizează în plus față de cel de ordinul doi prin relațiile* (2.16), (2.15).

Contact de ordin $r = 4$

Pentru a pune în evidență mai bine relațiile ce caracterizează contactul curbelor în P_0, vom considera și cazul $r = 4$. Avem în plus

$$(2.16) \qquad (a_4)_0 = (\overline{a}_4)_0 \text{ de unde } \left(\frac{\delta^3\, \overline{\eta}_1^\lambda}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 = \left(\frac{\delta^3\, \overline{\overline{\eta}}_1^\lambda}{\mathrm{d}S}\right)_0.$$

Calculînd coeficienții din (2.2) pentru $p = 3$ avem

$$(2.17) \qquad \begin{cases} \overline{B}_3^4 = \varepsilon^3 = \varepsilon \\ \overline{B}_3^3 = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overline{B}_2^3}{\mathrm{d}s} + \varepsilon\, \overline{B}_2^2\right)_0 = (\varepsilon^2\, \overline{K}_1)_0 = (\overline{K}_1)_0 \\ \overline{B}_3^2 = \left(\dfrac{\mathrm{d}\overline{B}_2^2}{\mathrm{d}s} + \varepsilon\, \overline{B}_2^1\right)_0 = \left(2\,\varepsilon\dfrac{\mathrm{d}\overline{K}_1}{\mathrm{d}s} + \varepsilon\, \overline{K}_1^2 - \overline{K}_2\right)_0 \\ \overline{B}_3^1 = \dfrac{\mathrm{d}\overline{B}_2^1}{\mathrm{d}s} + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{3} (-1)^{\alpha+1}\, \overline{K}_\alpha\, \overline{B}_2^\alpha = \left[\dfrac{\mathrm{d}^2\overline{K}_1}{\mathrm{d}s^2} + 3\, \overline{K}_1\, \dfrac{\mathrm{d}\overline{K}_1}{\mathrm{d}s} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \overline{K}_1^3 - 2\,\varepsilon\, \overline{K}_1 \overline{K}_2 + \overline{K}_3 - \varepsilon\, \dfrac{\mathrm{d}K_2}{\mathrm{d}s}\right), \end{cases}$$

(și formule analoage pentru $\overline{\overline{R}}_3^k$).

Ținînd seama de relațiile dinainte, avem în P_0

$$(\overline{B}_3^1 - \overline{\overline{B}}_3^1)_0\, \overline{\eta}_1^\lambda - \left[2\,\varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}\overline{K}_1}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right)_0 - (\overline{K}_2 - \overline{\overline{K}}_2)\right] \overline{\eta}_2^\lambda - \varepsilon(\overline{\eta}_4^\lambda - \overline{\overline{\eta}}_4)_0 = 0.$$

Considerînd curbele pentru care $\overline{\eta}_1^\lambda$, $\overline{\eta}_2^\lambda$, $V_4^\lambda = \overline{\eta}_4^\lambda - \overline{\overline{\eta}}_4^\lambda$ nu sînt liniar dependenți, avem :

$$(2.18) \qquad \begin{cases} (\overline{B}_3^1)_0 = (\overline{\overline{B}}_3^1)_0, \\ 2\,\varepsilon\left(\dfrac{\mathrm{d}\overline{K}_1}{\mathrm{d}s} - \dfrac{\mathrm{d}\overline{\overline{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right)_0 - (\overline{K}_2 - \overline{\overline{K}}_2)_0 = 0, \\ (\overline{\eta}_4^\lambda)_0 = (\overline{\overline{\eta}}_4^\lambda)_0. \end{cases}$$

Relaţia a doua din (2.18) împreună cu (2.11) formează un sistem liniar omogen cu determinant $\Delta = 1 + 2\varepsilon$ şi cum $\varepsilon = \pm 1$ rezultă că $\Delta \neq 0$, ca atare sistemul are numai soluţie banală :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overline{K}_1}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right)_0 = 0, \qquad (\overline{K}_2 - \overline{\overline{K}}_2)_0 = 0,$$

de unde

$$(2.19) \qquad (\overline{K}_2)_0 = (\overline{\overline{K}}_2)_0\,; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\overline{K}_1}{\mathrm{d}s}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\overline{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right)_0.$$

Prima relaţie din (2.15) se scrie acum

$$(2.20) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^2\,\overline{K}_1}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}^2\,\overline{\overline{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right)_0 - \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}\overline{K}_2}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\overline{\overline{K}}_2}{\mathrm{d}S}\right)_0 + (\overline{K}_3 - \overline{\overline{K}}_3)_0 = 0.$$

Continuînd un calcul pentru $r = 5,\ 6$, vom mai găsi două relaţii de forma (2.17) cu determinant diferit de zero, de unde găsim pe lîngă alte relaţii

şi $\left(\frac{\mathrm{d}^2\,\overline{K}_1}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^2\,\overline{\overline{K}}_1}{\mathrm{d}S}\right)_0,\ \left(\frac{\mathrm{d}\overline{K}_2}{\mathrm{d}s}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\overline{K}}_2}{\mathrm{d}S}\right)_0,\ (\overline{K}_3)_0 = (\overline{\overline{K}}_3)_0$. Obţinem aşadar

pentru $r = 1, 2, \ldots, 6$ relaţiile $(\overline{\eta}^{\lambda}_{r})_0 = (\overline{\overline{\eta}}^{\lambda}_{r})_0$ iar pentru $r = 2p,\ p = 1, 2, 3$ relaţii de forma

$$(2.21) \qquad (\overline{K}_p)_0 = (\overline{\overline{K}}_p)_0\,; \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^{p-a}\,\overline{K}_a}{\mathrm{d}s^a}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}^{p-a}\,\overline{\overline{K}}_a}{\mathrm{d}S^a}\right)_0, \quad a = 1, 2, \ldots p-1.$$

3. *Contactul a două curbe generale.* Dacă în [3] considerăm formulele (7) pentru cazul $\eta^{\lambda}_1 = \mu^{\lambda}_1 = \frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}s}$, se pot scrie pentru (C) şi (C'') formulele

$$(3.1) \qquad (\mathrm{C}) \begin{cases} \dfrac{\delta\eta^{\lambda}_1}{\mathrm{d}s} = K_1\,\eta^{\lambda}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\delta\eta^{\lambda}_p}{\mathrm{d}s} = -K_{p-1}\,\eta^{\lambda}_{p-1} + K_p\,\eta^{\lambda}_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\delta\eta^{\lambda}_n}{\mathrm{d}s} = F^{\lambda}(t, K, \Gamma) \end{cases} \qquad (C') \begin{cases} \dfrac{\delta'\,\eta^{\lambda}_1}{\mathrm{d}S} = {}'K_1\,{}'\eta^{\lambda}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\delta'\,\eta^{\lambda}_p}{\mathrm{d}S} = -{}'K_{p-1}\,{}'\eta^{\lambda}_{p-1} + {}'K_p\,{}'\eta^{\lambda}_{p+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\delta'\,\eta^{\lambda}_n}{\mathrm{d}S} = {}'F^{\lambda}({}'t, {}'K, \Gamma), \end{cases}$$

unde $p = 1,\ 2, \ldots n - 1$ (adică formulele din [5]).

Calculînd coeficienţii (a_k), $(\bar{a}_k)_0$ (în P_0 operăm cu un sistem de coordonate geodezice de ordin necesar) în expresiile lor vor apărea $\left(\frac{\delta^p \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0$, $\left(\frac{\delta^{p\prime} \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}S}\right)_0$ care, ţinînd seama de (3.1), duc la

$$\frac{\delta^p \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{p+1} B_p^i \eta_i^\lambda \quad , \quad \frac{\delta^p {}'\eta_1^\lambda}{\mathrm{d}S} = \sum {}'B_p^i {}'\eta_1^\lambda . \tag{3.2}$$

Ţinînd seama de (3.1) găsim rezultatul :

$$B_p^i = \frac{\mathrm{d}B_{p-1}^i}{ds} + K_{i-1} B_{p-1}^{i-1} - K_i B_{p-1}^{i+1} \tag{3.3}$$

(cu $B_1^0 = B_1^1 = 0$, $B_1^2 = K_1$, $K_0 = K_n = 0$) şi o relaţie asemănătoare pentru $'B$.

Relaţia de recurenţă pe care am obţinut-o în (3.3) uşurează foarte mult calculul pentru un contact de ordin mai mare. Ţinînd seama de (3.1), (1.8), (1.9) (1.10) obţinem :

$$\left\{\begin{aligned} (a_1)_0 &= (\eta_1^\lambda)_0 \\ (a_2)_0 &= \left(\frac{\delta \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}s}\right)_0 \\ (a_3)_0 &= \left(\frac{\delta^2 \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\right)_0 + (K_1 S_{12}^\lambda)_0 \\ (a_4)_0 &= \left(\frac{\delta^3 \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}s^3}\right)_0 + (K_1 R_{121}^\lambda + 2 S_1^\lambda)_0 \end{aligned}\right. \tag{3.4}$$

. . . .

$$\left\{\begin{aligned} (\bar{a}_1)_0 &= ({}'\eta_1^\lambda)_0 \\ (\bar{a}_2)_0 &= \left(\frac{\delta' \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}S}\right)_0 \\ (a_3)_0 &= \left(\frac{\delta^2 {}'\eta_1^\lambda}{dS^2}\right)_0 + {}'K_1 \overline{S}_{12}^\lambda \\ (a_4)_0 &= \left(\frac{\delta^3 {}'\eta_1^\lambda}{\mathrm{d}S^3}\right)_0 + ({}'K \overline{R}_{121}^\lambda + 2 \overline{S}_1^\lambda)_0 \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

. . . .

unde

$$\begin{aligned} &(S_1^\lambda)_0 = (S_{\mu\alpha}^\lambda \eta_1^\mu \eta_1^\alpha)_0, \quad (S_{12}^\lambda)_0 = (S_{\mu\alpha}^\lambda \eta_2^\mu \eta_1^\alpha)_0, \\ &(R_1^\lambda)_0 = (R_{\mu\omega\alpha}^\lambda + 2 S_{\mu\omega\alpha}^\lambda)\, \eta_1^\mu \eta_1^\omega \eta_1^\alpha, \quad (R_{121}^\lambda)_0 = (R_{\mu\omega\alpha}^\lambda + 2 S_{\mu\omega\alpha}^\lambda)\, \eta_1^\mu \eta_1^\omega \eta_1^\alpha \end{aligned} \tag{3.6}$$

(şi relaţii asemănătoare pentru $S, \overline{R}$).

Dacă facem $r = 1$, din (1.7), (3.4), (3.5) obţinem

$$(a_1)_0 = (\overline{a}_1)_0 \text{ adică } (\eta_1^\lambda)_0 = ('\eta_1^\lambda)_0, \ (\mathcal{S}_1^\lambda)_0 = ('\mathcal{S}_1^\lambda)_0 . \tag{3.7}$$

Aşadar rezultatul :

Dacă curbele au un contact de ordinul întîi în P_0, au acelaşi vector tangent în P_0 şi acelaşi vector $\mathcal{S}_1^\lambda$''

Avînd (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), contactul poate fi studiat uşor ca mai înainte şi pentru $r = 2,3,4$. Vom obţine rezultate asemănătoare cu cele din § 2 relativ la vectorii principali η^λ, $'\eta^\lambda$ în P_0 cît şi relativ la *curburile* K',K, numai că acestea apar cînd $K = 2\,p + 1$, $p = 1,2,3\ldots$ (şi bineînţeles cu unele modificări specifice formulelor (3.1)). Aceste rezultate în cazul $L_n = V_n$ — cazuri în care în (3.1) înlocuim arcul afin prin lungimea metrică—duc la rezultate corespunzătoare din V_n. De studiul problemei ultime ne vom mai ocupa.

Primită la redacţie la 12 iulie 1965

Institutul pedagogic de 3 ani Craiova

BIBLIOGRAFIE

1. V. Hlavaty, *Les courbes de la variété à n dimensions.* Mémorial des Sci. Math., **LXII** (1934).
2. — *Propieta differenziali delle curve însonospazio a conenessione liniare generale.* Rendiconti del circolo matematico, Palermo, 1929.
3. P. Stavre, *Asupra invarianţilor unei familii de direcţii într-un spaţiu cu conexiune afină L_n.* St. cerc. ştiinţ., Iaşi, *2* (1963).
4. P. Stavre, *Asupra formulelor lui Frenet pentru curbe din spaţiu cu conexiune afină L_n.* St. cerc. mat., **15**, *10* (1964).
5. Tamássy L., *Frenetsche Formeln für Kurven in affinzusammenhangenden Räumen.* Publicationes Math. Debrecen, **8**, 147 (1961).

NUMĂRUL TIPURILOR DE MULTIPOLI $(1-k)$ DUPĂ PRODUSUL DINTRE SUBGRUPUL ALTERNANT ȘI SUBGRUPUL NEGAȚIILOR. (SUBGRUPURI ALE GRUPULUI HIPEROCTAEDRIC)

DE

RADU POPESCU

Sagalovici în [10], Paul Constantinescu în [2], Gaşpar Toma în [3] și Schiop Alexandru în [10] găsesc numărul tipurilor de multipoli $(1-k)$ după grupul hiperoctaedric, după grupul simetric, după grupul negațiilor și respectiv după grupul alternant.

Această lucrare, folosind aceeaşi metodă, stabileşte numărul tipurilor de multipoli $(1-k)$ după produsul dintre subgrupul altern și subgrupul negațiilor, subgrupuri ale grupului hiperoctaedric.

§ 1. Fie M mulţimea formată din grupe de k funcţii booleene (diferite de constante şi diferite între ele).

Cardinalul lui M va fi evitat:

$$q = C^{k}_{2^{2^n}-2}.$$

Orice multipol $(1-k)$ este caracterizat de k funcţii booleene distincte (funcţii de lucru), deci orice element al mulţimii M va fi un multipol $(1-k)$.

Fie $\sigma_{\frac{n!}{2}}$ subgrupul alternant și $\mathfrak{N}_n$ subgrupul negațiilor. $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ și $\mathfrak{N}_n$ comută, deci produsul lor va fi un grup $\mathcal{G}_n$:

$$\mathcal{G}_n = \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}} \times \mathfrak{N}_n \text{ și } [\mathcal{G}_n] = \frac{n!}{2} \cdot 2^n.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 889–894, BUCUREȘTI, 1966

Scrierea unui element din $\mathcal{G}_n$ ca produs de elemente din $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ și $\mathcal{N}_n$ este unică [8].

Definiție. Doi multipoli $(1-k)$ sînt de același tip după grupul $\mathcal{G}_n$ dacă se deduc unul din altul prin aplicarea unei transformări din $\mathcal{G}_n$.

Dacă notăm cu Q și R doi multipoli $(1-k)$, scriem că Q și R sînt de același tip astfel :

$$Q \overset{\mathcal{G}_n}{\text{---}} R,$$

„$\overset{\mathcal{G}_n}{\text{---}}$" este o relație de echivalență în M.

Această relație de echivalență împarte mulțimea M în clase de echivalență, numite „tipuri de multipoli $(1-k)$ după $\mathcal{G}_n$".

Problema este de a determina numărul acestor tipuri.

Orice funcție booleeană de n variabile se poate scrie sub forma canonică disjunctivă astfel :

$$f_i = \sum_{j=0}^{2^n-1} \varepsilon_{i_j} u_j \,, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^{2^n} - 1$$

iar u_j sînt conjuncții elementare [6].

O transformare din $\mathcal{G}_n$ aplicată mulțimii celor n variabile induce în mulțimea conjuncțiilor elementare o permutare s. Aceasta induce în mulțimea funcțiilor booleene permutarea t care la rîndul ei induce în M permutarea T.

Fie A_T matricea de permutări de ordinul q corespunzătoare permutării T.

Mulțimea celor $\frac{n!}{2} \cdot 2^n$ matrici realizează o reprezentare liniară Γ a grupului $\mathcal{G}_n$, care este reductibilă, și conține reprezentarea identică unidimensională de un număr de ori egal cu numărul tipurilor de multipoli $(1-k)$ după grupul $\mathcal{G}_n$ [9], [7].

Fie ν numărul tipurilor de multipoli $(1-k)$ căutat. Avem ([7]) :

$$\nu = \frac{1}{\frac{n!}{2} 2^n} \sum_c n_c \, \chi(c), \tag{1.1}$$

unde n_c este numărul de elemente dintr-o clasă de elemente conjugate din $\mathcal{G}_n$.

$\chi(C)$ este caracterul clasei C în reprezentarea Γ iar sumarea se face după toate clasele lui $\mathcal{G}_n$.

Deci pentru calculul lui ν avem nevoie de n_c și χ_c.

§ 2. În [8] ca o consecință a lemei 3, § 2, avem :

$$n_c = 2^n n! \prod \frac{1}{i^{\alpha_i} 2^{\alpha_i} \beta_i! \, (\alpha_i - \beta_i)!} \tag{2.1}$$

iar pentru clasele de tipul :

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_4 = 0, \\ &\beta_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_4 = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$n_C = \frac{2^n \cdot n\,!}{2} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha_i}\, 2^{\alpha_i}\, \beta_i\,!\,(\alpha_i - \beta_i)\,!}$$

unde α_i este numărul ciclurilor independente, de lungime i ale permutării σ a unui element din clasa C.

β_i este numărul e-ciclurilor permutării σ a elementului din clasa C cu $\beta_i \leqslant \alpha_i$ [8].

În [8] se arată în ce mod $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,\ \beta_1 \ldots \beta_n) = (\alpha\beta)$ corespunde unei clase C a grupului $\mathcal{G}_n$.

Astfel : simbolului $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,\ \beta_1 \ldots \beta_n)$ care nu este de tipul :

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_4 = 0, \ldots \\ &\beta_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_4 = 0, \ldots \end{aligned}$$

îi corespunde în $\mathcal{G}_n$ o singură clasă de elemente conjugate.

Simbolului de tipul amintit imediat mai sus îi corespund 2 clase de elemente conjugate în $\mathcal{G}_n$ cu acelaşi număr de elemente conjugate.

Simbolurile $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ sînt în corespondenţă biunivocă cu partiţiile lui n, corespunzătoare permutărilor pare (din grupul altern).

Fie $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, $\lambda_i \geqslant \lambda_{i+1} \geqslant 0$.

Atunci $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, $\alpha_n = \lambda_n$.

Atunci următorul rezultat :

O permutare $\sigma \in \sigma_n$! căreia îi corespunde simbolul $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ este pară dacă şi numai dacă

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots = 2\,k.$$

Deci avem posibilitatea de a ne extrage dintre partiţiile lui n pe cele care generează permutări pare.

Putem deci stabili clasele lui $\mathcal{G}_n$ şi pentru fiecare clasă putem stabili simbolul $(\alpha\beta)$ respectiv.

Numărul elementelor unei clase din $\mathcal{G}_n$ se va calcula după formulele (2.1), (2.2).

§ 3. Pentru calculul lui $\chi(C)$ avem nevoie de structura de cicluri a permutării t a funcţiilor booleene. Fie aceasta $(t_1 \ldots t_{2^{2n}})$.

Fie $(b_1 \ldots b_k)$ structura de cicluri a permutării p a celor k funcţii $(f_1 \ldots f_k)$ corespunzătoare fiecărui multipol $(1 - k)$.

Fiecare structură $(b_1 \ldots b_k)$ e în corespondenţă biunivocă cu o partiţie a lui k.

Atunci caracterul $\chi(C)$ se calculează după formula :

$$\chi(C) = \sum \prod_{i=1}^{k} C_{t_i}^{b_i}, \tag{3.1}$$

unde $C_{t_i}^{b_i}$ se calculează numai pentru indicii i pentru care $b_i \neq 0$ și $b_i \leqslant t_i$ iar $C_{t_i}^{b_i} = 0$ dacă $b_i > t_i$. Suma se efectuează după toate structurile $(b_1 \ldots b_k)$ corespunzătoare partițiilor lui k [10], [2].

Fie $(\lambda_1 \ldots \lambda_{2^n})$ structura de cicluri a permutării s a conjuncțiilor elementare, permutare indusă de o transformare din clasa C.

Structura de cicluri $(\lambda_1 \ldots \lambda_{2^n})$ este aceeași pentru toate elementele din C.

De asemenea, structura de cicluri $(t_1 \ldots t_{2^{2^n}})$ este aceeași pentru toate elementele din clasa C [9], [10].

Structura $(t_1 \ldots t_{2^{2^n}})$ va fi dată de:

$$\overline{P} = \prod_{j=1}^{2^n} (P_e^j(z))^{\lambda_j} = t_1' z_1 + t_2 z_2 + \ldots + t_{2^{2^n}} z_{2^{2^n}}, \tag{3.2}$$

unde

$$t_1' = t_1 + 2,$$

iar structura $(\lambda_1 \ldots \lambda_{2^n})$ va fi dată de:

$$P = \prod_{i=1}^{n} (P_e^i(z))^{\alpha_i} (P_o^i(z))^{\alpha_i - \beta_i} = \sum_{j=1}^{2^n} \lambda_j z_j, \tag{3.3}$$

unde

$$z_a z_b = \frac{ab}{[a, b]} z_{[a,b]}, \quad [a, b] = \text{c.m.m.m.c. al lui } a \text{ și } b$$

iar:

$$\begin{cases} P_e^i(z) = \sum\limits_{\delta/i} \dfrac{\eta_\delta}{\delta} z_\delta \text{ cu } \eta_\delta = 2^\delta - \sum\limits_{\gamma/\delta} \eta_\gamma, \quad 0 < \gamma < \delta, \\ P_o^i(z) = \sum\limits_{\delta/2i} \dfrac{\eta_{\delta,m}}{\delta} z_\delta, \quad \eta_\delta = 2^{2^m \delta'} - \sum\limits_{\gamma/\delta} \eta_\delta, \quad 0 < \gamma < \delta, \end{cases} \tag{3.4}$$

unde:

$$i = 2^m \cdot l, \quad l = 2k + 1, \quad \delta = 2^{m+1} \delta', \delta' = 2k' + 1 \text{ [9].}$$

§ 4. În continuare vom arăta cum se calculează pentru $n = 3$, $k = 2$.

Partițiile lui 3 sînt: 3, 0, 0, 2, 1, 0, 1, 1, 1.

Deci clasele lui $\mathfrak{S}_{\frac{3!}{2}}$ vor fi:

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$$
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$$

ultimele 2 clase din $\mathfrak{S}_{\frac{3!}{2}}$ formează o singură clasă în $\mathfrak{S}_3$!

În $\mathcal{G}_3$ vom avea clasele următoare :

$$\begin{array}{lllllll}
C_1: & \alpha_1 = 3, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = 0 & \beta_1 = 3, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = 0 \\
C_2: & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \beta_1 = 2 & \text{,,} & \beta_3 = 0 \\
C_3: & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \beta_1 = 1 & \text{,,} & \beta_3 = 0 \\
C_4: & \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} & \beta_1 = 0 & \text{,,} & \beta_3 = 0 \\
C_5: & \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = 1, & \beta_1 = 0, & \beta_2 = 0 & \beta_3 = 1 \\
C_6: & \text{,,} & \text{,,} & \alpha_3 = 1, & \text{,,} & \text{,,} & \beta_3 = 0 \\
C_7: & \text{,,} & \text{,,} & \alpha_3 = 1, & \text{,,} & \text{,,} & \beta_3 = 1 \\
C_8: & \text{,,} & \text{,,} & \alpha_3 = 1, & \text{,,} & \text{,,} & \beta_3 = 0
\end{array}$$

În Θ_n (grupul hiperoctaedric) C_5 și C_7 formează o singură clasă de elemente conjugate.

La fel și C_6 și C_8.

Pentru calculul lui n_C folosind formulele (2.1) și (2.2) găsim :

$$n_{C_1} = n_{C_4} = 1, \quad n_{C_5} = n_{C_6} = n_{C_7} = n_{C_8} = 4,$$

$$n_{C_2} = n_{C_3} = 3.$$

Folosind formula (3.3) găsim :

$C_1 :\ P = (P_e^1(z))^3 = (2z_1)^3 = 8z_1$ deci $\lambda_1 = 8, \ \lambda_2 = 0\ldots$

$C_2 :\ P = (P_e^1(z))^2 (P_0^1(z)) = 4z_2$ deci $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 0\ldots$

$C_3 :\ P = P_e^1(z)\,(P_0^1(z))^2 = 4z_2$ deci $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 0\ldots$

$C_4 :\ P = (P_o^1(z))^3 = 4z_2$ deci $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = 0\ldots$

$C_5, \ C_7 :\ P = (P_e^3(z))^1 = 2z_1 + 2z_3,$ deci $\lambda_1 = \lambda_3 = 2, \ \lambda_2 = 0\ldots$

$C_6, \ C_8 :\ P = P_o^3(z) = z_2 + z_6,$ deci $\lambda_2 = \lambda_6 = 1, \ \lambda_1 = 0\ldots$

Pentru calculul structurii $(t_1\ldots t_{2^{2^n}})$ folosim formula (3.2) și găsim :

$C_1 :\ P = (P_e^1(z))^8 = 2^8 z_1$ deci $t_1 = 254, \ t_2 = 0$

$C_2, \ C_3, \ C_4 :\ \overline{P} = (P_e^2(z))^4 = 16z_1 + 120\,z_2$ deci $t_1 = 14, \ t_2 = 120, \ t_i = 0$

$C_5, \ C_7 :\ \overline{P} = (P_e^1(z))^2 (P_e^3(z))^2 = 16z_1 + 80\,z_3,$ deci $t_1 = 14, t_3 = 80, \ t_i = 0$

$C_6, \ C_8 :\ \overline{P} = P_e^2(z)\,P_e^6(z) = 4z_1 + 6z_2 + 4t_3 + 38z_6,$ deci $t_i = 2, \ t_2 = 6,$

$$t_3 = 4, \ t_6 = 38.$$

Pentru calculul lui $\chi(C)$ trebuie să aplicăm formula (3.1).

Partițiile lui $k = 2$ sînt : (2, 0) ; (1, 1).

Structurile $(b_1 \ldots b_k)$ sînt :

$b_1 = 2, \quad b_2 = 0,$

$b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$

Vom avea deci prin aplicarea lui (3.1)

$\chi(C_1) = C^2_{254} = 32131$

$\chi(C_2) = \chi(C_3) = \chi(C_4) = C^2_{14} + C^1_{120} = 211$

$\chi(C_5) = \chi(C_7) = C^2_{14} = 91$

$\chi(C_6) = \chi(C_8) = C^2_2 + C^6_1 = 7.$

În sfîrşit, prin aplicarea formulei (1.1), găsim numărul căutat ν al tipurilor de multipoli $(1 - k)$ după produsul dintre grupul altern şi grupul negaţiilor :

$$\nu = \frac{1}{\frac{3\,!}{2}\,2^3}\left[1.321\,31 + 3.211 + 3.211 + 1.211 + 4.91 + 4.91 + 4.7 + 4.7\right]$$

$$\nu = 1433$$

Primită la redacţie la 27 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Paul Constantinescu, *Asupra numărului de tipuri de funcţii booleene după unele subgrupuri ale grupului hiperoctaedric*. Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. (1960).
2. Paul Constantinescu, *Numărul tipurilor de sinonime ale multipolilor (1—k)*. Analele Univ. Bucureşti, (*29*) (1961).
3. Toma Gaşpar, *Numărul tipurilor de multipoli (1—k) după grupul negaţiilor*. Analele Univ. Bucureşti, (*29*) (1961).
4. Toma Gaşpar, *Numărul tipurilor de sinonime ale claselor de dipoli funcţionali echivalenţi cu selectori*. St. cerc. mat., **16**, *9* (1964).
5. A. Kuroş, *Teoria grupurilor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
6. Gr. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
7. F. Murnagan, *Теория представлений групп*, У. М. Москва, 1950.
8. Radu Popescu, *Numărul tipurilor de funcţii booleene după produsul dintre subgrupul alternant şi subgrupul negaţiilor (subgrupuri ale grupului hiperoctaedric)*. Acest volum pag. 895.
9. D. Slepian, *On the Number of Symmetry Types of Booleean Functions of n Variables*. Canada, *2* (1952).
10. I. D. Sagalovici, *О числе типов симметрии контактных (1—K) полюзников*. Докл. Акад. наук СССР, I (1960).
11. A. Şchiop, *Numărul tipurilor de multipoli (1—k) după grupul altern*. St. cerc. mat., **17**, *3* (1965).

NUMĂRUL TIPURILOR DE FUNCȚII BOOLEENE DUPĂ PRODUSUL DINTRE SUBGRUPUL ALTERNAT ȘI SUBGRUPUL NEGAȚIILOR (SUBGRUPURI ALE GRUPULUI HIPEROCTAEDRIC)

DE

RADU POPESCU

În lucrarea de față se calculează numărul tipurilor de funcții Booleene după produsul grupului alternant $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ cu grupul negațiilor $\mathfrak{N}_n$ subgrupuri ale grupului hiperoctaedric Θ_n urmărindu-se metoda de lucru expusă în [4].

În § 2 se stabilesc clasele de elemente conjugate din

$$\mathcal{G}_n = \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}\, \mathfrak{N}_n.$$

Pentru exemplificare se tratează complet problema aflării acestui număr de tipuri de funcții Booleene pentru cazurile : $n = 2$ și $n = 3$.

§ 1. EVALUAREA LUI ν

Fie $(i_1, \ldots, i_l)$ un ciclu. Acest ciclu se poate scrie ca produs de $l-1$ transpoziții :

DEFINIȚIA 1. O permutare se zice pară dacă descompunerea ei în produs de transpoziții conține un număr par de transpoziții.

Unei permutări $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, i se poate asocia simbolul : $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, unde α_i arată cîte cicluri de lungime i conține permutarea σ.

Observația 1. Evident că permutarea σ va fi pară dacă și numai dacă : $\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots = 2k$.

Fie $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ subgrupul alternant (subgrupul permutărilor pare) și fie $\mathfrak{N}_n$ subgrupul negațiilor.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 895–907, BUCUREȘTI, 1966

Avem $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}} \subseteq \mathfrak{S}_{n!} \subseteq \Theta_n$ şi $\mathcal{N}_n \subseteq \Theta_n$ $(\Theta_n = \mathfrak{S}_{n!}\, \mathcal{N}_n)$.

Fie $\sigma \in \mathfrak{S}_{n!}$ şi $N_i \in \mathcal{N}_n$ (i = echivalentul zecimal al numărului în binar $a_1 \ldots a_n$, unde $a_j = 1$ sau 0 după cum N_i acţionează sau nu asupra variabilei X_j)

Avem : $\sigma N_i = N_{\sigma^{-1}_{(i)}} \sigma$ [2]. Deci $\mathfrak{S}_{n!}\, \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n\, \mathfrak{S}_{n!} \Rightarrow \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}\, \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n\, \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$.

Fie $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}\, \mathcal{N}_n = \mathcal{G}_n$.

Deoarece $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ şi $\mathcal{N}_n$ comută, produsul lor este grup.

Deci $\mathcal{G}_n$ este un grup.

Cum scrierea unui element din Θ_n ca produs de 2 elemente, unul din $\mathfrak{S}_{n!}$ şi altul din $\mathcal{N}_n$, este unică, scrierea unui element din $(\mathcal{G}_n)$ va fi şi ea unică.

Deoarece $\mathfrak{G}_{\frac{n!}{2}}$ şi $\mathcal{N}_n$ au un singur element comun (elementul unitate al fiecărui subgrup), ordinul lui $\mathcal{G}_n$ va fi

$$[G_n] = \frac{n\,!}{2} \cdot 2^n. \tag{1.1}$$

Fie $N_i \sigma \in \mathcal{G}_n$ $(N_i \in \mathcal{N}_n,\ \sigma \in \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}})$ şi fie $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ structura de cicluri a permutării σ.

DEFINIŢIA 2. Dacă N_i acţionează asupra unui număr par dintre variabilele permutate de un ciclu al lui σ (σ acţionează asupra mulţimii variabilelor), atunci acest ciclu se numeşte *e-ciclu* în raport cu N_i.

DEFINIŢIA 3. Dacă N_i acţionează asupra unui număr impar dintre variabilele permutate de un ciclu al lui σ, atunci acest ciclu se numeşte *o-ciclu* în raport cu N_i.

Fie acum β_i numărul *e*-ciclurilor de lungime i ale permutării σ din elementul $N_i\ \sigma \in \mathcal{G}_n$.

Avem, evident, $\beta_i \leqslant \alpha_i$.

Putem deci asocia lui $N_i\, \sigma \in \mathcal{G}_n$ simbolul $(\alpha_1 \ldots \alpha_n,\ \beta_1 \ldots \beta_n)$ sau, mai scurt, $(\alpha\ \beta)$.

Fie $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathfrak{L}_2^n \rightarrow \mathfrak{L}_2$ o funcţie booleană. Putem scrie această funcţie sub forma canonică normal disjunctivă :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \varepsilon_i\, x_1^{\alpha_1^{(i)}} \ldots x_n^{\alpha_n^{(i)}} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \varepsilon_i\, u_i$$

unde u_i sînt constituentele unităţii [3].

Observaţia 2. Fiecărei constituente a unităţii îi putem asocia un simbol format din n zerouri sau unuuri astfel :

pe locul K avem 0 dacă X_k este barat ;

pe locul K avem 1 dacă X_k este nebarat.

Avem astfel o matrice cu 2^n linii (numărul constituentelor unităţii) şi n coloane (numărul variabilelor din fiecare constituent).

Putem ordona aceste constituente aşa ca simbolul ataşat fiecărui constituent al unităţii să fie echivalentul în binar al indicelui acestuia.

Observația 3. Oricărei funcții $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ îi putem asocia un simbol $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots, \varepsilon_{i_2 n})$, unde

$\varepsilon_{ij} = 0$ dacă u_j nu apare în scrierea sub formă canonică normal disjunctivă a lui f_i;

$\varepsilon_{ij} = 1$ dacă u_j apare în scrierea lui f_i.

Putem ordona aceste funcții așa ca simbolul atașat fiecărei funcții să fie echivalentul binar al indicelui i.

Obținem astfel o matrice ε cu 2^{2^n} linii (numărul funcțiilor booleene) și 2^n coloane (numărul constituentelor).

Fie deci

$$\mathfrak{F} = \{f_i(x_1, \ldots, x_n) \mid f_i : \mathfrak{L}_2^n \to \mathfrak{L}_2,\ i = 0, 1, \ldots, (2^{2^n} - 1)\}.$$

DEFINIȚIA 4. Două funcții booleene f și g se zic „de același tip după $\mathcal{G}_n$" dacă se deduc una din alta prin transformări din acest grup.

Vom scrie: $f \overset{\mathcal{G}_n}{\sim} g$

„$\overset{\mathcal{G}_n}{\sim}$" este o relație de echivalență.

Putem deci vorbi de clase de echivalență în $\mathcal{G}_n$.

Clasele de echivalență față de relația „$\overset{\mathcal{G}_n}{\sim}$" se numesc „tipuri de funcții booleene după $\mathcal{G}_n$".

Aplicînd transformarea $N_i\, \sigma \in \mathcal{G}_n$ mulțimii $\mathfrak{X}$ a variabilelor, se obține în mulțimea $\mathcal{U} = \{u_j \mid j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ a constituentelor unității, o permutare „s".

Permutarea „s" induce în mulțimea funcțiilor booleene $\mathfrak{F}$ o permutare „t".

Deci:

$$N_i\, \sigma\, (\mathfrak{X}) \to s\, (\mathcal{U}) \to t\, (\mathfrak{F}).$$

Permutării „t" îi asociem matricea permutării „A_t".

Vom obține astfel: $\frac{n!}{2}\, 2^n$ matrici de permutări „A_t" care realizează o reprezentare liniară Γ, de dimensiune 2^{2^n} a grupului $\mathcal{G}_n$.

Reprezentarea Γ e reductibilă și conține reprezentarea identică unidimensională de un număr de ori egal cu numărul care arată cîte tipuri de funcții booleene avem după grupul $\mathcal{G}_n$ [4].

Fie ν numărul tipurilor de funcții booleene după produsul dintre subgrupul alternant $(\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}})$ și subgrupul negațiilor $(\mathcal{N}_n)$, subgrupuri ale grupului hiperoctaedric (Θ_n).

Acest număr va fi:

$$\nu = \frac{1}{\frac{n!}{2}\, 2^n} \sum n_C\, \chi\, (C), \tag{1.2}$$

unde C este o clasă de elemente conjugate din $\mathcal{G}_n$, n_C este numărul de elemente din clasa C, $\chi(C)$ este caracterul clasei C, iar sumarea se face după toate clasele de elemente conjugate din $\mathcal{G}_n$

Pentru evaluarea lui ν va trebui deci să calculăm pe n_C şi $\chi(C)$.

§ 2. CLASELE DE ELEMENTE CONJUGATE DIN $\mathcal{G}_n$

LEMA 1. *Dacă două elemente din $\mathcal{G}_n$ aparțin aceleași clase de elemente conjugate $\mathcal{G}_n$, atunci ele au același simbol* $(\alpha\ \beta)$.

Într-adevăr, fie $h_1 = N_i\,\sigma$, $h_2 = N_j\,\tau$, h_1, $h_2 \in \mathcal{G}_n$ $h_1 \overset{\mathcal{G}_n}{\sim} h_2 \Rightarrow \exists\, h = N_k\,\rho \in \mathcal{G}_n$ aşa ca : $h_1 = h\,h_2\,h^{-1}$ adică :

$$N_i\,\sigma = (N_k\,\rho)\,(N_j\,\tau)\,(\rho^{-1}\,N_k)$$

deoarece

$$N_k^{-1} = N_k.$$

Dar cum $\rho N_j = N_{\rho^{-1}(j)}\,\rho$, atunci :

$$N_i\,\sigma = N_k\,N_{\rho^{-1}(j)}\,\rho\tau\rho^{-1}\,N_k = N_k\,N_{\rho^{-1}(j)}\,N_{\theta^{-1}(k)}\,\theta,$$

unde $\theta = \rho\tau\rho^{-1}$.

În virtutea unicităţii reprezentării elementelor lui $\mathcal{G}_n$ ca produs de elemente din $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ şi $\mathcal{N}_n$ avem :

$$\sigma = \rho\tau\rho^{-1} \quad \text{şi} \quad N_i = N_k\,N_{\rho^{-1}(j)}\,N_{\theta^{-1}(k)}.$$

Dar $\sigma = \rho\,\tau\,\rho^{-1}$ arată că σ şi τ aparţin aceleeaşi clase de elemente conjugate din $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ şi deci au aceeaşi structură de cicluri :

$$N_i = N_k\,N_{\rho^{-1}(j)}\,N_{\theta^{-1}(k)} = N_k\,N_{\rho^{-1}(j)}\,N_{\sigma^{-1}(k)}.$$

Egalitatea aceasta se poate scrie pe componente astfel

$$i_a = k_a + (\rho^{-1}(j))_a + (\sigma^{-1}_{(k)})_a \pmod 2,$$

unde h_a este cifra de ordin „a'' a numărului binar „h''. Cum avem

$$(\rho^{-1}(j))_a = j_{\rho^{-1}(a)},$$

atunci

$$i_a = k_a + j_{\rho^{-1}(a)} + k_{\sigma-1(a)} \pmod 2.$$

Cînd „a'' parcurge un ciclu al lui σ, $\sigma^{-1}(a)$ parcurge acelaşi ciclu, iar $b = \rho^{-1}(a)$ parcurge un ciclu al lui τ. Avem deci :

$$i_a = k_a + j_b + k_{\sigma^{-1}(a)} \pmod 2$$

sau sumînd

$$\sum_a i_a = \sum_a k_a + \sum_b j_b + \sum_a k_{\sigma^{-1}(a)} \pmod 2$$

sumarea făcîndu-se cînd „*a*'' parcurge un ciclu al lui σ. Deci

$$\sum_a i_a = \sum_b j_o.$$

Deci *e*-ciclurile din σ şi τ sînt în corespondență biunivocă. Deci h_1 și h_2 au acelaşi simbol (α, β).

LEMA 2. *O clasă oarecare C a grupului hiperoctaedric Θ_n formată cu permutări pare (observația 1) apare integral ca o clasă în $\mathcal{G}_n$ dacă permutarea unui element din C comută cu o permutare impară.* (Adică dacă $\exists\ N_i\,\sigma \in C$, are pe $\theta \in \mathfrak{S}_{n!}$ impară

$$\sigma\theta = \theta\sigma,$$

În adevăr : în [5] se arată că o clasă oarecare C a grupului simetric formată din permutări pare trece în una şi aceeaşi clasă a grupului altern, dacă unul din elementele sale comută cu o permutare impară.

Fie deci $h_1 = N_i\,\sigma$, $h_2 = N_j\,\tau \in C$. Cum $\sigma\theta = \theta\sigma$ cu θ impară, avem : σ, τ aparţin aceleeaşi clase de elemente conjugate din $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$.

Deci : $\exists\ \rho \in \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ aşa ca $\sigma = \rho\,\tau\,\rho^{-1}$.

Fie atunci :

$$h = \rho\,(N_j\,\tau)\,\rho^{-1} = N_{\rho^{-1}(j)}\ \rho\,\tau\,\rho^{-1} = N_{\rho^{-1}(j)}\ \sigma.$$

Avem, evident, deoarece $\rho \in \mathcal{G}_n$,

$$h \overset{\mathcal{G}_n}{\sim} h_2.$$

Să demonstrăm că $h \overset{\mathcal{G}_n}{\sim} h_1$, şi atunci $h_1 \overset{\mathcal{G}_n}{\sim} h_2$.

Vom demonstra că : $\exists\ N_k \in \mathcal{N}_n$ aşa ca

$$h_1 = N_k\,h\,N_k,\ (N_k^{-1} = N_k)$$

adică

$$N_i\,\sigma = N_k\,(N_{\rho^{-1}(j)}\ \sigma)\,N_k = N_k\,N_{\rho^{-1}(j)}\ N_{\sigma^{-1}(k)}\ \sigma.$$

În virtutea unicităţii scrierii unui element din $\mathcal{G}_n$ ca produs de elemente din $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ şi $\mathcal{N}_n$, avem :

$$N_i = N_k\,N_{\rho^{-1}(j)}\ N_{\sigma^{-1}(k)}$$

sau, pe componente,

$$i_a = k_a + (\rho^{-1}(j))_a + (\sigma^{-1}(k))_a \pmod 2$$

sau

$$i_a = k_a + j_b + k_{\sigma^{-1}(a)} \pmod 2$$

unde a, b au aceeași semnificație ca în lema 1.

Avem deci un sistem de „n" ecuații ($a = 1, \ldots, n$) cu „n" necunoscute (k_a).

Adunînd aceste „n" ecuații se obține, evident,

$$\sum_a i_a = \sum_b j_b$$

relație adevărată prin ipoteză, căci h_1 și h_2 aparțin aceleeași clase de elemente conjugate din Θ_n, deci au același simbol ($\alpha\beta$).

Sistemul este deci compatibil și are $2^{\Sigma\alpha_i}$ soluții.

Atunci
$$h_1 \overset{\mathcal{G}_n}{\sim} h_2$$

q.e.d.

Lema 3. *Orice clasă de elemente conjugate ale lui* Θ_n *care are simbol* α, *astfel ca* : $\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \ldots = 2k$, *apare ca una și aceeași clasă în* $\mathcal{G}_n$, *cu excepția claselor de tipul* :

$$\alpha_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_4 = 0, \ldots,$$

$$\beta_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_4 = 0, \ldots,$$

care se desfac în două clase cu același număr de elemente

În adevăr, în [5] se demonstrează că :

Lemă. *Orice clasă* C *din* $\mathfrak{S}_{n!}$ *formată din permutări pare, trece în una și aceeași clasă din* $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ *cu excepția celor de tipul*

$$\alpha_1 = 1 \text{ sau } 0, \; \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_4 = 0, \ldots$$

care se desfac în două clase ale lui $\mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ *cu același număr de elemente.*

Rămîne deci să mai demonstrăm cîte elemente din $\mathcal{N}_n$ există, astfel ca produsul lor cu $\sigma \in \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}}$ să fie elemente din aceeași clasă a lui $\mathcal{G}_n$.

Fie $(i_1, \ldots, i_l)$ ciclul de lungime l al permutării σ.

Există $C_l^0 + C_l^2 + C_l^4 \ldots$ elemente din $\mathcal{N}_n$ care acționează asupra unui număr par dintre variabilele permutate de ciclul $(i_1, \ldots, i_l)$.

Există $C_l^1 + C_l^3 + C_l^5 + \ldots$ elemente din $\mathcal{N}_n$ care acționează asupra unui număr impar.

Dar

$$C_l^0 + C_l^2 + C_l^4 + \ldots = C_l^1 + C_l^3 + C_l^5 + \ldots = 2^{l-1}.$$

Deci pentru cele α_l cicluri de lungime l, există $2^{\alpha_l(l-1)}$ elemente din $\mathcal{N}_n$.

Şi deoarece cele β_l e-cicluri pot fi alese în

$$C_{\alpha_l}^{\beta_l} = \frac{\alpha_l\,!}{\beta_l\,!\,(\alpha_l - \beta_l)\,!}$$

moduri, vom avea, pentru cele α_l cicluri de lungime l ale permutării σ, $\dfrac{2^{\alpha_l(l-1)}\,\alpha_l\,!}{\beta_l\,!\,(\alpha_l - \beta_l)\,!}$ elemente din $\mathcal{N}_n$, al căror produs cu σ ne dă un element din Θ_n aparţinînd clasei $(\alpha\,\beta)$.

Deci pentru fiecare σ avem :

$$\prod_{l=1}^{n} \frac{2^{\alpha_l(l-1)}\,\alpha_l\,!}{\beta_l\,!\,(\alpha_l - \beta_l)\,!} = 2^n \prod_{l=1}^{n} \frac{\alpha_l\,!}{2^{\alpha_l}\,\beta_l\,!\,(\alpha_l - \beta_l)\,!}$$

elemente din $\mathcal{N}_n$ al căror produs cu σ ne dă un element din Θ_n aparţinînd clasei $(\alpha\,\beta)$.

Conform lemei din [5] enunţată mai sus, vom obţine lema 3.

§ 3. CALCULUL LUI n_C ŞI $\chi(C)$

Ca o consecinţă a lemei 3, § 2, avem :

$$n_C = 2^n\,n\,! \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha_i}\,2^{\alpha_i}\,\beta_i\,!\,(\alpha_i - \beta_i)\,!} \tag{3.1}$$

iar pentru clasele cu simbolul :

$$\alpha_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \alpha_4 = 0, \ldots$$

$$\beta_1 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1 \text{ sau } 0, \quad \beta_4 = 0, \ldots$$

$$n_C = \frac{2^n\,n\,!}{2} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\alpha_i}\,2^{\alpha_i}\,\beta_i\,!\,(\alpha_i - \beta_i)\,!}, \tag{3.2}$$

Fie acum $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^n})$ structura de cicluri a permutării „s”, a conjuncţiilor elementare, indusă de $N_i\,\sigma$.

LEMA 1. *Caracterul elementului „$N_i\sigma$” este dat de formula* $\chi\,(N_i\sigma) = 2^q$, *unde* q *este numărul ciclurilor independente ale permutării „s” a conjuncţiilor elementare, permutare indusă de „$N_i\,\sigma$”.*

Într-adevăr, caracterul acestei transformări este egal cu numărul funcţiilor booleene invariante la aplicarea permutării a conjuncţiilor elementare.

Fie $(u_1, \ldots, u_l)$ ciclul de lungime l al permutării „s”. Prin aplicarea acestui ciclu conjuncţiilor elementare, funcţiile booleene permută între ele.

Vor rămîne invariante atîtea funcţii cîte au coeficienţii $\varepsilon_{i_1} = \varepsilon_{i_2} = \dots = \varepsilon_{i_l} = \varepsilon$ aceeaşi. (Coeficienţii ε_{i_j} apar în scrierea funcţiei sub formă canonică normal disjunctivă).

Dacă aplicăm permutarea „s” cu ciclurile de lungimi $l_1, l_2, \dots, l_q$ (nu neapărat distincte), vom avea atîtea funcţii invariante, cîte au :

$$\varepsilon_{i_1} = \varepsilon_{i_2} = \dots = \varepsilon_{i_{l_1}} = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_{j_1} = \varepsilon_{j_2} = \dots = \varepsilon_{j_{l_2}} = \varepsilon_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_{k_1} = \varepsilon_{k_2} = \dots = \varepsilon_{k_{l_q}} = \varepsilon_q$$

Şi acum $\varepsilon_i = 1$ sau 0 $i = 1, 2, \dots, q$, vom avea 2^q funcţii booleene invariante pentru permutarea „s” a conjuncţiilor elementare, unde $q = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i$ = numărul ciclurilor independente ale permutării „s”.

LEMA 2. *Prin aplicarea unui element oarecare al clasei* $(\alpha\ \beta)$ *se obţine o permutare „s” a conjuncţiilor elementare, cu o aceeaşi structură de cicluri* $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2^n})$.

Atunci

$$\chi(C) = 2^{q_{\alpha\beta}}, \tag{3.3}$$

unde $q_{\alpha\beta}$ este numărul ciclurilor independente ale permutării „s” indusă de un element din clasa $(\alpha\beta)$, deci

$$q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i$$

În adevăr, se observă că prin aplicarea unei transpoziţii variabilelor $x_1, \dots, x_n$, obţinem o permutare a conjuncţiilor elementare cu aceeaşi structură de cicluri, din cauza simetriei reprezentării binare a funcţiilor u_j (observaţia 2).

Din acelaşi motiv, prin aplicarea produsului a două transpoziţii asupra variabilelor $x_i, \dots, x_n$, obţinem o permutare a conjuncţiilor elementare cu aceeaşi structură de cicluri, ş.a.m.d.

Dar un ciclu de lungime l poate fi scris ca produs de $l - 1$ transpoziţii.

De asemenea, prin aplicarea lui N_k asupra variabilelor, obţinem o permutare a funcţiilor u_j care este un produs de 2^{n-1} transpoziţii.

Cum orice element din clasa C are acelaşi simbol $(\alpha\beta)$, vom obţine rezultatul dorit :

Permutarea „s” a conjuncţiilor elementare corespunzătoare unui element din clasa $(\alpha\ \beta)$, are aceeaşi structură de cicluri.

Fie $q_{\alpha\beta}$ din lemă.

Conform lemei anterioare,

$$\chi((\alpha\beta)) = 2^{q_{\alpha\beta}}$$

CALCULUL STRUCTURII DE CICLURI $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2^n})$

Fie $N_i\sigma$ un reprezentant al clasei $(\alpha\beta)$ ales astfel ca N_i să acţioneze numai asupra variabilelor permutate de *o*-cicluri.

Fie $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_l})$ ciclul de lungime l al permutării „σ". Pe linia „j" a matricii formate cu reprezentările binare ale constituentelor unităţii, cifrele de pe locurile $k_1, \ldots, k_l$ formează un număr binar cuprins între 0 şi $2^l - 1$. Fie acest număr μ_l.

Pentru fiecare ciclu al permutării „σ" găsim cîte un număr μ. În acest fel, putem asocia fiecărei linii „j" un simbol $(\mu_1^{(j)} \ldots \mu_q^j)$, unde q este numărul ciclurilor independente ale permutării.

Ciclul de lungime l acţionează asupra variabilelor $(x_{k_1} \ldots x_{k_l})$ şi induce în mulţimea numerelor cuprinse între 0 şi $2^l - 1$ o permutare a cărei structură de cicluri $(\alpha_1^{(l)} \ldots \alpha_{2^l}^{(l)})$ se află foarte uşor :

Pentru e-cicluri (N_i nu acţionează asupra variabilelor permutate de acestea). În mulţimea ordonată în ordine naturală a numerelor binare cuprinse între 0 şi $2^l - 1$, *e*-ciclul de lungime l induce, conform lemei 2, o permutare cu aceeaşi structură de cicluri.

Această structură de cicluri se află comparînd aranjamentul iniţial al reprezentărilor binare ale funcţiilor u_j cu noul aranjament obţinut prin scrierea primei coloane după ultima coloană.

Exemplu : $l = 2$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 00 & & 00 & 0 & \\ 1 & 01 & \longrightarrow & 10 & 2 & \longrightarrow \begin{pmatrix} 0123 \\ 0213 \end{pmatrix} = (0)\,(3)\,(12) \\ 2 & 10 & & 01 & 1 & \\ 3 & 11 & & 11 & 3 & \end{array}$$

Deci $\alpha_{e1}^{(2)} = 2 \quad \alpha_{e2}^{(2)} = 2 \quad \alpha_{e3}^{(2)} = \alpha_{e3}^{(2)} = 0.$

Pentru 0-cicluri (N_i acţionează asupra variabilelor permutate de acestea). Structura $(\alpha_1^{(l)} \ldots \alpha_{2^l}^{(l)})$ se află ca şi la *e*-cicluri numai că aici vom înmulţi rezultatul cu produsul : $(0\ 1)\ (2\ 3) \ldots (2^l - 2,\ 2^l - 1)$ ceea ce revine la schimbarea lui 0 cu 1 şi reciproc, pe coloana unde aceştia variază de la o linie la alta [4].

Exemplu : $l = 2$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 00 & & 00 & & 10 & 2 & \\ 1 & 01 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 00 & 0 & \longrightarrow \begin{pmatrix} 0123 \\ 2031 \end{pmatrix} = (0231). \\ 2 & 10 & & 01 & & 11 & 3 & \\ 3 & 11 & & 11 & & 01 & 1 & \end{array}$$

Deci

$$\alpha_{01}^{(2)} = \alpha_{02}^{(2)} = \alpha_{03}^{(2)} = 0 \qquad \alpha_{04}^{(2)} = 1.$$

Fie acum polinoamele :

$$P_e^l(z) = \sum_{j=1}^{2l} \alpha_{ej}^{(l)} z_j, \quad P_0^l(z) = \sum_{j=1}^{2l} \alpha_{0j}^{(l)} z_j$$

asociate ciclurilor de lungime „l” ale permutării σ (unde „j” este lungimea ciclului permutării celor 2^l conjuncții elementare realizate cu variabilele $(x_{k_1} \ldots x_{k_l})$.

Definind $z_a z_b = \frac{ab}{[ab]} z_{[ab]}$, unde $[a\,b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor „a” și „b”, vom avea [4]

$$\overline{P} = \prod_{l=1}^{n} (P_e^l(z))^{\beta_l} (P_0^l(z))^{\alpha_l - \beta_l} = \sum_{j=1}^{2^n} \lambda_j z_j, \tag{3.4}$$

unde λ_j dau structura de cicluri $(\lambda_1 \ldots \lambda_{2^n})$ a permutării „s” a conjuncțiilor elementare, permutare indusă de elementul $N_i\ \sigma$. Deci problema aflării structurii $(\lambda_1 \ldots \lambda_{2^n})$ se reduce la aflarea polinoamelor $P_e^l(z)$ și $P_0^l(z)$. Prin metoda descrisă mai sus, aceste polinoame se află ușor. Dăm mai jos un tablou al acestor polinoame.

Tablou

l	$P_e^l(z)$	$P_0^l(z)$
1	$2\,z_1$	z_2
2	$2\,z_1 + z_2$	z_4
3	$2\,z_1 + 2\,z_3$	$z_2 + z_6$
4	$2\,z_1 + z_2 + 3z_4$	$2\,z_8$
5	$2\,z_1 + 6\,z_5$	$z_2 + 3\,z_{10}$
6	$2\,z_1 + z_2 + 2z_3 + 9z_6$	$z_4 + 5\,z_{12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

În concluzie, pentru aflarea numărului ν al tipurilor de funcții booleene după grupul $\mathcal{G}_n = \mathfrak{S}_{\frac{n!}{2}} \mathcal{N}_n$ procedăm astfel :

— vom calcula acest număr după formula (1.2) ;

— n_c se calculează după formulele (3.1) și (3.2) ;

— $\chi(C)$ se calculează după formula (3.3) ;

— Structura $(\lambda_1 \ldots \lambda_{2^n})$ se află prin formula (3.4)

§ 4. EXEMPLE : n = 2, 3.

4.1 $n = 2$. Partițiile lui 2 sînt $(2, 0)$ și $(1, 1)$.
Deci clasele de elemente conjugate ale lui $\mathfrak{S}_{2!}$ sînt :

$$C_1 : \quad \alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = 0$$

$$C_2 : \quad \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 1.$$

În $\mathfrak{S}_{\frac{2!}{2}}$ vom avea doar clasa :

$$C_1' : \quad \alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = 0.$$

În $\mathcal{G}_2$ avem următoarele clase de elemente conjugate

$$\mathcal{C}_1 : \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0$$

$$\mathcal{C}_3 : \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0.$$

$$\mathcal{C}_1 : \overline{P} = P_e^1(z))^2 = 4z_1 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \Rightarrow q_1 = 4$$

deci

$$\chi(\mathcal{C}_1) = 2^4.$$

$$\mathcal{C}_2 : \overline{P} = P_e^1(z)\, P_0^1(z) = 2z_2 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$$\Rightarrow q_2 = 2 \Rightarrow \chi(\mathcal{C}_2) = 2^2.$$

$$\mathcal{C}_3 : \overline{P} = (P_0^1(z))^2 = 2z_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \ \lambda_2 = 2$$

$$\Rightarrow q_3 = 2 \Rightarrow \chi(\mathcal{C}_3) = 2^2.$$

$$n_{\mathcal{C}_1} = 2^2.2\,! \frac{1}{1^2.2^2.2\,!\,0\,!\,2^0\,2^0\,0\,!\,0\,!} = 1,$$

$$n_{\mathcal{C}_2} = 2^2.2\,! \frac{1}{1^2.2^2.1\,!\,1\,!\,2^0\,2^0\,0\,!\,0\,!} = 2,$$

$$n_{\mathcal{C}_3} = 2^2.2\,! \frac{1}{1^2.2^2.0\,!\,2\,!\,2^0\,2^0\,0\,!\,0\,!} = 1.$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{1}{2^2.\dfrac{2\,!}{2}}\,[1.2^4 + 2.2^2 + 1.2^2] = 7$$

$$\nu = 7$$

4.2. $n = 3$. Partiţiile lui 3 sînt : (300), (210), (111)
Deci clasele lui $\mathfrak{S}_{\frac{3!}{2}}$ vor fi :

$$C_1: \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0,$$

$$C_2': \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1,$$

$$C_3': \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1.$$

În $\mathcal{G}_3$ vom avea clasele următoare :

$$\mathcal{C}_1: \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0$$

$$\mathcal{C}_2: \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 = 2, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0$$

$$\mathcal{C}_3: \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0$$

$$\mathcal{C}_4: \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0$$

$$\mathcal{C}_5: \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1$$

$$\mathcal{C}_6: \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0$$

$$\mathcal{C}_7: \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 1$$

$$\mathcal{C}_8: \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0.$$

$$\mathcal{C}_1: \quad \overline{P} = (P_e^{(1)}(z))^3 = 8z_1 \Rightarrow \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_8 = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = 8 \qquad \chi(\mathcal{C}_1) = 2^8.$$

$$\mathcal{C}_2: \quad \overline{P} = (P_e^1(z))^2 (P_0^1(z)) = 4z_2 \Rightarrow \lambda_2 = 4, \; \lambda_1 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_8 = 0$$

$$\Rightarrow q_2 = 4 \qquad \chi(\mathcal{C}_2) = 2^4.$$

$$\mathcal{C}_3: \quad \overline{P} = (P_e^1(z))\,(P_0^1(z))^2 = 4z_2 \Rightarrow \lambda_2 = 4, \; \lambda_1 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_8 = 0$$

$$\Rightarrow q_3 = 4 \qquad \chi(\mathcal{C}_3) = 2^4.$$

$$\mathcal{C}_4: \quad P = (P_0^1(z))^3 = 4z_2 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \; \lambda_2 = 4, \; \lambda_3 = \ldots = \lambda_8 = 0$$

$$\Rightarrow q_4 = 4 \qquad \Rightarrow \chi(\mathcal{C}_4) = 2^4.$$

$$\mathcal{C}_5: \quad P = P_e^3(z) = 2z_1 + 2\,z_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 2, \; \lambda_2 = 0 \ldots$$

$$\Rightarrow q_5 = 4 \qquad \Rightarrow \chi(\mathcal{C}_5) = 2^4.$$

$$\mathcal{C}_6: \quad \overline{P} = P_0^3(z) = z_2 + z_6 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_6 = 1, \; \lambda_1 = 0 \ldots$$

$$\Rightarrow q_6 = 2 \qquad \chi(\mathcal{C}_6) = 2^2.$$

$$\chi(\mathcal{C}_7) = \chi(\mathcal{C}_5) = 2^4, \qquad \chi(\mathcal{C}_8) = \chi(\mathcal{C}_6) = 2^2.$$

$$n_{\mathcal{C}_1} = 3\,!\,2^3 \frac{1}{1^3.\,2^3.\,3\,!.\,0\,!} = 1$$

$$n_{\mathcal{C}_2} = 3\,!\,2^3 \frac{1}{1^3.\,2^3.\,2\,!\,1\,!} = 3$$

$$n_{\mathcal{C}_3} = 3\,!\,2^3 \frac{1}{1^3.\,2^3.\,1\,!\,2\,!} = 3$$

$$n_{\mathcal{C}_4} = 3\,!\,2^3 \frac{1}{1^3.\,2^3.\,0\,!\,3\,!} = 1$$

$$n_{\mathcal{C}_5} = 3\,!\,2^2 \frac{1}{3.\,2^3.\,1\,!.\,0\,!} = 1$$

$$n_{\mathcal{C}_6} = 3\,!\,2^2 \frac{1}{3.\,2^3.\,0\,!\,1\,!} = 1$$

$$n_{\mathcal{C}_7} = n_{\mathcal{C}_5} = 1, \quad n_{\mathcal{C}_8} = n_{\mathcal{C}_6} = 1.$$

Deci avem :

$$\nu = \frac{1}{\frac{3\,!}{2}\,2^3}\,[1.2^8+3.2^4+3.2^4+1.2^4+1.2^4+1.2^2+1.2^4+1.2^2]$$

$$\nu = 17.$$

Primită la redacţie la 11 iunie 1965

Institutul de studii şi cercetări hidrotehnice

BIBLIOGRAFIE

1. P. Constantinescu, *On the number of types of Boolean functions with respect to some subgroups on the hyper-octahedral group*. Bul. Math. de la Soc. Math. Phy. de la R.P.R. **4**, *1* (1960).
2. Поваров, *О групповой инвариантности булевых функций* în *Применение логики в науке и технике*, 1961.
3. Gr. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1959.
4. D. Slepian, *On the symmetry types of Boolean functions of n variables*. Canad. J. Math., **5**, *2* (1953).
5. A. Schiop, *Clasificarea multiplelor (1—k) după grupul altern*. St. cerc. mat., **17**, *3* (1965).

ASUPRA UNOR CONSTRUCȚII GEOMETRICE LEGATE DE OMOLOGIA SINGULARĂ A SPAȚIILOR FIBRATE

DE

HENRI MOSCOVICI

În această Notă se stabilesc cîteva leme de natură geometrică cu ajutorul cărora, printr-un procedeu algebric cunoscut, se obține șirul spectral asociat unei fibrări în sensul lui Serre.

Calculul primilor termeni ai șirului spectral asociat de Serre unei fibrări necesită unele construcții de natură geometrică. Ele au fost puse în evidență de Serre [2], în ipoteza că fibra este conexă prin arce. În [1] se dau cîteva indicații pentru realizarea unor construcții de acest tip în cazul general, cînd baza și fibra nu sînt neapărat conexe.

În cele ce urmează, dăm o altă metodă de obținere a acestor construcții geometrice, în cazul unei fibrări arbitrare, metodă care se bazează pe o singură construcție fundamentală.

1. Vom desemna, de acum înainte, prin (X, π, B) o fibrare în sensul lui Serre. Fie I segmentul $[0, 1]$. Vom spune că cubul singular $u : I^n \to E$ (E fiind X sau B) este i-degenerat, dacă nu depinde de a i-a coordonată. Să notăm prin Z_n mulțimea perechilor de cuburi singulare (u, v), $u : I^n \to B$, $v : I^{n-1} \to X$ astfel încît :

(a) $u(0, t_1, \ldots, t_{n-1}) = \pi(v(t_1, \ldots, t_{n-1}))$

(b) dacă v este $(n-1)$-degenerat, atunci u este n-degenerat.

LEMA FUNDAMENTALĂ. *Fie (X, π, B) o fibrare Serre. Pentru orice întreg $n \geqslant 1$ există o aplicație*

$$\Gamma^n : Z_n \to X^{I^n}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 909–917, BUCUREȘTI, 1966

cu următoarele proprietăţi :

(γ1) $$\lambda_1^0\,\Gamma^n(u,\ v)=v$$ [1]

(γ2) $$\pi\circ\Gamma^n(u,\ v)=u$$

(γ3) $$\lambda_{i+1}^{\varepsilon}\,\Gamma^n(u,\ v)=\Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon}u,\ \lambda_i^{\varepsilon}v)\ ;\ 1\leqslant i\leqslant n-1\ ;\ \varepsilon=0,\ 1.$$

(γ4) *Dacă u este 1-degenerat, atunci Γ^n (u, v) are aceeaşi proprietate, deci* :

$$\Gamma^n(u,\ v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-1})=v(t_1,\ldots,\ t_{n-1})$$

(γ5) *Dacă v este $(n-1)$-degenerat, atunci Γ^n $(u,\ v)$ este n-degenerat*

Demonstraţie. Se construieşte Γ^n $(u,\ v)$ prin recurenţă.

Pentru $n=1$ existenţa funcţiei Γ^1 rezultă direct din proprietatea de ridicare a omotopiei, dacă $u: I\to B$ nu este un drum constant, iar dacă drumul u este constant se pune prin definiţie

$$\Gamma^1(u,\ x)=x$$

pentru orice $x\in X$ cu $\pi(x)=u(0)=u(t)$.

Să presupunem că am construit Γ^k pentru orice $k=1,\ldots,\ n-1$. Fie $(u,\ v)\in Z_n$. Dacă u este 1-degenerat, definim

$$\Gamma^n(u,\ v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-1})=v(t_1,\ \ldots,\ t_{n-1})$$

şi condiţiile (γ1), (γ4), (γ5) sînt evident îndeplinite.

Deoarece $\pi(v(t_1,\ldots,\ t_{n-1}))=u(0,\ t_1,\ldots,t_{n-1})=u(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-1})$ rezultă că şi condiţia (γ2) este satisfăcută.

În sfîrşit, pentru a verifica (γ3) observăm că $\lambda_{i+1}^{\varepsilon}u$ este 1-degenerat, deci :

$$\Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon}u,\ \lambda_i^{\varepsilon}v)=\lambda_i^{\varepsilon}v=\lambda_{i+1}^{\varepsilon}\,\Gamma^n(u,\ v).$$

Să trecem acum la cazul cînd u nu este 1-degenerat.

Dacă v este $(n-1)$-degenerat, atunci definim

$$\Gamma^n(u,\ v)(t,\ t_1,\ldots,t_{n-1})=\Gamma^{n-1}(\lambda_n^0u,\ \lambda_{n-1}^0v)(t,\ t_1,\ldots,t_{n-2}).$$

Atunci

$$\Gamma^n(u,\ v)(0,\ t_1,\ldots,\ t_{n-1})=\lambda_{n-1}^0v(t_1,\ldots,\ t_{n-2})=v(t_1,\ldots,\ t_{n-1},\ 0)=$$
$$=v(t_1,\ \ldots,\ t_{n-1}),$$

iar

$$\pi(\Gamma^n(u,\ v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-1}))=\lambda_n^0\ u(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-2})=$$
$$=u(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-2},\ 0)=u(t,\ t_1,\ldots,t_{n-1})$$

pentru că u este n-degenerat.

---

[1] $\lambda_i^{\varepsilon}u(t_1,\ t_2,\ldots,\ t_{n-1})=u(t_1,\ldots,t_{i-1},\ \varepsilon,\ t_{i+1},\ldots,\ t_{n-1})$.

Pentru $1 \leqslant i \leqslant n-2$,

$$\lambda_{i+1}^{\varepsilon}\,\Gamma^{n}(u,\ v)(t,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n-2}) = \Gamma^{n}(u,\ v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{i-1},\ \varepsilon,\ t_i,\ldots,\ t_{n-2}) =$$
$$= \Gamma^{n-1}(\lambda_n^0 u,\ \lambda_{n-1}^0 v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{i-1},\ \varepsilon,\ t_i,\ \ldots,\ t_{n-3}) =$$
$$= \lambda_{i+1}^{\varepsilon}\,\Gamma^{n-1}(\lambda_n^0 u,\ \lambda_{n-1}^0 v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-3}) =$$
$$= \Gamma^{n-2}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon}\,\lambda_n^0\ u,\ \lambda_i^{\varepsilon}\,\lambda_{n-1}^0\ v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-3}) =$$
$$= \Gamma^{n-2}(\lambda_{n-1}^0\,\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_{n-2}^0\,\lambda_i^{\varepsilon} v)\ (t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-3}) =$$
$$= \lambda_{n-1}^0\,\Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_i^{\varepsilon} v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-3}) = \Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_i^{\varepsilon} v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-3},\ 0).$$

Cum pentru $i \leqslant n-2$ $\lambda_i^{\varepsilon}\ v$ este $(n-2)$-degenerat, urmează că și $\Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_i^{\varepsilon} v)$ este $(n-1)$-degenerat deci putem scrie în continuare

$$\Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_i^{\varepsilon} v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-3},\ 0) = \Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_i^{\varepsilon} v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-2}).$$

Așadar

$$\lambda_{i+1}^{\varepsilon}\,\Gamma^{n}(u,\ v) = \Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_i^{\varepsilon} v),$$

pentru $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

Însă

$$\lambda_n^{\varepsilon}\,\Gamma^{n}(u,\ v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-2}) = \Gamma^{n}(u,\ v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-2},\ \varepsilon) =$$
$$= \Gamma^{n-1}(\lambda_n^0 u,\ \lambda_{n-1}^0 v)(t,\ t_1,\ \ldots,\ t_{n-2}) = \Gamma^{n-1}(\lambda_n^{\varepsilon}\ u,\ \lambda_{n-1}^{\varepsilon} v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{n-2})$$

pentru că $\lambda_{n-1}^0 v = \lambda_{n-1}^{\varepsilon} v$ și $\lambda_n^0\ u = \lambda_n^{\varepsilon} u$.

Cu aceasta și condiția (γ3) este verificată complet.

Să presupunem acum că v nu este n-degenerat.

Fie $J = 0 \times I^{n-1} \cup I \times \dot{I}^{n-1}$ (unde $\dot{I}^{n-1}$ este frontiera cubului I^{n-1}); se știe că J este retract strict de deformație al cubului $I^n = I \times I^{n-1}$. Să considerăm aplicația continuă $\widetilde{v} : J \to X$ definită astfel:

$$\widetilde{v}\,(0,\ t_1,\ldots,\ t_{n-1}) = v(t_1,\ldots,\ t_{n-1})$$
$$\widetilde{v}\ (t,\ t_1,\ldots,\ t_{i-1},\ \varepsilon,\ t_{i+1},\ldots,\ t_{n-1}) =$$
$$= \Gamma^{n-1}(\lambda_{i+1}^{\varepsilon} u,\ \lambda_i^{\varepsilon} v)(t,\ t_1,\ldots,\ t_{i-1},\ t_{i+1},\ldots,\ t_{n-1})$$

Deoarece $u \mid J = \pi \circ \widetilde{v}$, există o aplicație continuă $h : I^n \to X$, astfel încît $\pi \circ h = u$ și $h \mid J = \widetilde{v}$.

Punînd, prin definiție, $\Gamma^n(u,\ v) = h$, se obține o aplicație care satisface toate condițiile cerute.

2. În acest paragraf se stabilesc rezultatele necesare pentru definirea sistemului local al omologiei fibrei.

Fie $F_b = \pi^{-1}(b)$ fibra peste $b \in B$ iar $\mathfrak{F} = \{F_b\}_{b \in B}$ familia tuturor fibrelor. Prin A vom nota un inel comutativ cu element unitate, iar prin M un A-modul unitar. Dacă E este un spațiu topologic, $Q_n E$ va desemna mulțimea cuburilor singulare n-dimensionale ale spațiului E, $C_n\ (E,\ M)$ grupul lanțurilor cubice singulare n-dimensionale normalizate ale spațiului

E cu coeficienţi în M, iar $C_*(E, M)$ complexul de omologie cubică singulară al spaţiului E cu coeficienţi în M.

Fie c un drum din B. Se numeşte construcţie subordonată drumului c un sistem de aplicaţii

$$\gamma_n : Q_n F_{c(0)} \to Q_{n+1} X,$$

definite pentru orice întreg $n \geqslant 0$, cu următoarele proprietăţi :

(q₁) $\lambda_1^{\sigma} \gamma_n u = u$;

(q₂) $\pi(\gamma_n u(t, t_1, \ldots, t_n)) = c(t)$;

(q₃) $\lambda_{i+1}^{\varepsilon} \gamma_n u = \gamma_{n-1} \lambda_i^{\varepsilon} u$; $\varepsilon = 0, 1$;

(q₄) Dacă u este n-degenerat, atunci $\gamma_n u$ este $(n+1)$-degenerat.

Punînd $\overline{\gamma}_n u = \lambda_1^1 \gamma_n u$ se obţine o aplicaţie $\overline{\gamma}_n : Q_n F_{c(0)} \to Q_n F_{c(1)}$, care comută cu feţele (adică $\lambda_i^{\varepsilon} \overline{\gamma}_n = \overline{\gamma}_{n-1} \lambda_{\varepsilon}^{i}$) şi deci induce un omomorfism de lanţuri

$$\overline{\gamma}_* : C_*(F_{c(0)}, M) \to C_*(F_{c(1)}, M).$$

LEMA 1. *Oricărui drum c din bază i se poate asocia o construcţie subordonată. Dacă c şi c' sînt drumuri omotope şi γ, γ' construcţii subordonate respectiv drumurilor c, c', atunci omomorfismele $\overline{\gamma}_*$ şi $\overline{\gamma}_*$ sînt omotope.*

Demonstraţie. Să notăm cu $\overline{c}_n$ cubul

$$\overline{c}_n(t, t_1, \ldots, t_n) = c(t).$$

Este evident că formula

$$\gamma_n u = \Gamma^{n+1}(\overline{c}_n, u), \quad u \in Q_n F_{c(0)}$$

defineşte o construcţie subordonată drumului c.

Dacă δ_n este o altă construcţie subordonată aceluiaşi drum c, atunci omomorfismele $\overline{\delta}_*$ şi $\overline{\gamma}_*$ sînt omotope. Într-adevăr, fie $f_n : I^{n+2} \to B$ cubul

$$f_n(\tau, t, t_1, \ldots, t_n) = c(\tau + t - \tau t).$$

Deoarece

$$f_n(0, t, t_1, \ldots, t_n) = c(t) = \pi(\delta_n u(t, t_1, \ldots, t_n))$$

putem defini cubul ku prin formula :

$$ku = \lambda_1^1 \Gamma^{n+2}(f_n, \delta_n u).$$

Observînd că $\lambda_2^0 f_n = \overline{c}_n$, rezultă :

$$\lambda_1^0 ku = \lambda_1^0 \lambda_1^1 \Gamma^{n+2}(f_n, \delta_n u) = \lambda_1^1 \lambda_2^0 \Gamma^{n+2}(f_n, \delta_n u) =$$

$$= \lambda_1^1 \Gamma^{n+1}(\lambda_2^0 f_n, \lambda_1^0 \delta_n u) = \lambda_1^1 \Gamma^{n+1}(\overline{c}_n, u) = \lambda_1^1 \gamma_n u = \overline{\gamma}_n u.$$

Analog

$$\lambda_1^1 ku = \lambda_1^1 \lambda_1^1 \Gamma^{n+2}(f_n, \delta_n u) = \lambda_1^1 \lambda_2^1 \Gamma^{n+2}(f_n, \delta_n u) = \lambda_1^1 \Gamma^{n+1}(\lambda_2^1 f_n, \lambda_1^1 \delta_n u).$$

Însă $\lambda_2^1 f_n(\tau, t_1, \ldots, t_n) = c(1)$; în particular $\lambda_2^1 f_n$ este 1-degenerat, deci

$$\lambda_1^1 \Gamma^{n+1}(\lambda_2^1 f_n, \lambda_1^1 \delta_n u) = \lambda_1^0 \Gamma^{n+1}(\lambda_2^1 f_n, \lambda_1^1 \delta_n u) = \lambda_1^1 \delta_n u = \overline{\delta}_n u.$$

Am demonstrat, aşadar, relaţiile

$$(\mathrm{k}_1) \qquad \lambda_1^0 ku = \overline{\gamma}_n u,$$

$$(\mathrm{k}_2) \qquad \lambda_1^1 ku = \overline{\delta}_n u.$$

Următoarele proprietăţi se verifică fără dificultate:

$$(\mathrm{k}_3) \qquad k \lambda_i^\varepsilon u = \lambda_{i+1}^\varepsilon ku; \quad \varepsilon = 0, 1.$$

(k$_4$) Dacă u este n-degenerat, atunci ku este $(n+1)$-degenerat. Deoarece

$$\pi(ku(t, t_1, \ldots, t_n)) = f_n(1, t, t_1, \ldots, t_n) = c(1),$$

urmează că aplicaţia k duce cuburile singulare ale fibrei $F_{c(0)}$, în cuburi singulare ale fibrei $F_{c(1)}$ şi datorită proprietăţilor stabilite mai sus, induce un omomorfism

$$k : C_n(F_{c(0)}, M) \to C_{n+1}(F_{c(1)}, M).$$

Un calcul simplu probează că

$$\mathrm{d}\, ku + k\, \mathrm{d}u = \overline{\delta}_n u - \overline{\gamma}_n u,$$

deci $\overline{\delta}_*$ şi $\overline{\gamma}_*$ sînt omotope.

Fie acum c şi c' două drumuri omotope şi $h : I \times I \to B$ aplicaţia continuă care realizează omotopia lor, adică

$$h(0, t) = c(t), \qquad h(1, t) = c'(t),$$

$$h(t', 0) = c(0) = c'(0), \; h(t', 1) = c(1) = c'(1).$$

Pentru a demonstra lema, este suficient să arătăm că, dacă γ_n, γ_n' sînt construcţii date de formulele

$$\gamma_n u = \Gamma^{n+1}(\overline{c}_n, u)$$

$$\gamma_n' u = \Gamma^{n+1}(\overline{c}_n', u),$$

atunci $\overline{\gamma}_*$ şi $\overline{\gamma}_*'$ sînt omotope.

Fie h_n următorul cub:

$$h_n(\tau, t, t_1, \ldots, t_n) = h(t, \tau).$$

Pentru fiecare cub $u : I^n \to F_{c(0)}$ să notăm prin $\widetilde{u}$ cubul

$$\widetilde{u}(t, t_1, \ldots, t_n) = u(t_1, \ldots, t_n).$$

Definim o aplicaţie $H : Q_n F_{c(0)} \to Q_{n+1} F_{c(1)}$ prin formula:

$$Hu = \lambda_1^1 \Gamma^{n+2}(h_n, u);$$

Hu este un cub al fibrei $F_{c(1)}$, pentru că

$$\pi(\Gamma^{n+2}(h_n, u)(1, t, t_1, \ldots, t_n)) = h_n(1, t, t_1, \ldots, t_n) = c(1).$$

Din relațiile : $\lambda_1^\varepsilon \widetilde{u} = u$, $\lambda_2^0 h_n = \overline{c}_n$, $\lambda_2^1 h_n = \overline{c}_n'$ rezultă :

(H$_1$) $\lambda_1^0 Hu = \overline{\gamma}_n u$,

(H$_2$) $\lambda_1^1 Hu = \overline{\gamma}_n' u$.

Sînt evidente și următoarele proprietăți :

(H$_3$) $\lambda_{i+1}^\varepsilon Hu = H \lambda_i^\varepsilon u$.

(H$_4$) Dacă u este n-degenerat, atunci Hu este $(n+1)$-degenerat.

Formulele (H$_1$) — (H$_4$) definesc un omomorfism

$$H : C_n(F_{c(0)}, M) \to C_{n+1}(F_{c(1)}, M)$$

cu proprietatea că :

$$\mathrm{d}\, Hu + H\, \mathrm{d}u = \overline{\gamma}_n' u - \overline{\gamma}_n u.$$

Cu aceasta, lema este complet demonstrată.

Lema 1 permite ca fiecărui drum c din bază să i se asocieze un omomorfism

$$[c]_* : H_*(F_{c(0)}, M) \to H_*(F_{c(1)}, M)$$

care nu depinde decît de clasa de omotopie $[c]$ a drumului c. Se arată ușor că $[cc']_* = [c]_*[c']_*$, ceea ce probează că grupurile de omologie ale fibrelor formează un sistem local, care se notează de obicei $\mathcal{H}_*(\mathfrak{F}, M)$ (vezi [1]).

3. Pentru a se ajunge la stabilirea proprietăților șirului spectral asociat unei fibrări Serre, mai sînt necesare două construcții geometrice pe care le vom da mai jos.

Amintim mai întîi cîteva notații. Fie $u : I^n \to X$ un cub singular n-dimensional; dacă $\pi \circ u : I^n \to B$ nu depinde de ultimele $n-p$ coordonate se spune că u are filtrația p. Fiecărui cub n-dimensional $u : I^n \to X$, de filtrație $\leqslant p$, i se atașează cuburile $B_p u : I^p \to B$, $F_p u : I^{n-p} \to F_{u(0)}$ (unde $u(0) = u(0, \ldots, 0)$) definite de formulele :

$$B_p u(t_1, \ldots, t_p) = \pi(u(t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0)),$$

$$F_p u(t_1, \ldots, t_{n-p}) = u(0, \ldots, 0, t_1, \ldots, t_{n-p}).$$

LEMA 2. *Fiecărei perechi de cuburi* (u, v), $u : I^p \to B$, $v : I^q \leftarrow F_{u(0)}$ *i se poate asocia un cub* $K_p(u, v) : I^{p+q} \to X$, *de filtrație* $\leqslant p$, *cu următoarele proprietăți :*

1°. $B_p K_p(u, v) = u$; $F_p K_p(u, v) = v$.

2°. *Pentru* $i < q$, $K_p(u, \lambda_i^\varepsilon v) = \lambda_{i+p}^\varepsilon K_p(u, v)$ $(\varepsilon = 0, 1)$.

3°. *Dacă* v *este* q-*degenerat*, $K_p(u, v)$ *este* $(p+q)$-*degenerat.*

Demonstraţie. Definim, mai întîi, cuburile $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ prin formulele

$$\widetilde{u}(t, t_1,\ldots, t_p, t_{p+1},\ldots, t_{p+q}) = u(tt_1,\ldots, tt_p),$$

$$\widetilde{v}(t_1,\ldots, t_p, t_{p+1},\ldots, t_{p+q}) = v(t_{p+1},\ldots, t_{p+q}).$$

Să punem

$$K_p(u, v) = \lambda_1^1\, \Gamma^{p+q+1}(\widetilde{u}, \widetilde{v}).$$

Atunci

$$\pi\,(K_p(u, v)(t_1,\ldots, t_{p+q})) = \pi\,(\Gamma^{p+q+1}(\widetilde{u}, \widetilde{v})(1, t_1, \ldots, t_p, t_{p+1},\ldots$$
$$\ldots, t_{p+q})) = \widetilde{u}(1, t_1,\ldots, t_p, t_{p+1},\ldots, t_{p+q}) = u(t_1,\ldots, t_p),$$

deci $K_p(u, v)$ are filtraţia $\leqslant p$, mai precis :

$$B_p K_p(u, v) = u.$$

Mai departe,

$$F_p K_p(u, v)(t_1,\ldots, t_q) = K_p(u, v)(0,\ldots, 0, t_1,\ldots, t_q) =$$
$$= \Gamma^{p+q+1}(\widetilde{u}, \widetilde{v})(1, 0,\ldots, 0, t_1,\ldots, t_q) =$$
$$= \lambda_1^0 \lambda_2^0 \ldots \lambda_{p+1}^0\, \Gamma^{p+q+1}(\widetilde{u}, \widetilde{v})(t_1,\ldots, t_q) =$$
$$= \lambda_1^1\, \Gamma^{q+1}(\lambda_2^0 \ldots \lambda_{p+1}^0 \widetilde{u}, \lambda_1^0 \ldots \lambda_p^0 \widetilde{v})(t_1\ldots, t_q).$$

Însă

$$\lambda_2^0 \ldots \lambda_{p+1}^0 \widetilde{u}(t, t_1,\ldots, t_q) = \widetilde{u}(t, 0,\ldots, 0, t_1,\ldots, t_q) = u(0,\ldots,0),$$

deci cubul $\lambda_2^0 \ldots \lambda_{p+1}^0 \widetilde{u}$ este 1-degenerat, atunci şi $\Gamma^{q+1}(\lambda_2^0 \ldots \ldots \lambda_{p+1}^0 \widetilde{u}, \lambda_1^0 \ldots \lambda_p^0 \widetilde{v})$ este 1-degenerat.

Aşadar :

$$\lambda_1^1\, \Gamma^{q+1}(\lambda_2^0 \ldots \lambda_{p+1}^0 \widetilde{u}, \lambda_1^0 \ldots \lambda_p^0 \widetilde{v})(t_1,\ldots, t_q) =$$
$$= \lambda_1^0\, \Gamma^{q+1}(\lambda_2^0 \ldots \lambda_{p+1}^0 \widetilde{u}, \lambda_1^0 \ldots \lambda_p^0 \widetilde{v})(t_1,\ldots, t_q) =$$
$$= \lambda_1^0 \ldots \lambda_p^0 \widetilde{v}(t_1,\ldots, t_q) = \widetilde{v}(0,\ldots,0, t_1,\ldots, t_q) = v(t_1,\ldots, t_q).$$

Cu aceasta, condiţia 1° este verificată. Fără dificultate se poate arăta că au loc şi proprietăţile 2° şi 3°.

LEMA 3. *Fiecărui cub singular* $u : I^n \to X$, *de filtraţie* $\leqslant p$, *i se poate asocia un cub* $S_p u : I^{n+1} \to X$, *de filtraţie* $\leqslant p$, *cu următoarele proprietăţi* :

1. $B_p S_p u = B_p u$.

2. $S_p u(0,\ldots,0, t, \tau_1,\ldots, \tau_q) = F_p u(\tau_1,\ldots, \tau_q)$.

3. $\lambda_{p+1}^0 S_p u = K_p(B_p u, F_p u)$, $\lambda_{p+1}^1 S_p u = u$.

4. $\lambda_{i+1}^\varepsilon S_p u = S_p \lambda_i^\varepsilon u$, pentru $i > p, \varepsilon = 0, 1$.

5. *Dacă* $q > 0$ *şi dacă* u *este* n*-degenerat, atunci* $S_p u$ *este* $(n + 1)$*-degenerat.*

Demonstrație. Fie u', u'' cuburile :

$$u'(\tau, t, t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q) = B_p u((t + \tau - t\tau) t_1, \dots, (t + \tau - t\tau) t_p),$$

$$u''(t, t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q) = u(tt_1, \dots, tt_p, \tau_1, \dots, \tau_q),$$

unde $q = n - p$.

Definim :

$$S_p u(t_1, \dots, t_p, t, \tau_1, \dots, \tau_q) = \Gamma^{p+p+2}(u', u'')(1, t, t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q)$$

Atunci

$$\pi(S_p u(t_1, \dots, t_p, t, \tau_1, \dots, \tau_q)) = u'(1, t, t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q) =$$
$$= B_p u(t_1, \dots, t_p),$$

deci $S_p u$ are filtrația $\leqslant p$ și mai mult :

$$B_p S_p u = B_p u$$

Apoi

$$S_p u(0, \dots, 0, t, \tau_1, \dots, \tau_q) = \Gamma^{p+q+2}(u', u'')(1, t, 0, \dots, 0, \tau_1, \dots \tau_q,) =$$
$$= \lambda_1^1 \lambda_3^0 \dots \lambda_{p+2}^0 \Gamma^{p+q+2}(u', u'')(t, \tau_1, \dots, \tau_q) =$$
$$= \lambda_1^1 \Gamma^{q+2}(\lambda_3^0 \dots \lambda_{p+2}^0 u', \lambda_2^0 \dots \lambda_{p+1}^0 u'')(t, \tau_1, \dots, \tau_q).$$

Dar

$$\lambda_3^0 \dots \lambda_{p+2}^0 u'(t, \tau_1, \dots, \tau_q) = u'(\tau, t, 0, \dots, 0, \tau_1, \dots, \tau_q) = B_p u(0, \dots, 0),$$

deci nu depinde de prima coordonată. Aceeași proprietate o va avea și $\Gamma^{q+2}(\lambda_3^0 \dots \lambda_{p+2}^0 u', \lambda_2^0 \dots \lambda_{p+1}^0 u'')$, deci :

$$\lambda_1^1 \Gamma^{q+2}(\lambda_3^0 \dots \lambda_{p+2}^0 u', \lambda_2^0 \dots \lambda_{p+1}^0 u'')(t, \tau_1, \dots, \tau_q) =$$
$$= \lambda_1^0 \Gamma^{q+2}(\lambda_3^0 \dots \lambda_{p+2}^0 u', \lambda_2^0 \dots \lambda_{p+1}^0 u'')(t, \tau_1, \dots, \tau_q) =$$
$$= \lambda_2^0 \dots \lambda_{p+1}^0 u''(t, \tau_1, \dots, \tau_q) = u(0, \dots, 0, \tau_1, \dots, \tau_q).$$

Rămîne să verificăm condiția 3, deoarece 4 și 5 sînt aproape evidente :

$$S_p u(t_1, \dots, t_p, 0, \tau_1, \dots, \tau_q) = \Gamma^{p+q+2}(u', u'')(1, 0, t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q) =$$
$$= \lambda_1^1 \lambda_2^0 \Gamma^{p+q+2}(u', u'')(t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q) =$$
$$= \lambda_1^1 \Gamma^{p+q+1}(\lambda_2^0 u', \lambda_1^0 u'')(t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q).$$

Însă

$$\lambda_2^0 u'(\tau, t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q) = B_p u(\tau t_1, \dots, \tau t_p) =$$
$$= \widetilde{B_p u}(\tau, t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q)$$

și

$$\lambda_1^0 u''(t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q) = u(0, \dots, 0, \tau_1, \dots, \tau_q) =$$
$$= \widetilde{F_p u}(t_1, \dots, t_p, \tau_1, \dots, \tau_q).$$

Deci :

$$\lambda_1^1\,\Gamma^{p+q+1}(\lambda_2^0 u',\ \lambda_1^0 u'')(t_1, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots\ \tau_q) =$$
$$= \lambda_1^1\,\Gamma^{p+q+1}(\widetilde{B_p u}, \widetilde{F_p u})(t_1, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_q) =$$
$$= K_p(B_p u, F_p u)(t_1, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_q).$$

În consecinţă

$$\lambda_{p+1}^0 S_p u = K_p(B_p u, F_p u).$$

Apoi :

$$S_p u(t_1, \ldots, t_p, 1, \tau_1, \ldots, \tau_q) = \lambda_1^1\,\Gamma^{p+q+1}(\lambda_2^1 u', \lambda_1^1 u'')(t_1, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_q).$$

Dar

$$\lambda_2^1 u'(\tau, t_1, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_q) = B_p u(t_1, \ldots, t_p)$$

deci $\lambda_2^1 u'$ nu depinde de prima coordonată. Atunci :

$$\lambda_1^1\,\Gamma^{p+q+1}(\lambda_2^1 u',\ \lambda_1^1 u'')(t_1, \ldots, t_p, \tau_1 \ldots, \tau_q) =$$
$$= \lambda_1^0\,\Gamma^{p+q+1}(\lambda_2^1 u',\ \lambda_1^1 u'')(t_1, \ldots, t_p, \tau_1 \ldots, \tau_q) =$$
$$= \lambda_1^1 u''(t_1, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_q) = u(t_1, \ldots, t_p, \tau_1, \ldots, \tau_q).$$

În definitiv

$$\lambda_{p+1}^1 S_p u = u$$

ceea ce demonstrează complet lema.

4. Lemele demonstrate permit ca printr-un procedeu de natură algebrică, care poate fi urmărit în [2], să se stabilească sub forma cea mai generală (enunţată în [1])rezultatele cunoscute asupra şirului spectral asociat unei fibrări Serre.

Primită la redacţie la 10 noiembrie 1965

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Séminaire Henri Cartan, 1958/59, vol. I, Exposé 2.
2. J. P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications.* Ann. Math., **54** (1951).

ASUPRA UNOR SPAŢII FIBRATE UNIVERSALE

DE

ANDREI VERONA

Se construieşte o fibrare universală astfel încît o clasă importantă de fibrări principale să poată fi obţinută din ea printr-o metodă dată anterior.

În prima parte se definesc spaţiile fibrate în sensul lui Serre, spaţiile fibrate principale şi spaţiile cu conexiune.

În partea a doua se demonstrează cîteva teoreme ajutătoare şi teorema lui Ehresmann, care indică o metodă de a construi o fibrare principală cu grup structural G', pornind de la o fibrare principală cu grup structural G şi de la un omomorfism r al lui G în G'.

În ultima parte se construieşte o fibrare universală peste un spaţiu liniar conex oarecare, astfel încît o clasă destul de largă de fibrări principale să poată fi obţinută din ea cu ajutorul teoremei lui Ehresmann.

Fibrări universale asemănătoare au fost construite de J. Milnor în [5] şi de Gh. Lusztig, însă spaţiul bază era un poliedru numărabil, respectiv un poliedru oarecare. O construcţie foarte asemănătoare cu cea din lucrarea de faţă a fost dată de C. Teleman la cursul special de topologie ţinut pe primul semestru al anului universitar 1965–1966. Acolo se obţineau rezultate pentru o clasă mai restrînsă de fibrări.

1. INTRODUCERE

Fie B, X două spaţii topologice şi p o aplicaţie continuă a lui B pe X. B se numeşte spaţiul total, X baza, p proiecţie şi $F_x = p^{-1}(x) \subset B$ fibra peste $x \in X$. Se notează $[B, p, X]$.

DEFINIŢIA 1.1. Tripletul $[B, p, X]$ se numeşte spaţiu fibrat în sensul lui Serre dacă oricare ar fi S, poliedru finit, $f: S \to B$ continuă şi $h: S \times I \to X$ continuă, astfel încît $h(s, 0) = p(f(s))$, există $k: S \times I \to B$ continuă, astfel încît $p \circ k = h$ şi $h(s, 0) = f(s)$. Se notează (B, p, X). (I este intervalul $[0, 1]$).

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 919–931 BUCUREŞTI, 1966

Fie $[B,\ p,\ X]$ și G un grup topologic care acționează liber pe B (acțiunea se presupune continuă).

Definiția 1.2. Tripletul $[B,\ p,\ X]$ se numește spațiu fibrat principal, cu grup structural G dacă :

P.1. Este un spațiu fibrat în sensul lui Serre.

P.2. $g \to gy$ este un omeomorfism al lui G pe $p^{-1}(p(y)) = F_{p(y)} \subset B$. Se notează $(B,\ p,\ X,\ G)$.

Fie $[B,\ p,\ X]$ și $\Gamma_p = \{(y,\ \lambda) \in B \times X^I / p(y) = \lambda(0)\} \subset B \times X^I$. (Dacă Y și Z sînt spații topologice, $Y^Z = \{f : Z \to Y / f$ continuă$\}$, cu topologia compact deschisă).

Definiția 1.3. Se numește conexiune pe tripletul $[B,\ p,\ X]$ o funcție continuă $C : \Gamma_p \to B^I$ care îndeplinește condițiile :

C.1. $C(y,\ \lambda)(0) = y,\quad (y,\ \lambda) \in \Gamma_p$

C.2. $p(C(y,\ \lambda)(t)) = \lambda(t),\quad (y,\ \lambda) \in \Gamma_p,\ t \in I.$

Teorema 1.4. *Un triplet* $[B,\ p,\ X]$ *pe care există o conexiune* C, *este un spațiu fibrat în sensul lui Serre. Se notează* $(B,\ p,\ X,\ C)$.

Pentru demonstrație vezi [1].

Fie $(B,\ p,\ X,\ C)$ și G un grup topologic care acționează liber pe B astfel încît să fie îndeplinită condiția P.2. Datorită teoremei 1.4, fibrarea este principală cu grup structural G.

Definiția 1.5. Conexiunea C se numește invariantă față de acțiunea lui G dacă :

$$C(gy,\ \lambda)\ (t) = gC(y,\ \lambda)(t),\quad g \in G,\ (y,\ \lambda) \in \Gamma_p,\quad t \in I.$$

Se notează $(B,\ p,\ X,\ C,\ G)$.

Definiția 1.6. Fibrările $(B,\ p,\ X,\ G)$, $(B',\ p',\ X,\ G)$ se zic izomorfe, dacă există un omeomorfism $h : B \to B'$ astfel încît sînt comutative diagramele :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & B' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times B \arrow[r, "1_G \times h"] \arrow[d] & G \times B' \arrow[d] \\ B \arrow[r, "h"] & B' \end{tikzcd}$$

Scopul acestei lucrări este de a construi o fibrare universală pentru orice spațiu liniar conex, astfel încît orice altă fibrare principală care îndeplinește anumite condiții, destul de generale, să fie izomorfă cu o fibrare principală obținută din fibrarea universală printr-o anumită metodă.

2. TEOREMA LUI EHRESMANN

Lema 2.1. *Fie* A *și* B *două spații topologice și* $F_* : A \times I \to B$ *Se consideră aplicația* $F : A \to \{f : I \to B\}$, *dată de formula* :

$$F(a) = f : I \to B,\quad f(t) = F_*(a,\ t),\ t \in I,\quad a \in A.$$

Atunci :

F_* *este continuă* $\Leftrightarrow F(A) \subset B^I$ *şi* F *este continuă ca aplicaţie de la* A *la* B^I.

Dacă F_* este continuă, evident $F(A) \subset B^I$. Pentru restul demonstraţiei vezi [1], lema lui Bourbaki.

Observaţia 2.2. Dacă se dă F se poate construi F_*. Lema precedentă permite să se verifice mai uşor în unele cazuri dacă anumite funcţii sînt conexiuni sau nu. Se va folosi notaţia de aici (* ca indice inferior).

LEMA 2.3. *Fie* X, Y *şi* Z *trei spaţii topologice şi* α, β, γ *trei funcţii astfel încît să fie comutativă diagrama :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & Y \arrow[dl, "\gamma"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

Se presupune că α *este pe. Atunci :*

1. *Dacă* α *este deschisă şi* β *continuă,* γ *este continuă.*
2. *Dacă* α *este continuă şi* β *deschisă,* γ *este deschisă.*

Pentru demonstraţie se folosesc următoarele egalităţi :

$$\gamma^{-1}(A) = \alpha(\beta^{-1}(A)),\ \gamma(B) = \beta(\alpha^{-1}(B)), \text{ unde } A \subset Z \text{ şi } B \subset Y.$$

Luînd în loc de A şi B mulţimi deschise din Z respectiv Y, rezultă lema.

TEOREMA 2.4. *Fie* (B, p, X, C). *Dacă* B' *este un alt spaţiu topologic,* $p' : B' \to X$ *pe,* $\varphi : B \to B'$ *continuă, deschisă şi pe, astfel încît :*

1. $p = p' \circ \varphi$
2. *oricare ar fi* $y_1, y_2 \in B$ *şi* $\lambda \in X^I$ *cu* $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$ *şi* $p(y_1) = p(y_2) = \lambda(0)$ *are loc egalitatea :* $\varphi(C(y_1, \lambda)(t)) = \varphi(C(y_2, \lambda)(t))$, *atunci :*

1°. p' *este continuă.*

2°. *Există o conexiune* C' *pentru tripletul* $[B', p', X]$.

Se poate aplica lema 2.3 spaţiilor B, B', X şi aplicaţiilor φ, p, p', deci p' este continuă.

Pentru a demonstra 2° se defineşte $C'_* : \Gamma_{p'} \times I \to B'$ prin formula : $C'_*(y, \lambda, t) = \varphi(C_*(x, \lambda, t))$, unde $x \in B$ şi $\varphi(x) = y$. Condiţia 2 arată că definiţia este bună. În continuare se va nota cu 1 aplicaţia identică a unui spaţiu pe el însuşi. Din definiţia lui C'_* rezultă că următoarea diagramă este comutativă :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_p \times I \arrow[r, "(\varphi \times 1)|_{\Gamma_p} \times 1"] \arrow[d, "C_*"'] & \Gamma_{p'} \times I \arrow[d, "C'_*"] \\
B \arrow[r, "\varphi"] & B'
\end{tikzcd}$$

Pentru ca C'_* să fie continuă este suficient ca $(\varphi \times 1)|_{\Gamma_p} \times 1$ să fie deschisă şi pe, iar pentru aceasta este suficient ca $(\varphi \times 1)|_{\Gamma_p}$ să fie deschisă şi pe.

Fie $D \subset B \times X^I$ o mulțime deschisă. Are loc egalitatea :

$$(\varphi \times 1)|_{\Gamma_p}(D \cap \Gamma_p) = (\varphi \times 1)(D) \cap \Gamma_{p'}.$$

Este suficient să se demonstreze $(\varphi \times 1)(D) \cap \Gamma_{p'} \subset (\varphi \times 1)|_{\Gamma_p}(D \cap \Gamma_p)$, cealaltă incluziune fiind evidentă. Dacă $(y, \lambda) \in (\varphi \times 1)(D) \cap \Gamma_{p'} \Rightarrow$ $\Rightarrow (y, \lambda) = (\varphi \times 1)(x, \lambda)$ cu $(x, \lambda) \in D$ și $p'(y) = \lambda(0) \Rightarrow y = \varphi(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow p(x) = p'(\varphi(x)) = p'(y) = \lambda(0) \Rightarrow (x, \lambda) \in D \cap \Gamma_p \Rightarrow (y, \lambda) = (\varphi \times 1)|_{\Gamma_p}$ $(x, \lambda) \in (\varphi \times 1)|_{\Gamma_p}(D \cap \Gamma_p)$.

Cum orice mulțime deschisă D' din Γ_p este de forma $D' = D \cap \Gamma_p$ cu D deschisă în $B \times X^I$ și același lucru se întîmplă și în $\Gamma_{p'}$, rezultă că $(\varphi \times 1)|_{\Gamma_p}$ este deschisă. Se arată ușor că este și pe.

TEOREMA 2.5. (Ehresmann) *Fie* (B, p, X, C, G), G' *un grup topologic și* $r : G \to G'$ *un omomorfism continuu. Atunci există o fibrare* (B', p', X, C', G').

Se consideră $B \times G'$ cu topologia produs și $\pi : B \times G' \to X$, $\pi(y, g') = p(y)$. π este continuă, fiind compunerea proiecției $B \times G' \to B$ cu $p . p$ este pe, deci și π este pe. Se definește o conexiune C'' pe tripletul $[B \times G', \pi, X)$ prin intermediul aplicației $C''_* : \Gamma_\pi \times I \to B \times G'$, $C''_*((y, g'), \lambda, t) = (C_*(y, \lambda, t), g')$, care este continuă, fiind compunerea aplicațiilor continue $(y, g', \lambda, t) \to (y, \lambda, t, g')$ și $(y, \lambda, t, g') \to (C_*(y, \lambda, t), g')$. Conform lemei 2.1 și a observației 2.2 se obține $(B \times G', \pi, X, C'')$.

Se introduce următoarea relație de echivalență în $B \times G'$:

$$(y, g') \sim (gy, g'r(g^{-1})), \text{ oricare ar fi } g \in G.$$

Într-adevăr : $g = e$, se obține $(y, g') \sim (y, g')$, deci relația este reflexivă. Dacă

$$(y, g') \sim (gy, g'r(g^{-1})) \Rightarrow (gy, g'r(g^{-1})) \sim (g^{-1}gy, g'r(g^{-1})r(g)) = (y, g'),$$

deci relația este simetrică. La fel se arată și tranzitivitatea ei.

Se va nota cu $\widetilde{D}$ saturata unei mulțimi $D \subset B \times G'$. Evident :

$$D_1 \widetilde{\times} D_2 = \bigcup_{g \in G} g \cdot D_1 \times D_2 \cdot r(g^{-1}), \quad D_1 \times D_2 \subset B \times G'$$

și

$$\widetilde{\bigcup_{i \in J}} A_i = \bigcup_{i \in J} \widetilde{A}_i, \quad A_i \subset B \times G'.$$

$$(g \cdot D_1 = \{gy \in B \mid y \in D_1\}, \text{ la fel } D_2 \cdot r(g^{-1})).$$

Din aceste egalități și din felul cum este definită topologia produs, rezultă că relația de echivalență este deschisă.

Fie B' spațiul cît $B \times G'/\sim$, φ aplicația canonică a lui $B \times G'$ pe B' și $[y, g'] = \varphi(y, g')$. Din cele de mai sus rezultă că φ este continuă, deschisă și pe.

Se definește o proiecție $p' : B' \to X$, prin formula : $p'[y, g'] = \pi(y, g') = p(y)$. Datorită faptului că $p(y) = p(gy)$, p' este corect definită.

Evident, $\pi = p' \circ \varphi$. Se verifică și condiția 2 din teorema 2.4, deci se poate aplica această teoremă și există (B', p', X, C') (conexiunea C' este definită ca acolo).

Se poate defini o acțiune a lui G' în B' în felul următor:

$$G' \times B' \to B', (g'', [y, g']) \to g''\,[y, g'] = [y, g''\,g'].$$

Dacă

$$[y, g'] = [y_0, g'_0] \Rightarrow y_0 = gy, g'_0 = g'r(g^{-1}) \Rightarrow [y_0, g''\,g'_0] =$$
$$= [gy, g''g'r(g^{-1})] = [y, g''g'] = g''[y, g'],$$

deci definiția este corectă.

Cum

$$[y, g'] = [y, g''] \Rightarrow g' = g'',$$

rezultă că G' acționează liber.

Aplicația: $1 \times \varphi$: $G' \times (B \times G') \to G' \times B'$ este deschisă, iar aplicația $G' \times B \times G' \to B \times G'$, $(g'', y, g') \to (y, g''g')$ dată de compunerea $(g'', y, g') \to (y, g'', g')$, $(y, g'', g') \to (y, g''g')$ este evident continuă, deci se poate aplica lema 2.3 diagramei comutative de mai jos:

$$\begin{tikzcd}
G' \times B \times G' \arrow[r, "1\times\varphi"] \arrow[d] & G' \times B' \arrow[d] \\
B \times G' \arrow[r, "\varphi"] & B'
\end{tikzcd}$$

De aici reiese că acțiunea este continuă.

Se verifică de asemenea că C' este invariantă față de acțiunea lui G':

$$C'(g''[y, g'], \lambda)(t) = C'([y, g''\cdot g'], \lambda)\,(t) =$$
$$= \varphi(C''((y, g''\,g'), \lambda)(t)) = \varphi(C(y, \lambda)(t), g''g') = [C(y, \lambda)(t), g''\,g'] =$$
$$= g''[C(y, \lambda)(t), g'] = g''\varphi(C(y, \lambda)(t), g') = g''\varphi(C''((y, g'), \lambda)(t)) =$$
$$= g''C'([y, g'], \lambda)(t).$$

(Trecerea de la C' la C'' și invers s-a făcut ca în teorema 2.4.)

Rămîne de arătat că este îndeplinită și condiția P.2 din definiția 1.2. Pentru aceasta fie $b' = [y_0, g'_0] \in B'$. Se fixează $(y_0, g'_0) \in B \times G'$ și se notează: $p'[y_0, g'_0] = p(y_0) = x_0$, $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$, $F'_{x_0} = p'^{-1}(x_0)$. Se poate considera $\varphi_0 : F_{x_0} \times G' \to F'_{x_0}$, restricție a lui φ. Dacă D_1 și D_2 sînt mulțimi deschise în B respectiv G', are loc egalitatea:

$$\varphi_0((D_1 \cap F_{x_0}) \times D_2) = \varphi(D_1 \times D_2) \cap F'_{x_0}.]$$

Într-adevăr, fie $[y, g'] \in \varphi(D_1 \times D_2) \cap F'_{x_0} \Rightarrow [y, g'] = [y_1, g'_1]$, $(y_1\ g'_1) \in D_1 \times D_2$ și $p'\,[y, g'] = x_0 \Rightarrow p'[y_1, g'_1] = x_0 \Rightarrow p(y_1) = x_0 \Rightarrow y_1 \in F_{x_0} \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 \in D_1 \cap F_{x_0} \Rightarrow (y_1, g'_1) \in (D_1 \cap F_{x_0}) \times D_2$. Rezultă incluziunea de la dreapta la stînga. Cealaltă fiind evidentă, rezultă egalitatea. Dar această egalitate arată tocmai că φ_0 este deschisă relativ la topologiile induse pe $F_{x_0} \times G'$ și F'_{x_0} de $B \times G'$ respectiv B'. φ_0 este restricția unei aplicații continue, deci și ea este continuă. Evident φ_0 este pe.

Fie $\theta : G \times G' \to G'$, $\theta(g, g') = g' r(g) g_0'^{-1}$, θ este continuă datorită faptului că se obține din compunerea următoarelor funcții continue:

$$(g, g') \to (r(g), g'); \; (g'', g') \to g' \cdot g''; \; g' \to g' g_0'^{-1}.$$

Se demonstrează , folosind o metodă asemănătoare cu cea aplicată la demonstrarea faptului că relația $\sim$ este deschisă, că θ este deschisă. Se arată ușor că θ este pe.

Fie $f : G' \to F'_{x_0}$, $f(g') = g' [y_0, g_0'] = [y_0, g' g_0']$.

f nu depinde de (y_0, g_0'), ci numai de b'. De fapt f este aplicația care apare în proprietatea P.2.

$$\begin{tikzcd} G \times G' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "h \times 1"'] & G' \arrow[d, "f"] \\ F_{x_0} \times G' \arrow[r, "\varphi_0"'] & F'_{x_0} \end{tikzcd}$$

$$h : G \to F_{x_0}$$

$$h(g) = g y_0$$

Prin ipoteză h este omeomorfism. Diagrama fiind comutativă, aplicînd lema 2.3, rezultă că f este continuă și deschisă.

Orice element $[y, g'] \in F'_{x_0}$ se poate scrie în mod unic sub forma: $[y_0, g'']$. Evident, aplicațiile $[y_0, g''] \to g'' g_0'^{-1}$ $(F'_{x_0} \to G')$ și f sînt inverse una alteia, deci f este un omeomorfism. Cu aceasta, teorema 2.5 este în întregime demonstrată.

3. FIBRAREA UNIVERSALĂ PESTE UN SPAȚIU LINIAR CONEX

Fie X un spațiu liniar conex, $x_0 \in X$ și :

$$\mathscr{C}'_n = \{f : [0, n] \to X / f(0) = x_0\} \subset X^{[0, n]}, \mathscr{E}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}'_n.$$

Se folosesc notațiile : $f(n) = f(\infty)$, $n = n_f$ dacă $f \in \mathscr{E}'_n$. Pe $\mathscr{E}'_n$ se consideră topologia de subspațiu al lui $X^{[0, n]}$, iar cînd pe $\mathscr{E}'$ se va considera topologia sumă, se va nota $\mathscr{E}'_s$.

$$\pi' : \mathscr{E}' \to X, \; \pi'(f) = f(\infty).$$

Datorită faptului că X este liniar conex, π' este pe.

Lema 3.1. *Mulțimea* $\Omega' = \pi'^{-1}(x_0) \subset \mathscr{E}'$ *poate fi organizată ca un semigrup cu element unitate.*

Într-adevăr, fie $\chi_0' : \Omega' \times \Omega' \to \Omega'$, dată de : $\chi_0'(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 \cdot \omega_2 = \omega$,

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_1(t) & 0 \leqslant t \leqslant n_{\omega_1} \\ \omega_2(t - n_{\omega_1}) & n_{\omega_1} \leqslant t \leqslant n_{\omega_1} + n_{\omega_2}. \end{cases}$$

Din definiţie rezultă imediat asociativitatea operaţiei introduse. Elementul unitate este ω_0, singurul element din $\mathcal{E}'_0$.

LEMA 3.2. *Există o aplicaţie* $\chi' : \Omega' \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$ *astfel încît* $\chi'(\omega_1, \chi'(\omega_2, f)) = \chi'(\omega_1 \omega_2, f)$, *dacă* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega'$, $f \in \mathcal{E}'$.

χ' se defineşte în felul următor: $\chi'(\omega, f) = \omega f = h \in \mathcal{E}'$,

$$h(t) = \begin{cases} \omega(t) & 0 \leqslant t \leqslant n_\omega \\ f(t - n_\omega) & n_\omega \leqslant t \leqslant n_\omega + n_f . \end{cases}$$

Se observă că dacă $\omega_1, \omega_2 \in \Omega'$, atunci $\chi'(\omega_1, \omega_2) = \chi'_0(\omega_1, \omega_2)$.

Se consideră de asemenea funcţia:

$$\chi'_1 : \Omega' \to \Omega', \ \chi'_1(\omega) = \hat{\omega},$$

$\hat{\omega}(t) = \omega(n_\omega - t)$, (dacă $\omega \in \mathcal{E}'_n$, atunci şi $\hat{\omega} \in \mathcal{E}'_n$).

Fie $\Gamma_{\pi'}$ şi $\mathcal{C}'_* : \Gamma_{\pi'} \times \mathrm{I} \to \mathcal{E}'$, $\mathcal{C}'_*(f, \lambda, \tau) = g \in \mathcal{E}'$,

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leqslant t \leqslant n_f \\ \lambda(t - n_f) & n_f \leqslant t \leqslant n_f + \tau \\ \lambda(\tau) & n_f + \tau \leqslant t \leqslant n_f + 1. \end{cases}$$

Din definiţie rezultă că $\mathcal{C}'_*$ verifică relaţia:

$$\mathcal{C}'_*(\omega f, \lambda, \tau) = \omega\, \mathcal{C}'_*(f, \lambda, \tau), \ \omega \in \Omega'.$$

Dacă $f \in \mathcal{E}'_n$, se notează cu $\bar{f}$ funcţia: $\bar{f} : [0, \infty) \to X$,

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leqslant t \leqslant n, \\ f(\infty) & n \leqslant t < \infty. \end{cases}$$

$f, g \in \mathcal{E}'$ se zic în relaţia S, $f \, S \, g$, dacă este îndeplinită una din următoarele condiţii:

a) Există $n \in N$ astfel încît:

$$\begin{aligned} \bar{f}(t) &= \bar{g}(t), & t &\notin (n - 1, n + 1), \\ \bar{f}(n + \lambda) &= \bar{f}(n - \lambda), & \lambda &\in [0, 1], \\ \bar{g}(n + \lambda) &= \bar{g}(n - \lambda), & \lambda &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

b) Există $n \in N$ astfel încît:

$$\begin{aligned} \bar{f}(t) &= \bar{g}(t), & 0 &\leqslant t \leqslant n, \\ \bar{f}(t) &= \bar{f}(n), & n &\leqslant t \leqslant n + 1, \\ \bar{f}(t + 1) &= \bar{g}(t), & n &\leqslant t < \infty. \end{aligned}$$

DEFINIŢIA 3.3. $f, g \in \mathcal{E}'$ se zic în relaţia R, $f \mathrm{R}\, \mathrm{g}$, dacă există un număr finit de elemente $f_1, \ldots, f_p \in \mathcal{E}'$ astfel încît:

$$f = f_1, \ f_1 \, S \, f_2, \ldots, f_{p-1} \, S \, f_p, \ f_p = g.$$

Se verifică ușor că relația R este o relație de echivalență, deci se poate considera spațiul cît $\mathcal{E} = \mathcal{E}'|_{\mathrm{R}}$ și aplicația canonică : $\psi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$. De asemenea datorită faptului că $f \mathcal{S} g \Rightarrow f(\infty) = g(\infty)$, se poate defini $\pi : \mathcal{E} \to X$ prin formula :

$$\pi[f] = \pi'(f) = f(\infty), \ ([f] = \psi(f), \ f \in \mathcal{E}').$$

Lema 3.4. *Mulțimea* $\pi^{-1}(x_0) = \Omega$ *se poate organiza ca un grup.*

Se definește $\chi_0 : \Omega \times \Omega \to \Omega$ prin formula : $\chi_0([\omega_1], [\omega_2]) = [\chi_0'(\omega_1, \omega_2)]$. Definiția nu depinde de reprezentanții aleși în clasele $[\omega_1]$ respectiv $[\omega_2]$. Elementul neutru este $[\omega_0]$, și inversul unui element oarecare $[\omega] \in \Omega$ este $[\widehat{\omega}]$. Se notează cu χ_1 funcția : $\chi_1 : \Omega \to \Omega$, $\chi_1 [\omega] = [\widehat{\omega}] = [\omega]^{-1}$. Evident, $\psi(\Omega') = \Omega$, deci are sens $\psi_0 : \Omega' \to \Omega$, $\psi_0(\omega) = [\omega]$.

Lema 3.5. χ' *induce o aplicație* $\chi : \Omega \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *cu următoarele proprietăți :*

1. $\chi([\omega_1], [\omega_2]) = \chi_0([\omega_1], [\omega_2])$, $[\omega_1], [\omega_2] \in \Omega$.
2. $\Omega \cdot [f] = \pi^{-1}(\pi[f])$, $f \in \mathcal{E}$.
3. $\chi([\omega], [f]) = [f] \Rightarrow [\omega] = [\omega_0]$.

Într-adevăr, punînd $\chi([\omega], [f]) = [\chi'(\omega, f)]$, se arată că definiția este bună. Rezultă și 1.

Din definiția lui π, $\Omega[f] \subset \pi^{-1}(\pi[f])$. Pentru a demonstra cealaltă incluziune, fie $[g] \in \pi^{-1}(\pi[f])$, deci $\pi[g] = \pi[f] \Rightarrow \pi'(g) = \pi'(f)$. Se construiește $g' \in \mathcal{E}'$ în felul următor :

$$g' : [0, 2n_f + n_g] \to X$$

$$g'(t) = \begin{cases} g(t) & 0 \leqslant t \leqslant n_g, \\ f(n_g + n_f - t) & n_g \leqslant t \leqslant n_g + n_f, \\ f(t - n_f - n_g) & n_g + n_f \leqslant t \leqslant n_g + 2n_f. \end{cases}$$

Evident : $g' \mathrm{R}\, g \Rightarrow [g'] = [g]$, dar $g' = \omega f \Rightarrow [g] = [g'] = [\omega][f] \Rightarrow$ $\Rightarrow \pi^{-1}(\pi[f]) \subset \Omega \cdot [f]$.

Pentru a demonstra 3, se procedează în felul următor :

a) $(\omega f) \mathcal{S} f \Rightarrow \omega \mathcal{S} \omega_0$

b) $(\omega f) \mathcal{S} g$, $g \mathcal{S} f \Rightarrow \omega \mathrm{R}\, \omega_0$

și apoi prin inducție rezultă 3.

Lema 3.6. $\mathcal{C}_*'$ *induce o aplicație* $\mathcal{C}_* : \Gamma_\pi \times \mathrm{I} \to \mathcal{E}$ *care verifică relația :*

$$\mathcal{C}_*([\omega][f], \lambda, \tau) = [\omega] \cdot \mathcal{C}_*([f], \lambda, \tau), \ [\omega] \in \Omega, \ ([f], \lambda) \in \Gamma_\pi, \ \tau \in I.$$

De asemenea $(\psi \times 1)(\Gamma_{\pi'}) = \Gamma_\pi$, *deci are sens :*

$(\psi \times 1)_0 : \Gamma_{\pi'} \to \Gamma_\pi$, $(\psi \times 1)_0 = (\psi \times 1)|_{\Gamma_\pi}$; $(\psi \times 1 : \mathcal{E}' \times X^I \to \mathcal{E} \times X^I)$.

$\mathcal{C}_*$ se defineşte astfel :

$$\mathcal{C}_*([f], \lambda, \tau) = [\mathcal{C}'_*(f, \lambda, \tau)].$$

Se verifică uşor că definiţia este bună şi că sînt îndeplinite toate proprietăţile enunţate.

Se consideră pe $\mathcal{E}'$ familia topologiilor care îndeplinesc condiţiile :

1. π' este continuă ;
2. orice mulţime deschisă este saturată ;
3. χ' este continuă (luînd pe Ω' topologia indusă) ;
4. χ'_1 este continuă (luînd pe Ω' topologia indusă) ;
5. $\mathcal{C}'_*$ este continuă ;
6. sînt mai puţin fine decît topologia lui $\mathcal{E}'_s$.

Faptul că există cel puţin o topologie care îndeplineşte aceste condiţii va fi demonstrat mai tîrziu.

TEOREMA 3.7. *Topologia margine superioară a topologiilor care verifică condiţiile* 1—6, *verifică de asemenea aceste condiţii. Se va nota cu* $\mathcal{E}'_*$, $\mathcal{E}'$ *înzestrat cu această topologie şi cu* Ω'_*, Ω' *cu topologia indusă de* $\mathcal{E}'_*$.

Condiţiile 1, 3, 4, 5, 6 se demonstrează imediat folosind definiţia topologiei margine superioară, proprietăţile mulţimilor deschise şi următoarea proprietate :

$$f : A \to B, \quad X_{\alpha\beta} \subset B$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_\alpha \Big(\bigcap_\beta X_{\alpha\beta}\Big)\Big) = \bigcup_\alpha \Big(\bigcap_\beta f^{-1}(X_{\alpha\beta})\Big).$$

Pentru a demonstra 2 se folosesc proprietăţile : dacă $D_\alpha = \widetilde{D}_\alpha$, atunci :

$$\bigcup_\alpha D_\alpha = \widetilde{\bigcup_\alpha} D_\alpha$$

$$\bigcap_\alpha D_\alpha = \widetilde{\bigcap_\alpha} D_\alpha$$

(s-a notat cu $\widetilde{D}$ saturata unei mulţimi $D \subset \mathcal{E}'$ faţă de relaţia R)

Într-adevăr :

$$\widetilde{\bigcup_\alpha} D_\alpha = \bigcup_\alpha \widetilde{D}_\alpha = \bigcup_\alpha D_\alpha$$

şi

$$\widetilde{\bigcap_\alpha} D_\alpha \subset \bigcap_\alpha \widetilde{D}_\alpha = \bigcap_\alpha D_\alpha \subset \widetilde{\bigcap_\alpha} D_\alpha.$$

Pe $\mathcal{E}$ se consideră topologia cît $\mathcal{E}'_*|_{\mathrm{R}}$.

LEMA 3.8. ψ şi ψ_0 *sînt continue şi deschise* :

$$(\psi : \mathcal{E}'_* \to \mathcal{E}, \; \psi_0 : \Omega'_* \to \Omega).$$

Rezultă din definiția topologiei cît, a condiției 2 și a faptului că $\Omega'_* = \widetilde{\Omega}'_*$ (deci $\psi_0(D \cap \Omega'_*) = \psi(D) \cap \Omega$, D deschisă în $\mathscr{E}'_*$).

Corolar 3.9. $(\psi \times 1)_0$ *este deschisă. (Pe* $\Gamma_{\pi'}$ *și* Γ_π *se consideră topologiile induse de* $\mathscr{E}'_* \times X^I$ *și* $\mathscr{E} \times X^I$).

Fie D' deschisă în $\Gamma_{\pi'} \Rightarrow D' = D \cap \Gamma_{\pi'}$, D deschisă în $\mathscr{E}'_* \times X^I$. Evident,

$$(\psi \times 1)_0 (D') \subset (\psi \times 1)(D) \cap \Gamma_\pi.$$

Reciproc, fie $([f], \lambda) \in (\psi \times 1)(D) \cap \Gamma_\pi \Rightarrow ([f], \lambda) = (\psi \times 1)(f, \lambda)$, $(f, \lambda) \in D$ și $\pi[f] = \lambda(0)$. Dar $\pi[f] = \pi'(f) = \lambda(0) \Rightarrow (f, \lambda) \in D \cap \Gamma_{\pi'}$. Deci $(\psi \times 1)_0 (D') = (\psi \times 1)(D) \cap \Gamma_\pi$, adică imaginea unei mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Lema 3.10. π, χ, χ_1, χ_0, $\mathscr{C}_*$ *sînt continue.*

Afirmația rezultă din comutativitatea diagramelor următoare, aplicînd lema 2.3 :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}'_* \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & \mathscr{E} \arrow[dl, "\pi"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega'_* \times \mathscr{E}'_* \arrow[r, "\psi_0 \times \psi"] \arrow[d, "\chi'"'] & \Omega \times \mathscr{E} \arrow[d, "\chi"] \\
\mathscr{E}'_* \arrow[r, "\psi"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega'_* \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\chi'_1"'] & \Omega \arrow[d, "\chi_1"] \\
\Omega'_* \arrow[r, "\psi_0"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{\pi'} \times I \arrow[r, "(\psi \times 1)_0 \times 1"] \arrow[d, "\mathscr{C}'_*"'] & \Gamma_\pi \times I \arrow[d, "\mathscr{C}_*"] \\
\mathscr{E}'_* \arrow[r, "\psi"'] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

χ_0 este continuă, fiind restricția lui χ.

Teorema 3.11. *Tripletul* $[\mathscr{E}, \pi, X]$ *poate fi înzestrat cu structura* $(\mathscr{E}, \pi, X, \mathscr{C}, \Omega)$.

Afirmația este evidentă datorită rezultatelor precedente. (Condiția P.2 din definiția 1.2 rezultă datorită egalității : $D \cdot [f] = (D \cdot \mathscr{E}) \cap \pi^{-1} (\pi[f])$, unde $D \subset \Omega$ este deschisă, $D \cdot \mathscr{E} = \{[\omega] \cdot [f'] \mid [\omega] \in D, [f'] \in \mathscr{E}\}$, și $D \cdot [f] = \{[\omega] \cdot [f] \mid [\omega] \in \Omega\}$).

Fie acum (E, p, X, C, G) o fibrare care îndeplinește următoarele condiții :

a) Dacă $\lambda \in X^I$, $\lambda(\tau) \equiv x$, $\tau \in I \Rightarrow C(y, \lambda)(\tau) \equiv y \in E$, oricare ar fi y, cu $p(y) = x$.

b) $(y, \lambda) \in \Gamma_p$, $y' = C(y, \lambda)(1) \Rightarrow C(y', \hat{\lambda})(1) = y$, $\hat{\lambda} \in X^I$, $\hat{\lambda}(\tau) = \lambda(1 - \tau)$.

c) $F' : \mathscr{E}'_s \times G \to E$, $F'(f, g) = g\varphi'(f)$, este deschisă (φ' este definită mai jos).

Se poate defini o aplicație $\varphi' : \mathscr{E}' \to E$ în felul următor :

Se fixează $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. Se procedează prin inducție :

$$\omega_0 \in \mathscr{E}'_0 \Rightarrow \varphi'(\omega_0) = y_0$$

$$f \in \mathscr{E}'_n \Rightarrow \varphi'(f) = C_*(\varphi'(f|_{[0, n-1]}), f|_{[n-1, n]}, 1).$$

Datorită proprietăților a) și b), φ' induce $\varphi : \mathscr{E} \to E$, $\varphi[f] = \varphi'(f)$.

LEMA 3.12. *Dacă se consideră* $\varphi' : \mathcal{E}'_s \to E$, φ' *este continuă.*

Este suficient să se arate că $\varphi' | \mathcal{E}'_n$ este continuă, oricare ar fi n, $0 \leqslant n < \infty$. Demonstrația se face prin inducție. Fie $f \in \mathcal{E}'_n$, $y = \varphi'(f)$, $y' = \varphi'(f|_{[0,\, n-1]})$ și $\lambda_f \in X^I$, $\lambda_f(\tau) = f(n-1+\tau)$. Atunci : $y = C_*(y', \lambda_f, 1)$. Fie $V \in \mathcal{V}_y$ ($\mathcal{V}_{()}$ filtrul vecinătăților punctului respectiv în spațiul respectiv). $\mathfrak{C}_*$ fiind continuă, există $V_1 \in \mathcal{V}_{y'}$ și $V_2 \in \mathcal{V}_{\lambda_f}$ astfel încît : $C_*(V_1 \times V_2 \times \{1\}) \subset V$. Din ipoteza de inducție, există $U_1 \in \mathcal{V}_{f|[0,\, n-1}$, $U_1 \subset \mathcal{E}'_{n-1}$, astfel încît $\varphi'(U_1) \subset V_1$. Se construiește $U \in \mathcal{V}_f$ în felul următor :

$$U = \{g \in \mathcal{E}'_n \mid g|_{[0,\, n-1]} \in U_1,\ \lambda_g \in V_2\}.$$

Rezultă $\varphi'(U) \subset V$, deci $\varphi' | \mathcal{E}'_n$ este continuă. ($\varphi' | \mathcal{E}'_0$ este evident continuă).

LEMA 3.13. *Se poate defini* $r' : \Omega' \to G$ *astfel încît* $\varphi'(\omega f) = r'(\omega)\, \varphi'(f)$ *și* $r'(\omega_1 . \omega_2) = r'(\omega_1) . r'(\omega_2)$, *oricare ar fi* ω_1, ω_2, $\omega \in \Omega$, $f \in \mathcal{E}'$.

Într-adevăr, dacă $\omega \in \Omega'$, $\varphi'(\omega) \in p^{-1}(x_0)$, deci $\varphi'(\omega) = gy_0$ și g este unic determinat. Se definește $r'(\omega) = g$. Din definiția lui φ rezultă $\varphi'(\omega f) = r'(\omega)\, \varphi'(f)$.

$$r'(\omega_1 \cdot \omega_2)\, y_0 = \varphi'(\omega_1 \cdot \omega_2) = r'(\omega_1)\, \varphi'(\omega_2) = r'(\omega_1) \cdot r'(\omega_2)\, y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'(\omega_1 \cdot \omega_2) = r'(\omega_1) \cdot r'(\omega_2).$$

TEOREMA 3.14. *Topologia imagine inversă prin* φ' *îndeplinește condițiile* 1—6, *cu ajutorul cărora s-a definit* $\mathcal{E}'_* \cdot \mathcal{E}'$ *înzestrat cu această topologie se notează* $\mathcal{E}'_{\varphi'}$.

Evident, $\varphi' : \mathcal{E}'_{\varphi'} \to E$ este continuă.

1. Diagrama următoare fiind comutativă, reiese că π' este continuă :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'_{\varphi'} \arrow[rr, "\varphi'"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

2. Fie D o mulțime deschisă în $\mathcal{E}'_{\varphi'}$; atunci $D = \varphi'^{-1}(D')$, D' fiind o mulțime deschisă în E ; $f \in \widetilde{D} \Rightarrow f \mathrm{R} f'$, $f' \in D$; a), b) fiind îndeplinite, $\varphi'(f) = \varphi'(f') \in D' \Rightarrow f \in D \Rightarrow D = \widetilde{D}$.

3. Fie $(\omega, f) \in \Omega' \times \mathcal{E}'$, $h = \omega \cdot f \in \mathcal{E}'$, $y = \varphi'(h) \in E$, $y' = \varphi'(f) \in E$, $g = r'(\omega) \in G$. Atunci $y = \varphi'(\omega f) = r'(\omega)\, \varphi'(f) = gy'$. Fie $V \in \mathcal{V}_h \Rightarrow V = \varphi'^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{V}_y$. Există $U''_1 \in \mathcal{V}_g$ și $U_2 \in \mathcal{V}_{y'}$ astfel încît $U''_1 . U_2 \subset U$ (acțiunea lui G fiind continuă). Fie $U'_1 = U''_1 \cdot y_0$; U'_1 fiind o vecinătate a lui $\varphi'(\omega) = gy_0$ în $p^{-1}(x_0) \Rightarrow U'_1 = U_1 \cap p^{-1}(x_0)$, U_1 fiind o

vecinătate a lui $\varphi'(\omega)$ în E. Fie $V_1 = \varphi'^{-1}(U_1') = \varphi'^{-1}(U_1) \cap \Omega' \in \mathcal{V}_\omega$, $V_2 = \varphi'^{-1}(U_2) \in \mathcal{V}_f$. Se observă că $V_1 . V_2 \subset V$, deci χ' este continuă.

4. Se demonstrează ca şi 3.

5. Fie $(f, \lambda) \in \Gamma_{\pi'}$, $\tau \in I$, $\mathcal{C}'_*(f, \lambda, \tau) = h \in \mathcal{E}'$, $V \in \mathcal{V}_h \Rightarrow \mathrm{V} = \varphi'^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{V}_y$, $y = \varphi'(h) \in E$.

Se notează cu λ_σ funcţia :

$$\lambda_\sigma : I \to X, \qquad \lambda_\sigma(t) = \begin{cases} \lambda(t), & 0 \leqslant t \leqslant \sigma \\ \lambda(\sigma), & \sigma \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \qquad \sigma \in I.$$

$y' = \varphi'(f) \Rightarrow y = \varphi'(h) = C_*(y', \lambda_\tau, 1)$. C_* fiind continuă, există $U_1 \in \mathcal{V}_{y'}$, şi $U_2 \in \mathcal{V}_{\lambda_\tau}$ astfel încît : $C_*(U_1 \times U_2 \times \{1\}) \subset U$. Folosind modul de definire al topologiei compact deschisă, se poate arăta că există $\mathrm{V}_3 \in \mathcal{V}_\tau$, $V_2 \in \mathcal{V}_\lambda$, astfel încît $\lambda_\sigma \in V_2 \subset U_2$ oricare ar fi $\sigma \in V_3$. Luînd $V_1 = \varphi'^{-1}(U_1)$, rezultă : $\mathcal{C}'_*(V_1 \times V_2 \times V_3) \subset V$, deci $\mathcal{C}'_*$ este continuă.

6. $\varphi' : \mathcal{E}'_s \to E$ este continuă, deci topologia lui $\mathcal{E}'_s$ este mai fină decît topologia lui $\mathcal{E}'_{\varphi'}$.

Corolarul 3.15. *$\varphi' : \mathcal{E}'_* \to E$ este continuă şi $F' : \mathcal{E}'_* \times G \to E$ deschisă.*

Topologia lui $\mathcal{E}'_*$ fiind mai fină decît cea a lui $\mathcal{E}'_{\varphi'}$ şi mai puţin fină decît cea a lui $\mathcal{E}'_s$, rezultă ambele afirmaţii.

Corolarul 3.16. *$r' : \Omega'_* \to G$ este continuă.*

Fie $\omega \in \Omega'_*$, $g = r(\omega)$ şi $V \in \mathcal{V}_g$; $V_1 = V \cdot y_0$ este o vecinătate a lui gy_0 în $p^{-1}(x_0) \Rightarrow V_1 = U_1 \cap p^{-1}(x_0)$, U_1 fiind o vecinătate a lui gy_0 în E. Cum $U = \varphi'^{-1}(V_1) = \varphi'^{-1}(U_1) \cap \Omega'_*$, rezultă că U este o vecinătate a lui ω în Ω'_*. Evident, $r'(U) \subset V$, deci r' este continuă.

Corolarul 3.17. *$\varphi : \mathcal{E} \to E$ este continuă.*

Rezultă din comutativitatea următoarei diagrame, aplicînd lema 2.3 :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}'_* \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & \mathcal{E} \arrow[dl, "\varphi"] \\ & E & \end{tikzcd} .$$

Corolarul 3.18. *r' induce $r : \Omega \to G$, omomorfism continuu de grupuri:*

$$r[\omega] = r'(\omega)$$

$$\begin{tikzcd} \Omega'_* \arrow[rr, "\psi_0"] \arrow[dr, "r'"'] & & \Omega \arrow[dl, "r"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Deci r este continuă.

r îndeplineşte condiţiile teoremei lui Ehresmann. Fie (E', p', X, C', G) fibrarea care rezultă acolo.

Teorema 3.19. *Fibrările (E, p, X, G) şi (E', p', X, G) sînt izomorfe.*

Într-adevăr, fie F următoarea funcţie : $F : \mathcal{E} \times G \to E$, $F([f], g) = g\,\varphi[f]$. Datorită faptului că X este liniar conex şi că este îndeplinită condiţia P. 2, F este pe. Din comutativitatea diagramei

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}'_* \times G \arrow[rr, "\psi\times 1"] \arrow[dr, "F'"'] & & \mathcal{E} \times G \arrow[dl, "F"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

rezultă că F este continuă şi deschisă (conform lemei (2.3).

Se observă că $F([f], g) = F([f'], g') \Leftrightarrow [f'] = [\omega].[f]$ şi $g' = gr([\omega]^{-1})$, deci se poate stabili un izomorfism de mulţimi între E şi E'. Fie acesta h. Datorită comutativităţii diagramei :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \times G \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & E \arrow[dl, "h"] \\
& E' &
\end{tikzcd}$$

h rezultă omeomorfism (α este aplicaţia canonică $\mathcal{E} \times G \to E'$). Se verifică şi că diagramele :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \times E \arrow[r, "1\times h"] \arrow[d] & G \times E' \arrow[d] \\
E \arrow[r, "h"] & E'
\end{tikzcd}$$

sînt comutative.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. Teleman, *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
2. N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton, 1951.
3. J. P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*. Annals of Mathematics, (54) (1951).
4. Sze-Tsen Hu, *Homotopy Theory*. Academic Press, 1959.
5. J. Milnor, *Construction of Universal Bundles*. Annals of Mathematics (63) (1956).

REZOLVAREA NUMERICĂ A UNEI CLASE DE PROBLEME DE PROGRAMARE NELINIARĂ

DE

VINCENŢIU DUMITRU şi VASILE IONESCU

În lucrare se extinde algoritmul lui H. Maurin [1] la rezolvarea unei clase de probleme de programare neliniară şi se rezolvă un exemplu numeric.

În această notă avem în vedere probleme de tipul următor: Să se afle optimul funcţiei

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} P_j(y)\, x_j \tag{1}$$

cu condiţiile

$$\sum_{j=1}^{n} A_i^j(y)\, x_j = a_i(y), \qquad i = (1, \ldots, m) \tag{2}$$

unde $P_j(y)$, $A_i^j(y)$ şi $a_i(y)$ sînt polinoame de un grad oarecare în y.

În [1] H. Maurin rezolvă problema în cazul unor polinoame de gradul I, considerînd-o ca o problemă liniară parametrică. În [2] I. Drăgan tratează problema de programare parametrică în cazul în care $P_j(y)$ sînt polinoame de gradul II iar A_i^j şi a_i sînt constante.

În această lucrare noi abordăm problema în cazul în care $A_i^j(y)$, $a_i(y)$ şi $P_j(y)$ sînt polinoame de gradul II în y, pentru $j = j_0$ şi $i = (1, \ldots, m)$, iar pentru $j \neq j_0$ constante şi prezentăm şi un exemplu numeric.

Ca şi în [1], remarcăm că este suficient să tratăm problema numai în cazul cînd ecuaţiile de condiţie sînt neliniare, deoarece în cazul cînd şi funcţia este neliniară, o alăturăm ecuaţiilor de condiţie şi optimizăm x_0.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 933–942, BUCUREŞTI, 1966

2. Să considerăm deci :

$$\max x_0 = f x \tag{1'}$$

cu condiţiile

$$A x = a, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \tag{2'}$$

unde x este un vector coloană cu n componente, f este un vector linie cu n componente, $x_0 = fx$ funcţia de optimizat, A este matricea restricţiilor în care unul dintre vectorii coloană A^k este de forma

$$\begin{cases} A^k = \overline{A}^k + yA'^k + y^2 \cdot A''^k, \quad \text{iar} \\ a = \overline{a} + ya' + y^2 a'' \end{cases} \tag{2''}$$

cu $\overline{A}^k$, A', A'', $\overline{a}$, a', a'' vectori constanţi iar y variabila neliniară. Dacă problema este considerată ca o problemă parametrică, atunci ea nu va mai fi supusă condiţiilor de nenegativitate. Metoda de rezolvare va fi însă tot aceea de a privi problema ca o problemă de programare liniară parametrică.

Algoritmul dat în [1] constă în a determina valorile limită ale lui y pentru care :

— matricea de bază devine singulară ;
— soluţia încetează de a mai fi realizabilă ;
— soluţia încetează de a mai fi optimală.

Vom presupune că se cunoaşte o soluţie optimală pentru o valoare particulară y_0 a variabilei y, valoare care poate fi luată egală cu zero, efectuînd o schimbare de origine.

Se pot produce două cazuri :

a) $\overline{A}^k$ nu este vector al bazei optimale A^{I_0} pentru $y = 0$. Cantităţile variabile în funcţie de y sînt :

T_0^k — vectorul transformat al lui A^k prin $[A^{I_0}]^{-1}$;
δ^k — indicatorul optimului pentru necunoscuta x_k ;
vectorul a.

Avem :

$$T_0^k = [A^{I_0}]^{-1}.(\overline{A}^k + yA'^k + y^2A''^k) = \overline{T}_0^k + y\,[A^{I_0}]^{-1} A'^k + \\ + y^2.[A^{I_0}]^{-1} A''^k \tag{3}$$

sau, punînd

$$[A^{I_0}]^{-1} A'^k = W'^k_0 \quad \text{şi} \quad [A^{I_0})^{-1} A''^k = W_0''^k, \tag{4}$$

$$T_0^k = \overline{T}_0^k + y\, W'^k_0 + y^2 W_0''^k \tag{5}$$

iar

$$\delta^k = \delta_0^k - y\, f^{I_0} W'^k_0 - y^2 f^{I_0} W_0''^k. \tag{6}$$

Cum pentru $y = 0$ avem optim şi deci $\delta_0^k \leqslant 0$, rezultă că soluţia actuală :

— rămîne optimă pentru $\forall y > 0$, dacă $f^{I_0} W_0'^k \geqslant 0$ şi $f^{I_0} W_0''^k \geqslant 0$
— dacă $y_1' \leqslant y_1''$ sînt cele două rădăcini ale ecuaţiei $\delta^k = 0$, atunci soluţia rămîne optimală :

1) În intervalul $[0, y_1'] \cup [y_1'', +\infty]$ dacă $f^{I_0} W_0''^k > 0$ şi $f^{I_0} W_0''^k < 0$.

2) În intervalul $[0, y_1'']$ dacă $f^{I_0} W_0''^k < 0$.

Vom nota cu $D_{\text{opt.}}$ domeniul pe care soluţia rămîne optimală. Dar, chiar atunci cînd criteriul optimalităţii este verificat, soluţia poate să nu mai fie realizabilă. Într-adevăr, avem

$$x_{I_0} = [A^{I_0}]^{-1} (\overline{a} + ya' + y^2a'') = \overline{x}_{I_0} + y\,[A^{I_0}]^{-1}\,a' + y^2\,[A^{I_0}]^{-1}\,a'' \tag{7}$$

sau, punînd

$$t'_0 = [A^{I_0}]^{-1}\,a',\ t_0'' = [A^{I_0}]^{-1}\cdot a'' \tag{8}$$

$$x_{I_0} = \overline{x}_{I_0} + yt_0' + y^2\,t_0'' \tag{9}$$

deci dacă t_0' şi $t_0'' \geqslant 0$, soluţia rămîne realizabilă pentru orice y.

Vom nota cu $D_{\text{real.}}$ intersecţia tuturor domeniilor de pozitivitate ale celor m polinoame de gradul 2 :

$$x_i = \overline{x}_i + y\,t_{0i}' + y^2t_{0i}''.$$

Fie $D = D_{\text{opt.}} \cap D_{\text{real.}}$ Pentru $y \in D$ soluţia este optimală şi realizabilă, pentru CD se pot ivi trei situaţii:

1. Soluţia este optimală dar nerealizabilă, în care caz se schimbă baza cu ajutorul metodei duale simpliciale pînă cînd criteriul de optimalitate rămîne satisfăcut.

2. Soluţia este realizabilă dar neoptimală şi atunci se introduce în bază vectorul A_k după algoritmul simplex.

3. Există un interval în care soluţia nu este nici realizabilă nici optimală. În acest caz se cercetează dacă problema are o soluţie realizabilă în acest interval ([3], pag. 151).

Intervalele pe care transformările de la punctele 1 şi 2 nu se pot face, ne dau valorile lui y pentru care problema nu are soluţie.

b) $\overline{A}^k$ este vectorul q al bazei optimale A^{I_0} pentru $y = 0$.

În acest caz, vectorul bază variază împreună cu y. Matricea inversă a bazei variază, deci, conform relaţiei

$$[A^{I_0}]^{-1} = E^{(q)}\,[A^{I_0}]^{-1}. \tag{10}$$

Matricea elementară $E^{(q)}$ este construită de la matricea unitate în care vectorul unitar q se înlocuieşte cu vectorul $V^{(q)}$ de componente

$$\left\{\begin{array}{l} V_q^q = \dfrac{1}{T_{0q}^k} = \dfrac{1}{1 + y\,W_{0q}'^k + y^2W_{0q}''^k}, \\ V_i^q = -\dfrac{T_{0i}^k}{T_{0q}^k} = -\dfrac{y\,W_{0i}'^k + y^2W_{0i}''^k}{1 + y\,W_{0q}'^k + y^2W_{0q}''^k}, \\ i \in \{I_0 - q\}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Dacă y variază, avem 3 cazuri :

1. Matricea A^I devine singulară dacă

$$1 + yW_{0q}'^k + y^2W_{0q}''^k = 0.$$

2. Soluția încetează de a mai fi realizabilă dacă una din componentele vectorului x devine negativă.

Or, avem:

$$x_{I_0} = E^{(q)} (\overline{x}_{I_0} + y t'_0 + y^2 t''_0). \tag{12}$$

Realizabilitatea soluției revine la discuția semnului polinomului de gradul IV.

3. Soluția încetează de a mai fi optimală dacă $\delta^{\bar{I}} \nleq 0$, cu alte cuvinte dacă există cel puțin un $j \notin I_0$ astfel ca să avem $\delta^j > 0$. Or, avem

$$\delta^j = - f^{I_0} E^{(q)} T_0^j + f^j,\ j \in \bar{I}_0 . \tag{13}$$

Optimalitatea revine deci la a discuta semnul cantităților $\delta^j, j \in \bar{I}_0$, cu alte cuvinte a discuta semnul a $n - m$ polinoame de gradul II.

Intersecția acestor situații se rezolvă ca și la punctul a.

Problema se termină prin stabilirea tuturor domeniilor pe care problema de programare liniară, în care y este considerat parametru, are soluții realizabile optime. Aceste soluții depind de y. Studiind maximul funcției de optimizat, în general definită diferit pe diversele domenii găsite, atunci cînd y variază în aceste domenii și luînd maximul maximorum, avem soluția problemei de programare neliniară.

Exemplu numeric. Să se determine maximul funcției:

$$x_0 = - 3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

cu condițiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + (y^2 + 3y + 2)\, x_3 = y^2 + y + 3 \\ 3x_1 + 3\, x_2 + (y^2 - 2y + 1)\, x_3 = 2y^2 - 3y + 4 \\ x_i,\ y \geqslant 0 . \end{cases}$$

Pentru $y = 0$, aplicînd algoritmul simplex, găsim soluția optimală

$$\overline{x}_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

cu

$$[A^{I_0}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sîntem în cazul în care $A^k = A^3$ nu este un vector al bazei optimale. Cu notațiile introduse anterior avem:

$$A'^k = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A''^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}^k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f^{I_0} = (4, -3),\ \delta_0^k = - 2 - (4, -3) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = - \frac{41}{6} \cdot$$

Pentru a determina domeniul lui y pentru care soluția rămîne optimală, calculăm:

$$W_0'^k = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/6 \\ -5/2 \end{pmatrix},$$

$$W_0''^k = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă:

$$\delta^k = \delta_0^k - y^2 f^{I_0} W_0''^k - y f^{I_0} W_0'^k = -41/6 - y\,(44/6 + 15/2) - y^2 \cdot 4/3$$

și deci soluția este optimală pentru orice $y > 0$.

Pentru a găsi domeniul de realizabilitate al soluției calculăm:

$$[A^{I_0}]^{-1}\, a'' = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$[A^{I_0}]^{-1}\, a' = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Rezultă:

$$x_{I_0} = \bar{x}_{I_0} + y^2\,[A^{I_0}]^{-1}\, a'' + y\,[A^{I_0}]^{-1}\, a' = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} + y^2 \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2/6 + y + 5/6 \\ y^2/2 - 2y + 1/2 \end{pmatrix}$$

de unde

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} x_1 = 1/2 y^2 - 2y + 1/2 \\ x_2 = 1/6 y^2 + y + 5/6 \end{cases}$$

soluție care rămîne realizabilă pentru ($y \geqslant 0$):

$$1/2\, y^2 - 2y + 1/2 \geqslant 0$$

adică pentru

$$y \in [0,\ 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3},\ \infty).$$

Conform rezultatului de mai sus, această soluție este și optimală pe acest interval.

Întrucît soluția devine irealizabilă pe intervalul $(2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3})$, rămînînd optimală, va trebui să schimbăm baza prin scoaterea din vechea bază a vectorului A^1, aplicînd criteriul dual simplex, într-un punct $2 - \sqrt{3} + \varepsilon$.

În scopul ușurării calculului vom determina o nouă bază pentru valoarea particulară $y = 2$ din intervalul $(2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3})$ și vom studia din nou domeniul de optimalitate și realizabilitate al noii baze.

Pentru $y = 2$, avem:

$$x_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

Folosind metoda duală simplicială, scoatem din bază pe x_1 şi obţinem o nouă bază.

$$x_{I_0} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/11 \\ 3/11 \end{pmatrix} \text{ cu } [A^{I_0}]^{-1} = \begin{pmatrix} -1/33 & 4/11 \\ 1/11 & -1/11 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Sîntem acum în cazul cînd $A^k = A^3$ este un vector al bazei optimale.

Pentru a putea aplica formulele de determinare a domeniului de realizabilitate şi optimalitate, vom face o schimbare de variabilă pentru parametrul y, deoarece formulele (12), (13) au fost deduse pentru cazul cînd cunoaştem o soluţie iniţială pentru $y = 0$. Această schimbare de variabilă este $y = y' + 2$ pentru $y' \in (-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$.

Vom avea:

$$\max x_0 = -3\, x_1 + 4\, x_2 - 2\, x_3$$

cu condiţiile:

$$\begin{cases} x_1 + 3\, x_2 + (y'^2 + 7\, y' + 12)\, x_3 = y'^2 + 5\, y' + 9 \\ 3\, x_1 + 3\, x_2 + (y'^2 + 2\, y' + 1)\, x_3 = 2\, y'^2 + 5\, y' + 6. \end{cases}$$

Pentru $y' = 0$ avem soluţia (15).

Determinarea noului domeniu de optimalitate şi realizabilitate se va face cu formulele (13), (14), pentru care avem:

$$A'^k = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A''^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}^k = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$a = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a' = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{T}_0^k = \begin{pmatrix} -1/33 & 4/11 \\ 1/11 & -1/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_0'' = \begin{pmatrix} -1/33 & 4/11 \\ 1/11 & -1/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_0' = \begin{pmatrix} -1/33 & 4/11 \\ 1/11 & -1/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/33 \\ 5/11 \end{pmatrix}$$

de unde

$$T_0^k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 17/33 \\ 5/11 \end{pmatrix} + y'^2 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'^2/3 + 17/33\, y' \\ 5/11\, y' + 1 \end{pmatrix}$$

Şi deci

$$E^{(q)} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\dfrac{y'^2}{3}+\dfrac{17}{33}y'}{1+\dfrac{5}{11}y'} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{5}{11}y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{11\,y'^2+17\,y'}{3\,(5\,y'+11)} \\ 0 & \dfrac{11}{5\,y'+11} \end{pmatrix}$$

iar

$$\overline{x}_{I_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{21}{11} \\ \dfrac{3}{11} \end{pmatrix},$$

$$t'_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{33} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$t''_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{33} & \dfrac{4}{11} \\ \dfrac{1}{11} & -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{23}{33} \\ -\dfrac{1}{11} \end{pmatrix}.$$

Rezultă :

$$x_{I_0} = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{11\,y'^2+17\,y'}{3\,(5\,y'+11)} \\ 0 & \dfrac{11}{5\,y'+11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{21}{11}+\dfrac{5}{3}y'+\dfrac{23}{33}y'^2 \\ \dfrac{3}{11}+0\,y'-\dfrac{1}{11}y'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

De unde :

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{y'^4+12\,y'^3+45\,y'^2+79\,y'+63}{3\,(5\,y'+11)} \\ x_3 = \dfrac{3-y'^2}{5\,y'+11}. \end{cases}$$

Se constată uşor că aceste soluţii sînt realizabile péntru

$$y' \in [-\sqrt{3},\ +\sqrt{3}].$$

Revenind la variabila y, se constată că noua soluţie de bază

$$(16)\qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{y^4 + 4y^3 - 3y^2 + 11y + 5}{3\,(5\,y + 1)} \\[2ex] x_3 = \dfrac{-\,y^2 + 4\,y - 1}{5\,y + 1} \end{cases}$$

este realizabilă pe intervalul $[2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$.

Pentru a găsi domeniul de optimalitate a noii baze calculăm :

$$\delta^j = -\,f^{I_0}\,E^{(q)}\,T_0^j + f^j.$$

În cazul nostru avem de calculat numai pe δ^1 corespunzător singurului vector care nu este în bază.

Avem :

$$f^{I_0} = (4,\ -2)$$

$$T_0^1 = \begin{pmatrix} -1/33 & 4/11 \\ 1/11 & -1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35/33 \\ -2/11 \end{pmatrix}$$

$$f^1 = -\,3$$

deci

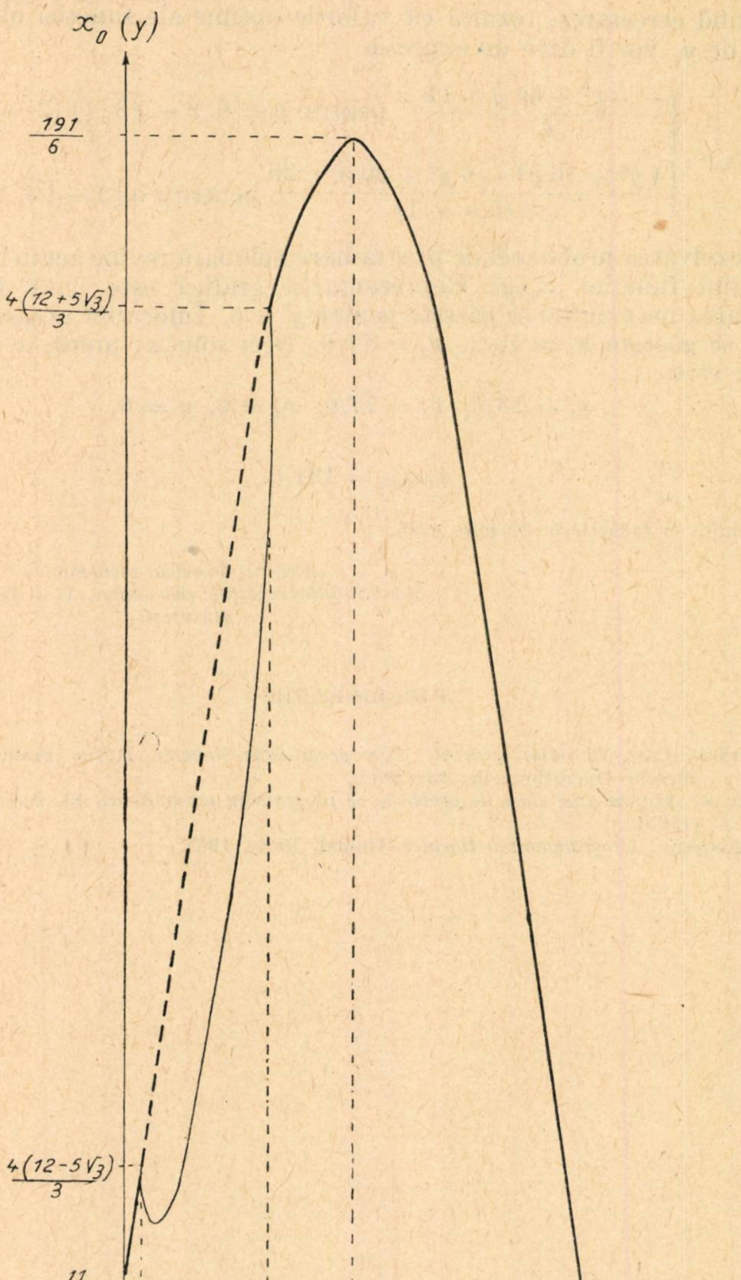
$$\delta^1 = -\,(4\ \ -2) \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{11\,y'^2 + 17\,y'}{3\,(5\,y' + 11)} \\[2ex] 0 \qquad \dfrac{11}{5\,y' + 11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35/33 \\[2ex] -2/11 \end{pmatrix} - 3$$

$$= -\,\frac{8\,y'^2 + 76\,y' + 11}{3\,(5y' + 11)} - 3.$$

Se constată că soluţia este şi optimă pentru $y' \in [-\sqrt{3},\ +\sqrt{3}]$, iar din expresia matricei E rezultă că aceasta este nesingulară pentru orice y diferit de $-1/5$ $\left(y' \neq \dfrac{-11}{5}\right)$.

Revenind la variabila y, rezultă că : pentru $y \in [2 - \sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3}]$ soluţia optimă de bază este dată de :

$$(17)\qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{y^4 + 4\,y^3 - 3\,y^2 + 11\,y + 5}{3\,(5\,y + 1)}, \\[2ex] x_3 = \dfrac{-\,y^2 + 4\,y - 1}{5\,y + 1}. \end{cases}$$


$x_0\,(y)$
$\frac{191}{6}$
$\frac{4(12+5\sqrt{3})}{3}$
$\frac{4(12-5\sqrt{3})}{3}$
$\frac{11}{6}$
y
$2-\sqrt{3}$
$2+\sqrt{3}$
6
$\frac{61}{5}$

Sintetizînd cercetarea, rezultă că valorile optime ale funcţiei obiectiv, în funcţie de y, vor fi date de expresia

$$(18)\qquad x_0 = \begin{cases} \dfrac{-5y^2 + 60y + 11}{6} & \text{pentru } y \in [0, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, \infty), \\[2ex] \dfrac{4y^4 + 16y^3 - 6y^2 + 20y + 26}{3(5y + 1)} & \text{pentru } y \in [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]^{1)}. \end{cases}$$

Rezolvarea problemei de programare neliniară revine acum la studiul maximului funcţiei $x_0(y)$. Reprezentarea grafică este dată în figură, iar valoarea maximului se găseşte pentru $y = 6$. Înlocuind această valoare în (14) se găseşte $x_1 = 13/2$, $x_2 = 77/6$. Deci soluţia, unică, a problemei propuse este

$$x_1 = 13/2,\ x_2 = 77/6,\ x_3 = 0,\ y = 6,$$

iar

$$x_{0\ \max} = 191/6.$$

Primită la redacţie la 30 iulie 1965

Centrul de calcul economic
al Institutului de ştiinţe economice „V. I. Lenin",
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. H. MAURIN, *Paramétrisation générale d'un programme linéaire.* Revue Française de Recherche Opérationnelle, *32* (1965).
2. I. DRĂGAN, *Asupra unei clase de probleme de programare parametrică,* St. cerc. mat., **17**, *3* (1965).
3. M. SIMONNARD, *Programmation linéaire.* Dunod, Paris, 1962.

---

1) Pentru $y = 2 \pm \sqrt{3}$, valorile date de cele 2 expresii coincid.

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

ORSZÁGOS MŰSZ
1983

1967 MAR 22

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 304 p. + 52 pl., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă, Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 6, P. 769—942, BUCUREŞTI, 1966

I. P. „Informaţia" – c. 3308

43831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

7

TOMUL 18

1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

F 762

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT * 1883

TOM. 18, Nr. 7
1966

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

NICOLAE POPESCU, Elemente de teoria fasciculelor (V) 945

HARRY COHN, Teoreme limită pentru procese stocastice . . . 993

I. SUCIU, Şiruri de interpolare şi structura spaţiului idealelor maximale ale lui H^∞ 1029

ILEANA NĂDEJDE, O comparaţie între metoda Fei şi metoda simplex revizuită 1039

RODICA TRANDAFIR, Lanţuri cu legături complete liniare omogene 1057

PAUL COCÎRLAN, Asupra ecuaţiei integro-diferenţiale a lui D. A. Spence din teoria profilelor subţiri cu jet 1065

GH. S. NADIU, Asupra unor teoreme de recursiune a algoritmilor normali 1071

P. STAVRE, Asupra paralelismului vectorilor în lungul curbelor unui spaţiu cu conexiune afină L_n şi formulelor lui Hlavaty . 1079

RECENZII 1085

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 943–1088, BUCUREŞTI, 1966

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

ELEMENTE DE TEORIA FASCICULELOR (V)

DE

NICOLAE POPESCU

În această parte se expune o teorie completă a toposurilor abeliene. După cele mai recente rezultate, acestea sînt categorii cît ale categoriilor de module. Tot aici se dă o descriere completă a categoriilor abeliene şi multe teoreme recente privind structura categoriilor abeliene.

INTRODUCERE

Alături de ,,Topos''-urile considerate în capitolul IV, sînt foarte importante (şi chiar mai importante) toposurile abeliene care se vor defini mai jos. Exemplu de topos abelian putem cita spre exemplu categoria fasciculelor de grupuri abeliene peste un spaţiu topologic, conform capitolului IV, § 25, sau orice categorie de module. În lucrare se dovedeşte că orice topos abelian este o categorie cît a unei categorii de module, caracterizare care permite să folosim toposurile pentru ,,a face'' algebră omologică (fapt pe care noi nu-l vom face, în literatură existînd lucrarea lui Grothendieck : *Sur quelques pointes d'algèbre homologique* Tohoku Math. Journal, *3*, *4* (1957), în care este foarte bine tratată această problemă).

O altă problemă care nu este complet elucidată în momentul de faţă şi la care tinerii noştri matematicieni au adus o contribuţie de seamă este structura toposurilor abeliene. Formal această problemă este rezolvată în lucrarea de faţă. Lucrarea conţine de asemenea teoria dualităţii pentru categoriile local finite, teorie datorită lui Gabriel.

Expunerile acestui capitol au fost făcute de Constantin Năstăsescu, Octavian Stănăşilă, Constantin Niţă şi Nicolae Popescu.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 945–991, BUCUREŞTI, 1966

CAPITOLUL V

TOPOSURI ABELIENE

§ 1. CÎTEVA OBSERVAŢII PREGĂTITOARE

Am admis încă de la începutul acestui seminar că cititorul este familiarizat cu conceptul de categorie preaditivă, aditivă, abeliană etc. Facem remarca, cu care cititorul se pune uşor de acord, că dacă o categorie $\mathcal{C}$, cu produse şi sume directe finite, este aditivă, atunci ea este într-un singur fel aditivă. Cu atît mai mult stau lucrurile relativ la o categorie abeliană. Aceste observaţii sînt utile şi ele apar implicit în cele ce urmează.

Categoria Mod$A$ a modulelor drepte şi unitare peste inelul A este abeliană şi satisface mai multor axiome privind limitele inductive şi produsele directe. Astfel Mod$A$ satisface axioma AB5, precum şi axioma Ab4*. (O categorie abeliană care satisface simultan AB5 şi AB5* este neapărat formată din obiecte nule, căci morfismul canonic de la o sumă directă de obiecte la produsul direct al aceloraşi obiecte este un izomorfism; această afirmaţie va fi reluată.) De asemenea categoria Mod$A$ satisface şi axioma AB6 care se poate enunţa astfel : este verificată AB3 şi pentru orice $\mathrm{M} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}A$ şi pentru orice mulţime de familii crescător filtrată de submodule ale lui M : $\{(M_{\alpha\beta})_{\beta\in I_\alpha}\}_{\alpha\in I}$, morfismul canonic :

$$\bigcup_{\substack{\beta_\alpha\in\pi I_\alpha \\ \alpha\in I}} \Big(\bigcap_{\alpha\in I} M_{\alpha\beta_\alpha}\Big) \xrightarrow{\sim} \bigcap_{\alpha\in I} \Big(\bigcup_{\beta\in I_\alpha} M_{\alpha\beta}\Big)$$

este un izomorfism.

Axioma AB6 este verificată spre exemplu şi de categoriile de fascicule peste unele spaţii topologice.

Definiţia 5.1. Fie U un univers şi $\mathcal{C}$ o U-categorie abeliană Vom spune că $\mathcal{C}$ este un U-AB-topos sau un U-topos abelian dacă $\mathcal{C}$ satisface axioma AB5 şi posedă o familie de generatori indexată de o mulţime din U.

Observaţie. Fideli principiului nostru, vom omite universul U din expresii, existenţa lui fiind tacit subînţeleasă.

Observăm de asemenea că în capitolul III am folosit deja AB-toposurile sub denumirea de categorii Grothendieck.

§ 2. SITURI ABELIENE

Fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă, element al lui U ; notăm cu $\mathcal{C}^a$ categoria tuturor functorilor contravarianţi aditivi de la $\mathcal{C}$ la Ab. $\mathcal{C}^a$ este o categorie de diagrame (cu comutare) peste Ab şi deci satisface multe din axiomele pe care le satisface Ab. În particular, $\mathcal{C}^a$ este o categorie cu AB6 fapt imediat de pus în evidenţă. Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(?, X)$ este un functor contravariant de la $\mathcal{C}$ la Ab (prin Ab vom înțelege mereu U-Ab) notat h^a_X sau simplu : X. Categoria $\mathcal{C}^a$ se va numi categoria prefasciculelor abeliene de la $\mathcal{C}$ la Ab. Vom juxtapune acum o serie de rezultate care printre altele vor justifica multe afirmații din capitolul II.

PROPOZIȚIA 5.2. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă și $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$; pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ există un izomorfism functorial în F și X :*

$$(^*) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(h_X, F) \xrightarrow{\sim} F(X).$$

Functorul $h^a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^a$ este deplin fidel și izomorfismul (*)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(h_X, h_Y) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

este cel dat de h^a.

Demonstrație. Evident, orice morfism $\varphi : h_X \to F$ este determinat de clasa sa fundamentală $\varphi_X(1_X)$; pentru aceasta fie $x \in F(X)$ și $\varphi^x : h_X \to F$ morfismul canonic asociat; φ^x este un morfism functorial de prefascicule de mulțimi; pentru a dovedi că este morfism de obiecte din $\mathcal{C}^a$, trebuie să dovedim că pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $\varphi^x_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \to F(Y)$ este un omomorfism de grupuri abeliene. Într-adevăr,

$$\varphi^x_Y(0) = F(0)(x) = 0; \qquad \varphi^x_Y(f+g) = F(f+g)(x) =$$
$$= F(f)(x) + F(g)(x) = \varphi^x_Y(f) + \varphi^x_Y(g).$$

Restul se deduce în mod trivial.

Observație. Era important faptul să selecționăm în $\mathcal{C}^a$ functorii aditivi, altfel propoziția dovedită nu are nici un sens. Observăm că propoziția 5.2 este exact teorema Yoneda-Grothendieck pentru cazul aditiv. O vom cita sub numele de teorema : ,,Yoneda-Grothendieck aditivă'' sau ,,Y-G-A''-teorema.

COROLARUL 1. *Functorul $h^a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^a$ este deplin fidel. Ele comută cu limitele proiective reprezentabile din $\mathcal{C}$.*

Demonstrația acestui corolar este imediată și lăsată în seama cititorului căruia îi revine și dovedirea următorului corolar :

COROLARUL 2. *În condițiile propoziției 5.2 fie $F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^a$ și $s_F : \mathcal{C}/_F \to \mathcal{C}$ functorul canonic. Morfismul canonic :*

$$\varinjlim h \circ s_F \to F$$

este un izomorfism.

Deci, obiectele de tipul h_X, $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, dau o mulțime de generatori ai lui $\mathcal{C}^a$. Mai mult, fiecare din acești generatori este un obiect proiectiv din $\mathcal{C}^a$.

Demonstrație. Prima parte a corolarului se dovedește exact ca și propoziția 2.3. Partea a doua este imediată din definiția generatorilor pentru o categorie abeliană și din construcția limitelor inductive într-o categorie cu sumne directe. În fine, ultima parte este imediată, folosind faptul că $f : F \to F''$ este un epimorfism din $\mathcal{C}^a$ dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $f_X : F(X) \to F''(X)$ este un epimorfism de grupuri și teorema Y.G.A.

Iată o frumoasă interpretare a categoriei $\mathcal{C}^a$, interpretare datorită lui P. Gabriel ([1], Cap. II). Fie, pentru aceasta, inelul A construit în felul următor : grupul subiacent al lui A este suma directă a grupurilor abelian $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ adică ca grup : $A = \coprod\limits_{(X, Y) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C} \times \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Compunerea morfismelor din A se face în două feluri (pe componente) :

$$\text{pentru } f,\ g \in \mathcal{C},\ f \times g = \begin{cases} 0 \text{ dacă sursa lui } f \text{ diferă de adresa lui } g, \\ f \circ g \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

A este un inel fără identitate în general (are identitate dacă și numai dacă $\mathcal{C}$ e formată dintr-un singur obiect, adică este un inel). Fie $\mathcal{C}_A$ categoria A-modulelor drepte ; un obiect M din $\mathcal{C}_A$ se zice regulat dacă $MA = A$. Fie $\mathcal{C}'_A$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}_A$ formată din obiectele regulate.

PROPOZIȚIA 5.3. *În ipotezele și cu notațiile de mai sus, categoria* $\mathcal{C}'_A$ *este echivalentă cu categoria* $\mathcal{C}^a$.

Demonstrație. Vom defini doi functori $\alpha : \mathcal{C}^a \to \mathcal{C}'_A$ și $\beta : \mathcal{C}'_A \to \mathcal{C}^a$ și vom arăta că $\alpha \circ \beta \simeq \mathrm{Id}\, \mathcal{C}'_A$ și $\beta \circ \alpha \simeq \mathrm{Id}\, \mathcal{C}^a \cdot \alpha$ se definește astfel : pentru $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^a$, $\alpha(F) = \coprod\limits_{X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}} F(X)$; dacă $\varphi : F \to G$ este un morfism din $\mathcal{C}^a$, atunci $\alpha(\varphi) = \coprod\limits_{X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}} \varphi_x$. Dacă $f : Y \to Z$ este un morfism din $\mathcal{C}$ (deci element al lui A), și $x \in \alpha(F)$, atunci $xf = F(f)(x)$ dacă $x \in F(Z)$ și $x.f = 0$ altfel. Faptul că $\alpha(F)$ este A-modul drept este evident ; $\alpha(F)$ este A-modul drept regulat și pentru orice $\varphi : F \to G$, $\alpha(\varphi)$ este morfism de A-module drepte.

Functorul β se construiește astfel : fie $M \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}'_A$ și $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$. Notăm cu M_X submodulul lui M format din toate elementele $m \in M$ cu $m.1_Y = 0$ pentru orice $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $Y \neq 0$. M_X este un sumand direct al lui M, deoarece fie M^X submodulul lui M, format din elementele m', cu proprietatea că $m' 1_X = 0$. Atunci $M_X \cap M^X = 0$ și, în plus, dacă $m \in M$, atunci $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i f_i$ cu $f_i \in A$, $f_i : X_i \to Y_i$.

Fie $i_1, \ldots, i_k$ toți indicii dintre 1 și n cu $Y_{i_j} = X$, $j = 1, \ldots, k$. Atunci $m = m_{i_1} f_{i_1} + \ldots m_{i_k} f_{i_k} + m_{j_1} f_{j_1} + \ldots = m' + m''$ $(m' = m_{i_1} f_{i_1} + \ldots \ldots + m_{i_k} f_{i_k})$. Evident că $m' \in M_X$, deoarece, pentru orice $Y \neq X$, $m' \circ 1_Y = \sum\limits_{j=1}^{k} m_{i_j} f_{i_j} \circ 1_Y = 0$, conform multiplicării în A. Mai mult, $m'' \in M^X$, fapt imediat de verificat. Punem în acest caz $\beta_M(X) = M_X$. Dacă $f : X \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci, pentru orice element $m \in M_Y$, $m.f \in M_X$, deoarece, oricare ar fi $Z \neq X$, $(m.f) 1_Z = m(f \circ 1_Z) = 0$. f definește deci o aplicație $f_M : M_Y \to M_X$. Punem deci $\beta_M(f) = f_M$. β devine în felul acesta un functor și cititorul va putea să verifice restul de afirmații pînă la terminarea demonstrației.

Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă și $\mathcal{C}^a$ categoria prefasciculelor abeliene peste $\mathcal{C}$; dacă $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, vom identifica obiectul h_X cu X, adică, ca și în cazul fasciculelor de mulțimi, vom identifica pe $\mathcal{C}$ cu o subcategorie plină a lui C^a.

DEFINIȚIA 5.4. Fie, cu notațiile de mai sus, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; numim ideal drept peste X un subobiect al prefasciculului abelian X.

(Vom mai spune încă ciur abelian sau rafinare abeliană a obiectului X.)

Pentru a descrie o rafinare abeliană R a lui X, trebuie, pentru orice obiect Y din $\mathcal{C}$, să definim în grupul abelian $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ un subgrup $R(Y)$ astfel că asocierea $Y \rightsquigarrow R(Y)$ să fie un prefascicul abelian. Aceasta înseamnă că dacă $f, g : Y \rightrightarrows Z$ este un cuplu de morfisme din $\mathcal{C}$, atunci $R(f+g) = R(f) + R(g)$ și $R(0) = 0$.

Iată cum se caracterizează ciururile abeliene peste obiectul X.

PROPOZIȚIA 5.5. *Există o corespondență biunivocă între subobiectele lui X din $\mathcal{C}^a$ și subcategoriile pline J ale lui $\mathcal{C}/X$ care satisfac proprietățile :*

(a) *Dacă (Y, f_i), $i = 1,2$, sînt obiecte din $\mathcal{C}/X$, atunci obiectul $(Y, f_1 + f_2)$ este în J și pentru orice $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $(Z, 0)$ este în J.*

b) *Dacă $(Y, f) \in R$, și $g : Z \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}$, $(Z, f \circ g) \in J$.*

Demonstrația acestui fapt este evidentă și lăsată cititorului.

Observație. Admitem că $\mathcal{C}$ este o categorie preaditivă formată dintr-un singur obiect, adică este un inel A ; categoria A^a este atunci categoria $\mathrm{Mod}A$ a modulelor drepte unitare peste A ; un ideal drept peste A este atunci noțiunea curentă binecunoscută.

Dacă $f : Y \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$ și $R \to X$ un ciur abelian peste X, atunci prin $(R : f)$ înțelegem subcategoria lui $\mathcal{C}/Y$ formată din obiectele (Z, g), cu $(Z, f \circ g) \in R \cdot (R : f)$ este un ciur abelian, numit desantul lui R la Y prin f. E clar că $(R : f) \simeq R \,\Pi_Y X$, produsul fibrat făcîndu-se în categoria $\mathcal{C}^a$.

DEFINIȚIA 5.6. Fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă. Se zice că s-a definit o topologie Grothendieck abeliană pe $\mathcal{C}$ sau o topologie abeliană, dacă pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$ s-a definit o familie $J(X)$ de rafinări abeliene, încît următoarele condiții sînt verificate :

T_1^a) Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $J(X)$ nu este vidă.

T_2^a) Dacă $R \in J(X)$ și $f : Y \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci $(R : f) \in J(Y)$.

T_3^a) Dacă R_1, R_2 sînt rafinări abeliene ale lui X, $R_1 \in J(X)$ și pentru orice $(Y, f) \in R_1$, $(R_2 : f) \in J(Y)$, atunci $R_2 \in J(X)$.

Observații. 1. Observăm pe de o parte că definiția unei topologii abeliene este exact definiția unei topologii, cu condiția că trebuie schimbat cuvîntul ciur cu „ciur abelian”.

Dacă $\mathcal{C}$ este un inel A, atunci a da o topologie abeliană peste A revine la a da un sistem topologizant și idempotent de ideale drepte ale lui A în sensul lui P. Gabriel [1].

Ca și în cazul topologiilor ordinare, vom nota cu τ, τ' topologiile abeliene pe $\mathcal{C}$; vom spune că perechea $(\mathcal{C}, \tau)$ (uneori vom scrie $\mathcal{C}$) este un „*sit abelian*” și vom înțelege că $\mathcal{C}$ este o categorie preaditivă și τ e topologie abeliană pe ea. Dacă $\mathcal{C}$ este un sit abelian, prin ciur acoperitor al lui X vom înțelege un ciur abelian acoperitor în topologia în cauză.

Observăm încă, că fiind dată o topologie abeliană pe $\mathcal{C}$, putem găsi o topologie (aditivă) pe $\mathcal{C}$ în care toate aceste ciururi să fie acoperitoare, un ciur abelian fiind și un ciur ordinar.

2. Putem defini pe $\mathcal{C}$ conceptul de pseudotopologie abeliană în felul următor : oricărui obiect X din $\mathcal{C}$ i se asociază o familie $J(X)$ de ciururi abeliene încît :

P.T$_1$. Ciurul generat de 1_X este în $J(X)$.

P.T$_2$. Dacă $R \in J(X)$ și R' este un ciur abelian ce conține pe R, atunci $R' \in J(X)$.

P.T$_3$. Dacă $R \in J(X)$ și $f : Y \to X$ este un morfism din $\mathcal{C}$, atunci $(R : f) \in J(Y)$.

P.T$_4$. Intersecția a două ciururi din $J(X)$ este în $J(X)$, pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$.

§3. CARACTERIZAREA PSEUDOTOPOLOGIILOR ȘI TOPOLOGIILOR ABELIENE

Fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă element al lui U și $\mathcal{C}^a$ categoria prefasciculelor abeliene peste $\mathcal{C}$.

Definiția 5.7. O subcategorie plină $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{C}^a$ care satisface proprietățile :

a) Dacă în șirul exact :

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

$F \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$, atunci F' și F'' este în $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$.

b) $\mathcal{A}$ este închisă la limite inductive (ceea ce revine la aceea că functorul incluziune : $i : \mathcal{A} \to \mathcal{C}^a$ are un adjunct la stînga) se numește subcategorie închisă.

Dacă în plus $\mathcal{A}$ este deasă, atunci ea se zice localizantă.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie aditivă element al lui U și P (respectiv T) familia tuturor pseudotopologiilor (topologiilor) pe $\mathcal{C}$.

Fie încă F (respectiv L) familia tuturor subcategoriilor închise din $\mathcal{C}^a$. Dacă τ este o pseudotopologie pe $\mathcal{C}$, atunci subcategoria plină $\mathcal{A}_\tau$ a tuturor obiectelor lui $\mathcal{C}^a$, astfel că $F \in \mathcal{A}_\tau$ dacă pentru price $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ și $x \in F(X)$, ciurul abelian : Ker $\varphi \overset{x}{\to} X$ (în care φ^x este morfismul de clasă fundamentală x) este o rafinare a lui X în pseudotopologia τ este o subcategorie închisă. (Verificarea este simplă și lăsată cititorului.)

Propoziția 5.8. *Asocierea $\tau \rightsquigarrow A_\tau$ este o bijecție între mulțimile P și F. Prin această bijecție T se aplică exact pe L.*

Demonstrație. Fie $\alpha : P \to F$ aplicația de mai sus ; definim aplicația $\beta : F \to P$ în felul următor : pentru subcategoria închisă $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{C}^a$, notăm cu $\tau = \beta(\mathcal{A})$ pseudotopologia lui $\mathcal{C}$ definită astfel : $J_\tau(X)$ este format din toate ciururile abeliene $R \to X$ pentru care $X/R \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$. Faptul că asocierea $X \rightsquigarrow J_\tau(X)$ este pseudotopologie este imediat. Cititorul are acum toate elementele pentru a termina cu bine demonstrația.

Observații. Fie $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$; notăm cu $\mathcal{C}^a_X$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}^a$ formată din toate obiectele F, cu $F(Y) = 0$ pentru orice $Y \neq X$.

Evident că F se identifică cu un modul drept peste inelul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$. Invers, orice obiect din Mod $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ definește un obiect M din $\mathcal{C}^a$ cu $M(Y) = 0$ pentru $Y \neq X$. Așadar, subcategoria $\mathcal{C}^a_X$ este echivalentă cu categoria modulelor peste inelul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$. Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie aditivă total disconexă (adică $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = 0$ dacă $X \neq Y$), atunci $\mathcal{C}^a$ este un produs de categorii de module.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și $R \to X$ un ideal drept abelian peste X; R induce în $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ un ideal drept r și anume, cel format de toate elementele $x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ cu $(X, x) \in R$. Vom spune că R este ideal semibilateral dacă r este un ideal bilateral. Fie τ o pseudotopologie pe $\mathcal{C}$ și $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; există un cel mai mare subobiect X_τ al lui X (în $\mathcal{C}^a$) din $\mathcal{A}_\tau$, subcategoria închisă asociată cu τ. X este atunci un ideal drept semibilateral, ceea ce se constată, imediat, asocierea : $X \rightsquigarrow X_\tau$ fiind functorială.

Fie $\mathcal{C}$ categorie preaditivă ; spunem că pe $\mathcal{C}$ s-a dat un ideal drept $\underline{a}$, dacă pentru orice $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ în $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ s-a definit un subgrup $\underline{a}(X, Y)$ astfel că dacă $\alpha : X' \to X$ este un morfism din C, atunci $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha, Y) : \underline{a}(X, Y) \to \underline{a}(X', Y)$. Analog se definește conceptul de ideal stîng și ideal bilateral. Dat fiind un ideal bilateral $\underline{a}$ pe $\mathcal{C}$, putem construi o nouă categorie notată $\mathcal{C}/\underline{a}$ în mod canonic și un functor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\underline{a}$ cu anumite condiții de universalitate.

Cititorul va putea în particular să refacă teoremele de izomorfism bine cunoscute pentru inele. De asemenea pentru categoriile preaditive sînt valabile multe afirmații relative la inele.

§ 4. TOPOLOGII SPECIALE. EXEMPLE. FASCICULE ABELIENE

În cele ce urmează vom descrie cîteva tipuri de topologii pe o categorie preaditivă.

Definiția 5.9. Vom spune că o rafinarea abeliană $R \to X$ este finit generată dacă există un număr finit de obiecte (Y_i, f_i) din R astfel că pentru orice $(Y, f) \in R$, există $\alpha : Y \to Y_i$, cu $f_i \circ \alpha = f$.

Evident, dacă ciurul abelian R este finit generat, atunci prefasciculul abelian R este finit generat în sensul că grupul abelian $R(X)$ este un grup cît al sumei directe $\coprod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y_i, X)$.

Definiția 5.10. Vom spune că topologia τ este finit generată dacă, pentru orice X, familia $J(X)$ a ciururilor acoperitoare peste X, ordonată relativ la incluziune, conține o submulțime cofinală de ciururi finit generate.

Exemplu de topologie finit generată se poate obține în felul următor : fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă și S un sistem de morfisme din $\mathcal{C}$, multiplicativ stabil. Asociem oricărui obiect X al lui $\mathcal{C}$ familia $J_S(X)$ a ciururilor abeliene peste X, ce verifică condiția : pentru orice $f : Y \to X$ morfism din $\mathcal{C}$, există $s \in S$ $s : Z \to Y$, cu $(Z, f \circ s) \in R$. Se dovedește imediat că asocierea $X \rightsquigarrow J_S(X)$ este o topologie pe $\mathcal{C}$. Ca și pentru topologiile ordinare, această topologia se va numi multiplicativă. Orice ciur abelian acoperitor în topologia τ conține idealul principal generat de un morfism din S (definiția idealului principal este imediată). Necesar și suficient ca un ideal drept ce conține un element din S să fie acoperitor în topologia τ definită de S, este ca S să fie un sistem permutabil (Cap. III, definiția 3.16).

Evident că o topologie multiplicativă definită de un sistem permutabil este finit generată, în sensul de mai sus.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă și pe $\mathcal{C}$ definită o pretopologie (Cap. IV, definiția 4.6); putem construi o topologie pe $\mathcal{C}$ în mod canonic, cu ideea de ciur generat de o familie de morfism în felul următor. Fie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și $(Y_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in I}$ o familie de obiecte din $\mathcal{C}/X$; considerăm familia tuturor ciururilor abeliene care conține toate morfismele familiei date; intersecția acestei familii de ciururi este un ciur abelian, numit ciurul generat de familia dată. Cititorul va putea da un sens celor de mai sus.

Iată cîteva exemple de topologii abeliene.

a) Fie Z inelul numerelor întregi și F mulțimea tuturor idealelor sale generate de numere de forma $2^n m$ cu $n \neq 0$ $m \neq 0$. F este un sistem topologizant și idempotent deci o topologie pe Z.

b) Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană; asociem oricărui obiect X familia $P(X)$ a epimorfismelor de adresă X (dacă $\mathcal{C}$ este o categorie mică sau are un cogenerator, $P(X)$ este, pentru orice X, o mulțime). Asocierea $X \rightsquigarrow P(X)$ este o pretopologie; această pretopologie definește topologia canonică a lui $\mathcal{C}$, după cum vom vedea mai departe.

c) Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană și în ea dată o familie $\mathcal{J}$ de monomorfisme. Asociem familiei $\mathcal{J}$, familia $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{J})$ de epimorfisme, formată din conucleele monomorfismelor din $\mathcal{J}$. Putem acum defini o familie $M = M(\mathcal{J})$ cu următoarele condiții: $u \in M$ dacă și numai dacă în factorizarea canonică $u = u'' \circ u'$ (u'' un monomorfism și u' epimorfism) $u'' \in \mathcal{J}$ și $u' \in \mathcal{P}$. Admitem că $\mathcal{J}$ verifică următoarele condiții:

i) $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{P}(\mathcal{J}))$.
ii) Dacă $p \circ \alpha = 1_A$, atunci $\alpha \in \mathcal{J}$ ($A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$).
iii) Dacă α, $\beta \in \mathcal{J}$ și $\alpha \circ \beta$ este definit, în $\mathcal{C}$, atunci $\alpha \circ \beta \in \mathcal{J}$.
iii') Dacă γ, $\delta \in \mathcal{P}(\mathcal{J})$ și $\gamma \circ \delta$ este definit, atunci $\gamma \circ \delta \in \mathcal{P}(\mathcal{J})$.
iv) Dacă α și β sînt monomorfisme și $\alpha \circ \beta \in J$, atunci $\beta \in \mathcal{J}$.
iv') Dacă γ, δ sînt epimorfisme și $\gamma \circ \delta \in \mathcal{P}(\mathcal{J})$, atunci $\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{J})$.

Fie P_X sistemul tuturor morfismelor din $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ de adresă X. Evident că asocierea $X \rightsquigarrow P_X$ dă o pretopologie pe $\mathcal{C}$, deoarece dacă în diagrama (canonic construită)

$$\begin{tikzcd}
X' \sqcap_X Y \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X' \arrow[r, "i"] & X
\end{tikzcd}$$

$i \in P_X$, atunci $i' \in P_Y$, deoarece, dacă $p : X \to X''$ este conucleul lui X, atunci $p \circ f$ este conucleul lui i' și este un epimorfism din $\mathcal{P}$ $(\mathcal{J})$, ceea ce se deduce printr-un calcul simplu.

Evident, topologia mai sus introdusă este mai puțin fină decît cea canonică. Alte exemple concrete vom vedea ulterior.

Definiția 5.11. Fie $\mathcal{C}$ un sit abelian și $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^a$. Spunem că F este un fascicul abelian în raport cu situl dat (sau simplu fascicul abelian dacă nu este pericol de confuzie) dacă pentru orice rafinare abeliană : $R \to X$ a unui obiect X al lui $\mathcal{C}$, morfismul canonic :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R, F)$$

este un izomorfism.

Fie F un fascicul abelian peste situl $\mathcal{C}$ aparținînd lui U și $F' \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$, unde $\mathcal{A}$ este subcategoria localizantă asociată canonic cu situl dat ; atunci avem :

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(F', F) = 0.$$

Pentru aceasta, fie $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și $f : X \to F'$ un obiect din $\mathcal{C}/F'$; evident că dacă $(\mathrm{Ker}\, f,\, i)$ este nucleul lui f în $\mathcal{C}^a$, atunci ciurul $\mathrm{Ker}\, f \to X$ este acoperitor în topologia dată și deci avem :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(\mathrm{Ker}\, f, F).$$

Dacă $\alpha : F' \to F$ este un morfism din $\mathcal{C}^a$, atunci $\alpha \circ f : X \to F$, și $\alpha \circ f \circ i = 0$, deci $\alpha \circ f = 0$, pentru orice $(X, f) \in \mathcal{C}/F'$, deci $\alpha = 0$. Vom arăta ulterior că obiectele lui $\mathcal{A}$ sînt caracterizate de (*) pentru orice fascicul F în raport cu situl dat.

Relativ la fasciculele abeliene putem să dovedim următoarele afirmații, cu totul analoage celor din cazul siturilor ordinare (pe care le enunțăm fără demonstrație.

— Dacă $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ este o familie (nu neapărat indexată de un element din U) de obiecte din $\mathcal{C}^a$, atunci există o cea mai fină topologie abeliană τ pe $\mathcal{C}$ pentru care toate prefasciculele date sînt fascicule.

— Fie, pentru orice obiect X al lui $\mathcal{C}$, dată o familie nevidă $K(X)$ de ciururi abeliene. Admitem că pentru oriec $f : Y \to X$, morfism din $\mathcal{C}$, și orice $R \in K(X)$, $(R : f) \in K(Y)$. Atunci există o cea mai puțin fină topologie τ pe $\mathcal{C}$ pentru care ciururile date sînt acoperitoare ; mai mult, un obiect F din $\mathcal{C}^a$ este fascicul în raport cu situl dat dacă și numai dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și $R \to X$, rafinare abeliană a lui X, $R \in K(X)$, avem izomorfismul :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R, F).$$

De asemenea, mai putem defini conceptul de prefascicul separat în raport cu o topologie abeliană și consecințele ce decurg de aici.

Ca titlu de exemplu fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană și pretopologia pe $\mathcal{C}$ definită de asocierea $X \rightsquigarrow P(X)$, unde cu $P(X)$ am notat toate epimorfismele de sursă X; topologia asociată cu această pretopologie este exact cea canonică. Justificarea acestui fapt, în lumina ultimei afirmații este următoarea : fie $p : Y \to X$ un epimorfism de adresă X și $i : R \to X$ ciurul asociat cu el ; dacă $Z \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, atunci $(Z, f) \in R$ dacă și numai dacă $f = p \circ g$, unde $g : Z \to Y$ este un morfism din $\mathcal{C}$. Orice epimorfism din $\mathcal{C}$ este epimorfism efectiv universal, fapt imediat de dovedit ; în plus R este un obiect cît al lui Y și dacă $\alpha : R \to T$ este un morfism din $\mathcal{C}^a$, atunci în $\mathcal{C}^a$ avem diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \Pi_X Y \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & X \\
 & & T
\end{tikzcd}$$

cu $\alpha' = \alpha \circ h$, unde $h : Y \to R$ este morfismul canonic, iar $\alpha' \circ u = \alpha' \circ v$. Dacă privim diagrama de mai sus în $\mathcal{C}$, atunci din faptul că X este conucleul cuplului de morfisme (u, v) deducem că există un morfism $\beta : X \to T$ cu $\beta \circ p = \alpha'$. Dar trecînd din nou în $\mathcal{C}^a$ avem $\beta \circ p = \beta \circ i \circ h = \alpha \circ h$; Deoarece h este un epimorfism în $\mathcal{C}^a$, avem $\beta \circ i = \alpha$. Faptul că β este unic cu această proprietate, este evident.

Dacă asocierea $X \rightsquigarrow K(X)$ ($K(X)$ este o familie de ciururi abeliene) definește o pretopologie pe $\mathcal{C}$, atunci pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ în familia $J(X)$ a ciururilor acoperitoare din topologia respectivă, $K(X)$ este o familie cofinală (relativ la ordinea parțială dată de incluziune).

§ 5. FASCICULUL ASOCIAT UNUI PREFASCICUL

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit abelian aparținînd lui U, $\mathcal{C}^a$ categoria prefasciculelor abeliene peste $\mathcal{C}$ și $\mathcal{A}$ subcategoria localizantă din $\mathcal{C}^a$ asociată cu topologia τ.

Definiția 5.12. Un morfism $f : F \to G$ din $\mathcal{C}^a$ se numește acoperitor dacă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ și orice $\alpha : X \to G$ ciurul $\mathrm{Im}\, f' \to X$ este acoperitor, unde $f' : F \Pi_G X \to X$ este canonic.

Echivalent, un morfism acoperitor se poate defini cerînd ca conucleul său să fie un obiect al lui $\mathcal{A}$.

Definiția 5.13. Morfismul $f : F \to G$ din $\mathcal{C}^a$ este biacoperitor, dacă el este acoperitor și $\mathrm{Ker}\, f \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}$.

Echivalent, f este biacoperitor dacă nucleul și conucleul său sînt obiecte din $\mathcal{A}$.

Observație. Ar fi mai nimerit să folosim conceptul de morfism acoperitor (biacoperitor) abelian, pentru a nu conduce la confuzii și pentru a fi la curent cu terminologia capitolului de față. Nu vom face însă aceasta, menținîndu-ne la denumirea mai scurtă de acoperitor (biacoperitor), cititorul sesizînd din context despre ce este vorba. Pentru aceste noțiuni se va avea în vedere situl respectiv.

Cititorul va putea dovedi relativ la morfismele acoperitoare (biacoperitoare) următoarele afirmații :

a) Desantul oricărui morfism acoperitor (biacoperitor) este un morfism acoperitor (biacoperitor) b).

b) Compunerea a două morfisme acoperitoare (biacoperitoare) este un morfism acoperitor (biacoperitor).

c) Dacă compunerea $f \circ g$ a două morfisme din $\mathcal{C}^a$ este acoperitoare, atunci f este acoperitor.

d) Dacă compunerea $f \circ g$ este biacoperitoare și g este acoperitor, atunci f este acoperitor.

e) Familia A a morfismelor acoperitoare din $\mathcal{C}^a$ permite calculul la dreapta al fracțiilor și este un sistem saturat.

f) Familia B a morfismelor biacoperitoare din $\mathcal{C}^a$ permite calculul la dreapta și la stînga al fracțiilor ; B este un sistem saturat de morfisme.

Verificarea afirmațiilor de mai sus se face simplu, folosind proprietățile morfismelor unei categorii abeliene. Este un bun prilej pentru cititor să-și exerseze tehnica în domeniul acesta.

Fie $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$; notăm ca de obicei cu $J(X)$ toate ciururile abeliene acoperitoare peste X și cu $J^2(X)$ toate morfismele biacoperitoare de adresă X· $J(X)$ este o subcategorie plină în categoria $J^2(X)$. Mai mult, orice morfism biacoperitor se descompune sub forma unui epimorfism acoperitor urmat de un monomorfism biacoperitor. Categoria $J(X)$ este filtrată la dreapta și conexă iar categoria $J^2(X)$ este pseudofiltrată la dreapta și conexă.

Fie acum $\mathcal{C}^\tau$ categoria fasciculelor abeliene relativ la situl abelian $(\mathcal{C}, \tau)$ dat și $i : \mathcal{C}^\tau \to \mathcal{C}^a$ functorul incluziune. Vom dovedi că i are un adjunct la stînga care este exact la stînga, adică $\mathcal{C}^\tau$ este o categorie cît în sensul definiției 3.10 a categoriei $\mathcal{C}^a$. Pentru aceasta definim functorul $F : \mathcal{C}^a \to \mathcal{C}^a$ în felul următor : pentru orice $G \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^a$, $F(G) = \overline{G}$ este obiectul lui $\mathcal{C}^a$ definit astfel :

$$F(G)(X) = \overline{G}(X) = \varinjlim_{R \in J(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R, G/G'),$$

unde cu G' am notat cel mai mare subobiect al lui G din $\mathcal{A}$, subcategoria localizantă asociată cu topologia τ.

Dacă $f : G \to H$ este un morfism din $\mathcal{C}^a$, atunci f definește morfismul $f' : G' \to H'$ și deci morfismul $f'' : G/G' \to H/H'$; f'' va defini morfismul :

$$\overline{f} : \overline{G}(X) \to \overline{H}(X)$$

în mod evident. Faptul că asocierea $G \rightsquigarrow \overline{G}$ și $f \rightsquigarrow \overline{f}$ este functorială, este imediat.

Notăm $G/G' = G_1$, și pentru orice $R \to X$ rafinare abeliană a lui X, notăm cu $\varphi_R^X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R, G_1) \to \overline{G}(X)$ morfismul structural. Deoarece Ab satisface Ab5, se deduce că morfismul φ_X^X este monomorfism ; în plus φ_X^X definesc, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, un morfism functorial $l_1(G) : G_1 \to G$ și morfismele $l_1(?)$ definesc un morfism functorial de la $\mathrm{Id}\, \mathcal{C}^a$ în F. Mai mult, deoarece

$$\overline{G}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X, \overline{G}), \text{ pentru orice } f : Y \to X \text{ morfism din } \mathcal{C},$$

avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
\varphi^X_R\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R,G_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X,\bar{G}) \arrow[d] \\
\varphi^Y_{(R:f)}: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}((R;f),G_1) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(Y,\bar{G})
\end{tikzcd}$$

Exact ca și în cazul siturilor ordinare, și chiar mai simplu, cititorul poate să dovedească următoarea lemă:

Lema 1) *Pentru orice rafinare abeliană* $i_R : R \to X$ *și orice* $u : R \to G$, *morfism din* $\mathcal{C}^a$, *avem diagrama comutativă*:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "l_1(G)"] & G \\
R \arrow[u, "u"] \arrow[r, "i_R"] & X \arrow[u, "\varphi^X_R(u)"']
\end{tikzcd}$$

2) *Pentru orice morfism* $v : X \to G$ *există o rafinare abeliană* R *a lui* X *și un morfism* $u : R \to G$, *cu* $\varphi^X_R(u) = v$.

3) $l_1(F)$ *este un monomorfism.*

4) *Fie* R *și* R' *două rafinări abeliene ale lui* X, $u : R \to G_1$ *și* $u' : R' \to G_1$ *două morfisme. Pentru ca* $\varphi^X_R(u) = \varphi^X_{R'}(u')$ *este necesar și suficient ca cele două morfisme să coincidă pe o rafinare abeliană* R'' *a lui* X *conținută în* $R \cap R'$.

Din lema de mai sus se deduc imediat următoarele consecințe:

i) Pentru orice $G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^a$, morfismul $l_1(G)$ este biacoperitor.

Într-adevăr, fie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și $x \in \bar{G}(X)/G_1(X) = G''(X)$. Vom dovedi că Ker φ^x este un ciur acoperitor unde $\varphi^x : X \to G''$ este morfismul de clasă fundamentală x. Fie $x' \in G(X)$, cu $p_X(x') = x$, unde $p : \bar{G} \to G''$ este epimorfismul canonic, și $v : X \to G$ un morfism de clasă fundamentală x'. Avem diagrama comutativă (conform cu 2) din lema de mai sus).

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "\varphi^x"] & \\
G_1 \arrow[r, "l_1(G)"] & G \arrow[r, "p"] & G''
\end{tikzcd}$$

Evident că $p \circ l_1(G) \circ u = 0 = p \circ v \circ i = \varphi^x \circ i$, din care deducem că Ker $\varphi^x \supseteq R$, adică nucleul lui φ^x este o rafinare abeliană a lui X.

ii) Functorul $F : \mathcal{C}^a \to \mathcal{C}^a$ comută cu limitele proiective finite, deoarece Ab satisface Ab5.

iii) l_1 este un monomorfism, și pentru orice $G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^a$, G este un fascicul în raport cu situl dat.

Să dovedim mai întîi că G nu conține nici un subobiect nenul din $\mathcal{A}$. Într-adevăr, altfel dacă $x \in G(X)$ este un element nenul din $\bar{G}(X)$, cu

$\operatorname{Ker} \varphi^x \to X$ rafinare abeliană a lui X ($\varphi^x : X \to G$ este morfismul de clasă fundamentală x), atunci avem diagrama comutativă din $\mathcal{C}^a$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dd] & & X \arrow[dd, "\varphi^x"] \\
& \operatorname{Ker}\varphi^x \arrow[ur, "\iota'"] & \\
G_1 \arrow[rr, "l_1 = l_1(G)"] & & G
\end{tikzcd}$$

Deoarece $\varphi^x \neq 0$ şi $u \neq 0$, căci $\varphi^X_R(u) = \varphi^x$. Fie $R_1 = \operatorname{Ker} \varphi^x \cap R$ şi $k : R_1 \to R$ morfismul canonic. Atunci $l_1 \circ u \circ k = 0$, deci $u \circ k = 0$ ceea ce arată că există morfismul $\alpha : R/R_1 \to G_1$, cu $\alpha \circ q = u$, $q : R \to R/R_1$ fiind morfismul canonic. Dar $R/R_1 \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ şi deci $\alpha = 0$, deci $u = 0$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar, $u = 0$ şi deci $\varphi^x = 0$. În concluzie G este un prefascicul separat.

Pentru a dovedi că $\bar{G}$ este fascicul, fie $R \to X$ o rafinare a lui X şi $u : R \to \bar{G}$ un morfism din $\mathcal{C}^a$. Avem atunci diagrama comutativă canonic construită :

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "l_1(G)"] & \bar{G} & \\
R_1 = G \Pi_{\bar{G}} R \arrow[u, "u'"] \arrow[r, "j"] & R \arrow[u, "u"'] \arrow[r, "\iota"] & X
\end{tikzcd}$$

în care j este un morfism biacoperitor deoarece $l_1(G)$ este, şi deci $R_1 \xrightarrow{i \circ j} X$ este o rafinare abeliană a lui X. Fie $v : X \to G$ un morfism cu $\varphi^X_{R_1}(u') = v$. Atunci :

$$v \circ i \circ j = l_1(G) \circ u' = u \circ j \text{ şi } (v \circ i - u) \circ j = 0$$

există atunci un morfism $k : R/R_1 \to \bar{G}$ cu $k \circ j = v \circ i - u$. Dar $R/R_1 \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ şi deci $k = 0$. Deci $v \circ i = u$.

iv) Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

1) $l_1(G) : G_1 \to \bar{G}$ este izomorfism.

2) G_1 este fascicul.

Este suficient să dovedim că 2) ⇒ 1) şi pentru aceasta, fie $R \to X$ o rafinare abeliană a lui X. Atunci avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X, G_1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X, \bar{G}) \arrow[d, "\wr"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R, G_1) \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R, \bar{G})
\end{tikzcd}$$

în care morfismele verticale sînt izomorfisme. Dar pentru orice $R_1 \to R_2 \to X$ rafinări abeliene ale lui X, avem izomorfismele :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X, \bar{G}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R_2, \bar{G}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(R_1, \bar{G})$$

și la limită inductivă obținem din diagrama de mai sus diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_1(X) \arrow[r, dash] \arrow[d, "\wr"'] & \bar{G}(X) \arrow[d, "\wr"] \\
\bar{\bar{G}}(X) \arrow[r, dash, "\sim"] & \bar{\bar{\bar{G}}}(X)
\end{tikzcd}$$

din care concludem că $l_1(G)$ este izomorfism.

Fie acum $\mathcal{C}^{\tau}$ categoria fasciculelor și $i : \mathcal{C}^{\tau} \rightarrow \mathcal{C}^{a}$ functorul incluziune; pentru orice $\mathcal{C} \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}^{a}$, fie $\overline{G}$ fasciculul mai sus construit și $l(G) : G \rightarrow \overline{G}$ morfismul canonic $G \xrightarrow{k} G_1 \xrightarrow{l_1} \overline{G}$, k fiind epimorfismul canonic; dacă G este un fascicul, atunci $l(G)$ se identifică canonic cu identitatea lui G; deci, pentru orice $G \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}, iG = iG$. Fie $a : \mathcal{C}^{a} \rightarrow C^{\tau}$ functorul : $G \rightsquigarrow G$. a este un functor exact la stînga. Mai mult, a este adjunct la stînga functorului i: căci pentru $G \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}^{a}$ fie $l(G) : G \rightarrow \overline{G}$ morfismul canonic și $\alpha : G \rightarrow iH$ un morfism din $\mathcal{C}^{a}$. Atunci avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "l(G)"] \arrow[d, "\alpha"'] & \overline{G} \arrow[d, "\bar{\alpha}"] \\
iH \arrow[r, "1_{iH}"] & iH
\end{tikzcd}$$

cu $l(iH) = 1_{iH}$. Așadar, problema de universalitate definită de functorul i în $\mathcal{C}^{a}$ este solubilă; a este deci adjunct la stînga lui i.

Mai mult, i este deplin fidel și $\mathcal{C}^{\tau}$ este o categorie cît a lui $\mathcal{C}^{a}$; deci, conform propoziției 3.29, $\mathcal{C}^{\tau}$ este o categorie abeliană cu generatori și satisfăcînd axioma Ab 5. $\mathcal{C}^{\tau}$ este deci un topos abelian. Din cele de mai sus se deduce că am demonstrat următorul rezultat:

PROPOZIȚIA 5.14. *Fie* $(\mathcal{C}, \tau)$ *un sit abelian aparținînd lui* U, $\mathcal{C}^{a}$ *categoria prefasciculelor abeliene și* $\mathcal{C}^{\tau}$ *categoria fasciculelor abeliene în raport cu situl dat. În aceste condiții, functorul canonic* $i : \mathcal{C}^{\tau} \rightarrow \mathcal{C}^{a}$ *are un adjunct la stînga exact.* $\mathcal{C}^{\tau}$ *este deci categorie cît a lui* $\mathcal{C}^{a}$.

Din cele de mai sus, se deduce că categoriile cît ale lui $\mathcal{C}^{a}$ sînt în corespondență biunivocă cu topologiile abeliene de pe $\mathcal{C}$, deoarece orice categorie cît definește o subcategorie localizantă.

Observații. a) Putem defini functorul $\overline{G}$ și astfel: construim $G_1(X)$ ca fiind $\varinjlim_{R \in J(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{a}}(R, G)$ și apoi $\overline{G} = (G_1)_1$. Procedeul de a trece de la G la $G_1 = G/G'$ (cu notațiile obișnuite de mai sus) se numește ,,trecerea la separare"; functorul de trecere la separare este, după cum se deduce ușor, exact la dreapta. Cititorul este invitat să studieze acest functor.

b) Morfismul canonic: $l(G) : G \rightarrow \overline{G}$ definește în Ab morfismul canonic:

$$(^{*}) \quad \alpha_X \varinjlim_{H \in J^2(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{a}}(H, G) \rightarrow \varinjlim_{H \in J^2(X)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{a}}(H, \overline{G})$$

(în ipoteza că am ales un univers suficient de larg pentru care $J^2(X)$ să fie o categorie mică; de altfel limitele inductive care apar au cel puţin o semnificaţie morală).

Evident, deoarece $\overline{G}$ este fascicul, pentru orice $(H, f) \in J^2(X)$ din şirul exact:

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to H \to X \to \operatorname{Coker} f \to 0$$

deducem izomorfismul

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X\ \overline{G}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(H, \overline{G})$$

conform propoziţiei 3.26, din care concludem că există conul final al limitei inductive formale

$$\varinjlim_{H \in J^2(X)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(H, G)$$

şi este egal cu $\overline{G}(X)$. Mai mult, prin cîteva exchibiţii de calcul deducem că morfismul α_X este un izomorfism, cu alte cuvinte limita inductivă formală din membrul întîi al lui (*) este reprezentabilă şi egală cu $\overline{G}(X)$.

Iată acum o propoziţie care caracterizează morfismele acoperitoare şi biacoperitoare:

PROPOZIŢIA 5.15. *Cu notaţiile şi în ipotezele propoziţiei precedente, fie* $f : H \to K$ *un morfism din* $\mathcal{C}^a$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

a) f *este un morfism acoperitor* (*biacoperitor*);

b) *pentru orice* $G \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^\tau$, *morfismul canonic*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(K, G) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(H, G)$$

este un monomorfism (*izomorfism*).

c) $a(f)$ *este epimorfism* (*izomorfism*).

Demonstraţia este o consecinţă a propoziţiei 3.29.

Cele de mai sus permit să justificăm încă odată izomorfismul (*): într-adevăr, $\mathcal{C}^\tau$ este o categorie de fracţii a lui $\mathcal{C}^a$ relativ la sistemul tuturor morfismelor biacoperitoare care este saturat şi permite calculul la dreapta şi la stînga al fracţiilor; construcţia ei se face folosind metodele din Cap. III şi din unicitatea categoriei de fracţii pînă la o echivalenţă rezultă izomorfismul (*).

§ 6. CATEGORIA DE LOCALIZARE. CONSECINŢE

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit abelian, $\mathcal{C}^a$ categoria prefasciculelor abeliene şi $\mathcal{C}^\tau$ categoria fasciculelor abeliene. Admitem că functorul canonic: $i : \mathcal{C}^\tau \to \mathcal{C}^a$ admite un adjunct la stînga exact notat a. Pentru orice $G \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^a$ notăm cu $G = i \circ a G$.

Vom spune că G este fasciculul asociat cu prefasciculul G în raport cu situl dat, sau simplu: fasciculul asociat. Considerăm subcategoria plină $\overline{\mathcal{C}}$ a lui $\mathcal{C}^a$ formată din toate obiectele $\overline{X}$ cu $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$. $\overline{\mathcal{C}}$ este o subcategorie preaditivă şi functorul canonic: $\overline{h} : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ cu $\overline{h} = i \circ a \circ h$ este aditiv.

PROPOZIȚIA 5.16. *Dacă* $\mathcal{C}$ *este o categorie aditivă, atunci și* $\overline{\mathcal{C}}$ *este aditivă. Dacă* $\mathcal{C}$ *este abeliană și topologia* τ *este mai puțin fină decît topologia canonică, atunci* $\overline{\mathcal{C}}$ *este abeliană și* $\overline{h}$ *este exact; dacă* τ *este chiar topologia canonică, atunci* h *este un izomorfism de categorii și functorul:* $a\circ h$ *este exact.*

Demonstrație. Dacă $\mathcal{C}$ este aditivă, atunci și $\overline{\mathcal{C}}$ este, deoarece functorii h, a și i comută cu produsele directe.

Fie τ o topologie mai puțin fină decît topologia canonică a lui $\mathcal{C}$; atunci, pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, X este un fascicul abelian și deci morfismul canonic : $l(X) : X \to \overline{X}$ este chiar cel identic ; așadar functorul $\overline{h}$ este deplin fidel și deci este o echivalență de categorii.

Fie acum τ topologia canonică și în $\mathcal{C}$ șirul exact :

$$X \to Y \to Z \to 0$$

în care p este un epimorfism, efectiv universal. Atunci în $\mathcal{C}^\tau$ avem șirul exact :

$$aX \xrightarrow{a(f)} aY \xrightarrow{a(p)} aZ \to 0. \tag{a}$$

Într-adevăr, deoarece p este efectiv universal, se deduce că ciurul generat de p este acoperitor și deci în $\mathcal{C}^a$ avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd} & & R \arrow[dr, "\iota"] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[ur, "q"] \arrow[rr, "p"] & & Z \end{tikzcd}$$

în care q este conucleul lui f și deci în $\mathcal{C}^\tau$ vom avea șirul exact (a). Să justificăm că (q, R) este conucleul lui f; evident că $q\circ f = 0$. Dacă $r : Y \to H$ este un morfism din $\mathcal{C}^a$ cu $r\circ f = 0$, atunci există un morfism unic $t : R \to H$ cu $t\circ q = r$. Pentru a defini pe t fie $k : K \to R$ un obiect din $\mathcal{C}/R$, și fie x clasa fundamentală a lui k. Fie $y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, Y)$, cu $q_K(y) = x$.

Definim morfismul $k' : K \to H$ de clasă fundamentală $r_K(y)$. Morfismele k' sînt naturale și definesc un morfism $t : R \to H$ cu cele necesare. Concludem direct de aici că propoziția este dovedită.

PROPOZIȚIA 5.17. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie abeliană și* τ *topologia canonică a sa; obiectul* G *din* $\mathcal{C}^a$ *este un fascicul în raport cu* τ *dacă și numai dacă este exact la stînga.*

Demonstrație. Deoarece τ este definită de o pretopologie (familia tuturor epimorfismelor de adresă X), G este fascicul pentru τ dacă și numai dacă pentru orice epimorfism $p : Y \to X$ din $\mathcal{C}$ există șirul exact, canonic construit :

$$0 \to G(X) \xrightarrow{G(p)} G(Y) \xrightarrow{G(p_1) - G(p_2)} G(Y \sqcap_X Y)$$

din diagrama :

$$Y \sqcap_X Y \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{p} X$$

Or, acest fapt se întîmplă dacă şi numai dacă G este exact la stînga.

În cazul sitului abelian $(\mathcal{C}, \tau)$ în care $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană şi τ este topologia canonică, categoria $\mathcal{C}^{\tau}$ a fasciculelor abeliene în raport cu τ se notează Sex $(\mathcal{C}$, Ab$)$ sau simplu $\mathcal{S}(\mathcal{C})$.

Functorul canonic $h' = a \circ h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{C})$ este exact şi deplin fidel. Concluzia cea mai importantă este următoarea :

PROPOZIŢIA 5.18. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană element al lui U ; există atunci un Topos abelian $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ şi un functor exact şi deplin fidel de la $\mathcal{C}$* la $\mathcal{S}(\mathcal{C})$.

PROPOZIŢIA 5.19. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană oarecare (nu neapărat U-categorie) şi $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ o mulţime de obiecte din $\mathcal{C}$. Există un univers U şi o subcategorie plină, abeliană, a lui $\mathcal{C}$, notată $\mathcal{C}'$ şi care conţine toate obiectele date şi care în plus este U-mică.*

Demonstraţie. Considerăm universul U care conţine toate mulţimile : N (mulţimea numerelor naturale), I şi $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_{\alpha}, X_{\beta})$ pentru orice $(\alpha, \beta) \in I \times I$. Fie $\mathcal{C}_0$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată de obiectele $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$. Fie $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată adăugînd tuturor morfismelor din $\mathcal{C}_0$ cîte un nucleu şi un conucleu şi apoi adăugînd toate sumele directe finite. Construim $(\mathcal{C}_1)_1 = \mathcal{C}_2$ şi apoi prin iteraţie : $\mathcal{C}_{n+1} = (\mathcal{C}_n)_1$.

Categoria $\mathcal{C}' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ este U-mică, plină şi abeliană. Cititorul nu are decît să verifice aceste fapte.

Propoziţiile 5.18 şi 5.19 permit studiul obiectelor şi morfismelor unei categorii abeliene uzînd de Topos-urile abeliene. Fie acum $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit abelian aparţinînd lui U, $\overline{\mathcal{C}}$ categoria de localizare şi $\overline{h} : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}$ functorul canonic. $\overline{h}$ induce un functor $\overline{h}_* : \overline{\mathcal{C}}^a \rightarrow \mathcal{C}^a$ numit functorul restricţie. Se deduce imediat că $\overline{h}_*$ este un functor fidel.

Vom defini un functor γ de la $\mathcal{C}^{\tau}$ la $\overline{\mathcal{C}}^a$ în felul următor : pentru $G \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^{\tau}$ şi $\overline{X} \in \mathrm{Ob}\, \overline{\mathcal{C}}$, definim $\gamma(G)(\overline{X}) = iG(X)$.

Pentru a-l defini pe $\gamma(G)$ pentru morfismele lui $\overline{\mathcal{C}}$, fie $\overline{X} \in \mathrm{Ob}\, \overline{\mathcal{C}}$, $x \in \overline{G}(X) = iG(X)$ şi $\varphi^x : X \rightarrow iG$ morfismul functorial de clasă fundamentală x. Există un morfism unic

$$a(\varphi^x) : aX \rightarrow aiG = G$$

astfel că $ia(\varphi^x) \circ l(X) \rightarrow \varphi^x$, unde $l : \mathrm{Id}\mathcal{C} \overset{a}{\rightarrow} i \circ a$ este morfismul de adjuncţie respectiv. Fie acum $g : \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ un morfism din $\overline{\mathcal{C}}$; fie $y \in \gamma(G)(\overline{Y}) = \overline{G}(Y)$ şi $\varphi^y : Y \rightarrow \overline{G}$ morfismul de clasă fundamentală y ca şi mai sus, $ia(\varphi^y) \circ l(Y) = \varphi^y$. Definim $\gamma G(g)(y) = i \circ a(\varphi^y)(g)$. Se dovedeşte imediat, ca şi în cazul siturilor oarecare, că asocierea :

$$\overline{X} \rightsquigarrow \gamma(G)(\overline{X})$$

$$g \rightsquigarrow \gamma(G)(g)$$

defineşte un functor contravariant, aditiv, de la $\overline{\mathcal{C}}$ la Ab. Exact ca şi pentru siturile oarecare putem dovedi următoarele afirmaţii :

i) Functorul γ este exact la stînga.

ii) Există pe $\overline{\mathcal{C}}$ o topologie $\overline{\tau}$, astfel că $\mathcal{C}^{\tau}$ se identifică prin γ cu categoria fasciculelor abeliene în raport cu $\overline{\tau}$.

Construcția topologiei $\overline{\tau}$ este următoarea : functorul h este exact și admite adjunct la stînga și la dreapta ; notăm cu B subcategoria plină a lui $\overline{\mathcal{C}}^{a}$ formată din toate obiectele B cu $\overline{h}_{*}(B) \in \text{Ob}\, \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ fiind subcategoria de localizantă a lui $\mathcal{C}^{a}$ asociată cu topologia τ. Evident, $\overline{\mathcal{C}}^{a}$ se identifică cu $\mathcal{C}^{\tau}$ dacă și numai dacă $B = 0$, ceea ce revine la aceea că $\overline{h}_{*}$ este deplin fidel și are un adjunct la stînga exact.

Acest fapt se întîmplă în cazul cînd pentru orice $X \in \text{Ob}\, \mathcal{C}$, $I\,(X)$ ansamblul ciururilor abeliene acoperitoare în topologia τ conține un subansamblu cofinal de ciururi abeliene finit generate și functorul $T^{*} : \mathcal{C}^{a} \to \overline{\mathcal{C}}^{a}$ adjunctul la dreapta al lui $\overline{h}_{*}$ este exact. Într-adevăr, în acest caz, functorul $X \rightsquigarrow \varinjlim_{R \in J(X)} \text{Hom}_{\mathcal{C}^{a}}(R, G)$ comută cu limitele inductive, deoarece functorul $G \rightsquigarrow G_{1}$ comută și în plus dacă R este un ciur finit generat, atunci functorul $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{a}}\,(R, ?)$ comută cu sumele directe. Lucrurile decurg la fel ca și în cazul categoriilor oarecare (propoziția 4.29).

Drept aplicații, putem dovedi un rezultat cu totul analog celui dovedit pentru siturile ordinare, pe care însă nu-l demonstrăm, cititorul putînd să reproducă, la o schemă mai redusă, demonstrația de acolo :

PROPOZIȚIA 5.20. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă element al lui U și S un sistem multiplicativ de morfisme din $\mathcal{C}$. Fie $\tau_{s} = \tau$ topologia asociată lui S, $\mathcal{C}^{\tau}$ categoria fasciculelor abeliene peste situl $(\mathcal{C}, \tau)$, $\mathrm{i} : \mathcal{C}^{\tau} \to C^{a}$ functorul canonic și a un adjunct la stînga al său. Fie $\overline{\mathcal{C}}$ categoria de localizare a lui $\mathcal{C}$ și $\overline{h} : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ functorul canonic. Următoarele afirmații sînt echivalente.*

a) *Sistemul S permite calculul la dreapta al fracțiilor.*

b) *$\overline{h}\,(s)$ este un izomorfism pentru orice $s \in S$.*

În particular, fie A un inel și S un sistem de elemente ale lui A care permite calculul la dreapta al fracțiilor ; atunci morfismul canonic $\varphi : A \to A_{S}$ definește un functor $\varphi_{*} : \text{Mod}\, A_{S} \to \text{Mod}\, A$ exact și deplin fidel, al cărui adjunct la stînga φ^{*} este exact ; $\text{Mod}\, A_{S}$ este deci o categorie cît a lui $\text{Mod}\, A$.

Exemplele de mai sus sînt cazuri importante cînd categoria fasciculelor abeliene în raport cu anumite topologii este ușor de pus în evidență.

§ 7. CÎTEVA OBSERVAȚII ASUPRA CATEGORIILOR ABELIENE

În cele de mai sus am dovedit că orice categorie abeliană U-unică $\mathcal{C}$, se poate „scufunda'' în U-toposul $\overline{\mathcal{C}}$, adică există un functor $T : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$ deplin fidel și exact. Acest fapt, după cum am mai amintit, este de mare importanță pentru categoriile abeliene. Vom da acum cîteva propoziții care permit un studiu mai profund al categoriilor abeliene.

Propoziția 5.21. *Fie* $\mathcal{C}$ *o categorie abeliană verificînd axioma* AB3 *și* U *un obiect al său. Următoarele afirmații sînd echivalente.*

a) U *este un generator al lui* $\mathcal{C}$.

b) *Pentru orice obiect* X *al lui* $\mathcal{C}$, *există o mulțime* $I(X)$ *element al lui* U *și epimorfismul* :

$$\coprod_{i \in I(X)} U_i \to X$$

cu $U_i \simeq U$ *pentru orice* $i \in I(X)$.

De asemenea, dacă $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ *și* U *este un generator al lui* $\mathcal{C}$, *atunci următoarele afirmații sînt echivalente* :

i) A *este un generator al lui* $\mathcal{C}$.

ii) *Există șirul exact* :

$$\coprod_{i \in I} A_i \to X \to 0, \quad A_i \simeq A, \quad i \in I.$$

Demonstrația o lăsăm la discreția cititorului care poate să-și ia drept definiție a generatorilor definiția 4.41.

Evident că un topos abelian are o mulțime de generatori și deci un generator, folosind conceptul de sumă directă. Printre generatorii unui topos pot exista unii cu proprietăți remarcabile : proiectivi sau minimali (un generator U se zice minimal dacă este izomorf cu orice subobiect al său care este generator : exemplu Z în Ab).

Definiția 5.22. Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și U un obiect al său. Vom spune că U este un obiect „finit transferabil" sau obiect mic dacă pentru orice morfism $f : U \to \coprod_{\alpha \in I} A_\alpha$ (I este un element din U), există diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & \coprod_{\alpha \in I} A_\alpha \\
& \coprod_{\beta \in J} A_\beta \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

J fiind o submulțime finită din I iar φ injecția canonică.

Vom spune că U este un generator finit transferabil din $\mathcal{C}$ dacă U este generator și finit transferabil.

Cititorul poate ușor să dovedească că dacă U este un obiect finit transferabil, atunci functorul ${}_{u}h = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, ?)$ comută cu sumele directe, $\mathcal{C}$ fiind o categorie abeliană oarecare ; de asemenea dacă X este un obiect de tip finit (adică orice șir crescător de subobiecte ale sale a cărui margine superioară este X, este neapărat staționar), functorul h_X comută cu sumele directe, în ipoteza că $\mathcal{C}$ satisface AB 5.

Definiția 5.23. Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu AB 3 și U un generator al său. Vom spune că obiectul X din $\mathcal{C}$ este finit generat în raport cu generatorul U, dacă există șirul exact :

$$\coprod_{1 \leqslant i \leqslant n} U_i \to X \to 0, \quad U_i \simeq U, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

PROPOZIȚIA 5.24. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian. Generatorul U este finit transferabil dacă și numai dacă orice obiect finit generat în raport cu U este de tip finit.*

Demonstrația este calculatorie și lăsată cititorului.

Evident, dacă $\mathcal{C}$ este abeliană cu AB 3, atunci un generator mic și proiectiv este finit generat în raport cu orice alt generator; un generator minimal proiectiv și finit transferabil se bucură de următoarea proprietate : orice ideal drept al inelului $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ izomorf ca modul drept cu $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ este principal și generat de un element regulat la dreapta. Acest rezultat va reieși din propozițiile care urmează fără ca noi să mai amintim aceasta în mod special.

Fie acum $\mathcal{C}$ o categorie preaditivă și U un obiect al său ; notăm cu A inelul : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$. Asocierea

$$X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$$

definește un functor (exact la stînga) de la $\mathcal{C}$ la categoria A-modulelor drepte unitare ; vom nota cu S sau S_U acest functor.

COROLAR. *Functorul S este fidel dacă și numai dacă U este un generator.*

Demonstrația este imediată.

PROPOZIȚIA 5.25. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu Ab 3 și U un generator proiectiv al său. Dacă obiectul X este finit generat, atunci, notînd cu S functorul* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, ?) : \mathcal{C} \to \mathrm{Mod}\, A$, $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$, *deducem că pentru orice obiect Y al lui $\mathcal{C}$, $S\,(X, Y)$ este izomorfism.*

Mai mult, dacă U este și finit transferabil, atunci S este o echivalență și invers.

Demonstrație. Fie X finit generat și $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$. Considerăm mai întîi cazul $X = U$. Atunci dacă $\Phi : SU \to SY$ este un morfism de A-module drepte, notăm cu $f = \Phi(1_U) : U \to Y$. Evident că $S(f) = \Phi$. Admitem acum că avem șirul exact :

$$0 \to K \xrightarrow{\lambda} \coprod_{i \in I} U_i \xrightarrow{\pi} X \to 0$$

cu I o mulțime finită, $U_i \simeq U$. Notăm cu $\alpha_i : U_i \to \coprod_{i \in I} U_i$, componentele canonice. Avem atunci

$$S(U_i) \xrightarrow{S(\alpha_i)} S(\coprod_{i \in I} U_i) \xrightarrow{S(\pi)} S(X) \xrightarrow[\Phi]{} S(Y)$$

Φ fiind un A-omomorfism. Notăm cu $p_i : \coprod_{i \in I} U_i \to U_i$ retracția lui α_i. Notăm $\Phi_i = \Phi \cdot S(\pi) \circ S(\alpha_i)$. Fie $f_i : U \to B$, cu $S(f_i) = \Phi_i$. Aplicațiile f_i definesc un morfism $\coprod U_i \to B$. Pentru orice $f : U \to U_i$ avem :

$$\Phi \circ S(\pi)(f) = \Phi(f) = \Phi \circ (\pi \circ \sum_i \alpha_i \circ p_i \circ f) = \sum_i \Phi(\pi \circ \alpha_i \circ p_i \circ f) =$$

$$= \sum_i \Phi(\pi \circ \alpha_i)(p_i \circ f) = \sum_i \Phi S(\pi) \circ S(\alpha_i) \circ (p_i \circ f) = \sum_i \Phi_i(p_i f)\ (p_i f : U \to U)$$

Avem însă

$$\sum \Phi_i(p_i f) = \alpha\circ f.$$

Rezultă de aici că $\alpha\circ\lambda = 0$; altfel, există un morfism $\gamma : U\to K$, cu $\alpha\circ\lambda\circ\gamma \neq 0$. Dar $\alpha\circ\lambda\circ\gamma = (\Phi\circ S(\pi))(\lambda\circ\gamma) = \Phi(\pi\lambda\gamma) = 0$ adică o contradicție.

Așadar există $h : X\to Y$, cu $h\circ\pi = \alpha$. Pentru $f : U\to X$, deoarece U este proiectiv, există $g : U \to \coprod\limits_i U_i$, cu $\pi\circ g = f$. Așadar $\Phi(f) = \Phi(\pi\circ g) = \Phi\circ S(\pi)(g) = \alpha\circ g = h\circ\pi\circ g = h\circ f$. Deci $\Phi = S(\alpha)$. Pentru a demonstra ultima parte a propoziției, observăm că dacă U este finit transferabil și $f : U \to \coprod\limits_i U_i$, cu I nu neapărat finită, atunci f se factorizează printr-o sumă directă finită : $U\to \coprod\limits_{j\in J} U_j$, $J\subset I$, și deci $f = \sum\limits_j \alpha_j\circ p_j\circ f$, cu $\alpha_j : U_j\to\coprod U_j$ morfismele canonice și p_j retracțiile lor. Deducem deci că S este în acest caz deplin fidel pentru orice două obiecte X, Y din $\mathcal{C}$. Mai mult, S comută cu sumele direct și de aici rezultă că orice obiect din $\mathcal{C}$ este de tipul SX. Deci S este o echivalență (S este exact).

Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu AB 3 și $U\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$; considerăm inelul $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ și categoria Mod A. Obiectul U este un A obiect și deci conform teoremei de prelungire forte 2.4, functorul $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ notat S de la $\mathcal{C}$ la Mod A are un adjunct la stînga T.

PROPOZIȚIA 5.25. *Fie* $\mathcal{C}$ *un topos abelian și* U *un generator proiectiv al său. Fie* $X\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ *și* $SX\in \mathrm{Ob}$ Mod A ($A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$, $S : \mathcal{C}\to \mathrm{Mod}\, A$, *ca mai sus*). *Obiectul* X *este finit generat în raport cu* U *dacă și numai dacă modulul* $S(X)$ *este finit generat.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă SX este finit generat ca A-modul, atunci orice element al său este de forma $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ cu α_i, $i = 1, \ldots, n$, generatorii lui SX, $a_i\in A$. Evident, $\alpha_i : U\to X$. Considerăm deci diagrama

(*)
$$\begin{tikzcd}
 & U_i \arrow[dl, shift left, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\
\coprod\limits_i U_i \arrow[ur, shift left, "\psi_i"] \arrow[rr] & & X
\end{tikzcd}$$

cu $p\circ\varphi_i = \alpha_i$. p este epimorfism, căci dacă $f : U\to X$, atunci : $f = \sum \alpha_i\circ a_i = \sum p\circ\varphi_i\circ a_i = p\circ\sum \varphi_i a_i = p\circ\alpha$, ceea ce arată că orice morfism de la U la X se factorizează prin p (care este deci epimorfism).

Invers, dacă avem diagrama (*) cu p epimorfism, deducem că orice morfism f de la U la X, este de forma : $f = p\circ g$, cu $g : U\to \coprod\limits_i U_i$ (căci U este proiectiv). Dar $1_{\coprod\limits_i U_i} = \sum \varphi_i\circ\psi_i$ și deci

$$f = p\circ g = p\cdot (\sum_i \varphi_i\circ\psi_i)\cdot g = \sum_i \alpha_i\circ a_i,$$

unde $a_i = \psi_i\circ g : U\to U$.

Deducem de aici că pentru orice obiect X din $\mathcal{C}$, există o corespondență biunivocă între subobiectele sale finite generate și subobiectele finit generate ale lui SX din Mod$A$.

Fie acum $\Phi : TS \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ o săgeată de adjuncție a lui T cu S, unde T este un adjunct la stînga pentru S ; deoarece, pentru X, finit generat, deducem că $S\,(X,\ Y)$ este izomorfism, conchidem că pentru X finit generat Φ este un izomorfism. Functorul T este exact la dreapta. Fie M un A-modul drept de prezentare finită. Atunci avem șirul exact :

$$\coprod_{j \in J} A_j \rightarrow \coprod_{i \in I} A_i \rightarrow M \rightarrow 0,$$

J și I fiind mulțimi finite. Evident, aplicînd T, deducem că în $\mathcal{C}$ avem șirul exact :

$$\coprod U_j \rightarrow \coprod U_i \rightarrow TM \rightarrow 0$$

și evident $M = STM$. În concluzie :

Propoziția 5.26′. *Functorul S stabilește o echivalență între subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din obiectele de prezentare finită și subcategoria plină a lui* Mod A *formată tot din obiecte de aceeași formă.*

Fie acum A noetherian ; atunci orice ideal drept al său este de prezentare finită. Același fapt este atunci valabil pentru orice subobiect al lui U ; conchidem deci că U este noetherian. În acest caz S stabilește o echivalență între subcategoria plină a obiectelor finit generate din $\mathcal{C}$ și subcategoria plină a obiectelor finit generate din Mod A.

§ 8. CARACTERIZAREA TOPOSURILOR ABELIENE

În paragraful de față vom dovedi că orice topos abelian este o categorie cît a unei categorii de module ; de aici vom trage unele consecințe.

Propoziția 5.26. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană cu* AB 5 *și U un obiect al său. Fie $S : \mathcal{C} \rightarrow$* Mod A *functorul canonic mai sus considerat* ($A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U,\ U)$) *și T un adjunct la stînga al său. Fie de asemenea $\Phi : TS \rightarrow \mathrm{Id}\ \mathcal{C}$ o săgeată de adjuncție a lui T cu S. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) *U este un generator al lui $\mathcal{C}$, adică $\mathcal{C}$ este un topos abelian.*

ii) *S este deplin fidel.*

iii) *Φ este izomorfism și T este exact.*

iv) *T este exact și induce o echivalență între* Mod $A/$Ker T *și* $\mathcal{C}$.

Demonstrație. Implicațiile iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i) sînt binecunoscute din teoria categoriilor cît (Cap. III). Echivalența iii) $\Leftrightarrow$ iv) este iarăși evidentă din aceeași teorie. Rămîne deci să dovedim că i) $\Rightarrow$ iii) și pentru aceasta vom dovedi mai întîi că i) $\Rightarrow$ ii).

Fie, într-adevăr, X și Y două obiecte din $\mathcal{C}$ și $S\,(X,\ Y)$ aplicația lui $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(SX,\ SY)$ definită de S. Dacă U este generator, $S(X,\ Y)$ este injectiv ; să arătăm că el este și surjectiv. Fie pentru aceasta

$\varphi : SX \to SY$ un morfism în Mod A ; punem $I = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ și fie (U_f) o familie de exemplare izomorfe cu U indexate de mulțimea I. Fie $p : \coprod U_f \to X$ morfismul ce induce f pe sumandul U_f și $q : \coprod U_f \to Y$ morfismul ce induce $\varphi(f)$ pe U_f. Dacă vom dovedi că q se anulează pe nucleul K al lui p, vom obține egalitatea :

$$q = \psi \circ p \text{ și } \varphi = S(\psi), \quad \psi : X \to Y.$$

Fie, deci, pentru orice parte finită $J \subset I$, K_J nucleul morfismului p_J : $\coprod_{f\in J} U_f \to X$, indus de p. Evident, deoarece $K = K \cap \coprod_{f\in J} U_f$ (unde $\coprod_{f\in J} U_f$ o considerăm ca un subobiect din $\coprod_{f\in I} U_f$) și din aceea că $\coprod_{f\in I} U_f = \lim_{\overrightarrow{J}} \coprod_{f\in J} U_f$; deducem că $K = \sup_J K_J$. Așadar este suficient să dovedim că q se anulează pe K_J. Pentru aceasta fie $\alpha : U \to K_J \subset \coprod U_f$ un morfism de la U în K_J. Avem diagrama comutativă

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "\alpha"'] & U \arrow[r, "\varphi(f)"] \arrow[d, shift left, "\psi_f"] \arrow[rd, "f"] & Y \\
0 \arrow[r] & K_j \arrow[r] & \coprod_{f\in J} U_f \arrow[u, shift left, "\varphi_f"] \arrow[r, "p_J"] \arrow[ru, dashed, "q_J"] & X
\end{tikzcd}$$

cu $1_{\coprod_{f\in J} U_f} = \sum \psi_f \circ \gamma_f$, de unde

$$i \circ \alpha = \sum \psi_f \circ \gamma_f \circ i \circ \alpha = \sum \psi_f \circ \lambda_f, \quad \lambda_f = \varphi_f \circ i \circ \alpha : U \to U$$

deci $\lambda_f \in A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$. Avem și

$$P_J \circ i \circ \alpha = \sum p_J \circ \psi_f \circ \lambda_f = 0$$

dar $p_J \circ \psi_f = f$; așadar $p_J \circ i \circ \alpha = \sum_f f \circ \lambda_f = 0$.

De aici : $q_J \circ i \circ \alpha = \sum_f q_J \circ \psi_f \circ \lambda_f = \sum_f \varphi(f) \circ \lambda_f = \sum_f \varphi(f \circ \lambda_f) = \varphi(\sum_f f \circ \lambda_f) = 0$.

Să arătăm că i) $\Rightarrow$ iii). Pentru aceasta vom arăta că S induce o echivalență între $\mathcal{C}$ și subcategoria plină a lui Mod A formată din obiectele închise relativ la o anumită subcategorie localizantă $\mathcal{B}$. Pentru aceasta folosim următoarele rezultate.

a) DEFINIȚIE. Un A-modul drept N se zice neglijabil dacă pentru orice morfism $f : A \to N$, aplicația canonică a lui $\mathrm{Hom}_A(A, SX)$ în $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker} f, SX)$ este bijectivă pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$.

LEMA 1. *Un A-modul N este neglijabil dacă și numai dacă, pentru orice morfism $f : M \to N$ și orice obiect X din $\mathcal{C}$, aplicația canonică a lui* $\mathrm{Hom}_A(M, SX)$ *în* $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker} f, SX)$ *este bijectivă.*

Demonstrație. Fie diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}\,\alpha_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "\delta_i"] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] & \coprod\limits_{i\in I} A_i \arrow[d, "p"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,f \arrow[rr, "\varphi"] & & M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd} \qquad A_i \simeq A, \quad i \in I$$

în care p este epimorfism, $\varphi\circ\delta_i = p\circ u_i$. Fie $\alpha : M \to SX$; din $\alpha\circ\varphi = 0$ deducem : $\alpha\circ\varphi\circ\delta_i = 0$ deci $\alpha\circ p\circ\alpha_i\circ u_i = 0$, pentru orice i, deci $\alpha\circ p\circ\alpha_i = 0$ (orice i) și deci $\alpha\circ p = 0$. Așadar $\alpha = 0$. Invers, fie $\alpha : \mathrm{Ker}\, f \to SX$. Atunci $\alpha\circ\delta_i : \mathrm{Ker}\,\alpha_i \to SX$. Există $t_i : A_i \to SX$ cu $t_i\circ u_i = \alpha\circ\delta_i$. Fie $t: \coprod A_i \to SX$, cu $t\circ\alpha_i = t_i$. Se vede imediat că dacă $j = \mathrm{Ker}\, p$, atunci $t\circ j = 0$. Așadar : există $\gamma : M \to SX$ cu $\gamma\circ\varphi = \alpha$.

LEMA 2. *A modulele neglijabile formează o subcategorie localizantă în* Mod A.

Demonstrație. Observăm că un modul N este neglijabil dacă și numai dacă $\mathrm{Hom}_A(N, SX) = 0$ pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Evident că un submodul al unui modul neglijabil, încă este neglijabil. Din cele de mai sus rezultă că dacă într-un șir exact $0\to N'\to N\to N''\to 0$, N este neglijabil, atunci N', N'' sînt neglijabile și invers. Faptul că o limită inductivă de module neglijabile este neglijabil, este evident.

DEFINIȚIA 2. Vom spune că un morfism $u : M\to N$ este „couvrant” (acoperitor) dacă Coker u este neglijabil.

LEMA 3. *Un morfism $u : M\to N$ este couvrant dacă și numai dacă pentru orice morfism $f : A\to N$, și orice obiect X al lui $\mathcal{C}$, șirul :*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A, SX) \to \mathrm{Hom}_A(A \sqcap_N M, SX) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\, u, SX)$$

indus de u și f este exact.

(Construcția și exactitatea șirului este calculatorie).

Fie $\mathcal{C}_1$ subcategoria plină a lui $\mathcal{C}$ formată din modulele $\mathcal{B}$-închise, unde $\mathcal{B}$ este subcategoria localizată formată din toate modulele neglijabile. Evident, $\mathcal{C}_1$ se poate aranja ca o categorie abeliană ; produsele și nucleele din $\mathcal{C}_1$ sînt evident cele din Mod A ; epimorfismele din $\mathcal{C}_1$ sînt morfismele din Mod A, couvrante. Pentru orice obiect $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, SX este evident $\mathcal{B}$-închis, și deci S induce un functor exact la stînga $S_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$.

LEMA 4. *Functorul S_1 este exact.*

Demonstrație. Fie $u : X \to Y$ un epimorfism din $\mathcal{C}$; vom dovedi că Su este couvrant, ceea ce revine la a dovedi că pentru orice $f : A\to SY$ și orice $T \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, avem șirul exact :

$$(1)\; 0 \to \mathrm{Hom}_A(A, ST) \to \mathrm{Hom}_A(A \sqcap_{SY} SX, ST) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}\, Su, ST).$$

Dar există un morfism $g : U\to Y$ cu $f = Sg$. Cum S este exact la stînga, $A \sqcap_{SY} SX$ și Ker Su se identifică cu $S(U \sqcap_Y X)$ și $S(\mathrm{Ker}\, u)$. Exactitatea lui (1) rezultă deci din aceea că S este deplin fidel și din exactitatea șirului

$$\mathrm{Ker}\, u \to U \sqcap_Y X \to U \to 0.$$

Fie acum X un obiect din $\mathcal{C}$ şi fie $(X_i)_{i\in I}$ o familie filtrată crescătoare de subobiecte din X astfel că $X = \varinjlim X_i$. Avem atunci $S_1 X = \varinjlim S_1 X_i$; într-adevăr, pentru aceasta e suficient să dovedim că morfismul canonic $\varinjlim SX_i \to SX$ este acoperitor. Dar demonstraţia este analogă cu precedenta şi rezultă imediat din următoarea formulă

$$(\varinjlim X_i) \prod\nolimits_X U = \varinjlim (X_i \prod\nolimits_X U)$$

(care exprimă că $\mathcal{C}$ satisface Ab 5) valabilă pentru orice $f: U \to X$.

S_1 comută cu sumele directe. În particular, în $\mathcal{C}_1$ orice sumă directă de obiecte izomorfe cu A, este imaginea prin S_1 a unei sume directe de obiecte izomorfe cu U. Pentru orice obiect M din $\mathcal{C}_1$, există şirul exact de forma: $S_1\, Y \xrightarrow{Sf} S_1 X \to M \to 0$ (căci S este deplin fidel şi $S\,(U)$ este un generator al lui $\mathcal{C}_1$). Deci, $M \simeq S_1$ (Coker f), ceea ce arată că S_1 este o echivalenţă.

c. c. t. d.

Propoziţia demonstrată dă o caracterizare a categoriilor de fascicule pentru siturile abeliene. Ea conţine, după cum se vede uşor, faptul că orice categorie Grothendieck este de fapt o categorie de fascicule. În continuare ne vom ocupa cu cîteva consecinţe ale ei.

PROPOZIŢIA 5.27. *Un topos abelian satisface* Ab 3^* (*are produse directe indexate de mulţimi din* U).

Aceasta, deoarece o categorie de module este cu Ab 3^* şi în plus o categorie cît a unei categorii cu Ab 3^* are încă aceeaşi proprietate. Cititorul va putea reface singur construcţia produselor directe din $\mathcal{C}$.

PROPOZIŢIA 5.28. *O categorie Grothendieck este cu anvelopă injectivă şi admite un cogenerator injectiv.*

Faptul că are anvelopă injectivă, rezultă din propoziţia 3.22, Cap. III. Dacă V este un cogenerator din Mod A şi T :Mod $A \to \mathcal{C}$, functorul canonic de trecere la categoria cît, atunci $TV = V_1$ este un cogenerator din $\mathcal{C}$. De altfel cogeneratorul în $\mathcal{C}$ se poate construi şi direct.

Considerăm o U-categorie cu Ab 3 şi U un generator al său; fie de asemenea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ o familie de obiecte din $\mathcal{C}$ indexată de un element al lui U. Atunci există un generator U' al lui $\mathcal{C}$ faţă de care orice obiect A_α, $\alpha \in I$ este finit generat. Într-adevăr, este suficient să considerăm elementul lui U : $J = \bigcup\limits_{\alpha\in I} I_\alpha\ J_\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\ (U,\ A_\alpha)$. Atunci, evident că punînd $U' = \coprod\limits_{j\in J} U_j$, $U_j \simeq U$, $j \in J$, deducem cele de mai sus. În plus dacă U este proiectiv, atunci şi U' este.

Fie deci $\mathcal{C}$ un topos abelian şi V un cogenerator injectiv al său. Atunci categoria duală $\mathcal{C}^0$ satisface Ab 3 şi are un generator proiectiv V.

Fie $\mathcal{C}_1$ o U-categorie mică preaditivă şi $T_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ un functor exact şi deplin fidel, $\mathcal{C}$ fiind un topos abelian. Fie $D : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^0$ functorul dualitate. Atunci $D \circ T_1$ este un functor exact deplin fidel şi contravariant de la $\mathcal{C}_1$ la $\mathcal{C}^0$. Putem înlocui generatorul proiectiv V^0 al lui $\mathcal{C}^0$ cu un generator V_1, în raport cu care orice obiect de tipul $(D \circ T)\,(X)$, $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_1$

este finit generat. Atunci functorul canonic : $S_1\, \mathcal{C}_1 \to \mathrm{Mod}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(V_1, V_1)$ este exact și deplin fidel, conform propoziției 5.25 ($S_1 = S \circ D \circ T$, $S : \mathcal{C}^0 \to \mathrm{Mod}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^0}(V_1, V_1)$ fiind canonic construit). În concluzie :

Propoziția 5.29. *Fie $\mathcal{C}_1$ o categorie preaditivă element al lui U. Există un inel A și un functor aditiv contravariant $S : \mathcal{C}_1 \to \mathrm{Mod}\ A$, exact și deplin fidel.*

Propoziția 5.29 este foarte bogată în consecințe. Iată numai una din ele. Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană oarecare și în ea diagrama comutativă cu liniile exacte :

(*)
$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' &
\end{tikzcd}$$

Există o subcategorie plină, mică și abeliană $\mathcal{C}_1$, a lui $\mathcal{C}$ în care este conținută diagrama (*) conform propoziției 5.19. Fie A un inel și $S : \mathcal{C}_1 \to \mathrm{Mod}\ A$ o inmersiune (un functor exact și deplin fidel). Atunci în $\mathcal{C}_1$ există șirul exact (lema serpentinei) :

$$\mathrm{Ker}\ f' \to \mathrm{Ker}\ f \to \mathrm{Ker}\ f'' \to \mathrm{Coker}\ f' \to \mathrm{Coker}\ f \to \mathrm{Coker}\ f''.$$

Demonstrația este imediată ; toate elementele sînt la îndemîna cititorului.

§ 9. CARACTERIZAREA FASCICULELOR ABELIENE PENTRU UN TOPOS ABELIAN DOTAT CU TOPOLOGIA CANONICĂ

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian (U-topos) și τ topologia sa canonică. Vom dovedi în cele ce urmează că orice U-fascicul abelian în raport cu situl $(\mathcal{C}, \tau)$ este reprezentabil. Pentru aceasta fie V un univers în raport cu care $\mathcal{C}$ este o categorie mică. Existența universului V se poate pune în evidență ușor : $\mathcal{C}$ este echivalentă cu categoria cît a unei categorii de module, iar categoria Ab se poate aranja de așa natură încît categoria de module respectivă să fie V-mică. Chestiunile de această natură joacă un rol aparte și, poate, neclaritatea lor nu poate afecta pe cititor prea mult.

Fie $\mathcal{C}^a$ categoria V-prefasciculelor peste $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}^\tau$ categoria V-fasciculelor peste $(\mathcal{C}, \tau)$ și $\overline{h} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\tau$ functorul canonic, $\overline{h}$ este un functor deplin fidel și exact. Fie acum $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ un U-prefascicul care este fascicul în raport cu situl dat. Fie $\{f_\alpha : X_\alpha \to F\}_{\alpha\in I}$ o familie de morfisme și obiecte din $\mathcal{C}^\tau$ astfel că $I \in U$, $X_\alpha = \overline{h}\, X'_\alpha$, pentru orice $\alpha \in I$, astfel că în $\mathcal{C}^\tau$ există șirul exact, canonic construit :

$$p : \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha \to F \to 0.$$

Fie atunci $F' = \mathrm{Ker}\ p$ și familia $\{f'_\beta : X'_\beta \to F'\}_{\beta\in J}$ cu $J \in U$ și $X'_\beta = \overline{h}\, X''_\beta$ pentru orice β, astfel că în $\mathcal{C}^\tau$ să avem șirul exact :

$$\coprod X'_\beta \to F' \to 0.$$

Așadar în $\mathscr{C}^{\tau}$ există șirul exact :

$$\coprod_{\beta\in J} X'_{\beta} \xrightarrow{\bar{r}} \coprod_{\alpha\in I} X_{\alpha} \to F \to 0.$$

Pentru a termina demonstrația, rămîne să dovedim că functorul canonic $\bar{h}$ comută cu sumele directe, cu alte cuvinte rămîne să dovedim că dacă $\{X_{\alpha}\}$ este o familie de obiecte din $\mathscr{C}$, indexată de un element al lui U (aceasta nu este o restricție), atunci în $\mathscr{C}^{a}$, morfismul canonic :

$$f : \coprod_{\alpha} hX_{\alpha} \to h\,(\coprod X_{\alpha})$$

este biacoperitor. Pentru a dovedi aceasta, observăm mai întîi că f este un monomorfism (într-adevăr, într-o categorie abeliană doar cu Ab 3, pentru orice obiect Y, morfismul canonic :

$$\coprod_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\,(Y,\ X_{\alpha}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}\,(Y,\ \coprod X_{\alpha})$$

este un monomorfism).

Rămîne să dovedim că conucleul F al lui f în $\mathscr{C}$ este un obiect din categoria localizantă asociată cu topologia canonică pe $\mathscr{C}$. Fie deci $Z \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}$, $z \in F\ (Z)$ și φ^{z}, $hZ \to F$ morfismul canonic de clasă fundamentală z.

Fie $\varphi_1 : Z \to h\ (\coprod X_{\alpha})$ un morfism cu $q \circ \varphi_1 = \varphi^{z} = \varphi$, $q : h\ (\coprod X) \to F$ fiind epimorfismul canonic. $\varphi_1(1_Z)$ este un morfism g de la Z la $\coprod X_{\alpha}$.

Fie $S = \coprod\limits_{\alpha} X_{\alpha}$ și S_{β} familia sumelor directe finite ; evident, $S = \varinjlim\limits_{\beta} S_{\beta}$, ordonarea fiind cea naturală ; mai mult, deoarece $\mathrm{Im}\ g = \sup\limits_{\beta}\ (\mathrm{Im}\ f \cap S_{\beta})$ (deoarece $\mathscr{C}$ satisface Ab 5), deducem că familia : $S_{\beta} \prod_S Z \to Z$ este epimorfică, adică ciurul generat de ea este acoperitor în topologia canonică. Pentru o sumă directă finită $\coprod\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_{\alpha_i}$, avem în $\mathscr{C}^{a}$ diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
 & h(\coprod X_{\alpha_i} \prod_S Z) \arrow[rr, "l"] \arrow[dd, "m"] & & h(Z) \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\coprod hX_{\alpha} \arrow[rr, "f"] & & h(\coprod X_{\alpha}) \arrow[rr, "q"] & & F \\
 & h\coprod X_{\alpha_i} \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[ur, "t"'] & & &
\end{tikzcd}$$

din care deducem : $q \circ t = q \circ f \circ \gamma = 0$. Deci $\varphi \circ t = q \circ f \circ \gamma = q \circ t \circ m = 0$. Concludem de aici că imaginea ciurului generat de familia $S_{\beta} \prod_S Z \to Z$ este conținută în Ker φ și acesta este acoperitor. În concluzie, f este un monomorfism acoperitor și deci biacoperitor.

Fie acum în $\mathscr{C}$ familiile de obiecte, indexate de elemente ale lui U : $(X''_{\beta})_{\beta\in J}$, $\{X'_{\alpha}\}_{\alpha\in I}$ și morfismul :

$$r : \coprod_{\beta} X'_{\beta} \to \coprod_{\alpha} X'_{\alpha}$$

astfel că $h(r) = \bar{r}$, iar (p, Y) un conucleu al lui r. Atunci în $\mathcal{C}^\tau$ avem şirul exact :

$$\coprod_{\beta} F_\beta \xrightarrow{\bar{r}} \coprod_{\alpha} F_\alpha \to h(Y) \to 0$$

din care concludem că $F \approx h(Y)$, adică F este reprezentabil.

Pentru a termina demonstraţia rămîne să dovedim că pentru orice obiect F din $\mathcal{C}^\tau$, care este un U-prefascicul, există cel puţin o familie $\{f_\alpha : X_\alpha \to F\}_{\alpha \in I}$, $I \in U$, pentru care morfismul canonic :

$$p : \coprod X_\alpha \to F$$

este un epimorfism.

Pentru aceasta, fie I mulţimea $\coprod F(G_r)$ cu $(G_r)_{r \in A}$ o mulţime de generatori ai lui $\mathcal{C}$ $(A \in U)$. Pentru $i \in I$, $i = (r, f)$, unde $r \in A$ şi $f \in F(G_r)$ notăm cu X_i obiectul G_r şi deci aplicaţiile f induc morfismul

$$p : \coprod X_i \to F.$$

Fie $F' = \operatorname{Im} p$. Conform celor de mai sus, F' este reprezentabil. Mai rămîne să dovedim că morfismul canonic : $q : F' \to F$ este un epimorfism, şi pentru aceasta este suficient să dovedim că pentru orice G_r, $r \in A$, morfismul canonic :

$$(*) \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\tau}(G_r, F') \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\tau}(G_r, F)$$

este un izomorfism. Dar avem

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\tau}(G_r, F') \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\tau}(G_r, F')$$

şi

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\tau}(G_r, F) \simeq F(G_r).$$

Dacă $\varphi : G_r \to F$ este un morfism din $\mathcal{C}^\tau$, atunci el este un morfism şi în $\mathcal{C}^a$ de clasă fundamentală x. Dar atunci în I există elementul (i, φ) şi deci avem diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & F' \arrow[dr, "q"] & \\
\coprod X_j \arrow[ur, "t"] \arrow[rr, "p"] & & F \\
 & X_i \arrow[ul, "\alpha_i"] \arrow[ur, swap, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

cu $p \circ \alpha_i = \varphi$. Dacă t este epimorfismul canonic şi $q : F' \to F$ injecţia canonică, atunci $p = q \circ t$ şi deci $q \circ t \circ \alpha_i = \varphi$, ceea ce arată că morfismul din (*) este izomorfism. În concluzie am dovedit următoarea propoziţie :

PROPOZIŢIA 5.30. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian (U-topos) şi τ topologia sa canonică. Orice U-fascicul al său în raport cu topologia τ este reprezentabil.*

Observăm din cele de mai sus că dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană cu AB 5, element al lui U (ceea ce încă nu este o restricție) și $\bar{h} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\tau}$ functorul canonic, unde $\mathcal{C}^{\tau}$ este categoria fasciculelor în raport cu topologia canonică, atunci $\bar{h}$ este un functor exact deplin fidel și comută cu sumele directe ; așadar $\bar{h}$ comută cu limitele inductive din care deducem că categoria de localizare $\bar{\mathcal{C}}$ este încă o categorie cu AB 5. Dacă însă $\mathcal{C}$ este un element al lui U, atunci ea posedă o familie de generatori indexată de un element al lui U și deci $\bar{h}$ este o echivalență de categorii.

§ 10. MORFISME DE SITURI ABELIENE

Fie $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ două situri abeliene și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant aditiv. Notăm cu $T_* : \mathcal{C}'^{a} \to \mathcal{C}^{a}$ functorul „restricție" definit de T.

Definiția 5.31. Vom spune că T este un functor continuu dacă pentru orice fascicul abelian F în raport cu situl $\mathcal{C}'$, $T_* F$ este un fascicul în raport cu situl $\mathcal{C}$.

A spune deci că T este un functor continuu revine la aceea că există un functor $T_S : \mathcal{C}'^{\tau'} \to \mathcal{C}^{\tau}$ cu $i \circ T_S = T^* \circ i'$ în care i' și i sînt categoriile de fascicule în raport cu siturile $\mathcal{C}'$ și $\mathcal{C}$ respectiv iar i și i' sînt functorii incluziune respectivi de la fascicule la prefascicule.

Ca de obicei functorul T_S se va numi functorul imagine directă.

Sînt valabile pentru siturile abeliene următoarele afirmații echivalente pe care cititorul le va dovedi ușor :

a) T este continuu.

b) Pentru orice ciur abelian acoperitor, din $\mathcal{C}$, $R \to X$, morfismul $T^{\star} R \to T$ este biacoperitor în $\mathcal{C}'^{a}$.

Mai mult, functorul T_S are un adjunct la stînga T^S, astfel că $T^S \simeq a' \circ T \circ i$, și $T^S \circ a \simeq a' \circ T$, în care a, a' sînt functori adjuncți la stînga și exacți pentru i și i' iar $T^{\star}$ un adjunct la stînga pentru $T_{\star}$.

Dacă functorul $T^{\star}$ este exact, atunci și functorul T^S este exact.

Definiția 5.32. Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două situri aparținînd lui U și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv între categoriile subiacente. Vom spune că T este un morfism de situri abeliene, dacă

a) T este un functor continuu.

b) Functorul T^S este exact.

Fie că $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt două situri abeliene, elemente ale lui U iar în $\mathcal{C}$ există produse fibrate, sau, ceea ce este același lucru, există sume directe și nucleul oricărui morfism. Admitem că functorul aditiv $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ este exact la stînga. Admitem de asemenea că imaginea prin T a oricărei familii acoperitoare este o familie acoperitoare. Atunci T este un morfism de situri abeliene.

Concluziile de mai sus (ușor de dovedit : vezi siturile ordinare) se aplică la cazul a două categorii abeliene $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, elemente ale lui U și dotate cu topologiile canonice și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor exact. Este valabil și rezultatul invers, după cum se vede imediat, folosind categorii de localizare respective.

Fie acum $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două situri abeliene aparținînd lui U și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor continuu; atunci, cu notațiile de mai sus, pentru orice obiect F din $\mathcal{A}$, subcategoria localizantă respectivă din $\mathcal{C}^a$, deducem că $T^\star F_i$ este un obiect din $\mathcal{A}'$, subcategoria localizantă din $\mathcal{C}'^a$, deoarece pentru orice $G' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}'^\tau$ avem:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^a}(F, T_\star i' G') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^a}(T^\star F, i'g') = 0.$$

Invers, dacă pentru orice obiect F din $\mathcal{A}$, $T^\star F \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}'$, atunci T nu este neapărat continuu; acest fapt se întîmplă spre exemplu dacă pentru orice rafinare abeliană $i : R \to X$ din $\mathcal{C}$ deducem că nucleul lui $T^\star i$ este un obiect din $\mathcal{A}'$. Cazul acesta se prezintă, spre exemplu dacă T este un functor exact la stînga, caz în care T este chiar un morfism de situri ($\mathcal{C}$ categorie cu nucleu).

Fie acum τ' o topologie pe $\mathcal{C}'$ și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant aditiv; putem construi o topologie τ pe $\mathcal{C}$ în raport cu care T devine un functor continuu. τ este cea mai fină topologie cu această proprietate. Pentru aceasta fie $X \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ și $J_\tau(X)$ toate ciururile abeliene peste X astfel că pentru orice $f : Y \to X$ morfism din $\mathcal{C}$, morfismul canonic:

$$T^\star (R : f) \to T^\star Y$$

este biacoperitor în $\mathcal{C}'^a$. Topologia astfel construită pe $\mathcal{C}$ se va numi topologia indusă. Dacă τ_1 este o altă topologie pe $\mathcal{C}$, atunci pentru ca T să fie un morfism pentru siturile $(\mathcal{C}, \tau_1)$ și $(\mathcal{C}', \tau')$ este necesar și suficient ca $\tau_1 \leqslant \tau$.

Observăm încă, că dacă $T^\star$ este un functor exact, atunci descrierea lui τ este simplă: $R \to X$ este o rafinare a lui X dacă și numai dacă $T^\star R \to T^\star X$ este o rafinare a lui $T^\star X = TX$, în $\mathcal{C}'$.

§ 11. COMORFISME DE SITURI ABELIENE

Fie $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ două situri abeliene elemente ale lui U și $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor aditiv covariant între subcategoriile subiacente.

DEFINIȚIA 5.33. Vom spune că T este un comorfism de situri abeliene, dacă pentru orice fascicul abelian G peste $\mathcal{C}$, $T^+(G)$ este un fascicul abelian peste $\mathcal{C}'$, T^+ fiind un adjunct la dreapta pentru $T_\star$.

În cazul că T este un comorfism de situri abeliene, atunci există un functor $T^{++} : \mathcal{C}^\tau \to \mathcal{C}'^\tau$ astfel că $i' \circ T^{++} = T^+ \circ i$, și invers. Putem, ca și pentru siturile oarecare, să dovedim următorul rezultat: functorul T este un comorfism de situri dacă și numai dacă el posedă următoarea proprietate:

(D) Pentru orice obiect Y al lui $\mathcal{C}$ și pentru orice ciur acoperitor $T \to TY$ din $\mathcal{C}'$, ciurul generat de săgețile $Z \to Y$ cu $T(Z) \to T(Y)$ se factorizează prin R, acopere pe Y.

Fie, ca mai sus, $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}'$ subcategoriile localizante respective; dacă T este comorfism de situri abeliene și $F' \in \mathrm{Ob} A'$, atunci, pentru orice

$G \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}^{\tau}$, avem :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'^{a}}(F', T^{+} G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{a}}(T_{*}F', G) = 0$$

din care concludem că $T_{*} F' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$.

Este valabil următorul rezultat : functorul T^{++} are un adjunct la stînga T_S astfel că $T_S = a \circ T \circ i'$ și $T_S \circ a' \simeq a \circ T$.

Concludem de aici că este valabilă următoarea propoziție :

Propoziția 5.34. *Cu notațiile de mai sus următoarele afirmații sînt echivalente.*

a) T *este comorfism de situri abeliene.*

b) *Pentru orice* $F' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}'$; $T_{*} F' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$.

Demonstrație. Este suficient să dovedim că b) ⇒ a). Într-adevăr, în cazul acesta, functorul T_{*} induce un functor $T_S : \mathcal{C}'^{\tau} \to \mathcal{C}^{\tau}$ cu $T_S = a \circ T_{*} \circ i'$, cu $T_S \circ a' \simeq a \circ T_{*}$ care este exact și admite un adjunct la dreapta : $T^{++} = a' \circ T^{+} \circ i$, și în plus $T_S \circ a' \simeq a \circ T_{*}$, iar $i' \circ T^{++} \simeq T^{+} \circ i$, c.c.t.d.

Fie acum $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un functor covariant aditiv și τ o topologie pe $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ fiind elemente ale lui U. Dacă $\mathcal{A}$ este subcategoria lui $\mathcal{C}^{a}$ asociată cu τ, notăm cu $\mathcal{A}'$ subcategoria localizantă a lui $\mathcal{C}'^{a}$ formată din toate obiectele F' cu $T_{+} F' \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{A}$. Topologia τ' asociată cu $\mathcal{A}'$ este cea mai puțin fină topologie în raport cu care T devine un comorfism de situri. Observăm că spre deosebire de morfismele de situri, comorfismele de situri abeliene sînt mai ușor de descris. Relativ la comorfismele de situri avem încă următoarea propoziție :

Propoziția 5.36. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două situri, elemente ale lui* U *și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor iar* S *un adjunct la stînga al său. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) T *este un functor continuu.*

ii) *Functorul* S *este un comorfism de situri abeliene.*

Pentru demonstrație, observăm că $S^{+} \simeq T_{*}$. Deducem din propoziția de mai sus, și din remarcile precedente, că dacă $\mathcal{C}'$ este dotată cu o topologie, atunci putem găsi pe $\mathcal{C}$ o topologie astfel că T să devină un functor continuu ; dacă T este exact, T este un morfism de situri.

§ 12. MORFISME DE TOPOSURI ABELIENE

Fie $\mathcal{C}$ un U-topos abelian ; vom considera pe $\mathcal{C}$ ca un sit dotat, totdeauna, cu topologia canonică. Știm că orice U-fascicul abelian peste $\mathcal{C}$ este neapărat un functor reprezentabil ; și încă un functor contravariant exact la stînga. Iată cîteva considerații legate de toposurile abeliene.

Propoziția 5.36'. *Fie* $\mathcal{C}$ *și* $\mathcal{C}'$ *două toposuri abeliene și* $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un functor. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) T *este un functor continuu.*

ii) T *admite un adjunct la dreapta.*

iii) *Functorul* T *comută cu limitele inductive.*

Pentru a demonstra propoziția, dovedim mai întîi lema următoare :

Lemă. *Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian și F un prefascicul peste $\mathcal{C}$. Următoarele afirmații sînt echivalente.*

a) *F este un fascicul.*

b) *F transformă limitele inductive în limite proiective.*

Demonstrația lemei. Este suficient să dovedim că b)$\Rightarrow$a). Fie $R \to X$ un ciur abelian acoperitor din $\mathcal{C}$; atunci R conține imaginea unui ciur generat de un epimorfism și deci morfismul canonic $\varinjlim s_R \to X$ din $\mathcal{C}$ este un izomorfism. Concludem deci că dacă F transformă limitele inductive în proiective, atunci el este fascicul.

Demonstrația propoziției. Dacă T este continuu și V este un univers în raport cu care $\mathcal{C}$ și $\mathcal{C}'$ sînt V-categorii mici, fie $T^S : \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}'^{\sim}$ functorul canonic, iar $a \circ T_* \circ i'$ un adjunct al său la dreapta. Avem $T = a' \circ T^{\star} \circ i$. Evident că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $T^{\star} X \simeq TX$ și functorii $T_{\star}$ și $T^{\star}$ păstrează U-prefasciculele. Restul de afirmații se deduce ușor folosind printre altele și lema dovedită.

§ 13. DISTRIBUTIVITATEA LIMITELOR PROIECTIVE ÎN RAPORT CU LIMITELE INDUCTIVE

Scopul acestui paragraf, care poate fi omis de cititor la o primă lectură a seminarului, este de a introduce pe cititor în unele probleme speciale care se pun în legătură cu toposurile ordinare ; analogul lor pentru siturile abeliene este dezvoltat în paragraful următor. Majoritatea rezultatelor date aparțin lui Jean Erik Roos, unul din elevii lui Grothendieck [3]. Începem cu cîteva chestiuni privind categoria U-Ens.

Propoziția 5.37. *În* U-Ens, *orice produs de epimorfisme este încă un epimorfism. Același lucru este valabil în categoria $\mathcal{C}^{\wedge}$ a prefasciculelor de mulțimi peste U-categoria $\mathcal{C}$.*

Demonstrație. Fie $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in I$, $I \in U$, o mulțime de epimorfisme din Ens și $f : \prod\limits_{\alpha} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha} Y_\alpha$, morfismul „produs" ; f este un epimorfism. Trebuie deci să verificăm că f este o aplicație surjectivă (aplicațiile sujective fiind singurele epimorfisme din Ens) ; fie, pentru aceasta, $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I}$ un element din $\prod\limits_{\alpha} Y_\alpha$ și $x_\alpha \in X$ cu $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$ pentru orice $\alpha \in I$ și $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$; atunci $f(x_\alpha) = y$. Restul rezultă.

Propoziția 5.38. În *U-Ens și deci în $\mathcal{C}^{\wedge}$, U-limitele proiective sînt distributive în raport cu U-sumele directe.*

Demonstrație. Mai întîi să justificăm ce înseamnă faptul că limitele proiective sînt distributive față de limitele inductive. Fie pentru aceasta J o categorie element al lui U și pentru orice $\alpha \in \mathrm{Ob}\, J$, fie dată o mulțime $I(\alpha)$, considerată ca o categorie discretă și pentru orice $f : \alpha \to \alpha'$ morfism din J, $I(f)$ este un functor de la $I(\alpha') \to I(\alpha)$. (Observăm apropierea de categoriile fibrate.) Considerăm categoria $\mathcal{F}$ ale cărei obiecte sînt perechi

$(\alpha, \beta(\alpha))$, cu $\alpha \in \mathrm{Ob}J$, $\beta(\alpha) \in I(\alpha)$ și pentru care
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}((\alpha, \beta(\alpha)), (\alpha', \beta(\alpha'))) = \coprod\limits_{f \in \mathrm{Hom}_J(\alpha, \alpha')} \mathrm{Hom}(\beta(\alpha), I(f)(\beta(\alpha')))$.

Fie acum $F : \mathcal{F} \to \mathrm{Ens}$ un functor covariant. Observăm, din cele de mai sus, că asocierea $\alpha \rightsquigarrow I(\alpha)$ este de fapt un functor contravariant de la J la Cat U; notăm cu I limita proiectivă a acestui functor și cu $p_\alpha : I \to I_\alpha$ proiecțiile canonice. Observăm că p_α sînt epimorfisme în Cat U și în plus sînt aplicații surjective în U-Ens, fapt ce se constată imediat. Fie pentru orice $\alpha \in \mathrm{Ob}\, J$, limita inductivă:

$$\varinjlim_{\beta \in I(\alpha)} F(\alpha, \beta(\alpha)) = \coprod_{\beta(\alpha) \in I(\alpha)} F(\alpha, \beta(\alpha))$$

și morfismele structurale

$$F(\alpha, \beta(\alpha)) \to \coprod_{\beta(\alpha) \in I(\alpha)} F(\alpha, \beta(\alpha))$$

care definesc, prin trecere la limita proiectivă, în mod canonic, morfismul (pentru orice α):

$$\varprojlim_{\alpha \in J} F(\alpha, \beta(\alpha)) \to \varprojlim_{\alpha \in J} \coprod_{\beta(\alpha) \in I(\alpha)} F(\alpha, \beta(\alpha))$$

de aici un morfism unic:

$$(^*) \qquad \mathrm{f} : \coprod_{(\beta(\alpha)) \in \mathrm{Ob} I} \varprojlim_{\alpha \in \mathrm{Ob} J} F(\alpha, \beta(\alpha)) \to \varprojlim_{\alpha \in \mathrm{Ob} J} \coprod_{\beta(\alpha) \in I(\alpha)} F(\alpha, \beta(\alpha)).$$

Vom spune că limitele proiective sînt distributive față de limitele inductive dacă morfismul f este un izomorfism pentru orice alegere a categoriei J în Cat U și a mulțimilor $I(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{Ob}\, J$. Evident, definiția se poate da pentru o categorie oarecare.

Să dovedim că dacă $F(\alpha, \beta(\alpha))$ sînt mulțimi, atunci f este un izomorfism. f este monomorfism. Fie deci x, y elemente din primul membru din $(^*)$ cu $f(x) = f(y)$.

Fie $(\beta(\alpha))$, $(\beta'(\alpha)) \in \mathrm{Ob}\, I$, diferite între ele, cu $x \in \varprojlim\limits_{\alpha \in \mathrm{Ob} J} F(\alpha, \beta(\alpha))$, $y \in \varprojlim\limits_{\alpha \in \mathrm{Ob} J} F(\alpha, \beta'(\alpha))$.

Atunci $x = (x, \beta_{(\alpha)})$, $y = (y, \beta'_{(\alpha)})$ astfel că pentru orice $g : (\alpha, \beta(\alpha)) \to (\alpha', (\beta(\alpha'))$ morfism din $\mathcal{F}$, $F(g)(x_{\beta(\alpha)}) = x_{\beta'(\alpha)}$ etc. Deoarece $f(x) = f(y)$ se deduce că

$$f_{\beta(\alpha)}(x) = f_{\beta'(\alpha')}(y),$$

unde $f_{\beta(\alpha)}$ sînt componentele lui f. Dar, dacă $p_\alpha : \varprojlim \coprod\limits_{\beta(\alpha) \in I(\alpha)} F(\alpha, \beta(\alpha)) \to \coprod\limits_{\alpha} F(\alpha, \beta(\alpha))$ sînt proiecțiile canonice, avem că $p_\alpha \circ f_{\beta(\alpha)}(x) = x_{\beta(\alpha)} = p_{\alpha'} \circ f_{\beta'(\alpha')}(y) = x_{\beta'(\alpha)}$ ceea ce este o contradicție. Aceeași contradicție se obține și dacă $\alpha = \alpha'$ sau $\beta(\alpha) = \beta'(\alpha')$. Făcînd o analiză a aplicației f de mai sus se găsește că ea este și surjectivă.

Pentru Ens, cît și pentru $\mathcal{C}^{\wedge}$, este valabil următorul rezultat:

Propoziția 5.39. *În U-Ens U-produsele sînt distributive în raport cu U-limitele inductive. Același fapt este valabil și pentru $\mathcal{C}^{\wedge}$.*

Aceasta înseamnă că dacă J este o categorie discretă și $I(\alpha)$, $\alpha \in J$ sînt U-categorii mici, atunci morfismul canonic:

$$\varinjlim_{(\beta(\alpha))\in\prod_{\alpha} I(\alpha)} \prod_{\alpha\in J} F(\alpha, \beta(\alpha) \to \prod_{\alpha\in J} \varinjlim_{\beta(\alpha)\in I(\alpha)} F(\alpha, \beta(\alpha))$$

este un izomorfism (folosim notațiile de mai sus). Dovedirea acestei propoziții este mult mai ușoară ca cea de mai sus.

Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit ordinar, element al lui U și $\mathcal{C}^{\sim}$ categoria fasciculelor de mulțimi în raport cu topologia τ; în cele ce urmează vom da condiții necesare și suficiente ca în $\mathcal{C}^{\sim}$, U-produsele să fie distributive față de U-limitele inductive. Pentru aceasta vom introduce cîteva afirmații și vom da unele rezultate preliminarii.

Definiția 5.40. Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit ordinar. Vom spune că $(\mathcal{C}, \tau)$. este un sit standard dacă τ este mai puțin fină decît topologia canonică.

Definiția 5.41. Fie $\mathcal{C}$ o categorie oarecare și $f: P \to A$ un epimorfism din $\mathcal{C}$. Vom spune că f este un „ștergător proiectiv" al lui A în $\mathcal{C}$, dacă pentru orice epimorfism : $F \to G$ și orice morfism $A \to G$, există diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ F \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

Propoziția 5.42. *Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit standard, element al lui U. Următoarele condiții sînt echivalente*:

i) *În $\mathcal{C}^{\sim}$ orice produs de epimorfisme este un epimorfism.*

ii) *Orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ admite un ciur acoperitor R_X astfel că morfismul canonic*:

$$\coprod_{Y\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/R_X} aY \to aX$$

este o „ștergere proiectivă" a lui aX în $\mathcal{C}^{\sim}$ ($a: \mathcal{C}^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\sim}$ functorul canonic)

iii) *Orice obiect din $\mathcal{C}^{\sim}$ admite o „ștergere proiectivă".*

Demonstrație. i) $\Rightarrow$ii). Fie pentru aceasta o familie de epimorfisme $\{F_\alpha \overset{\varphi_\alpha}{\to} G_\alpha\}_{\alpha\in J}$, $J \in U$, din $\mathcal{C}^{\sim}$. Fie $\mathrm{Im}\ \varphi_\alpha \to G_\alpha$ imaginea lui φ_α considerată în $\mathcal{C}^{\wedge}$; atunci avem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd} \Pi F_\alpha \arrow[rr, "\Pi\varphi_\alpha"] \arrow[dr, "v"'] & & \Pi G_\alpha \\ & \Pi \mathrm{Im}\,\varphi_\alpha \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

în care u este monomorfism și v epimorfism (diagrama este considerată în $\mathcal{C}^\wedge$). Deoarece în $\mathcal{C}^\sim$, $\prod \varphi_\alpha$ este un epimorfism și $a(u)$ este monomorfism, deducem că $\prod\limits_\alpha \operatorname{Im} \varphi_\alpha$ este un prefascicul separat al cărui fascicul asociat este $\prod\limits_\alpha F_\alpha$. Așadar pentru orice $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$, avem izomorfismul canonic:

$$(1) \qquad \varinjlim_{R \in J(X)} \prod_{\alpha \in J} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, \operatorname{Im} \varphi_\alpha) \simeq \prod_\alpha G_\alpha(X).$$

Considerăm acum o nouă familie de epimorfisme $\{\Psi_\gamma\}_{\gamma \in J^*}$, $J^* \in U$, construită cu ajutorul familiei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ în felul următor:

Punem $J^* = \coprod\limits_{\alpha \in J} G_\alpha(X)$; evident că $\mathcal{J}^* \in U$. Fie $\gamma = (\alpha, x_\alpha)$, $(\alpha \in J$, $x_\alpha \in G_\alpha(X))$, un element din $\mathcal{J}^*$. Punem $\Psi_\gamma = \varphi_\alpha$, $G_\gamma = G_\alpha$. Formula (1). devine pentru noua familie:

$$(2) \qquad \varinjlim_{R \in J(X)} \prod_{\gamma \in J^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, \operatorname{Im} \Psi_\gamma) \to \prod_{\gamma \in J^*} G_\gamma(X)$$

(considerațiile precedente sînt valabile aici).

Considerăm acum elementul $x^* \in \prod G_\gamma(X)$, pentru care $x^* = (x^*_\gamma)$ și $x^*_\gamma = x_\alpha$, dacă $\gamma = (\alpha, x_\alpha)$. Din proprietățile limitelor inductive, deducem că există un element $R \in J(X)$ și $y^* \in \prod\limits_\gamma \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, \operatorname{Im} \Psi_\gamma)$ a cărui imagine în limita inductivă este exact x^*. Dar atunci, pentru orice $\alpha \in J$, avem morfismul natural indus de φ_α:

$$(3) \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R, \operatorname{Im} \varphi_\alpha) \to G_\alpha(X)$$

care este un epimorfism (conform cu construcția familiei $\{\Psi_\gamma\}_{\gamma \in J^*}$). Deoarece (3) este și un monomorfism, deducem că (3) este un izomorfism pentru orice $\alpha \in J$. După aceste considerații, să dovedim că i) $\Rightarrow$ ii). Considerăm pentru aceasta următoarea familie de epimorfisme indexată de elementul $J(X)$ al lui U: pentru orice $R \in J(X)$, considerăm epimorfismul natural:

$$\varphi_R : a\Big(\coprod_{Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}/R} Y\Big) \to aX$$

(din $\mathcal{C}^\sim$). Din cele de mai sus, există $R_X \in J(X)$ astfel că pentru orice $R \in J(X)$, morfismul canonic:

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(R_X, \operatorname{Im} \varphi_R) \to X(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

e un izomorfism. Obținem în acest mod o factorizare:

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} \coprod Y \arrow[r, "\Psi_R"] & \operatorname{Im} \varphi_R \arrow[r] & X \\ & & R_X \arrow[ul, dashed] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

deoarece $R_X \to X$ este acoperitor în topologia τ care este mai puțin fină decît cea canonică. Deoarece Ψ_R este epimorfism în categoria $\mathcal{C}^\wedge$ și obiectele lui $\mathcal{C}$ sînt proiective în $\mathcal{C}^{\wedge}$, deducem că pentru orice $Z \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/R_X$ există factorizarea :

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/R} Y \arrow[rr, "\psi_R"] & & X \\
& Z \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Să dovedim că morfismul $a\,(\coprod Z) \to aX$ este o ștergere proiectivă a lui X în $\mathcal{C}^{\sim}$. Fie deci $\varphi : F \to G$ un epimorfism din $\mathcal{C}^{\sim}$, $f : a(X) \to G$ un morfism arbitrar. Avem atunci în $\mathcal{C}^{\sim}$ diagrama comutativă, canonic construită :

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\varphi"] & G \\
F' = F \prod_G aX \arrow[u] \arrow[r, "\varphi'"] & aX \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Pentru a termina implicația i)⇒ii), este suficient să dovedim că pentru orice $Z \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/R$, morfismul canonic $aZ \to aX$ se factorizează prin φ'. Dar Im φ' este un ciur acoperitor al lui X (considerăm totul în $\mathcal{C}^{\wedge}$) și deci avem în $\mathcal{C}^{\wedge}$:

$$i(F') \xrightarrow{l} \mathrm{Im}\ \varphi' \to X$$

cu l epimorfism de prefascicule. Dar, morfismul canonic : $\coprod\limits_{T \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/\mathrm{Im}\varphi'} T \xrightarrow{u} \mathrm{Im}\ \varphi'$ este epimorfism și cum F, sursa lui u, este un obiect proiectiv, deducem că există $v : \coprod\limits_{T \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/\mathrm{Im}\varphi'} T \to i(F')$ cu $\varphi \circ v = u$. Din cele de mai sus totul este dovedit.

ii)⇒iii). Fie $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^{\sim}$. Deoarece familia $a\,(X)$, $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ este o familie de generatori pentru $\mathcal{C}^{\sim}$, se deduce că există $J \in U$ și familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, pentru orice α, și epimorfismul : $\coprod\limits_{\alpha \in J} a\,(X_\alpha) \to A$. Dacă $\varphi_\alpha : R_\alpha \to X_\alpha$ este o ștergere proiectivă pentru orice $\alpha \in J$, atunci, morfismul compus

$$\coprod R_\alpha \to \coprod X_\alpha \to A$$

este o ștergere proiectivă a lui A.

În ceea ce privește implicația iii)⇒i), ea are un enunț mult mai general : Fie $\mathcal{D}$ o categorie în care orice obiect admite o ștergere proiectivă ; atunci orice produs (reprezentabil) de epimorfisme este un epimorfism. Într-adevăr, fie $\{F_\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} G_\alpha\{_{\alpha \in I}$ o familie de epimorfisme din $\mathcal{D}$ și diagrama :

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[r, "j_\alpha"] \arrow[d, "u"] & F \arrow[d, "\varphi_\alpha"] \\
\prod\limits_\alpha F_\alpha \arrow[r] & \prod\limits_\alpha G_\alpha \arrow[r, "p_\alpha"] & G
\end{tikzcd}$$

în care u este o ștergere proiectivă ; fie $p_\alpha : \Pi\, G_\alpha \to G_\alpha$ proiecțiile canonice. Deoarece $\varphi_\alpha$este un epimorfism, există $j_\alpha : P \to F_\alpha$, cu $p_\alpha \circ u = \varphi_\alpha \circ j_\alpha$ pentru orice $\alpha \in I$, de unde deducem diagrama comutativă :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \Pi F_\alpha \arrow[d, "a"] \\
\Pi G_\alpha \arrow[r] & \Pi G_\alpha
\end{tikzcd}$$

și din care se deduce că φ este un epimorfism. Propoziția este deci complet dovedită.

Observații. Ciurul mai sus considerat, R_X, este într-un fel minimal în familia de ciururi $J\,(X)$. Mai precis :

DEFINIȚIA 5.43. Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit standard.

a) Vom spune că $R \in J\,(X)$ este un ciur de partiție al lui $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, dacă există subfasciculele $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ale lui R, a căror sumă directă din $C^\wedge$ să fie chiar R.

b) Fie $R \in J\,(X)$. Vom spune că un ciur R' este o rafinare prin partiție a lui R, dacă există pentru fiecare $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}/R$ un ciur $R_Y \to Y$ de partiție, astfel că R' să fie generat de morfismele $R_Y \to Y \to X$.

Exemplu. Fie X un spațiu topologic ; a da un ciur de partiție al lui $U \in \mathrm{Ob}\, X$ (U deschis în X) revine la a da o partiție a lui U în mulțimi deschise.

LEMĂ. *Cu notațiile propoziției precedente, ciurul R_X este astfel că pentru orice $R \in J\,(X)$ există o rafinare prin partiție R'_X a lui R_X mai fină ca R.*

Demonstrație. Într-adevăr, pentru orice $R \in (X)$, $R \cap R_X$ este o rafinare a lui R etc.

PROPOZIȚIA 5.44. *Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit standard aparținînd lui U. Următoarele condiții pentru $(\mathcal{C}, \tau)$ sînt echivalente* :

i) *În $\mathcal{C}^\sim$ U-limitele proiective sînt distributive în raport cu U-sumele directe.*

ii) *În $\mathcal{C}^\sim$, U-produsele directe sînt distribuite în raport cu U-sumele directe.*

iii) *Pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, există ciurul ${}_X R \in J\,(X)$ astfel că pentru orice U-familie de fascicule $\{F_\alpha\}$,* avem :

$$(\amalg F_\alpha)\,(X) \rightleftarrows \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}\,({}_X R, \amalg F_\alpha).$$

iv) *Orice $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ admite un ciur acoperitor mai fin ca orice ciur de partiție al lui X.*

Demonstrația acestei propoziții este cu totul analoagă celei de mai sus și deci o omitem. Importantă este însă următoarea propoziție :

PROPOZIȚIA 5.45. *Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit standard, element al lui U. Notăm ca de obicei cu $i : \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}^\wedge$ functorul canonic de la fascicule la prefascicule, a un adjunct la stînga al său și $L : \mathcal{C}^\wedge \to \mathcal{C}^\wedge$ functorul fascicul separat asociat* *(vezi construcţia din capitolul IV). Următoarele afirmaţii sînt echivalente pentru* $(\mathcal{C}, \tau)$:

i) *În* $\mathcal{C}^{\sim}$ *U-produsele sînt distributive în raport cu U-limitele inductive.*

ii) *În* $\mathcal{C}^{\sim}$ *orice U-produs de epimorfisme este un epimorfism şi U-produsele sînt distributive în raport cu U-sumele.*

iii) *Functorul* a *comută cu limitele proiective.*

iii′) (resp. iii″). *Functorul* L $(L\circ L = i\circ a)$ comută cu *limitele proiective.*

iv) *Functorul* a *admite un adjunct la stînga* $g : \mathcal{C}^{\sim} \to \mathcal{C}^{\wedge}$.

(iv′) ((iv″)) *Functorul* L $(ia = L\circ L)$ *admite un adjunct la stînga.*

v) *Orice* $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ *admite un ciur acoperitor minimal.*

Demonstraţie. Demonstrăm implicaţia ii) ⇒ v). Fie $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$; deoarece în $\mathcal{C}^{\sim}$ un produs de epimorfisme este epimorfism, deducem că există ciurul R_X (vezi ii) din propoziţia 5.42).

Dar atunci este verificată afirmaţia iii), deci propoziţia 5.44 şi deci iv) din aceeaşi propoziţie. Totul rezultă acum imediat.

V) ⇒ iv) Fie R_X un ciur minimal din $J(X)$. Asocierea $X \rightsquigarrow R_X$ este functorială şi ea defineşte un functor covariant de la $\mathcal{C}^{\wedge}$ la $\mathcal{C}^{\wedge}$, care în baza teoremei de prelungire (propoziţia 2.3) se prelungeşte la un functor k : $\mathcal{C}^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\wedge}$ ce admite ca adjunct la dreapta functorul δ, cu :

$$\delta F(X) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(R_X, F) = LF(X).$$

Functorul L are deci adjunct la stînga. Acelaşi fapt este valabil pentru $L\circ L$ şi deci pentru $i\circ a = L\circ L$. Avem izomorfismul functorial :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(kH, F) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(H, i\circ aF).$$

Dacă $H \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}^{\sim}$, atunci $H = iH'$ şi deci :

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(iH', iaF) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\sim}}(H', aF)$$

ceea ce ne arată că de fapt a are un adjunct la stînga. Deoarece avem de-a face cu cîteva implicaţii triviale, este suficient să dovedim că i)⇒ii) şi anume, este suficient să dovedim că în $\mathcal{C}^{\sim}$ un produs de epimorfisme este un epimorfism. Fie pentru aceasta $\{\varphi_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}$ $\alpha \in I$, $I \in U$, o familie de epimorfisme din $\mathcal{C}^{\sim}$. Pentru orice α avem atunci izomorfismul canonic :

$$(*) \qquad \varinjlim \left(X_\alpha \Pi_{Y_\alpha} X_\alpha \underset{p''_\alpha}{\overset{p'_\alpha}{\rightrightarrows}} X_\alpha \right) \xrightarrow{\sim} Y_\alpha$$

deoarece în $\mathcal{C}^{\sim}$ epimorfismele sînt efectiv universale. Din (*) găsim izomorfismul

$$\prod_{\alpha \in I} \varinjlim (X_\alpha \Pi_{Y_\alpha} X_\alpha \rightrightarrows X_\alpha) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha .$$

Deoarece produsele sînt distributive în raport cu limitele inductive, atunci avem izomorfismul

$$\varinjlim_{\substack{\beta(\alpha)\in\Pi D\\ \alpha\in I}} \prod_{\alpha} Z(\alpha,\, \beta(\alpha)) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha} Y,$$

unde D este categoria $0 \rightrightarrows 1$ și $Z(\alpha,\, \beta(\alpha)) = X_\alpha \Pi_{Y_\alpha} X_\alpha$ dacă $\beta(\alpha) = 0$ și egal cu X dacă $\beta(\alpha) = 1$. Dar, după cum se deduce simplu, pentru orice obiect A al limitei inductive de mai sus, există diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Pi(\breve{X}_\alpha \Pi_{Y_\alpha} X_\alpha) \arrow[rr, shift left, "p_A"] \arrow[rr, shift right, "p''_A"'] \arrow[dr, shift left, "p'"] \arrow[dr, shift right, "p''"'] & & A \arrow[dl, shift right, "u'"'] \arrow[dl, shift left, "u''"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

cu $u' \circ p'_A = p'$; $u \circ p''_A = p''$, din care concludem că limita inductivă a diagramei de mai sus este aceeași cu a diagramei :

$$\prod_{\alpha} (X_\alpha \prod\nolimits_{Y_\alpha} X_\alpha) \rightrightarrows \prod_{\alpha} X_\alpha$$

și care este din cele de mai sus ΠY_α. Așadar morfismul canonic $\varphi : \prod\limits_{\alpha} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha} Y_\alpha$ este un epimorfism în $\mathcal{C}^{\sim}$. A mai rămas de dovedit că iii) $\Rightarrow$ v). Pentru aceasta fie $R = \bigcap\limits_{R_\alpha \in J(X)} R_\alpha = \underset{\longleftrightarrow}{\lim}\, R_\alpha$. Atunci $a(R) = \varprojlim a(R) = a(X)$, deci R este un ciur acoperitor . În felul acesta propoziția este complet dovedită.

Observăm din cele de mai sus că nu în toate afirmațiile este nevoie ca $(\mathcal{C},\ \tau)$ să fie un sit standard. De asemenea observăm că afirmația v) din ultima propoziție este independentă de orice univers.

Iată un rezultat care caracterizează U-toposurile ordinare ce sînt de forma $\mathcal{C}^{\wedge}$, cu $\mathcal{C} \in U$.

DEFINIȚIA 5.46. Fie $\mathcal{E}$ un U-topos și $P \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{E}$. Spunem că P este U-proiectiv dacă functorul $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(P, ?)$ comută cu U-limitele inductive. Fie $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ subcategoria plină a lui $\mathcal{E}$ formată din obiectele U-proiective. Vom spune că $\mathcal{E}$ admite suficiente obiecte U-proiective dacă obiectele lui $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ formează o familie de generatori pentru $\mathcal{E}$.

PROPOZIȚIA 5.47. *Fie $\mathcal{E}$ un U-topos. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

i) *$\mathcal{E}$ admite suficiente obiecte U-proiective.*

ii) *Există un sit standard $(\mathcal{C}, \tau) \in U$, astfel că $\mathcal{E}$ să fie echivalentă cu $\mathcal{C}^{\sim}$ și să fie îndeplinită condiția :*

(P) *Orice obiect $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, admite un ciur acoperitor minimal R_X și în plus R_X admite o bază $\{Y_\alpha \to R_X\}_{\alpha\in I}$ astfel că $R_{Y_\alpha} \simeq Y_\alpha$ pentru orice $\alpha \in I$, $I \in U$.*

Demonstrație. Facem mai întîi cîteva considerații din care va rezulta propoziția.

a) Fie $\mathcal{D} \in U$ o categorie, $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}^\wedge$. Condiția necesară și suficientă pentru ca $F \in \mathcal{P}(\mathcal{D}^\wedge)$ este ca să existe $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}$ și un morfism $\varphi : Y \to F$ din $\mathcal{D}$, care să admită o secțiune. Într-adevăr, dacă $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(F, ?)$ comută cu limitele inductive, atunci în particular :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(F, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(F, \varinjlim_{\alpha} X_\alpha) = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(F, X_\alpha).$$

și există $\alpha \in I$, $\Psi : F \to X_\alpha$, astfel că și morfismul canonic : $F \to X_\alpha \to F$ să fie identitatea.

Invers, dacă avem diagrama :

$$F \overset{v}{\to} Y \overset{u}{\to} F, \; u . v = 1_F \;\; Y \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D},$$

atunci morfismul canonic :

$$\varphi : \varinjlim_{\beta} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(F, G_\beta) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(F, \varinjlim G_\beta).$$

este un izomorfism, căci dacă $\Psi : F \to \varinjlim G_\beta$ este un morfism din $\mathcal{C}^\wedge$, atunci $\Psi^\circ u : Y \to \lim G_\beta$ și există un morfism $t : Y \to G$, astfel că diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "t"'] & F \arrow[d, "\Psi"] \\
G_{\beta_1} \arrow[r, "\varphi_{\beta_1}"] & \varinjlim G_\beta
\end{tikzcd}$$

este comutativă : $\Psi \circ u = \varphi_{\beta_1} \circ t$. Dar $t \circ v : F \to G_{\beta_1}$, și $\varphi_{\beta_1} \circ t \circ v = \Psi \circ u \circ v = \Psi$. Faptul că φ este monomorfism este evident.

b) Pentru orice $\mathcal{D} \in \mathrm{Ob\, Cat}\, U$, functorul canonic : $h' : \mathcal{D} \to \mathcal{P}(\mathcal{D}^\wedge)$ induce o echivalență de categorii $h'^\wedge : \mathcal{P}(\mathcal{D}^\wedge)^\wedge \to \mathcal{D}^\wedge$, după cum se vede imediat, h fiind deplin fidel și orice functor de la $\mathcal{D}$ la Ens, putîndu-se extinde la $\mathcal{P}(\mathcal{D}^\wedge)$ în mod canonic : dacă $G \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{D}^\wedge$, atunci $G(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\wedge}(h_X, G)$ și putem defini $G(F)$ (pentru F avem diagrama $F \overset{v}{\to} X \overset{u}{\to} F$, $u \circ v = 1_F$) ca fiind $F(X)$ etc.

c) Fie $(\mathcal{C}, \tau)$ un sit standard. Admitem că $\mathcal{P}(\mathcal{C}^\sim) \supseteq \mathcal{C}$. Atunci functorul incluziune $i : \mathcal{C}^\sim \to \mathcal{C}^\wedge$ este o echivalență de categorii. Fie pentru demonstrație $F \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}^\wedge$, $F = \varinjlim X_\alpha$ $X_\alpha \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$; atunci F este un fascicul ; pentru aceasta, fie $R \to X$ o rafinare a lui $\mathcal{C}$; avem :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, \varinjlim_{\alpha} X_\alpha) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, \varinjlim_{\alpha} i \circ h' X_\alpha)$$

$$\varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(X, ih' X_\alpha) = \varinjlim_{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\sim}(h'X, h'X_\alpha)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\sim}(h'X, \varinjlim h'X_\alpha).$$

unde $h' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^\sim$ este functorul canonic. Se consideră $R = \varinjlim Y_\beta$ și demonstrația urmează simplu.

Să demonstrăm acum că i) ⇒ ii). Considerăm categoria $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ şi functorul canonic : i : $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$, care induce pe $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ o topologie, $\mathcal{E}$ fiind dotat cu topologia canonică; din lema de comparare (propoziţia 4.57) şi din faptul că $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ este o familie de generatori pentru $\mathcal{E}$, se deduce că i induce o echivalenţă între $\mathcal{P}(\mathcal{C})^{\sim}$ şi $\mathcal{E}$, dar din afirmaţia c) de mai sus se deduce atunci că $\mathcal{P}(\mathcal{C})^{\sim} \simeq \mathcal{P}(\mathcal{C})^{\wedge}$. Faptul că ii) ⇒ iii) este de asemenea clar, iii) ⇒ i); într-adevăr, atunci, conform propoziţiei 5.44, functorul $a : \mathcal{C}^{\wedge} \to \mathcal{C}^{\sim}$ admite un adjunct la stînga : g. Să verificăm că $\mathcal{C}^{\sim}$ are o familie de generatori U-proiectivi. Fie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ şi $\{Y_\alpha \to R_X\}_{\alpha \in I}$ o acoperire a lui R_X (ciurul minimal) cu obiecte astfel că $R_{Y_\alpha} \simeq Y_\alpha$ pentru orice $\alpha \in I$. Dar atunci pentru orice $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{\wedge}$,

$$(aF)(Y_\alpha) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\wedge}}(Y_\alpha, F) = F(Y_\alpha).$$

Evident că obiectele $aY_\alpha = Y_\alpha$ sînt U-proiective şi formează un sistem de generatori ai lui $\mathcal{C}^{\sim}$, q.e.d.

Observaţie. Putem completa cele de mai sus cu următoarele :

i) Fie $\mathcal{E}$ un U-topos de forma $\mathcal{D}^{\wedge}$ cu $\mathcal{D} \in U$. Atunci orice sit standard : $(\mathcal{C}, \tau)$ cu $\mathcal{E} \simeq \mathcal{C}^{\sim}$ şi $\mathcal{P}(\mathcal{C}^{\wedge}) = \mathcal{C}$, satisface punctului iii) din ultima propoziţie. Propunem cititorului ca exerciţiu dovedirea acestui rezultat.

ii) Fie $X \in U$ un spaţiu topologic ; condiţia necesară şi suficientă pentru ca $X^{\sim}$ să fie echivalentă cu o categorie de tipul $\mathcal{D}^{\wedge}$, este ca orice deschis U al lui X să admită o acoperire cu deschişii $\{U_\alpha\}_\alpha$, astfel că $U_\alpha \to U_\alpha$ să fie cea mai fină acoperire a lui U_α. (Atunci U_α dau cea mai fină acoperire a lui U.) Această condiţie exprimă condiţia (P) din ii) ultima propoziţie.

§ 14. CARACTERIZAREA UNOR TOPOSURI ABELIENE

Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian (evident, un U-topos) ; există atunci un inel A_0 şi functorul exact $T : \mathrm{Mod}\, A_0 \to \mathcal{C}$, şi S un adjunct al său la dreapta deplin fidel ; folosind notaţii şi definiţii din Cap. III putem scrie şirul „exact'' de categorii şi functori :

$$0 \to \mathrm{Ker}\, T \to \mathrm{Mod}\, A_0 \xrightarrow{T} \mathcal{C} \to 0.$$

Dar Ker T este un topos abelian şi deci avem şirul exact :

$$0 \to \mathrm{Ker}\ T \to \mathrm{Mod}\, A_1 \to \mathrm{Ker}\ T \to 0$$

şi prin recurenţă şirul exact :

$$(^*) \qquad \to \mathrm{Mod}\ A_n \to \mathrm{Mod}\ A_{n-1} \to \ldots \to \mathrm{Mod}\ A_0 \to \mathcal{C} \to 0$$

numit o rezoluţie modulară a lui $\mathcal{C}$.

DEFINIŢIA 5.48. Fie $\mathcal{C}$ un topos abelian ; folosind notaţiile de mai sus, vom spune că $\mathcal{C}$ are dimensiunea modulară cel mult n dacă există o rezoluţie modulară a lui $\mathcal{C}$ cu $A_k = 0$ pentru $k > n$. Vom spune că $\mathcal{C}$ este de dimensiune modulară infinită dacă orice rezoluție modulară a lui $\mathcal{C}$ are dimensiune infinită.

Dacă $\mathcal{C}$ este un topos abelian care admite o rezoluție modulară finită (adică există un q de la care încolo $Aq=0$ în(*)), atunci definim dimensiunea modulară μ ($\mathcal{C}$) a lui $\mathcal{C}$ ca fiind cea mai mică dimensiune a rezoluțiilor sale modulare.

Evident, dacă $\mu(\mathcal{C}) = 0$, atunci $\mathcal{C}$ este echivalentă cu o categorie de module. În cele ce urmeză vom caracteriza toposurile abeliene care sînt de dimensiuni modulare 0 și 1 și unele ce au dimensiunea modulară 2. Pentru caracterizarea toposurilor de dimensiune modulară 0 avem propoziția :

PROPOZIȚIA 5.49. *Fie* $\mathcal{C}$ o *U-categorie abeliană. Următoarele afirmații sînt echivalente :*

a) $\mathcal{C}$ *este un topos abelian de dimensiune modulară zero.*

b) $\mathcal{C}$ *are un generator proiectiv, finit transferabil și satisface* Ab 3.

c) *Există un izomorfism* φ *de la inelul* A *la inelul* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$.

$U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, *astfel că* U *este un generator proiectiv al lui* $\mathcal{C}$. *Orice familie de obiecte* $\{U_i\}_i$ $i \in I \in U$. $U_i \simeq U$, *pentru orice* $i \in I$, *are o sumă directă în* $\mathcal{C}$ *și, în plus, morfismul canonic*

$$\coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U \coprod_i, U_i)$$

este izomorfism pentru orice $I \in U$, $U_i \simeq U$.

Demonstrație. Conform propoziției 5.25 sînt evidente implicațiile a) $\Leftrightarrow$ b) și b) $\Rightarrow$ c). Rămîne să dovedim că c) $\Rightarrow$ a) sau c) $\Rightarrow$ b).

Vom dovedi implicația c) $\Rightarrow$ b). Dovedim că $\mathcal{C}$ satisface Ab 3. Fie $\{A_i\}_{i\in I}$ o mulțime de obiecte din A și pentru orice $i \in I$ ($I \in U$) șirul exact ($U_{\alpha_i} \simeq U \simeq U_{\beta_i}$) :

$$^{*}\coprod_{\beta_i \in k_i} U_{\beta_i} \xrightarrow{f_i} \coprod_{\alpha_i \in J_i} U \xrightarrow{p_i} A_i \to 0.$$

Considerăm diagrama canonic construită, f fiind indusă de f_i :

$$\coprod_{i\in I} \Big(\coprod_{\beta_i \in k_i} U_{\beta_i}\Big) \xrightarrow{f} \coprod_{i\in I} \Big(\coprod_{\alpha_i \in J_i} U_{\alpha_i}\Big) \xrightarrow{p} A \to 0\,;$$

morfismele structurale :

$$\varphi_i : \coprod_i U_{\alpha_i} \to \coprod_{i\in I} \Big(\coprod_{\alpha_i \in J_i} U_{\alpha_i}\Big)$$

$$\varphi_i : \coprod U_{\beta_i} \to \coprod_i \Big(\coprod_{\alpha_i \in I_i} U_{\alpha_i}\Big)$$

definesc morfismele $\gamma_i : A_i \to A$. Dacă $g_i : A_i \to B$ sînt morfisme din $\mathcal{C}$, atunci $g_i \circ p_i$ definesc un morfism $g : \coprod_i (\coprod U_{\alpha_i}) \to B$ cu $g \circ \varphi_i = g_i \circ \varphi_i$; dar $g \circ f = 0$, deoarece $g \circ \varphi_i \circ f_i = g_i \circ p_i \circ f_i = 0$ pentru orice i și deci există un unic morfism de la A în B, notat $\overline{g}$, cu $\overline{g} \circ p = g$; atunci $\overline{g} \circ \gamma_i \circ p_i = \overline{g} \circ p \circ \varphi_i = g \circ \varphi_i = g_i \circ p_i$; deci p_i fiind epimorfisme : $\overline{g} \circ \gamma_i = g_i$. Așadar $A = \coprod_{i\in I} A_i$.

Observație. Am folosit mascat construcția unei limite inductive într-o categorie cu sume directe și conucleu de săgeată dublă utilizînd doar acele sume directe care apar.

Pentru a dovedi cu U este finit transferabil, este suficient să dovedim că el comută cu sumele directe și aceasta se face folosind diagrama (*) căreia îi aplicăm functorul $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(U, ?)$ q.e.d.

Consecințe ale propoziției dovedite cititorul poate găsi spre exemplu în [I], Cap. V, pag. 406 (teoremele lui Morita).

Trecem acum la a caracteriza categoriile de dimensiune modulară nulă sau cel mult 1.

PROPOZIȚIA 5.50. *Fie* $\mathcal{C}$ o *U-categorie abeliană. Următoarele afirmații sînt echivalente.*

i) $\mathcal{C}$ *admite generatori și satisface axiomele Ab 6 și Ab* 4^*.

ii) *Există rezoluția modulară a lui* $\mathcal{C}$:

$$0 \to \operatorname{Mod} A_1 \to \operatorname{Mod} A_0 \to \mathcal{C} \to 0$$

(A_0 *și* A_1 *sînt inele din* U).

iii) $\mathcal{C}$ *este echivalentă cu categoria cît a unei categorii* Mod A, *printr-o subcategorie localizantă asociată cu o topologie pe* A *definită de un ideal bilateral,* a, *cu* $a.a=a$ (*adică* a *este idempotent*).

iv) $\mathcal{C}$ *admite generatori, limite inductive, limite proiective și orice relație de distributivitate a limitelor inductive în raport cu limitele proiective, valabilă în orice categoire de module, este de asemenea valabilă în* $\mathcal{C}$.

v) $\mathcal{C}$ *este echivalentă cu o categorie cît* : Mod A/B, unde B *este o subcategorie bilocalizantă* (*adică* B° *în* (Mod A)$^\circ$ *este încă localizantă* *)).

v′) $\mathcal{C}$ *satisface* Ab 5 *și există o categorie* Mod A, *și functorul* T : Mod $A \to \mathcal{C}$ *exact iar* S *un adjunct la dreapta al lui* T *deplin fidel, iar* T *are adjunct și la stînga* S_1.

Demonstrație. Echivalența i)⇔iv) este imediată, deoarece dacă i) este valabilă, atuci $\mathcal{C}$ are limite inductive și proiective și satisface Ab 6 și Ab 4, deci Ab 5 etc. ; rămîne să remarcăm că orice relație de distributivitate a limitelor proiective în raport cu cele inductive se reduce la axiomele de mai sus. Faptul că iv ⇒ i) este evident, căci Ab 6 este o relație de distribuitivitate și în Ab (deci într-o categorie de module) produsele sînt distributive față de limitele inductive filtrate și convexe căci este valabil următorul rezultat, a cărui demonstrație cititorul este în măsură să o facă :

Fie $\mathcal{C}$ o categorie concretă (Ab, $\mathcal{G}r$, Ann, Annc etc.) cu structură algebrică și $S : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ functorul subiacență, care comută cu limitele proiective. S comută și cu limitele inductive pseudofiltrate și conexe.

Este suficient ca cititorul să dovedească afirmația de mai sus numai pentru cazul $\mathcal{C} = \mathrm{Ab}$, pentru scopurile de față.

Observație. Pentru a termina demonstrația iv)⇒i) este suficient să facem apel la implicația i)⇒ii), a propoziției 5.45 din care va rezulta că $\mathcal{C}$ satisface Ab 4^*.

---

*) Vom preciza în decursul demonstrației unele fapte.

v)⇔v'). Remarcăm că dacă $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ este o categorie localizantă, atunci $\mathcal{A}^\circ \subset \mathcal{C}^\circ$ este încă o subcategorie deasă, şi deci are sens categoria cît $\mathcal{C}^\circ/\mathcal{A}^\circ$, dar functorul canonic $T^\circ : \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{C}^\circ/\mathcal{A}^\circ$ nu are în general un adjunct la dreapta ; dacă are, $\mathcal{A}^\circ$ este localizantă şi după terminologie ea se zice bilocalizantă ; evident că în acest caz functorul canonic T : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{A}$ are un adjunct la stînga şi unul la dreapta, căci $(\mathcal{C}/\mathcal{A})^\circ$ este echivalentă cu $\mathcal{C}^\circ/\mathcal{A}^\circ$. Echivalenţa v) ⇔ v') este deci imediată.

v')⇒i). Într-adevăr, superiorul familiei filtrate de subobiecte este chiar limita lor inductivă şi intersecţia lor este limita lor proiectivă. Aşadar, dacă $\{I_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sînt familii filtrate crescător de obiecte din $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, atunci considerăm pe X în Mod A şi avem relaţia respectivă

$$\bigcup_{\beta(\alpha) \in \Pi I_\alpha} \bigcap_{\alpha \in I} X_{\alpha\beta(x)} = \bigcap_{\alpha \in I} \bigcup_{\beta(\alpha) \in I_\alpha} X_{\alpha,\beta(\alpha)}$$

căreia aplicîndu-i functorul canonic T : Mod $A \to \mathcal{C}$, care comută cu limitele inductive şi proiective, găsim că $\mathcal{C}$ satisface Ab 6. Analog $\mathcal{C}$ satisface Ab 4*.

iii)⇒v'). Fie a un ideal bilateral idempotent din A (A este un inel) şi F familia tuturor idealelor drepte care conţin a ; F este o topologie pe A. Într-adevăr, pentru orice $x \in A$ şi $\mathrm{b} \in F$, $\{b : x\}$ conţine pe a, căci $xa \subseteq a \subseteq b$. Dacă c este un ideal drept din A, cu $\{c : x\} \geqslant a$ pentru orice $x \in b \in F$, atunci $c \in F$, într-adevăr, dacă $y \in a$, atunci $y = \sum_{1 \leqslant i \leqslant x} x_i\, y_i$, cu x_i, $y_i \in a$ şi deci este suficient să luăm $x_1, \ldots, x_n \in \underline{a} \subseteq b$ şi idealele $\{c : x_i\}$ care conţin pe a şi deci conţin elementele $y_1, \ldots, y_n$; deci în c este inclus şi elementul $\sum_i x_i\, y_i = x$. a este deci inclus în c adică $c \in F$.

Vom dovedi acum că functorul canonic : a : Mod $A \to$ Mod $A/\mathcal{F} = \mathcal{C}'$ are adjunct la stînga. Pentru a-l defini pe $i \circ a$, unde $i : \mathcal{C}' \to$ Mod A este functorul canonic de la fascicule la prefascicule, considerăm functorul : L : Mod$A \to$ Mod$A$ cu $L(M) = \varinjlim_{b \in F} \mathrm{Hom}_A(b, M) = \mathrm{Hom}_A(a, M)$, a cărui structură de A-modul drept este canonic definită (iată în cazul de faţă o descriere a acestei structuri : pentru $\lambda \in A$, şi $f : \underline{a} \to M$ $(f\lambda)(a) = f(\lambda a)$).

Conform teoremei de prelungire forte (Cap. II, propoziţia 4.4), functorul $A \rightsquigarrow \underline{a} \in$ Ob Mod A, are o prelungire canonică, adjunctul la stînga al lui L. Analog, functorul $L \circ L$, are un adjunct la stînga, notat j. Dar atunci

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{j}, ?) \simeq \mathrm{Hom}_A(?, i \circ a) \simeq \mathrm{Hom}_A(a?, a)$$

şi evident că pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, adică $X = iX'$, avem că $j(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, căci

$$\mathrm{Hom}_A(a, iX') = \mathrm{Hom}_A(j(A), iX')\,\mathrm{Hom}_A(A, iai(X')) = \mathrm{Hom}_A(A, iX') = iX'.$$

Implicaţia iii)⇒v') este dovedită.

iii)⇒ii). Calculăm subcategoria localizantă $\mathcal{F}$ asociată cu topologia F de mai sus ; evident că $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$, dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X$, avem şirul exact :

$$0 \to \mathrm{Ker}\ \varphi^x \to A \xrightarrow{\varphi^x} (x) \to 0$$

cu $\varphi^x(1) = x$ şi Ker $\varphi^x \supseteq \underline{a}$. Fie $u : A \to A/a$ morfismul canonic şi u: Mod $A/a \to$ Mod A functorul restricţie, u_* este exact şi deplin fidel, mai mult, u_* identifică pe Mod A/a cu $\mathcal{F}$ ceea ce se deduce imediat din cele de mai sus, şi din şirul exact

$$(^*) \quad 0 \to \underline{a} \to A \to A/a \to 0$$

căci $X \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{F}$ dacă şi numai dacă morfismul canonic indus de p:

$$X \otimes_A A \to X \otimes_A A/\underline{a}$$

este de izomorfism, fapt care caracterizează şi obiectele lui Mod$A/\underline{a}$.

ii)$\Rightarrow$iii). Fie Mod A_1 o subcategorie localizantă în Mod A_0; atunci A_1 are structură de A_0-modul drept şi deci pentru orice $a_0 \in A_0$, $a_1 \subset A_1$, $a_1 a_0$ este un element din A_1; pentru $a_1 = 1$ (elementul identitate al lui A_1) asocierea : $a_0 \rightsquigarrow 1.a_0$ este un omomorfism de inele de la A_0 la A_1 notat φ; evident, φ_* este deplin fidel şi coincide exact cu functorul incluziune Mod $A_1 \to$ Mod A_0. Dacă $\underline{a} = \mathrm{Ker}\ \varphi$, atunci $\underline{a}$ este un ideal bilateral din A_0 şi la fel este $\underline{a} \cdot \underline{a} = \underline{b}$. Dar $A_0/\underline{b}$ este un A_1-modul drept şi deci morfismul canonic :

$$A_0 \otimes_A A_1 \to A_0/b \otimes_A A_1$$

este un izomorfism, din care concludem că $A_0/\underline{a}$ este canonic izomorf cu $A_0/\underline{b}$; aşadar $\underline{b} = \underline{a}$. Mai mult, subcategoria localizantă asociată cu topologia definită de $\underline{a}$ este exact Mod A_1, ceea ce termină echivalenţa ii$\Rightarrow$iii).

i)$\Rightarrow$iii) . Fie U un generator al lui $\mathcal{C}$ şi F topologia lui $A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, U)$ asociată cu categoria cît $\mathcal{C}$ a lui Mod A. Pentru orice $\underline{a} \in F$, notăm cu $\varphi_a : \coprod_{x \in a} A_x \to A$ ($A_x \simeq A$, pentru orice $x \in \underline{a}$), morfismul canonic definit de morfismele φ_a^x de clase fundamentale x, $x \in \underline{a}$. Evident, imaginea lui φ_a este exact a şi deci, aplicînd functorul canonic T : Mod $A \to \mathcal{C}$ de trecere la categoria cît, avem epimorfismul $T(\varphi_a) : \coprod_{x \in \underline{a}} U_x \to U \to 0$.

Fie acum $X_a = \coprod_{x \in A} U_x$ şi $f_a = T(\varphi_a)$. Considerăm mulţimea $J = \coprod_{a \in F} A_a$ şi pentru orice $i = (a, \lambda)$, $a \in F$, $\lambda \in A_a$, considerăm obiectul $Y_i = X_a$, şi morfismul $f_i = f_a$; trecînd în Mod A avem morfismul canonic :

$$f = \prod_{i \in \underline{J}} S(f_i) : \prod_{i \in \underline{J}} S(Y_i) \to \prod_{i \in \underline{J}} A_i$$

astfel că Coker $f = \prod$ Coker $S(f_i)$ este un obiect din A (subcategoria localizantă asociată cu F, deoarece în $\mathcal{C}$ un produs de epimorfism este un epimorfism; concludem deci că morfismul canonic :

$$\mathrm{Im}\, f = \prod_i \mathrm{Im}\ S(f_i) \to \prod_i A_i$$

este un monomorfism acoperitor şi deci avem izomorfismul canonic :

$$\varphi : \varinjlim_{b \in F} \mathrm{Hom}_A(b, \prod_i \mathrm{Im}\, S(f_i)) \xrightarrow{\sim} \prod_i A_i .$$

Din proprietățile limitei inductive, pentru familia $\{y_i\}_{i\in I}$ cu $y_i = \lambda$ dacă $i = (a, \lambda)$, $\lambda \in A$, există un ideal $\underline{c} \in F$ și $n : \underline{c} \to \prod \operatorname{Im} S(f_i)$, astfel că morfismul canonic :

$$\Psi_c : \operatorname{Hom}_A(\underline{c}, \prod \operatorname{Im} S(f_i)) \to \prod A_i$$

transportă pe η peste familia (λ_i) $i \in I$. Dacă revenim la construcția mulțimii I, atunci deducem că pentru orice $\underline{a} \in F$, morfismul canonic :

$$\operatorname{Hom}_A(\underline{c}, \operatorname{Im} S(f_a)) \to A$$

este un epimorfism și deci un izomorfism, el fiind un monomorfism.

Demonstrația se continuă la fel ca și pentru toposurile ordinare (propoziția 5.43).

Trecem acum la a caracteriza toposurile abeliene de dimensiune modulară $\mu(\mathcal{C}) \leqslant 2$, pentru un astfel de topos abelian există șirul exact :

$$(*) \qquad 0 \to \operatorname{Mod} A_2 \to \operatorname{Mod} A_1 \to \operatorname{Mod} A_0 \xrightarrow{T} \mathcal{C} \to 0$$

Dacă $\mathcal{A} = \operatorname{Ker} T$, atunci $\mathcal{A}$ este o subcategorie localizată a lui $\operatorname{Mod} A_0$, care, conform propoziției precedente, verifică axioma AB4* și în mod automat AB 6. Așadar $\mu(\mathcal{C}) \leqslant 2$ dacă și numai dacă $\mu(\mathcal{A}) \leqslant 1$ sau, ceea ce este echivalent în cazul de față, dacă $\mathcal{A}$ admite ștergere proiectivă pentru orice obiect sau încă, dacă $\mathcal{A}$ satisface AB4*.

PROPOZIȚIA 5.51. *Următoarele afirmații pentru categoria* $\mathcal{C}$ *sînt echivalente* :

e) $\mathcal{C}$ *este un* U*-topos abelian pentru care* $\mu(\mathcal{C}) \leqslant 2$.

b) *Există un inel* $A \in U$, *o topologie* F *pe* A, *formată din ideale stîngi, cu proprietatea că pentru orice* $\underline{a} \in F$, *există* $\underline{a}^* \subseteq a$, $a^* \in F$, *încît pentru orice* $\underline{b} \in F$ *există* $\alpha_b \in a$ *cu* $\underline{a}^*(1 + \alpha_b) \in \underline{b}$ *astfel că* $\mathcal{C}$ *să fie echivalentă cu categoria* Mod $A/\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ *fiind subcategoria localizantă asociată cu* F.

Demonstrație, a) $\Rightarrow$ b). Fie $\mu(\mathcal{C}) \leqslant 2$ și (*) o rezoluție modulară a lui $\mathcal{C}$ iar $\mathcal{A} = \operatorname{Ker} T$; știm că $\mathcal{A}$ verifică Ab4* și deci conform propoziției 5.42 orice obiect din $\mathcal{F}$ admite o ștergere proiectivă. Fie $\underline{a} \in F$ și $\alpha : P \to A/a$, o ștergere proiectivă a lui A/a; fie $x \in P$ cu $\alpha(x) = \hat{1}$, $\hat{1}$ fiind imaginea lui 1 prin morfismul canonic $A \to A/\underline{a}$. Considerăm diagrama :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, "\varphi"'] & & A/\underline{a} \arrow[dd, equal] \\
& A \arrow[ul, "u"'] \arrow[ur, "q"'] \arrow[dl, "h"'] & \\
A/\underline{a} \cap \underline{b} \arrow[rr, "\beta"] & & A/\underline{a}
\end{tikzcd}$$

cu β epimorfismul canonic și φ construit astfel că $\beta \circ \varphi = \alpha$. Fie $u : A \to P$ morfismul de clasă fundamentală x; atunci $\operatorname{Ker} u = a^* \subseteq a$ și $a^* \in F$. Fie q și h morfismele canonice ; evident, $q = \alpha \circ u$, iar $\beta \circ h = \beta \circ \varphi \circ u$. Fie $y \in A$ cu $h(y) = \varphi(x)$; deoarece $(\beta \circ h)(y) = (\beta \circ \varphi \circ u)(1)$, deducem că $y - 1 \in \underline{a}$. Deoarece $h(y) = (\varphi \circ u)(1)$, deducem că $(a \cap b : y) \supseteq a^*$, adică $y - a^* = (1 + (y - 1))$ $a^* \subseteq a \cap b \subseteq b$

b) ⇒ a). Admitem că sînt verificate condițiile de la punctul b); să dovedim că orice obiect din A (și pentru aceasta este suficient să dovedim pentru generatori) posedă o ștergere proiectivă.

Fie deci $\underline{a}^* \subseteq \underline{a}$, $\underline{a}^*$, $\underline{a} \in F$ și epimorfismul canonic :

$$\varphi := A/\underline{a}^* \to A/\underline{a}.$$

Fie $f : A/a \to X''$, un morfism din $\mathcal{A}$, iar $p : X \to X''$ un epimorfism din A ; avem deci diagrama cu liniile exacte :

$$\begin{tikzcd}
A/\underline{a}^* \arrow[r, "\varphi"] & A/\underline{a} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
X \arrow[r, "p"] & X'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fie $y = f(\hat{1})$ ($\hat{1}$ este clasa lui $\hat{1}$ în A/a) și $x \in P$, cu $p(x) = y$. Fie încă $(\underline{b})$ = Ann x (anulatorul lui x); $\underline{b} \in F$ și deci există $\alpha_l \in a$, cu $(1+\alpha_l)\, a^* \subseteq b$; dar pentru orice element $t \in a^*$, avem $\gamma(t) = xt$, și încă $x(1+\alpha_h)\, t = xt + x\alpha_b t = 0$. Definim atunci $h : A/a^* \to X$ astfel : $h(1) = x(1+\alpha_b)$.

Așadar :

$$(p \circ h)(y) = p(x(1+\alpha_b)\, y) = p(x)\, y + p(x)\alpha_b = p(x)\, y = (f \circ \varphi)(y).$$

c.c.t.d.

Primită la redacție la 5 octombrie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, București.

BIBLIOGRAFIE

1. Gabriel, Pierre, *Des catégories abéliennes.* Bull. Soc. Matth. Fr., **90**, 323–448 (1962).
2. Gabriel, Pierre et Popescu, Nicolae, *Caractérisation des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductions exactes.* C. Acad. Sci. Paris **258**, 4188 (1964).
3. Roos, Jan. Erik, C.-R.C. Acad. Sci. Paris, **259**, 969, 1065, 1801 (1964) ; *23* (1965).
4. Mitchell, Barry, *Full imbeding theorem.* American Math. Society, **5** (1964).
5. Freyd, P. J., *Abelian categories.* Harper and Row, New York, 1964.
6. Popescu, N., Radu, Alexandru, *Sur les topos abéliénes.* Rev. Roum. de mat. pures et appl., (1966).

TEOREME LIMITĂ PENTRU PROCESE STOCASTICE

DE

HARRY COHN

Se studiază proprietățile limită ale unor clase de variabile aleatoare dependente, definite cu ajutorul unor condiții impuse probabilităților unor evenimente condiționate de variabilele procesului. Se dau aplicații la cazurile lanțurilor cu legături complete, al lanțurilor de ordin infinit și al lanțurilor Markov neomogene.

INTRODUCERE

În lucrarea de față sînt studiate proprietățile unor clase de variabile aleatoare dependente care conțin, printre altele, tipuri cunoscute de lanțuri cu legături complete *), de lanțuri de ordin infinit *) și de lanțuri Markov. În primul capitol se introduc două clase de variabile aleatoare dependente, stabilindu-se o teoremă similară cu legea 0—1 a lui Kolmogorov, o teoremă de tip Borel-Cantelli, o inegalitate de tip Kolmogorov, se studiază comportarea seriilor de variabile aleatoare și se dau cîteva variante ale legii tari a numerelor mari. Remarcăm că în stabilirea acestor proprietăți nu se face apel în mod esențial la ipoteza uzuală de asimptotic independență, iar alegerea coeficienților $(\varepsilon_n)_{n \in N^*}$ a fost făcută avîndu-se în vedere aplicarea acestor rezultate la o serie de cazuri particulare de procese stocastice, aplicare ce va fi dată în ultimul capitol al lucrării.

Capitolul al doilea studiază problema limită centrală și legea tare a numerelor mari pentru o clasă de procese stocastice ergodice, folosindu-se în ambele cazuri reducerea problemei la studiul unui proces staționar cunoscut în literatura de specialitate. În ceea ce privește teorema limită centrală, rezultatele obținute extind ultimele rezultate cunoscute în acest domeniu și datorate lui M. Iosifescu [16], renunțîndu-se la ipoteza de mărginire a variabilelor aleatoare considerate.

---

*) Noțiunile de lanț cu legături complete și de lanț de ordin infinit au fost introduse în teoria probabilității de O. Onicescu și G. Mihoc în 1935 [30].

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 993 – 1027, BUCUREȘTI, 1966

În studiul convergenței către legea normală a lanțurilor cu legături complete au fost folosite două metode :

1) descompunerea operatorilor liniari, asociați funcțiilor caracteristice (O. Onicescu, G. Mihoc [31], G. Mihoc [27], [28], G. Mihoc, G. Ciucu [29], G. Ciucu [4], [5]) ;

2) reducerea problemei la cazul variabilelor aleatoare independente după metoda lui S. N. Bernștein (M. Iosifescu [16]).

În lucrarea de față a fost urmată o cale diferită, complicînd oarecum problema și reducînd-o la studiul unui proces dependent, și anume a unui proces staționar, care se reduce apoi la un șir de variabile aleatoare independente tot după metoda lui S. N. Bernștein. Procesul staționar care apare aici are o serie de proprietăți importante care conduc la rezultate deosebit de puternice, aduse la forma definitivă de I. A. Ibraghimov (la o condiție de tip Lindeberg) în 1962 [14].

În sfîrșit, capitolul al treilea conține aplicații ale rezultatelor primelor două capitole la lanțurile cu legături complete, la lanțurile de ordin infinit și la lanțurile Markov neomogene.

În cazul lanțurilor cu legături complete, rezultatele primelor două capitole se transpun aproape imediat. Remarcăm că variantele legii tari a numerelor mari obținute prin două metode diferite — una prin utilizarea procesului staționar limită și a doua prin utilizarea unei inegalități de tip Kolmogorov din primul capitol — se reduc în cazul particular cînd variabilele aleatoare sînt independente la binecunoscutele teoreme ale lui Kolmogorov.

Aplicarea proprietăților la limită ale proceselor staționare la lanțurile de ordin infinit se face prin intermediul sistemului cu legături complete, obținîndu-se două variante pentru teorema limită centrală care slăbesc fiecare condițiile teoremei limită centrale date de C. T. Ionescu Tulcea în [15].

În cazul lanțurilor Markov neomogene, aplicarea rezultatelor primului capitol se face prin intermediul cîtorva proprietăți auxiliare, condițiile teoremelor fiind exprimate cu ajutorul coeficienților de ergodicitate ai lui R. Dobrușin [12]. Teoremele obținute extind rezultatele date de T. Ueno [33] și J. Kozniewska [22], suprimîndu-se unele condiții impuse de acești autori. Menționăm că demonstrațiile date utilizează metode diferite de cele ale autorilor mai sus citați.

CAPITOLUL I

DOUĂ CLASE DE VARIABILE ALEATOARE DEPENDENTE

1.1. INTRODUCERE

În acest capitol vom studia cîteva proprietăți ale variabilelor aleatoare dependente definite cu ajutorul unor coeficienți care constituie, în esență, o extindere la cazul variabilelor aleatoare oarecari a așa numiților „coeficienți de ergodicitate" utilizați în [11], [12] și [29]. Tipurile de variabile aleatoare considerate aici conțin printre altele, variabilele independente, variabilele m-dependente [10], anumite clase de procese staționare

nare [14], de lanțuri cu legături complete [6], [7] și de lanțuri de ordin infinit [8].

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate, $\{X_n(\omega)\}_{n\in N^*}$ un șir de variabile aleatoare reale, $\mathcal{K}_m^n$ σ-algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabile aleatoare $X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n$ cu $m, n \in N^*$, $\overline{A}$ complementara mulțimii A și χ_A indicatorul mulțimii A, adică funcția

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \omega \in A, \\ 0 & \omega \in \overline{A}. \end{cases}$$

Pentru fiecare $n \in N^*$ să considerăm șirul de numere

$$\varphi^{(n)} 1, \ldots, \varphi^{(n)}(n-1)$$

care satisface condiția

$$\sup_{B\in\mathcal{K}_{k+s}^n,\, k\in\{1,\ldots,n-s-1\}} |P(B \mid \mathcal{K}_1^k) - P(B)| = \varphi^{(n)}(s)\,[1].$$

Să observăm că $\varphi^{(n)}(s) \leqslant 1$ pentru orice n și $s \in N^*$ și că au loc inegalitățile

$$\varphi^{(n)}(p) \geqslant \varphi^{(n)}(q) \qquad \text{pentru } p < q$$
$$\varphi^{(r)}(k) \geqslant \varphi^{(s)}(k) \qquad \text{pentru } s < r.$$

TEOREMA 1.1.1 [14]. *Condiția*

(I) $$|P(B \mid \mathcal{K}_1^k) - P(B)| \leqslant \varphi^{(n)}(s)$$

este echivalentă cu condiția

(II) $$|P(AB) - P(A)\,P(B)| \leqslant \varphi^{(n)}(s)\,P(A)$$

unde $A \in \mathcal{K}_1^k$ *și* $B \in \mathcal{K}_{k+s}^n$.

Demonstrație. Fie $A \in \mathcal{K}_1^k$, atunci

$$|P(AB) - P(A)\,P(B)| = \left| \int_A (P(B \mid \mathcal{K}_1^k) - P(B))P(\mathrm{d}\omega) \right| \leqslant \varphi^{(n)}(s)P(A).$$

Reciproc, să presupunem îndeplinită condiția (II) și să considerăm prin absurd că n-ar avea loc condiția (I). Atunci ar exista evenimentele $A \in \mathcal{K}_1^k$ și $B \in \mathcal{K}_{k+s}^n$ cu $P(A) > 0$ astfel ca

$$|P(B \mid \mathcal{K}_1^k) - P(B)| > \varphi^{(n)}(s)$$

pentru orice $\omega \in A$. Fără a micșora generalitatea, putem presupune că pentru $\omega \in A$ avem inegalitatea

$$P(B \mid \mathcal{K}_1^k) - P(B) > \varphi^{(n)}(s).$$

Integrînd ambii membrii ai inegalității de mai sus pe mulțimea A ajungem la o relație care contrazice relația (I).

Teorema este demonstrată.

---

[1] Aici și în cele ce urmează orice relație în care apar probabilități condiționate este presupusă a fi îndeplinită cu probabilitate egală cu 1.

În cele ce urmează vom lua în considerație următoarele două condiții, care reprezintă restricții impuse șirului de numere $\{\varphi^{(n)}(s)\}$:

(C_1). Există un număr întreg și pozitiv l și un număr δ, cu $0 < \delta < 1$, astfel ca pentru $n > l$ să avem $\varphi^{(n)}(l) \leqslant \delta$.

(C_2). Există un număr pozitiv N și un șir de numere $(\delta_n)_{n \in N^*}$ cu $0 < \delta_n < 1$, astfel ca pentru orice $n > N$ să avem $\varphi^{(n)}(s_n) \leqslant \delta_n$, unde $s_n = n^\alpha$ și $0 < \alpha < 2$.

1.2. EVENIMENTE CORESPUNZĂTOARE VARIABILELOR ALEATOARE

TEOREMA 1.2.1. *Dacă există un număr pozitiv N și un șir de numere $(a_n)_{n \in N^*}$ astfel încît pentru orice $n > N$ să avem*

$$|P(B | \mathcal{K}_1^k) - P(B)| < \frac{1}{2}$$

pentru orice $B \in \mathcal{K}_{a_n}^\infty$, atunci orice mulțime Λ măsurabilă în raport cu $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n^\infty$ este de probabilitate 0 sau 1.

Demonstrație. Aplicînd teorema 1.1.1 și ținînd seama de condiția teoremei obținem

$$|P(A\Lambda) - P(A)P(\Lambda)| < \frac{1}{2} P(A)$$

pentru orice $A \in \mathcal{K}_1^n$. Dacă $\{A_n\}_{n \in N^*}$ este un șir de evenimente care satisfac această relație și care converg monoton către o limită $\tilde{A}$, atunci prin trecere la limită se obține că $\tilde{A}$ satisface la rîndul său relația de mai sus. Prin urmare familia de mulțimi de acest tip este clasă monotonă și conține pe $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_1^n$. Rezultă, conform unei proprietăți binecunoscute, că această relație este satisfăcută de orice $A \in \mathcal{K}_1^\infty$ și putem lua $A = \Lambda$. Să presupunem acum că $0 < P(\Lambda) < 1$. Din relația de mai sus obținem $P(\Lambda) > \frac{1}{2}$. Dar și $\bar{\Lambda} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n^\infty$ cu $0 < P(\bar{\Lambda}) < 1$ și deci și $P(\bar{\Lambda}) > \frac{1}{2}$ ceea ce este imposibil. Teorema este demonstrată.

Teorema 1.2.1 este o extindere în cazul evenimentelor dependente a legii 0—1 a lui Kolmogorov. Această teoremă conține ca un caz particular teorema dată de T. Ueno din [33] în demonstrația căreia se utilizează o metodă diferită.

Să observăm că restricția impusă în enunțul teoremei 1.2.4 este îndeplinită, de exemplu, atunci cînd este satisfăcută condiția (C_1) cu $\delta < \frac{1}{2}$.

LEMA 1.2.1. *Dacă* $\{A_n\}_{n\in N^*}$ *este un șir de evenimente aparținînd lui* $\mathcal{K}$ *definite astfel ca* $\{\chi_{A_n}\}_{n\in N^*}$ *să satisfacă condiția* (C$_1$) *și dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = = \infty$, *atunci* $P(\limsup A_n) \geqslant 1 - \delta$.

Demonstrație. Deoarece

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{n=0}^{\infty} P(A_{nl+j}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

rezultă că există cel puțin un număr întreg j, $1 \leqslant j \leqslant l$, astfel ca $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(A_{nl+j}) = \infty$.

Utilizînd condițiile teoremei, obținem

$$P\left(\bigcup_{i=m}^{n} A_{il+j}\right) = P(A_{nl+j}) + P(A_{(n-1)l+j}\overline{A}_{nl+j}) + \ldots$$
$$+ P(A_{ml+j}\overline{A}_{(m+1)l+j}\ldots\overline{A}_{nl+j}) \geqslant$$
$$P(A_{nl+j}) + P(A_{(n-1)l+j})P(\overline{A}_{nl+j}) - \delta P(A_{(n-1)l+j}) + \ldots$$
$$+ P(A_{ml+j})P(\overline{A}_{(m+1)l+j}\ldots\overline{A}_{nl+j}) - \delta P(A_{ml+j}) \geqslant$$
$$[P(A_{ml+j}) + \ldots + P(A_{nl+j})]P(\overline{A}_{(m+1)l+j}\ldots\overline{A}_{nl+j}) -$$
$$- \delta[P(A_{ml+j}) + \ldots + P(A_{(n-1)l+j})] =$$
$$P(A_{ml+j}) + \ldots + P(A_{(n-1)l+j})][P(\overline{A}_{(m+1)l+j}\ldots\overline{A}_{nl+j}) - \delta] +$$
$$+ P(A_{nl+j})P(\overline{A}_{(m+1)l+j}\ldots\overline{A}_{nl+j}).$$

Dar după cum am văzut mai sus, $\sum\limits_{k=m}^{\infty} P(A_{kl+j}) = \infty$ și prin urmare

$$P\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} \overline{A}_{kl+j}\right) \leqslant \delta.$$

Rezultă

$$P(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - \delta$$

și lema este demonstrată.

TEOREMA 1.2.2. *Dacă* $\{A_n\}_{n\in N^*}$ *este un șir de evenimente aparținînd lui* $\mathcal{K}$ *definite astfel ca* $\{\chi_{A_n}\}_{n\in N^*}$ *să satisfacă condiția* (C$_1$), *atunci* $P(\limsup A_n) = 0$ *dacă și numai dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

TEOREMA 1.2.3. *Dacă* $\{A_n\}_{n\in N^*}$ *este un șir de evenimente aparținînd lui* $\mathcal{K}$ *definite astfel ca* $\{\chi_{A_n}\}_{n\in N^*}$ *să satisfacă condiția* (C$_1$) *cu* $\delta < \frac{1}{2}$ *atunci:*

$$P(\limsup A_n) = 0 \quad \textit{dacă} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

și

$$P(\limsup A_n) = 1 \quad \textit{dacă} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty .$$

Demonstrațiile teoremelor 1.2.2 și 1.2.3 rezultă din lema 1.2.1, teorema 1.2.2 și din proprietatea cunoscută că dacă $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, atunci $P(\limsup A_n) = 0$ oricare ar fi evenimentele $\{A_n\}_{n \in N^*}$.

Teorema 1.2.3 este o extindere la cazul evenimentelor dependente a teoremei clasice a lui Borel-Cantelli. O extindere a teoremei lui Borel-Cantelli la alt tip de variabile aleatoare dependente este dată în [1].

Trecem acum la stabilirea unei inegalități de tip Kolmogorov pentru o clasă de variabile aleatoare dependente care conțin printre altele și variabilele aleatoare care satisfac condițiile (C_1) și (C_2), inegalitate care va fi utilizată în paragrafele următoare.

În stabilirea unor astfel de proprietăți P. Lévy [24], M. Loève [25], T. Ueno [33] și I. Kozniewska [22] utilizează în esență metoda clasică a lui Kolmogorov. În cazul de față această tratare ar fi inaplicabilă și de aceea vom utiliza pînă la un anumit moment o metodă folosită de G. Ottaviani [32] în alt gen de probleme privind variabilele aleatoare independente.

Să utilizăm următoarele notații :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} X_{il+k}$$

$$K(X_{l+k}, \ldots, X_{nl+k}) = \max_{1 \leqslant m \leqslant n} E(|X_{ml+k} + \ldots + X_{nl+k}|^r).$$

Teorema 1.2.4. *Dacă variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_N$ admit momente de ordinul r finite cu $r > 0$, există un număr u, $0 \leqslant u < 1$ și un număr $l < N$, astfel ca*

$$|P(B \mid \mathcal{K}_1^k) - P(B)| \leqslant u,$$

unde $B \in \mathcal{K}_{k+l}^N$, $k + l < N$ și dacă

$$\left(\frac{2l}{\varepsilon}\right)^r K(X_{l+k}, \ldots, X_{tl+k}) < 1 - u = v,$$

atunci pentru orice $n \leqslant (t+1)\,l \leqslant N$ avem

$$P(\{\max_{1 \leqslant m \leqslant n} |S_m| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \sum_{k=1}^{l} \frac{\left(\frac{2l}{\varepsilon}\right)^r E(|S_n^{(k)}|^r)}{v - \left(\frac{2l}{\varepsilon}\right)^r K(X_{l+k}, \ldots, X_{tl+k})}.$$

Demonstrație. Să notăm

$$A_0 = \{\omega \mid |S_0^{(k)}| \geqslant \varepsilon\}$$

$$A_m = \{\omega \mid |S_0^{(k)}| < \varepsilon, \ldots, |S_{m-1}^{(k)}| < \varepsilon, |S_m^{(k)}| \geqslant \varepsilon\}, \; m = 1, 2, \ldots$$

$$B_m = \left\{\omega \mid |S_t^{(k)} - S_m^{(k)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$C = \left\{\omega \mid |S_t^{(k)}| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Se observă cu ușurință că mulțimile $\{A_m\}$ sînt disjuncte două cîte două și că

$$\bigcup_{k=0}^{t} A_k = \{\omega \mid \max_{0 \leqslant m \leqslant t} |S_m^{(k)}| \geqslant \varepsilon\}.$$

Pe de altă parte

$$C \supset \sum_{m=0}^{t} A_m B_m .$$

Dacă utilizăm condiția din enunțul teoremei și ținem seama de teorema 1.1.1 obținem

$$(1) \qquad P\left(\sum_{m=0}^{t} A_m B_m\right) = \sum_{m=0}^{t} P(A_m B_m) \geqslant \sum_{m=0}^{t} (P(A_m) P(B_m) - vP(A_m)).$$

Din inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev rezultă

$$P(B_m) = P\left(\left\{\left|\sum_{i=m+1}^{t} X_{il+k}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \leqslant 1 - \frac{2^r E(|X_{(m+1)l+k} + \ldots + X_{tl+k}|^r)}{\varepsilon^r}$$

și prin urmare

$$\min_{0 \leqslant m \leqslant t} P(B_m) \geqslant 1 - \frac{2^r K(X_{l+k}, \ldots, X_{tl+k})}{\varepsilon^r}.$$

Ținînd seama de inegalitatea de mai sus, relația (1) devine

$$P\left(\sum_{m=0}^{t} A_m B_m\right) \geqslant \left(v - \frac{2^r K(X_{l+k}, \ldots, X_{tl+k})}{\varepsilon^r}\right) \sum_{m=0}^{t} P(A_m) =$$

$$= \left(v - \frac{2^r K(X_{l+k}, \ldots, X_{tl+k})}{\varepsilon^r}\right) P(\{\max_{0 \leqslant m \leqslant t} |S_m^{(k)}| \geqslant \varepsilon\}).$$

Folosind o observație făcută mai sus și utilizînd încă o dată inegalitatea lui Bienaymé-Cebîșev, obținem

$$P\left(\sum_{m=0}^{t} A_m B_m\right) \leqslant P(C) \leqslant \frac{2^r}{\varepsilon^r} E(|S_m^{(k)}|^r)$$

și luînd în considerație condițiile teoremei găsim

$$P(\{\max_{0 \leqslant m \leqslant t} |S_m^{(k)}| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\frac{2^r}{\varepsilon^r} E(|S_n^{(k)}|^r)}{v - \frac{2^r}{\varepsilon^r} K(X_{l+k}, \ldots, X_{tl+k})}.$$

În sfîrșit, din inegalitățile

$$P(\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|\geqslant\varepsilon\})\leqslant P(\{\max_{1\leqslant m\leqslant(t+1)l}|S_m|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\sum_{k=1}^{l}P\left(\left\{\max_{0\leqslant m\leqslant t+1}|S_m^{(k)}|\geqslant\frac{\varepsilon}{l}\right\}\right)$$

obținem teorema enunțată mai sus.

În cazul particular în care variabilele aleatoare sînt necorelate cu $\alpha = 2$ și $l = 1$, obținem inegalitatea

$$P(\{\max_{1\leqslant m\leqslant n}|S_m|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\frac{\dfrac{4}{\varepsilon^2}\sum\limits_{k=1}^{n}D(X_k)}{v-\dfrac{4}{\varepsilon^2}\sum\limits_{k=1}^{n}D(X_k)}.$$

1.3. SERII DE VARIABILE ALEATOARE

Unele proprietăți ale seriilor de variabile aleatoare independente se pot transpune în cazul variabilelor aleatoare care satisfac condiția (C_1). Pentru studiul în continuare al acestui gen de variabile aleatoare vom introduce coeficienții $(\varepsilon_n)_{n\in N^*}$ care satisfac relația

$$|P(B\,|\,\mathcal{K}_k^k)-P(B)|<\varepsilon_n\,,$$

unde $B\in\mathcal{K}_{k+n}^{k+n}$, asupra șirului $(\varepsilon_n)_{n\in N^*}$ urmînd a impune anumite restricții. Teoremele care urmează vor justifica folosirea acestor coeficienți în exprimarea unei măsuri de necorelare a variabilelor aleatoare considerate.

Lema 1.3.1. [14]. *Fie $\mathcal{K}_1$ și $\mathcal{K}_2$ două σ-subalgebre ale lui $\mathcal{K}$ astfel ca*

$$|P(B\,|\,\mathcal{K}_1)-P(B)|<a$$

pentru orice $B\in\mathcal{K}_2$ și fie ξ și η două variabile aleatoare reale măsurabile în raport cu $\mathcal{K}_1$ și respectiv $\mathcal{K}_2$ pentru care $E(|\xi|^p)<\infty$, $E(|\eta|^q)<\infty$ și $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Atunci

$$|E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)|\leqslant 2a^{1/p}E^{1/p}(|\xi|^p)E^{1/q}(|\eta|^q)\,.$$

Demonstrație. Este suficient să considerăm cazul variabilelor simple.

$$\xi=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\chi_{A_j},\quad A_{j_1}\cap A_{j_2}=\emptyset\,,\quad j_1\neq j_2\,,$$

$$\eta=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\chi_{B_i},\quad B_{i_1}\cap B_{i_2}=\emptyset\,,\quad i_1\neq i_2\,,$$

unde $A_j\in\mathcal{K}_1$, $1\leqslant j\leqslant n$ și $B_i\in\mathcal{K}_2$, $1\leqslant i\leqslant m$, $\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j=\bigcup\limits_{i=1}^{m}B_i=\Omega.$

Vom porni de la mărimea :

$$| E(\xi\eta) - E(\xi)\, E(\eta) | =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \mu_i\, P(A_j\, B_i) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \mu_i\, P(A_j)\, P(B_i) \right| .$$

Utilizînd inegalitatea lui Höllder, obținem

$$| E(\xi\eta) - E(\xi)\, E(\eta) | =$$

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, (P(A_j))^{1/p} \sum_{i=1}^{m} [P(B_i \mid A_j) - P(B_i)]\, \mu_i\, (P(A_i))^{1/q} \right| \leqslant$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} | \lambda_j |^p\, P(A_j) \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \left| \sum_{i=1}^{m} \mu_i\, [P(B_i \mid A_j) - P(B_i) \right|^q \right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant E^{1/p}(| \xi |^p) \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \left| \left(\sum_{i=1}^{m} | \mu_i |^q (P(B_i \mid A_j) + P(B_i)) \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{i=1}^{m} | P(B_i \mid A_j) - P(B_i) | \right)^{q/p} \right|^{1/q} .$$

Să notăm acum cu A^+ evenimentul pe care $P(B_i \mid A_j) - P(B_i) > 0$ și cu A^- evenimentul pe care $P(B_i \mid A_j) - P(B_i) < 0$ cînd A_j este fixat. Din condiția teoremei obținem

$$\sum_{i=1}^{m} | P(B_i \mid A_j) - P(B_i) | = (P(\{\bigcup_{A^+} B_i \mid A_j\}) - P(\{\bigcup_{A^+} B_i\})) +$$

$$+ (P(\{\bigcup_{A^-} B_i\}) - P(\{\bigcup_{A^-} B_i \mid A_j\})) \leqslant 2\, a .$$

De aici rezultă imediat

$$| E(\xi\eta) - E(\xi)\, E(\eta) | \leqslant 2a^{1/p}\, E^{1/p}(|\xi|^p)\, E^{1/q}(|\eta|^q)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

LEMA 1.3.2. *Dacă variabilele aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$ *au valoarea medie nulă și dispersia finită, atunci*

$$D(X_1 + \ldots + X_n) \leqslant (1 + 4\, \gamma_n)\, (D(X_1) + \ldots + D(X_n)) ,$$

unde $\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{1/2}$.

Demonstrație. Conform lemei de mai sus, avem

$$| E(X_i\, X_j) | \leqslant 2\, \varepsilon_{j-i}^{1/2}\, D^{1/2}(X_i)\, D^{1/2}(X_j) \text{ pentru } j > i .$$

Mai departe, au loc inegalitățile

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |E(X_i X_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} D(X_i) +$$

$$+ 4 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varepsilon_{j-i}^{1/2} D^{1/2}(X_i) D^{1/2}(X_j) \leqslant \sum_{i=1}^{n} D(X_i) +$$

$$+ 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \varepsilon_{j-i}^{1/2} (D(X_i) + D(X_j)) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} D(X_i) \sum_{j=1}^{n-i} \varepsilon_j^{1/2} + 2 \sum_{j=2}^{n} D(X_j) \sum_{i=1}^{n-i} \varepsilon_i^{1/2} \leqslant (1 + 4\gamma_n) \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

TEOREMA 1.3.1. *Să presupunem că* $\{X_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiția* (C_1) *și că* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$. *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) < \infty$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ *converge aproape sigur.*

Demonstrație. Dacă în teorema 1.2.4 luăm $\alpha = 2$ și aplicăm lema de mai sus, găsim

$$P(\{\max_{m+1 \leqslant k \leqslant n} |S_k - S_m| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \sum_{k=1}^{l} \frac{\dfrac{4l^2}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_n) \displaystyle\sum_{k=m+1}^{(t+1)l} D(X_k)}{\delta - \dfrac{4l^2}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_n) \displaystyle\sum_{k=m+1}^{(t+1)l} D(X_k)}$$

de unde dacă ținem seama de condiția teoremei obținem rezultatul enunțat.

LEMA 1.3.3. *Dacă* $\{X_n\}_{n \in N^*}$ *este un șir de variabile aleatoare egal mărginite care satisfac condiția* (C_1) *cu* $\delta < \dfrac{1}{2}$ *și dacă există un număr întreg și pozitiv* l *pentru care*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} D(X_n + \ldots + X_{n+l}) > 0,$$

atunci $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ *diverge aproape sigur.*

Demonstrație. Vom arăta întîi că $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ nu converge în probabilitate. Să alegem un $\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} D(X_n + \ldots + X_{n+l}) - \varepsilon^2 > 0 .$$

Utilizînd mai departe inegalitatea lui Kolmogorov pentru variabile aleatoare mărginite, obținem

$$P(\{|Y_m + \ldots + Y_{m+l}| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \frac{D(X_m + \ldots + X_{m+l}) - \varepsilon^2}{2lM},$$

unde $Y_m = X_m - E(X_m)$ cu $m \in N^*$, M fiind marginea superioară a variabilelor aleatoare $\{X_n\}$. Membrul drept al inegalității de mai sus nu tinde către 0 şi prin urmare nici membrul stîng nu poate tinde către 0. Rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ nu converge în probabilitate şi deci nu converge aproape sigur. Pentru a demonstra că $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ diverge aproape sigur, vom mai observa că presupunerile făcute în enunţul teoremei fac aplicabilă teorema 1.2.1. de unde rezultatul enunţat rezultă imediat.

TEOREMA 1.3.2 *Să presupunem că* $\{X_n\}_{n \in N^*}$ *este un şir de variabile aleatoare egal mărginite care satisfac condiţia* (C_1) *cu* $\delta < \frac{1}{2}$ *şi că este îndeplinită relaţia*

$$| D(X_n) - A | < \varepsilon_n ,$$

A fiind o constantă nenegativă şi $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$. *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) < \infty$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ *converge aproape sigur şi dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) = \infty$, *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ *diverge aproape sigur.*

Demonstraţie. Prima parte a demonstraţiei rezultă din teorema 1.3.1. Să presupunem acum că $\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) = \infty$. Din condiţia impusă mai sus dispersiilor, obţinem $A > 0$, iar de aici rezultă

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, D(X_n) > 0 .$$

Prin urmare este aplicabilă lema 1.3.3 cu $l = 0$ şi teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.3.3. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile teoremei precedente şi dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ *converge aproape sigur, atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) < \infty \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n) < \infty .$$

Demonstraţie. Să ataşăm şirului de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n \in N^*}$, un şir de variabile aleatoare $\{X'_n\}_{n \in N^*}$ independente de cele din primul şir şi cu aceleaşi repartiţii finit dimensionale. Atunci, dacă notăm cu $X_n^s = X_n - X'_n$ şi utilizăm proprietăţile cunoscute ale valorilor medii condiţionate, obţinem că $\{X_n^s\}_{n \in N^*}$ îndeplineşte condiţiile teoremei de mai sus şi că

$$E(X_n^s) = E(X_n) - E(X'_n) = 0$$

$$D(X_n^s) = D(X_n) + D(X'_n) = 2\, D(X_n) .$$

Deoarece seria de variabile aleatoare $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge aproape sigur, acelaşi lucru se poate spune şi despre seria de variabile aleatoare

$\sum_{n=1}^{\infty} X'_n$ și din teorema 1.3.2 de mai sus rezultă $\sum_{n=1}^{\infty} D(X^s_n) < \infty$ și deci $\sum_{n=1}^{\infty} D(X_n) < \infty$. Aplicînd din nou teorema 1.3.2 rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - E(X_n))$ converge aproape sigur și deci și $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_n)$ converge, ceea ce trebuia demonstrat.

Teoremele date mai sus reprezintă extinderi la cazul variabilelor aleatoare dependente ale unor proprietăți binecunoscute din teoria seriilor de variabile aleatoare independente. Folosind rezultatele de mai sus, se pot transpune cu ușurință și alte proprietăți ale seriilor de variabile independente cum ar fi teorema celor două serii, teorema celor trei serii etc.

1.4. LEGEA TARE A NUMERELOR MARI

În cele ce urmează vom da cîteva teoreme referitoare la legea tare a numerelor mari pentru variabile aleatoare care satisfac condițiile (C$_1$) și (C$_2$).

Teorema 1.4.1. *Să presupunem că* $\{X_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C$_1$) *și să notăm* $I = \{q^n;\ n = 1, 2, \dots\}$. *Dacă există un număr natural* q *astfel ca* $\sum_{n\in I} \frac{\gamma_{q^n}}{n} < \infty$ *și dacă dispersiile variabilelor aleatoare considerate sînt egal mărginite, atunci* $\frac{S_n - E(S_n)}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

Demonstrație. Aplicînd lema 1.3.2 și teorema 1.2.4 obținem

$$P\left(\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{|S_k - E(S_k)|}{n} \geqslant \varepsilon\right\}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{l} \frac{\frac{4l^2}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_{t+1}) \frac{\sum_{k=1}^{(t+1)l} D\{X_k)}{n^2}}{\delta - \frac{4l^2}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_{t+1}) \frac{\sum_{k=1}^{(t+1)l} D(X_k)}{n^2}}\,.$$

Să ne ocupăm întîi de numitorul expresiei din dreapta. Folosind ipoteza de egal mărginire, găsim

$$\frac{4l^2}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_{t+1}) \frac{\sum_{k=1}^{(t+1)l} D(X_k)}{n^2} \sim \frac{1 + 4\gamma_t}{t} M\,,$$

M fiind marginea superioară a dispersiilor șirului de variabile aleatoare $\{X_n\}_{n\in N^*}$. Dacă luăm $t = q^m$ și facem pe m să tindă către ∞, membrul drept al expresiei de mai sus tinde către 0. Rezultă că există un $N > 0$, astfel încît pentru $m > N$,

$$\delta - \frac{4l^2}{\varepsilon^2}(1 + 4\gamma_{t+1}) \sum_{k=1}^{(t+1)l} \frac{D(X_k)}{n^2} > \frac{\delta}{2}\,.$$

Prin urmare, pentru m suficient de mare,

$$P\left(\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant m}\frac{|S_k-E(S_k)|}{n}\geqslant\varepsilon\right\}\right)\leqslant\frac{2\delta l^2}{\varepsilon^2 t}(1+4\gamma_{t+1}).$$

Deoarece seria $\sum\limits_{n\in I}\frac{\gamma_{q^n}}{n}$ este convergentă, aplicînd teorema 1.2.2 obţinem că $\max\limits_{1\leqslant m\leqslant q^n}\frac{|S_m-E(S_m)|}{q^n}$ converge aproape sigur către 0. Fie acum $q^{\nu-1}<t\leqslant q^\nu$. Rezultă $\frac{1}{q^\nu}>\frac{1}{q^t}$ de unde obţinem că $\frac{S_n-E(S_n)}{n}$ converge aproape sigur către 0 şi teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.4.2. *Să presupunem că* $\{X_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiţia* (C_1), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{1/2}<\infty$ *şi că dispersiile variabile aleatoare considerate sînt egal mărginite. Atunci* $\frac{S_n-E(S_n)}{n^\alpha}$, *cu* $\alpha>\frac{1}{2}$, *converge aproape sigur către* 0.

Demonstraţia acestei teoreme se poate face, urmînd aceeaşi metodă ca în teorema 1.4.1.

TEOREMA 1.4.3. *Să presupunem că* $\{X_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiţia* (C_1) *şi că* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{1/2}<\infty$. *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{D(X_n)}{n^2}<\infty$, *atunci* $\frac{S_n-E(S_n)}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

Demonstraţie. Rezultă din teorema 1.3.5, din lema 1.3.1 şi din teorema 1.3.2 urmînd acelaşi procedeu ca şi în cazul variabilelor aleatoare independente [20].

TEOREMA 1.4.4. *Dacă* $\{X_n\}_{n\in N^*}$ *este un şir de variabile aleatoare identic repartizate care satisfac condiţia* (C_1) *şi dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^{1/2}<\infty$, *atunci* $\frac{S_n}{n}$ *converge aproape sigur dacă şi numai dacă* $|E(X_1)|<\infty$, *iar* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=E(X_1)$ *aproape sigur.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema 1.2.4, din lema 1.3.1 şi din teorema 1.2.3 urmînd acelaşi procedeu ca şi în cazul variabilelor aleatoare independente [21].

Să observăm că în cazul particular în care variabilele $\{X_n\}_{n\in N^*}$ sînt independente, din teoremele 1.4.1, 1.4.2 şi 1.4.3 se obţin bine cunoscutele teoreme ale lui Kolmogorov [20], [21].

TEOREMA 1.4.5. *Să presupunem că* $\{X_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiţia* (C_2) *şi că* $\sup\limits_{n\in N^*}\gamma_n^{(l_n)}\leqslant A$, A *fiind o constantă pozitivă unde* $\gamma_n^{(l_n)}=\sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{l_n}\right]}\varepsilon_{il_n}$. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)}{n^\beta}<\infty$, $0<\beta<2$, $\alpha<\frac{2-\beta}{2}$ *şi* $l_n\sim n^\alpha$, $n=q^\nu$, $\nu=1,2,\ldots$, *atunci* $\frac{S_n-E(S_n)}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

Demonstrație. Aplicînd lema 1.3.2 și utilizînd ipotezele teoremei, găsim :

$$\frac{l^2}{n^2} \sum_{k=1}^{l} K(X_{l+k}, \ldots, X_{tl+k}) \leqslant \frac{(1 + 2\gamma_{l(t+1)}^{s_{l(t+1)}})\, l^2}{n^2} \sum_{i=1}^{l(t+1)} D(X_i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^2}{n^{2-\beta}} \frac{A}{} \sum_{i=1}^{l(t+1)} \frac{D(X_i)}{n^\beta} \sim \frac{n^{2\alpha}}{n^{2-\beta}} \sum_{i=1}^{l(t+1)} \frac{D(X_i)}{n^\beta} =: \frac{1}{n^\gamma} \sum_{i=1}^{l(t+1)} \frac{D(X_i)}{n^\beta} \to 0 .$$

Urmînd, în continuare, procedeul folosit în teorema 1.4.1, obținem teorema enunțată.

CAPITOLUL II

PROCESE ERGODICE ȘI PROCESE STAȚIONARE

2.1. INTRODUCERE

În acest capitol vom studia o serie de proprietăți referitoare la comportarea asimptotică a sumelor normate de variabile aleatoare atașate unui proces ergodic.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate, $(X, \mathcal{F})$ un spațiu măsurabil și $(\xi_n(\omega))_{n \in N^*}$ un șir de variabile aleatoare definite pe Ω cu valori în X. Prin $\mathcal{K}_m^n$ vom înțelege, ca și în primul capitol, σ-algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabilele aleatoare $\xi_m, \ldots, \xi_n$, iar prin $\mathcal{K}_m^\infty$ vom nota σ-algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabilele aleatoare $\xi_m, \xi_{m+1}, \ldots$.

Fie

$$X^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} X_j, \; X_j = X, \; 1 \leqslant j \leqslant n$$

și $\mathcal{F}^{(n)}$ σ-algebra produs corespunzătoare lui $X^{(n)}$.

Să considerăm condiția :

(C) : Există o funcție de mulțime $P_{1,l}^\infty$ definită pe $\mathcal{F}^{(l)}$ astfel încît pentru orice $l \in N^*$ și $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$ să avem :

$$| P((\xi_{n+k}, \ldots, \xi_{n+k+l-1}) \in A^{(l)} | \mathcal{K}_1^n) - P_{1,l}^\infty (A^{(l)}) | < \varepsilon_k ,$$

unde $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Condiția (C) este îndeplinită, printre altele, de o clasă largă de lanțuri cu legături complete și de lanțuri de ordin infinit, fiind asigurată de o serie de teoreme ergodice cunoscute în acest domeniu (O. Onicescu, G. Mihoc [30], C. T. Ionescu-Tulcea [15], M. Iosifescu [18], [19], Lamberti și Suppes [23] etc.).

Din condiția (C) se obține că $P_{1,l}^\infty$ este o probabilitate pe $\mathcal{F}^{(l)}$. Pentru a dovedi aceasta este suficient să arătăm că $P_{1,l}^\infty$ este o funcție σ-aditivă, căci celelalte proprietăți sînt imediate. Să observăm că aditivitatea simplă se poate deduce imediat printr-un proces de trecere la limită.

Fie $(A_n)_{n\in N}$ un şir de mulţimi aparţinînd lui $\mathcal{F}^{(l)}$

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset .$$

Avem

$$|P((\xi_m, \ldots, \xi_{m+l-1}) \in A_n) - P^{\infty}_{1,l}(A_n)| < \varepsilon_m$$

de unde rezultă

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, P^{\infty}_{1,l}(A_n) \leqslant \varepsilon_m + \lim_{n\to\infty} P((\xi_m, \ldots, \xi_{m+l-1}) \in A_n) = \varepsilon_m$$

pentru orice $m = 1, 2, \ldots$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty} P^{\infty}_{1,l}(A_n) = 0 .$$

Dintr-o proprietate binecunoscută din teoria măsurii rezultă σ-aditivitatea lui $P^{\infty}_{1,l}$.

2.2. TEOREMA LIMITĂ CENTRALĂ

LEMA 2.2.1. *Să presupunem îndeplinită condiția* (C) *și să notăm prin* g *o funcție reală definită pe* $X^{(n+1)}$ *și* $\mathcal{F}^{(n+1)}$*-măsurabilă. Dacă* M *este marginea superioară a lui* g*, atunci*

$$|E(g_m) - E^{\infty}(g)| < 2\, M\, \varepsilon_m ,$$

unde $g_m = g(\xi_m, \ldots, \xi_{m+n})$ *și* $E^{\infty}(g) = \int_{X^{(n+1)}} g(x_1, \ldots, x_{n+1})\, \mathrm{d}P^{\infty}_{1,n+1}$.

Demonstrație. Este suficient să considerăm cazul cînd g este o funcție simplă $g = \sum_{i=1}^{s} a_i\, \chi_{A_i}$ cu $A_i \in \mathcal{F}^{(n+1)}, A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$ și $\bigcup_{i=1}^{s} A_i = X^{(m+1)}$.

Fie

$$\widetilde{P}(A) = P((\xi_m, \ldots, \xi_{m+n}) \in A).$$

Conform condiției (C) avem

$$|P^{\infty}_{1,n+1}(A_i) - \widetilde{P}(A_i)| < \varepsilon_m .$$

Să considerăm descompunerea lui Hahn a funcției de mulțime $Q(A) = P^{\infty}_{1,n+1}(A) - \widetilde{P}(A)$,

$$Q(A) = Q(A \cap D) + Q(A \cap \overline{D}),$$

unde $Q(A \cap D) \geqslant 0$ și $Q(A \cap D) \leqslant 0$ pentru orice $A \in \mathcal{F}^{(n+1)}$.

Avem

$$|E(g) - E^{\infty}(g)| = \left| \sum_{i=1}^{s} a_i \widetilde{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{s} a_i P_{1,n+1}^{\infty}(A_i) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{s} a_i (\widetilde{P}(A_i) - P_{1,n+1}^{\infty}(A_i)) \right| = \left| \sum_{i=1}^{s} a_i Q(A_i \cap D) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{s} a_i Q(A_i \cap \overline{D}) \right| < 2 M \varepsilon_m.$$

şi lema este demonstrată.

Lema 2.2.2. *Să presupunem îndeplinită condiția* (C) *și să notăm* $f_n = f(\xi_n)$, *f fiind o funcție reală definită pe X și* $\mathcal{F}$*-măsurabilă. Dacă* $E(|f_n|^{\delta}) < M$ *pentru orice* $n \in N^*$, $(M > 0,\ \delta > 0)$, *atunci*

$$E^{\infty}(|f|^{\delta}) < M + 1.$$

Demonstrație. După o binecunoscută inegalitate, avem:

$$[E(|f_n|^{\lambda})]^{1/\lambda} \leqslant [E(|f_n|^{\delta})]^{1/\delta}$$

pentru $0 < \lambda < 2$, de unde ținînd cont de ipoteza făcută, obținem

$$[E(|f_n|^{\lambda})]^{\frac{\delta}{\lambda}} < M.$$

De aici rezultă

$$E(|f_n|^{\lambda}) \leqslant \max(M, 1) < M + 1.$$

Să considerăm acum funcțiile de repartiție $\{F_n\}_{n \in N^*}$,

$$F_n(a) = P(\{f_n < a\}).$$

Din condiția (C) rezultă că $F_n(a)$ converge către $F(a)$ în repartiție (mai mult decît atît, uniform în raport cu $a \in R$). Aplicînd corolarul de la pag. 184 din [26], obținem

$$\lim_{n \to \infty} E(|f_n|^{\lambda}) = E^{\infty}(|f|^{\lambda})$$

de unde $E^{\infty}(|f|^{\lambda}) < M + 1$ pentru $0 < \lambda < 2$. Să considerăm acum un șir de numere pozitive $(\lambda_n)_{n \in N^*}$ definite astfel ca $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = \delta$.

Evident,

$$\lim_{n \to \infty} |f_n|^{\lambda_n} = |f|^{\delta}.$$

Din lema lui Fatou obținem

$$E^{\infty}(|f|^{\delta}) = \int_X \liminf |f|^{\lambda_n} \mathrm{d}P_{1,1}^{\infty} \leqslant \liminf \int |f|^{\lambda_n} \mathrm{d}P_{1,1}^{\infty} < M + 1$$

şi lema este demonstrată.

LEMA 2.2.3. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C), *atunci și procesul staționar* $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$ *atașat măsurilor* $(P_{1.l})_{l\in N^*}$ *satisface condiția* (C).

Demonstrație. Din ipoteza teoremei rezultă

$$|P((\xi_{n+k},\ldots,\ \xi_{n+k+l})\in B\,|\,\mathcal{K}_1^k)-P_{1,\,l+1}^{\infty}(B)|<\varepsilon_n,$$

$$|P((\xi_{n+k},\ldots,\ \xi_{n+k+l})\in B)-P_{1,\,l+1}^{\infty}(B)|<\varepsilon_{n+k}.$$

Aplicînd inegalitatea triunghiului, teorema 1.1.1 din primul capitol și observînd că clasa de mulțimi pentru care această relație este satisfăcută este monotonă, obținem relația

$$|P(\Lambda_1\Lambda_2)-P(\Lambda_1)P(\Lambda_2)|<\varepsilon_{n,\,k}P(\Lambda_1), \tag{1}$$

unde $\Lambda_1\in\mathcal{K}_1^k$ și $\Lambda_2\in\mathcal{K}_{k+n}^{\infty}$, $\varepsilon_{n,k}=\varepsilon_n+\varepsilon_{n+k}$.

Cînd $n\to\infty$, membrul drept al inegalității de mai sus tinde către 0, proprietate ce pune în evidență independența asimptotică a procesului considerat.

Obținem cu ușurință egalitatea

$$P_{1,\,l}^{\infty}(X^{(r)}\times A^{(l-r)})=P_{1,\,l}^{\infty}(A^{(l-r)}\times X^{(r)}).$$

Să considerăm funcțiile de repartiție

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(a_{t_1},\ldots,\ a_{t_n})=P_{t_1,\,t_n}^{\infty}(f(x_{t_1})<a_{t_1},\ldots,\ f(x_{t_n})<a_{t_n})$$

pentru $t_1,\ldots,\ t_n\in N^*$, $t_1<t_2<\ldots<t_n$, $a_{t_1},\ldots,\ a_{t_n}\in R$ și $n\in N^*$.

Din cunoscuta teoremă a lui Kolmogorov rezultă că există un cîmp de probabilitate $(E,\ \mathcal{G},\ P^{\infty})$ și un șir de variabile aleatoare $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$ definite pe E și cu valori reale astfel ca funcțiile de repartiție corespunzătoare acestui proces să fie

$$\{F_{t_1,\ldots,t_n};\ t_1,\ t_2,\ldots,\ t_n,\ n\in N^*\}.$$

Din observația făcută mai sus asupra măsurilor $(P_{1,\,l}^{\infty},\ l\in N^*)$, rezultă că șirul de variabile aleatoare $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$ definește un proces staționar în sens restrîns*) .

Fie acum $\mathfrak{N}_m^n$ σ-algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabilele aleatoare $\eta_m,\ldots,\eta_n$ și $\mathfrak{N}_m^{\infty}$ σ-algebra minimală în raport cu care sînt măsurabile variabilele aleatoare $\eta_m,\ \eta_{m+1},\ldots$

Fie

$$A_{k_0}^{-1}=\{\omega\,|\,(\xi_{k-k_0+1},\ldots,\xi_k)\in A^{(k_0)}\}$$

și

$$B_{l_0}^{-1}=\{\omega\,|\,(\xi_{n+k+1},\ldots,\xi_{n+k+l_0})\in A^{(l_0)}\}.$$

---

*) Vom spune că procesul $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$ este staționar în sens restrîns dacă repartiția vectorului aleator $(\eta_{t_1},\ldots,\ \eta_{t_n})$ este identică cu repartiția vectorului aleator $(\eta_{t_1+h},\ldots,\ \eta_{t_n+h})$ pentru orice h, $t_1,\ldots,\ t_n$, $n\in N^*$

Relația (1) ne conduce la inegalitatea :

$$| P(A_{k_0}^{-1} B_{l_0}^{-1}) - P(A_{k_0}^{-1}) P(B_{l_0}^{-1}) | < \varepsilon_{n,k} P(A_{k_0}^{-1})$$

care se mai poate scrie sub forma :

$$\begin{gathered} | P((\xi_{k-k_0+1}, \ldots, \xi_k) \in A^{(k_0)}, (\xi_{k+n+1}, \ldots, \xi_{k+n+l_0}) \in A^{(l_0)}) - \\ - P((\xi_{k-k_0+1}, \ldots, \xi_k) \in A^{(k_0)}) P((\xi_{k+n+1}, \ldots, \xi_{k+n+l_0}) \in A^{(l_0)}) | < \\ < \varepsilon_{n,k} P((\xi_{k-k_0+1}, \ldots, \xi_k) \in A^{(k_0)}). \end{gathered}$$

Trecînd la limită asupra lui k obținem

$$| P_{1,k_0+n+l_0}^{\infty}(A^{(k_0+n+l_0)}) - P_{1,k_0}^{\infty}(A^{(k_0)}) P_{1,l_0}^{\infty}(A^{(l_0)}) | < \varepsilon_n P_{1,k_0}^{\infty}(A^{(k_0)}),$$

unde $A^{(k_0+n+l_0)} = A^{(k_0)} \times \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ ori}} \times A^{(l_0)}$.

Această relație este satisfăcută în particular pentru

$$A^{(k_0)} = \{(x_1, \ldots, x_{k_0}) | f(x_1) < a_1, \ldots, f(x_{k_0}) < a_{k_0}\},$$

$$\begin{gathered} A^{(l_0)} = \{(x_{k_0+n+1}, \ldots, x_{k_0+n+l_0}) | f(x_{k_0+n+1}) < a_{k_0+n+1}, \ldots, f(x_{k_0+n+l_0}) < \\ < a_{k_0+n+l_0}\} \end{gathered}$$

$\{a_n\}$ fiind un șir de numere reale arbitrare. În acest caz, relația de mai sus devine

$$\begin{gathered} F_{1,k_0+n+l_0}(a_1, \ldots, a_{k_0+n+l_0}) - F_{1,k_0}(a_1, \ldots, a_{k_0}) F_{1,l_0}(a_{k_0+n+1}, \ldots, a_{k_0+n+l_0}) | < \\ < \varepsilon_n F_{1,\ldots,k_0}(a_1, \ldots, a_{k_0}). \end{gathered}$$

De aici rezultă imediat

$$| P^{\infty}(A' B') - P^{\infty}(A') P^{\infty}(B') | < \varepsilon_n P^{\infty}(A'), \tag{2}$$

pentru $A' \in \mathfrak{N}_1^k$ și $B' \in \mathfrak{N}_{k+n}^m$, m fiind un număr natural arbitrar mai mare decît $k + n$. Aplicînd acum teorema 1.1.1, obținem teorema enunțată mai sus.

Să observăm că relația (2) are loc și pentru orice $A' \in \mathfrak{N}_1^k$ și $B' \in \mathfrak{N}_{k+n}^{\infty}$ deoarece, după cum se constată cu ușurință, cînd A' este fixat, clasa de mulțimi B' care satisface relația (2) este monotonă.

Să utilizăm următoarele notații

$$F_n(x) = P\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - A_n}{B_n} < x\right\}\right)$$

$$F_n^{\infty}(x) = P^{\infty}\left(\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i - A_n}{B_n} < x\right\}\right)$$

$$\Phi_n(t) = E\left[\exp it\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - A_n}{B_n}\right)\right]$$

$$\Phi_n^{\infty}(t) = E\left[\exp it\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i - A_n}{B_n}\right)\right],$$

unde $\{A_n\}_{n\in N^*}$ şi $\{B_n\}_{n\in N^*}$ sînt două şiruri de constante, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \infty$, $A_{m+n} = A_m + A_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_{m+n}}{B_n} = 1$ pentru orice $m \in N^*$.

TEOREMA 2.2.1. *Să presupunem că este îndeplinită condiţia* (C). *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n^{\infty}(x) = F^{\infty}(x)$ *pentru orice* x *punct de continuitate a lui* F^{∞}, F^{∞} *fiind o funcţie de repartiţie, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F^{\infty}(x)$ *pentru orice* x *punct de continuitate a lui* F^{∞}.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că dacă notăm prin $\Phi^{\infty}(t)$ funcţia caracteristică corespunzătoare lui F^{∞}, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |\Phi_n(t) - \Phi^{\infty}(t)| = 0$ pentru orice $t \in R$. Fie $t \in R$ fixat şi să considerăm şirul $(n_k')_{k\in N^*}$ de numere naturale definite astfel ca

$$\lim_{k\to\infty} |\Phi_{n_k'}(t) - \Phi^{\infty}(t)| = \overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_n(t) - \Phi^{\infty}(t)| = \alpha(t).$$

Să alegem, mai departe, un subşir $(n_k'')_{k\in N^*}$ al lui $(n_k')_{k\in N^*}$ astfel ca $\lim\limits_{k\to\infty} \Phi_{n_k''}(t) = \overline{\Phi}(t)$. De aici obţinem

$$|\overline{\Phi}(t) - \Phi^{\infty}(t)| = \alpha(t).$$

Fie m un număr natural arbitrar :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - A_n}{B_n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i) - A_m}{B_n} + \frac{\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) - A_{n-m}}{B_n}.$$

Prima componentă din membrul drept tinde către 0 cînd $n \to \infty$ pentru orice $\omega \in \Omega$. Prin urmare

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_{n_k''}(t) = \lim_{k\to\infty} \Phi^m_{n_k''}(t) = \overline{\Phi}(t),$$

unde prin $\Phi_n^m(t)$ înţelegem funcţia caracteristică a variabilei aleatoare

$$\frac{\sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i) - A_{n-m}}{B_n}.$$

Aplicînd teorema lui Stuţky variabilei aleatoare

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i - A_n}{B_n},$$

obţinem că repartiţia sa asimptotică este identică cu repartiţia asimptotică a variabilei aleatoare

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i - A_n}{B_{m+n}}.$$

Utilizînd lema 2.2.1, obţinem

$$|\Phi_n^m(t) - \Phi^\infty(t)| < 2\,\varepsilon_m$$

pentru orice $n \in N^*$. De aici rezultă

$$|\overline{\Phi}(t) - \Phi^\infty(t)| < 2\,\varepsilon_m.$$

Dar m este arbitrar, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Rezultă $\alpha(t) = 0$ şi teorema este demonstrată.

Să notăm

$$\sigma_{(n)}^2 = E^\infty(f(x_1) + \ldots + f(x_n) - n\, E^\infty(f))^2.$$

TEOREMA 2.2.2. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiţia* (C), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$ *şi* $\liminf D(f(\xi_n)) < \infty$.

Atunci

$$\sigma^2 = E^\infty(f^2) - [E^\infty(f)]^2 + 2\sum_{h=1}^{\infty}\{E^\infty(f(x_1)f(x_{h+1}) - [E^\infty(f)]^2\} < \infty$$

Dacă în plus $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n\,E^\infty(f)}{\sigma\sqrt{n}} < \lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

TEOREMA 2.2.3. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiţia* (C), $\liminf\limits_{n} E(|f(\xi_n)|^{2+\delta}) < \infty$ *şi dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{(n)} = \infty$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) - n\,E^\infty(f)}{\sigma_{(n)}} < \lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Demonstrațiile teoremelor 2.2.2 și 2.2.3 rezultă din lemele 2.2.1, 2.2.2 și 2.2.3, din teorema 2.2.1 de mai sus, folosind rezultatele teoremelor 1.1.4 și 1.1.5 din [14].

COROLAR. *Să presupunem că* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$ *și* $|f| < M$. *Atunci*

$$\sigma^2 = E^\infty(f^2) - [E^\infty(f)]^2 + 2\sum_{h=1}^{\infty} \{E^\infty(f(x_1)f(x_{h+1}) - [E^\infty(f)]^2\} < \infty.$$

Dacă $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - nE^\infty(f)}{\sigma\sqrt{n}} < \lambda\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Demonstrație. Vom arăta că procesul staționar $\{\eta_n\}_{n\in N^*}$ satisface condițiile teoremei 1.4 din [14]. Din lema 1.3.1, luînd $g_i = f(x_i) - E^\infty(f)$, obținem

$$|E^\infty(g_1\, g_{h+1})| < 4\, M^2\, \varepsilon_h$$

Prin urmare

$$\sigma^2 = E^\infty(g^2) + 2\sum_{h=1}^{\infty} E^\infty(g_1\, g_{h+1}) < \infty.$$

Vom arăta că $\sigma^2_{(n)} = E^\infty(g_1 + \ldots + g_n)^2 \to \infty$ cînd $n \to \infty$.

În adevăr, dacă notăm prin $R(j)$ funcția de corelație a procesului staționar, avem :

$$\sigma^2_{(n)} = E^\infty(x_1 + \ldots + x_n)^2 =$$

$$= n\,E^\infty(x_1^2) + 2\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,R(j) =$$

$$= n\left[R(0) + 2\sum_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)R(j)\right] =$$

$$= n\,\sigma^2(1 + 0(1)).$$

Am ținut seama că

$$\sum_{j\geqslant n} R(j) = 0(1)$$

și că din convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ rezultă

$$n\,\varepsilon_n \to 0$$

și prin urmare

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{j\,R(j)}{n} \to 0.$$

Este deci posibil să aplicăm teorema 1.4 din [14] și demonstrația este terminată.

Observație. Variantele teoremelor limită centrale date mai sus sînt valabile și în condiții mai generale și anume cînd f se înlocuiește cu o funcție h de m variabile, iar $f(\xi_n)$ prin

$$h(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m-1}).$$

În adevăr, procesului $\{h(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m-1})\}_{n \in N^*}$, fiind ergodic și de același tip cu procesul $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$, i se pot aplica proprietățile de mai sus.

2.3. LEGEA TARE A NUMERELOR MARI

Utilizînd legătura dintre procesul ergodic și procesul staționar limită, putem obține o variantă a legii tari a numerelor mari.

Să notăm $S'_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$.

TEOREMA 2.3.1. *Să presupunem că este satisfăcută condiția* (C). *Atunci* $\frac{S'_n}{n}$ *converge aproape sigur cînd* $n \to \infty$ *dacă și numai dacă* $|E^\infty(f)| < \infty$ *iar* $\lim_{n \to \infty} \frac{S'_n}{n} = E^\infty(f)$ *aproape sigur.*

Demonstrație. Se poate arăta cu ușurință, folosind rezultatul lemei 2.2.3, că procesul staționar $\{\eta_n\}_{n \in N^*}$ care satisface condiția (C) este metric tranzitiv și prin urmare pentru el are loc legea tare a numerelor mari în forma clasică (teorema lui Birkhoff).

Să considerăm acum cîmpurile de probabilitate $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty, \widetilde{P})$ și $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty, \widetilde{P}^\infty)$, unde $\widetilde{P}$ și $\widetilde{P}^\infty$ sînt definite pe mulțimile intervalelor cilindrice în modul următor :

$$P(\{\omega \mid f(\xi_1) < a_1, \ldots, f(\xi_n) < a_n\}) = \widetilde{P}(A),$$

$$P^\infty(\{\zeta \mid \eta_1(\zeta) < a_1, \ldots, \eta_n(\zeta) < a_n\}) = \widetilde{P}^\infty(A),$$

unde $A = \{(x_1, \ldots, x_n \ldots) \mid f(x_1) < a_1, \ldots, f(x_n) < a_n\}$.

Aceste probabilități se extind în mod unic pe $\mathcal{B}^\infty$ după o teoremă binecunoscută.

Fie $\{\widetilde{x}_n\}$ șirul de variabile aleatoare coordonate :

$$\widetilde{x}_n(x_1, \ldots, x_n \ldots) = x_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Aceste variabile au aceleași repartiții finit dimensionale ca și variabilele aleatoare $\{f(\xi_n)\}_{n \in N^*}$ cînd repartițiile lor sînt date cu ajutorul probabilității $\widetilde{P}$ (adică cînd le considerăm atașate cîmpului de probabilitate $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty, \widetilde{P})$) și aceleași repartiții finit dimensionale ca și variabilele aleatoare $\{\eta_n\}_{n \in N^*}$ cînd repartițiile lor sînt date cu ajutorul probabilității $\widetilde{P}^\infty$ (adică cînd le considerăm atașate cîmpului de probabilitate $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty, \widetilde{P}^\infty)$).

Fie, mai departe, $\mathcal{B}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots)$ σ-algebra minimală în raport cu care variabilele $\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots$ sînt măsurabile.

Să considerăm mulţimea

$$A = \left\{ (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mid \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_1 + \ldots + \widetilde{x}_n}{n} = E^\infty(f) \right\}$$

Evident, $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1} \ldots)$.

Remarcăm acum că familia de mulţimi pentru care condiţia (C) este satisfăcută este clasă monotonă şi prin urmare pentru orice $B_n \in \mathcal{B}(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}_{n+1}, \ldots)$,

$$|\widetilde{P}(B_n) - \widetilde{P}^\infty(B_n)| < \varepsilon_n.$$

Rezultă

$$|\widetilde{P}(A) - \widetilde{P}^\infty(A)| < \varepsilon_n$$

pentru $n = 1, 2, \ldots$. De aici obţinem $\widetilde{P}(A) = \widetilde{P}^\infty(A)$. Dar din teorema lui Birkhoff, $\widetilde{P}^\infty(A) = 1$ şi prima parte a teoremei este demonstrată.

Să presupunem acum că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_1 + \ldots + \widetilde{x}_n}{n}$ există cu probabilitate 1 în raport cu $\widetilde{P}$. După cum am văzut mai sus, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\widetilde{x}_1 + \ldots + \widetilde{x}_n}{n}$ va exista cu probabilitate 1 şi în raport cu $\widetilde{P^\infty}$. Fie $X(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ o variabilă aleatoare identic repartizată cu variabila $\widetilde{x}_1$ ataşată cîmpului de probabilitate $(R^\infty, \mathcal{B}^\infty, \widetilde{P}^\infty)$. Vom demonstra că $|E^\infty(f)| < \infty$.

Fie

$$A_0 = R^\infty,$$

$$A_n = \{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mid |X(x_1, \ldots, x_n, \ldots)| \geqslant n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Avem, evident,

$$\widetilde{P}^\infty(A_n) = \widetilde{P}^\infty(\{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \mid |\widetilde{x}_n(x_1, \ldots, x_n, \ldots)| \geqslant n\}).$$

Se obţin cu uşurinţă relaţiile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}^\infty(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(\widetilde{P}^\infty(A_{n-1}) - \widetilde{P}^\infty(A_n)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} E^\infty(|X|\, \chi_{A_{n-1}-A_n}) = E^\infty(|X|) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\, (\widetilde{P}^\infty(A_{n-1}) - \widetilde{P}^\infty(A_n)) \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}^\infty(A_n)$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}^\infty(A_n) \leqslant E^\infty(|X|) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}^\infty(A_n).$$

Dacă $\frac{S'_n}{n}$ converge, atunci $\frac{X_n}{n} = \frac{S'_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S'_{n-1}}{n}$ converge către 0 în raport cu $\widetilde{P}^{\infty}$ de unde, pe baza teoremei 1.1.2, avem $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{P}^{\infty}(A_n) < \infty$ și teorema este demonstrată.

Observație. Remarca făcută în cazul teoremei limită centrale este valabilă și aici : dacă înlocuim pe f cu o funcție g de m variabile și pe $f(\xi_n)$ cu

$$g(\xi_n, \ldots, \xi_{n+m-1}),$$

teorema de mai sus rămîne adevărată.

CAPITOLUL III

APLICAȚII

3.1. LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE

Fie $(X, \mathcal{F})$ și $(W, \mathcal{V})$ două spații măsurabile și $\{u(\cdot\,;\, x)\ ;\ x \in X$ o familie de aplicații a lui W în el însuși

$$u(\cdot\,;\, x^{(n)}) = u(\cdot\,;\, x_n) \circ \ldots \circ u(\cdot\,;\, x_1)$$

pentru $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^{(n)}$. Fie $B(W, \mathcal{V})$ spațiul Banach al funcțiilor φ definite pe W, reale, mărginite și $\mathcal{V}$-măsurabile cu norma

$$\|\varphi\| = \sup_{c \in W} |\varphi(c)|.$$

Să presupunem că

$$\{(c\,;\, x^{(n)}) \mid u(c\,;\, x^{(n)}) \in V\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^{(n)}$$

pentru fiecare $V \in \mathcal{V}$ și $n \in N^*$.

Fie P o funcție definită pe $W \times \mathcal{F}$ astfel ca pentru fiecare $c \in W$, $P(c\,;\cdot)$ să fie o probabilitate pe $\mathcal{F}$ și $P(\cdot\,;\, A) \in B(W, \mathcal{V})$ pentru fiecare $A \in \mathcal{F}$.

După [16] familia de aplicații $\{u(\cdot\,;\, x)\,;\ x \in X\}$ și funcția P definesc un sistem omogen cu legături complete.

Noțiunea de „sistem cu legături complete" a fost introdusă de M. Iosifescu în 1963 [16]. „Sistemul cu legături complete" generalizează noțiunea de „lanț cu legături complete" [30].

Pentru fiecare $c \in W$ există un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P_c)$ și un șir de variabile aleatoare $(\xi_n)_{n \in N^*}$ definite pe Ω cu valori în X astfel ca

$$P_c(\xi_1(\omega) \in A) = P(c\,;\, A)$$

$$P_c(\xi_{n+1}(\omega) \in A \mid \xi_j,\ 1 \leqslant j \leqslant n)_{\xi_j(\omega) = x_j} = P(u(c\,;\, x^{(n)})\,;\, A)$$

pentru orice $n \in N^*$, $x^{(n)} \in X^{(n)}, A \in \mathcal{F}$.

Pentru $l \in N^*$ fie $P_{1,l}$ funcţia definită pe $W \times \mathcal{F}^{(l)}$ prin relaţiile

$$P_{1,l} = P \qquad \text{dacă } l = 1$$

$$P_{1,l}(c; A^{(l)}) = \int_X P(c; \mathrm{d}x_1) \int_X \ldots \int_X P(u(c; x^{(l-1)}); \mathrm{d}x_l)\, \chi_{A^{(l)}}(x_1, \ldots, x_l) \qquad \text{dacă } l > 1.$$

Pentru l şi $n \in N^*$ fie $P^{(n)}_{1,l}$ funcţia definită pe $W \times \mathcal{F}^{(n)}$ prin relaţiile

$$P^{(n)}_{1,l} = P_{1,l} \qquad \text{dacă } n = 1$$

$$P^{(n)}_{1,l}(c; A^{(l)}) = \int_X P(c; \mathrm{d}x)\, P^{n-1}_{1,l}(u(c; x); A^{(l)}) \qquad \text{dacă } n > 1.$$

Vom lua în consideraţie următoarea condiţie :

Condiţia C. Există un şir de numere reale $(u_n)_{n \in N^*}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, astfel ca

$$|P^{(n)}_{1,l}(c; A^{(l)}) - P^{\infty}_{1,l}(A^{(l)})| < u_n$$

pentru orice $c \in W$, $l \in N^*$, $A^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}$.

Această condiţie revine la condiţia de ergodicitate (C) din capitolul al doilea, deoarece după cum se constată cu uşurinţă :

$$P^{(n)}_{1,l}(c; A^{(l)}) = P_c(\{\xi_n(\omega) \in A_1, \ldots, \xi_{n+l-1}(\omega) \in A_l\})$$

$$P^{(n)}_{1,l}(u(c; x^{(n)}); A^{(l)}) = P_c(\{(\xi_{n+k}(\omega), \ldots, \xi_{n+k+l-1}(\omega)) \in$$

$$\in A^{(l)} \mid \xi_i, 1 \leqslant i \leqslant k\}_{\xi_i = x_i})$$

unde $A^{(l)} = A_1 \times \ldots \times A_l$, $A_i \in \mathcal{F}$ pentru $1 \leqslant i \leqslant l$.

Vom aplica acum rezultatele capitolelor I şi II.

TEOREMA 3.1.1. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiţia* (*C*), $|f| < M$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{1/2} < \infty$. *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D_c(f_n) < \infty$, *atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f_n - E_c(f_n))$ *converge aproape sigur şi dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D_c(f_n) = \infty$, *atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f_n - E_c(f_n))$ *diverge aproape sigur.*

TEOREMA 3.1.2. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiţia* (C′), $|f| < M$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{1/2} < \infty$ *şi dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge aproape sigur, atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} D_c(f_n) < \infty$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_c(f_n) < \infty$.

Fie $\{g_n\}_{n \in N^*}$ un şir de funcţii reale definite pe X şi $\mathcal{F}$-măsurabile şi fie $h_n = g_n \circ \xi_n$, $S''_n = \sum\limits_{i=1}^{n} h_n$.

TEOREMA 3.1.3. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C′) *și să notăm cu* $I = \{q^n,\ n = 1, 2, \ldots\}$, $\gamma_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$. *Dacă exsistă un număr natural q astfel ca* $\sum_{n\in I} \frac{\gamma_n}{n} < \infty$, *și dacă dispersile variabilelor aleatoare considerate sînt egal mărginite, atunci* $\frac{S_n'' - E_c(S_n'')}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

TEOREMA 3.1.4. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ satisface condiția (C′) *și* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{1/2} < \infty$. *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_c(h_n)}{n^2} < \infty$, *atunci* $\frac{S_n'' - E_c(S_n'')}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

TEOREMA 3.1.5. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C′), $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{1/2} < \infty$ *și că dispersile variabilelor aleatoare considerate sînt egal mărginite. Atunci pentru* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\frac{S_n'' - E_c(S_n'')}{n^\alpha}$ *converge aproape sigur către* 0.

TEOREMA 3.1.6. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C′), *atunci* $\frac{S_n'}{n}$ *converge aproape sigur dacă și numai dacă* $|E^\infty(f_n)| < \infty$, *iar* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n'}{n} = E^\infty(f)$ *aproape sigur.*

Teoremele de mai sus sînt obținute particularizînd teoremele 1.4.1, 1.4.2 și 1.4.3 din capitolul I și respectiv teorema 2.3.1. din capitolul II.

Să observăm că legea tare a numerelor mari dată de M. Iosifescu în [16] este conținută ca un caz particular atît în teorema 3.1.3, cît și în teorema 3.1.6 de mai sus.

Mai departe, vom considera o clasă de sisteme cu legături complete de un tip mai general, care nu sînt neapărat ergodice.

Vom introduce mărimea

$$\| P_{1,l;k}^{(n)} \| = \sup_{c,\, x^{(k)},\, y^{(k)},\, A} | P_{1,l}^{(n)}(u(c; x^{(k)}); A) - P_{1,l}^{(n)}(u(c; y);^{(k)}); A) |$$

LEMA 3.1.1. *Dacă* $\| P_{1,l;k}^{(n)} \| < 1 - \delta$, *atunci*

$$| P_{1,l}^{(n)}(u(c;\ x^{(k)});\ A) - P_{1,l}^{(n+k)}(c;\ A) | \leqslant 1 - \delta.$$

Demonstrație. În adevăr, fixîndu-l pe $y^{(k)}$ și integrînd în raport cu $x^{(k)}$ pe $X^{(k)}$, obținem rezultatul enunțat.

Pe baza lemei de mai sus se pot transpune rezultatele capitolului I impunînd asupra lui $(\| P_{1,l;k}^{(n)} \|)_{l,k,n\in N^*}$ restricții ce revin la condițiile (C_1) și (C_2). Vom da spre exemplificare două variante ale legii tari a numerelor mari — una în cazul condiției (C_1) și cealaltă în condiția (C_2).

TEOREMA 3.1.7. *Să presupunem că* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$ *și că există un* $n \in N^*$ *astfel ca* $\| P_{1,l;k}^{(n)} \| < 1 - \delta$ *pentru orice l și* $k \in N^*$. *Dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_c(h_n)}{n^2} < \infty$, *atunci* $\frac{S_n'' - E_c(S_n'')}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

TEOREMA 3.1.8. *Să presupunem că* $\| P^{(l_n)}_{1,l,k} \| < 1 - \delta$ *pentru* $n = q^{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, l_n \sim n^{\alpha}$, $\sup\limits_{n \in N^*} \gamma^{(l_n)}_n < A$, *A fiind o constantă pozitivă și* $\gamma^{(l_n)}_n = \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{l_n}\right]} \varepsilon_{il_n}$. *Dacă* $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{D_c\,(h_i)}{n} \to 0$ *cînd* $n \to \infty$, $0 < \beta < 2$ și $\alpha < \frac{2-\beta}{2}$, *atunci* $\frac{S''_n - E_c\,(S''_n)}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

TEOREMA 3.1.9. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiția* (C′), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{1/2} < \infty$ *și că* $\liminf D(f(\xi_n)) < \infty$. *Atunci*

$$\sigma^2 = E^{\infty}(f^2) - [E^{\infty}(f)]^2 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \{ E^{\infty}(f(x_1) f(x_{h+1}) - [E^{\infty}(f)]^2 \} < \infty$$

Dacă în plus $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P_c \left(\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i - n E^{\infty}(f)}{\sigma \sqrt{n}} < \lambda \right\} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

TEOREMA 3.1.10. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ *satisface condiția* $\liminf\limits_{n} E_c\,(|f_n)^{2+\delta}) < \infty$ *și dacă* $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_{(n)} = \infty$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P_c \left(\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i - n E^{\infty}(f)}{\sigma_{(n)}} < \lambda \right\} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

COROLAR. *Să presupunem că* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ și $|f| < M$. *Atunci* $\sigma^2 < \infty$. *Dacă* $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} P_c \left(\left\{ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i - n E^{\infty}(f)}{\sigma \sqrt{n}} < \lambda \right\} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Acest corolar conține teorema limită centrală dată de M. Iosifescu în [16].

3.2. LANȚURI DE ORDIN INFINIT

Vom da în cele ce urmează două variante ale teoremei limită centrale pentru o clasă de lanțuri de ordin infinit, variante ce extind rezultatul stabilit de C.T. Ionescu Tulcea în [15].

Fie $(T, \mathfrak{T})$ și $(E, \mathfrak{S})$ două spații măsurabile. Pentru $n \in N^*$ să notăm prin E^n produsul cartezian $E^{\{1, \ldots, n\}}$ și prin S^n, produsul $S^{\{1, \ldots, n\}}$.

Pentru $x \in E$, fie u_x o transformare a lui T în el însuși. Să definim pentru $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ aplicațiile $u_x = u_{x_n} \circ \ldots \circ u_{x_1}$ și să presupunem că $\{(t, x_1, \ldots x_n) \mid u_{(x_1, \ldots, x_n)}(t) \in A\} \in \mathfrak{T} \times \mathfrak{S}$ pentru orice $n \in N^*$ și $A \in \mathfrak{T}$.

Fie $\mathcal{M}$ spațiul Banach al funcțiilor definite pe $\mathfrak{T}$, reale, mărginite și $\mathfrak{T}$-măsurabile cu norma

$$\|\varphi\| = \sup_{t \in T} |\varphi(t)|.$$

Fie p o funcție reală definită pe $\mathfrak{T} \times \mathfrak{S}$ avînd proprietățile:

(1) $0 \leqslant p(t, A) \leqslant p(t, E) = 1$ pentru $(t, A) \in \mathfrak{T} \times \mathfrak{S}$;

(2) $A \to p(t, A)$ este o funcție complet aditivă pentru orice $t \in T$;

(3) $t \to p(t, A)$ aparține lui $\mathcal{M}$ pentru orice $A \in \mathfrak{S}$.

Pentru $n \in N^*$, fie $p_{1,n}$ funcția definită pe $T \times \mathfrak{S}^n$ prin relațiile

$$p_{1,n} = p \qquad \text{dacă } n = 1$$

$$p_{1,n}(t, A) = \int_E p(t, \mathrm{d}x_1) \ldots \int_E \cdots \int_E p(u_{(x_1, \ldots, x_n)}(t), \mathrm{d}x_n)\, \chi_A(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\text{dacă } n > 1.$$

Pentru $n, k \in N^*$ să notăm prin $p^k_{1,n}$ funcția definită pe $T \times \mathfrak{S}^n$ prin relațiile

$$p^k_{1,n} = p_{1,n} \qquad \text{dacă } k = 1$$

$$p^k_{1,n}(t, A) = \int_E p(t, \mathrm{d}x)\, p^{k-1}_{1,n}(u_x(t), A) \qquad \text{dacă } k > 1.$$

În cele ce urmează vom presupune că E este un spațiu metric complet și separabil.

Să considerăm, mai departe, procesul staționar $(E^Z, \mathfrak{S}^Z, p^z)$ unde $p^Z(\overset{-1}{p}_{r\{n_1, \ldots, m\}}(A)) = \overset{\infty}{p}_{1, n-m+1,}(A)$ pentru $(n, m) \in Z^2$ și $\overset{-1}{p}_{r\{n, \ldots, m\}}(A) \in \mathfrak{S}^Z$

TEOREMA 3.2.1. *Dacă pentru orice* $n \in N^*$, $p^{\infty}_{1,n}$ *este o probabilitate pe* $\mathfrak{S}^n$ *care satisface relația*

$$|p^{k+1}_{1,n}(A) - p^{\infty}_{1,n}(A)| < \varepsilon_k$$

pentru orice $t \in T$, $A \in \mathfrak{S}$ *și* $n \in N^*$ *cu* $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, *atunci procesul staționar* $(E^Z, \mathfrak{S}^Z, p^Z)$ *satisface condiția* (C) *din cap. II.*

Demonstrație. După [16] pentru fiecare $t \in T$ există un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P_t)$ și un șir de variabile aleatoare $\{\xi_n\}_{n \in N^*}$ definite pe Ω și cu valori în E astfel că

$$P_t(\xi_1(\omega) \in A) = p(t, A)$$

$$P_t(\xi_{n+1}(\omega) \in A \mid \xi_j, 1 \leqslant j \leqslant n)_{\xi_j(\omega) = x_j} = p(u_{(x_1, \ldots, x_n)}(t), A)$$

pentru orice $n \in N^*$, $A \in \mathfrak{S}$, $x_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Utilizînd condiția teoremei, obținem

$$|p^n_{1,l}(u_{(x_1, \ldots, x_k)}(t), B) - p^{\infty}_{1,l}(B)| < \varepsilon_n$$

$$|p^{n+k}_{1,l}(t, B) - p^{\infty}_{1,l}(B)| < \varepsilon_{n+k}.$$

Din inegalitatea triunghiului avem

$$|p^{n}_{1,l}(u_{(x_1,\dots,x_n)}(t), B) - p^{n+k}_{1,l}(t, B)| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n+k} = \varepsilon_{n,k}.$$

Dacă notăm prin $\mathfrak{M}^b_a$, σ-algebra generată de mulțimea evenimentelor de forma $\{\omega \mid (\xi_{i_1}(\omega), \dots, \xi_{i_m}(\omega)) \in A^m\}$ pentru orice $a \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant b$, $A^m \in \mathfrak{S}^m$, relația de mai sus devine

$$|P_t(B^{-1} \mid \mathfrak{M}^k_1) - P_t(B^{-1})| < \varepsilon_{n,k}$$

unde $B^{-1} = \{\omega \mid (\xi_{n+k}(\omega), \dots, \xi_{n+k+l}(\omega)) \in B\} \in \mathfrak{M}^{k+n+l}_{k+n}$.

Deoarece l este arbitrar, iar familia de mulțimi care satisface relația de mai sus este clasă monotonă, obținem, conform proprietății 1.1.1,

$$|P_t(\Lambda_1 \Lambda_2) - P_t(\Lambda_1) P_t(\Lambda_1)| < \varepsilon_{n,k} P_t(\Lambda_1),$$

unde $\Lambda_1 \in \mathfrak{M}^k_1$ și $\Lambda_2 \in \mathfrak{M}^{\infty}_{k+n}$.

De aici obținem că pentru orice $l_0, k_0, n, k \in N^*$, $k > k_0$ avem

$$|p^{k-k_0}_{1,k_0+n+l_0}(t, A^{(k_0+n+l_0)}) - p^{k-k_0}_{1,k_0}(t, A^{(k_0)}) p^{n+k}_{1,l_0}(t, A^{(l_0)})| < \varepsilon_{n,k_0} p^{k-k_0}_{1,k_0}(t, A^{(k_0)}),$$

unde $A^{(k_0+n+l_0)} = A^{(k_0)} \times \underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ ori}} \times A^{(l_0)}$, $A^{(k_0)} \in \mathfrak{S}^{(k_0)}$, $A^{(l_0)} \in \mathfrak{S}^{(l_0)}$.

Cînd $k \to \infty$, obținem

$$|p^{\infty}_{1,k_0+n+l_0}(A^{(k_0+n+l_0)}) - p^{\infty}_{1,k_0}(A^{(k_0)}) p^{\infty}_{1,l_0}(A^{(l_0)})| < \varepsilon_n p^{\infty}_{1,k_0}(A^{(k_0)})$$

de unde rezultă imediat teorema enunțată mai sus.

Dacă condițiile teoremei 5 din [15] sînt satisfăcute, avem

$$|p^{k+1}_{1,n}(t, A) - p^{\infty}_{1,n}(A)| \leqslant \inf_{1 \leqslant s \leqslant k} \left(6 \sum_{j \geqslant s} \frac{a_j}{1-h} + 2h^{(k/s)-1}\right),$$

unde $0 < h < 1$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

În virtutea acestui rezultat, teorema 5 din [15] poate fi înlocuită cu următoarele două teoreme date în condiții mai puțin restrictive și anume variantele teoremei limită centrale pentru procese staționare ce satisfac condiția (C) ([14]).

Fie f o funcție reală și definită pe E^r și $\mathfrak{S}^r$-măsurabilă. Pentru fiecare $n \in N^*$ să notăm

$$f_n = f_0 p_r\{n_1 \dots, n + r - 1\},$$

$$\sigma^2_n = E(f_1 + \dots + f_n)^2 - E^2(f_1 + \dots + f_n).$$

Teorema 3.2.2. *Să presupunem că* $E(f_1) = 0$, $E(|f_1|^{\alpha}) < \infty$ *pentru* $\alpha > 2$ *și că* $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \infty$. *Atunci*

$$\lim_{n \to \infty} p^z\left(\frac{f_1 + \dots + f_n}{\sigma_n} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

TEOREMA 3.2.3. *Să presupunem că* $E(f_1) = 0$, $E(f_1^2) < \infty$ *și* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j\geqslant\sqrt{n}} a_n\right)^{1/2} < \infty$. *Atunci*

$$\sigma^2 = E(f_1^2) + 2\sum_{h=1}^{\infty} E(f_1\, f_{h+1}) < \infty.$$

Dacă în plus $\sigma \neq 0$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} p^z\left(\frac{f_1 + \ldots + f_n}{\sigma\sqrt{n}} < a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

3.3. LANȚURI MARKOV NEOMOGENE

În cele ce urmează, vom considera cîteva aplicații ale proprietăților date în primul capitol la lanțurile Marcov neomogene.

Fie $(X, \mathcal{F}_X)$ un spațiu măsurabil și $\{P^n(\xi, A)\}_{n\in N^*}$ un șir de probabilități de trecere, care prin definiție au proprietățile :

(I) Pentru ξ fixat, $P^n(\xi, \cdot)$ este o probabilitate pe $\mathcal{F}_X$

(II) Pentru A fixat, $P^n(\cdot\,; A)$ este o funcție de ξ, $\mathcal{F}_X$-măsurabilă.

Să definim spațiul șirurilor $\omega = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$, unde $\xi_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ și variabilele $x_n(\omega) = \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Să notăm prin P_1 probabilitatea inițială definită pe $\mathcal{F}_X$.

Să luăm

$$P(\{x_1(\omega)\in A_1\}) = P_1(A_1)$$

$$P(\{x_1(\omega)\in A_1, \ldots, x_n(\omega)\in A_n\}) =$$

$$= \int_{A_1} P_1(d\xi_1)\int_{A_2} P^1(\xi_1, d\xi_2)\ldots\int_{A_n} P^n(\xi_{n-1}, d\xi_n).$$

Aceste probabilități pot fi extinse în mod unic la σ-algebra produs $\mathcal{F} = \mathcal{F}_X\times\ldots\times\mathcal{F}_X\times\ldots$ pe baza unei teoreme binecunoscute. Să punem $h_n = f_n(x_n)$, $(f_n)_{n\in N^*}$ fiind un șir de funcții reale definite pe X și $\mathcal{F}$-măsurabile.

Să notăm

$$N(P^n) = \sup_{A,\,\xi,\,\eta} |P^n(\xi\,;\,A) - P^n(\eta\,;\,A)|.$$

$\alpha_n = 1 - N(P^n)$ se numește coeficient de ergodicitate [12].

LEMA 3.3.1. [33] *Fie* P *și* P' *două probabilități de trecere definite pe* $(X, \mathcal{F}_X)$. *Atunci*

$$N(P\circ P') \leqslant N(P)\,N(P'),$$

unde $P\circ P'$ *notează următoarea probabilitate de trecere*

$$P\circ P'(\xi\,;\,E) = \int_X P'(\eta\,;\,E)\,P(\xi\,;\,d\eta).$$

Demonstrație. Dacă notăm cu $\| \widetilde{P}_{(\xi,\eta)} \|$ variația totală a funcției de mulțime $P(\xi; \cdot) - P(\eta; \cdot)$ și cu $\| P \| = \sup\limits_{\xi,\eta} \| \widetilde{P}_{(\xi,\eta)} \|$, obținem cu ușurință $N(P) = \frac{1}{2} \| \widetilde{P} \|$.

Prin urmare este suficient să arătăm că $\| \widetilde{P \circ P'} \| \leqslant 2N(P)\, N(P')$. Fie E^+ și E^- mulțimile „pozitivă'' și respectiv „negativă'' din descompunerea lui Hahn corespunzătoare lui $\widetilde{P \circ P'}_{(\xi,\eta)}$. Avem

$$\| \widetilde{P \circ P'}_{(\xi,\eta)} \| = \widetilde{P \circ P'}_{(\xi,\eta)}(E^+) - \widetilde{P \circ P'}_{(\xi,\eta)}(E^-) =$$

$$= \{ P \circ P'(\xi; E^+) - P \circ P'(\eta; E^+) \} - \{ P \circ P'(\xi; E^-) - P \circ P'(\eta; E^-) \} =$$

$$= \int_X P'(\zeta; E^-)\, P(\xi; \mathrm{d}\zeta) - \int_X P'(\zeta; E^+)\, P(\eta; \mathrm{d}\zeta) -$$

$$- \int_X P'(\zeta; E^-)\, P(\xi; \mathrm{d}\zeta) + \int_X P'(\zeta; E^-)\, P(\eta; \mathrm{d}\zeta) =$$

$$= \int_X \{ P'(\zeta; E^+) - P'(\zeta; E^-) \}\, P(\xi; \mathrm{d}\zeta) -$$

$$- \int_X \{ P'(\zeta; E^+) - P'(\zeta; E^-) \}\, P(\eta; \mathrm{d}\zeta) =$$

$$= \int_X \{ P'(\zeta; E^+) - P'(\zeta; E^-) \}\, \widetilde{P}_{(\xi,\eta)}(\mathrm{d}\zeta).$$

Să punem $f(\zeta) = P'(\zeta; E^+) - P'(\zeta; E)^-$. Pentru orice $\zeta, \zeta' \in X$, avem

$$| f(\zeta) - f(\zeta') | \leqslant | P'(\zeta; E^+) - P'(\zeta'; E^+) | + | P'(\zeta; E^-) - P'(\zeta'; E^-) | =$$

$$= | \widetilde{P}_{(\zeta,\zeta')}(E^+) | + | \widetilde{P}_{(\zeta,\zeta')}(E^-) | \leqslant \| \widetilde{P}_{(\zeta,\zeta')} \| \leqslant 2N(P).$$

Luînd $m = \frac{1}{2} [\sup\limits_{\zeta} (f(\zeta) + \inf\limits_{\zeta} f(\zeta))]$, obținem

$$\sup_{\zeta} | f(\zeta) - m | \leqslant N(P').$$

Deci

$$\| \widetilde{P \circ P}_{(\xi,\eta)} \| = \int_X \{ f(\zeta) - m \}\, \widetilde{P}_{(\xi,\eta)}(\mathrm{d}\zeta) + \int_X m\, \widetilde{P}_{(\xi,\eta)}(\mathrm{d}\zeta) \leqslant$$

$$\leqslant \sup | f(\zeta) - m |\, \| \widetilde{P}_{(\xi,\eta)} \| \leqslant 2N(P')\, N(P)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

LEMA 3.3.2. [33]. *Fie X, Y și Z trei variabile aleatoare care iau valori în spațiile $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ și respectiv $(Z, \mathcal{F}_Z)$ și $P(x; A)$, $P'(y; B)$ și $P''(x; B)$ probabilitățile condiționate de la X la Y, Y la Z și respectiv de la X la Z.*

Să presupunem că

$$P''(x;\,B)=\int_Y P'(y;\,B)\,P(x;\,\mathrm{d}y)$$

(relația lui Chapman-Kolmogorov). Dacă $R(x,\,C)$ este probabilitatea condiționată de la X la vectorul $(Y,\,Z)$, atunci

$$N(R)=N(P).$$

Demonstrație. 1) Fie x și y două elemente arbitrare ale lui X și U^+, U^- mulțimile „pozitivă" și respectiv „negativă" din descompunerea lui Hahn a lui $Y\times Z$ iar E^+ și E^- mulțimile similare corespunzătoare lui $\tilde{P}_{(x,\,y)}$. Vom arăta întîi că putem lua

$$U^+=E^+\times Z \text{ și } U^-=E^-\times Z.$$

În adevăr, pentru orice submulțime a lui $E^+\times Z$ de tipul $E\times E'$ avem

$$\tilde{P}''_{(x,\,y)}(E\times E')=P''(x;\,E\times E')-P''(y;\,E\times E')=$$

$$=\int_E P'(z;\,E')\,P(x;\,\mathrm{d}z)-\int_E P'(z;\,E')\,P(y;\,\mathrm{d}z)= \tag{1}$$

$$=\int_E P'(z;\,E')\,\tilde{P}_{(x,\,y)}(\mathrm{d}z)\geqslant 0.\quad (E\subset E^+).$$

De aici rezultă că pentru orice submulțime U a lui $E^+\times Z$, $\tilde{R}_{(x,\,y)}(U)\geqslant 0$ și printr-un raționament similar relativ la submulțimile măsurabile U' ale lui $E^-\times Z$ obținem $\tilde{R}_{(x,\,y)}(U')\leqslant 0$. Deoarece descompunerea lui $Y\times Z=U^+\cup U^-$ este unică, exceptînd o mulțime de măsură egală cu 0, putem lua $U^+=E^+\times Z$ și $U^-=E^-\times Z$.

2) Din relația (1) avem

$$\|\tilde{R}_{(x,\,y)}\|=\tilde{R}_{(x,\,y)}(E^+\times Z)-\tilde{R}_{(x,y)}(E^-\times Z)=\int_{E^+}P'(z,\,Z)\,\tilde{P}_{(x,\,y)}(\mathrm{d}z)-$$

$$-\int_{E^-}P'(z,\,Z)\,\tilde{P}_{(x,\,y)}(\mathrm{d}z)=\int_{E^+}\tilde{P}_{(x,\,y)}(\mathrm{d}z)-\int_{E^-}\tilde{P}_{(x,\,y)}(\mathrm{d}z)=\|\tilde{P}_{(x,\,y)}\|.$$

Deci

$$N(R)=\frac{1}{2}\sup_{(x,\,y)}\|\tilde{R}_{(x,\,y)}\|=\frac{1}{2}\sup_{(x,\,y)}\|\tilde{P}_{(x,\,y)}\|=N(P)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Să notăm $\alpha_{ij}=1-N(P^{i+1},\ldots,P^j)$ pentru $i<j+1$.

Să considerăm următoarele condiții :

(C_1') : Există un număr δ, $0<\delta\leqslant 1$, un număr N, $(N>0)$ și un număr $l\in N^*$, astfel ca $\alpha_{n,\,n+l}>\delta$ pentru orice $n>N$,

(C_2') : Există un număr δ, $0<\delta\leqslant 1$ și un număr α, $0<\alpha<1$, astfel încît dacă l_n este cel mai mic număr pentru care $\alpha_{i,\,i+l_n}>\delta$, $i=1,\ldots,n-l_n$; $n=q^\nu$, $q>1$, $\nu=1,2,\ldots,$ atunci $l_n\sim n^\alpha$.

Dacă luăm în considerație lemele 3.3.1 și 3.3.2, obținem că condițiile (C_1') și (C_2') revin la condițiile (C_1) și (C_2) din capitolul I.

Să mai observăm că putem lua $\varepsilon_n = \varphi^{(n)}(l)$ și că în cazul condiției (C_1') avem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} = l \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\delta)^{\frac{n}{2}} = \dfrac{l}{1-(1-\delta)^{1/2}}$.

Teorema 3.3.1. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C_1') *și dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{D(h_n)}{n^2} < \infty$, *atunci* $\dfrac{S_n'' - E(S_n'')}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

Teorema 3.3.2. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C_1') *și dacă dispersiile variabilelor* $\{h_n\}_{n\in N^*}$ *sînt egal mărginite, atunci* $\dfrac{S_n'' - E(S_n'')}{n^\alpha}$ *converge aproape sigur către* 0 *pentru orice* $\alpha > \dfrac{1}{2}\cdot$

Teorema 3.3.3. *Să presupunem că* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C_1') *și că variabilele* $\{h_n\}_{n\in N^*}$ *sînt identic repartizate. Atunci* $\dfrac{S_n''}{n}$ *converge aproape sigur dacă și numai dacă* $|E(h_1)| < \infty$, *iar* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n''}{n} = E(h_1)$ *aproape sigur.*

Teorema 3.3.4. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C_2'), $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} D(h_i)}{n^\beta} = 0$ *cu* $0 < \beta < 2$ *și* $\alpha < \dfrac{2-\beta}{2}$, *atunci* $\dfrac{S_n'' - E(S_n'')}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

Corolar. *Dacă* $\{\xi_n\}_{n\in N^*}$ *satisface condiția* (C_2') *cu* $\alpha < \dfrac{1}{2}$ *și dacă dispersiile variabilelor aleatoare* $\{h_n\}_{n\in N^*}$ *sînt egal mărginite, atunci* $\dfrac{S_n'' - E(S_n'')}{n}$ *converge aproape sigur către* 0.

Teorema de mai sus extinde teorema corespunzătoare din [33], suprimîndu-se totodată una din restricțiile impuse acolo.

Să considerăm acum un caz particular studiat de J. Kozniewska [22]. Fie $\{X_n\}_{n\in N^*}$ un lanț Markov cu r stări posibile. Să notăm prin $x_1, \ldots, x_r$ valorile admise de variabilele aleatoare $\{X_n\}_{n\in N^*}$ și să punem :

$$P(X_s = x_i) = p_{s.i}, \quad i = 1, \ldots, r, \; s \in N^*$$

$$P(X_{n+1} = x_j \mid X_n = x_i) = p_{ij}^{(n+1)}, \quad i, j = 1, \ldots, r, \; n \in N^*.$$

Pentru ca $\dfrac{S_n - E(S_n)}{n^\alpha}$ cu $\alpha > \dfrac{1}{2}$ să tindă tare către 0, I. Kozniewska impune condiția [22].

$$\sum_{s=1}^{\infty} \max_i |p_{ij}^{(s)} - p_{s,j}| < \infty \text{ pentru orice } j = 1, 2, \ldots r$$

care este mai restrictivă decît condiția

$$\max_i \sum_{j=1}^{r} | p_{ij}^{(s)} - p_{s,j} | < 1,$$

pentru $s = N + l,\ N + 2\,l, \ldots;$ N și l fiind numere naturale arbitrare, condiție ce rezultă din teorema 3.3.2.

Primită la redacție la 9 noiembrie 1965

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. J. R. Blum, D. L. Hanson, L. Koopmans, *On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes.* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **2**, 1–11 (1963).
2. M. Botez, *Asupra unei metode de estimație în statistica sistemelor aleatoare cu legături complete*, **1**, 75–86, 1966.
3. M. Botez, R. Theodorescu, *On the strong ergodic behaviour of random processes.* Revue de math. pur. et appl., **7**, 991–1010 (1965).
4. G. Ciucu, *Sulle leggi limite per le catene con vincoli completti*, Giornale dell' Ist. degli Attuari, **25**, 51–58 (1962).
5. G. Ciucu, *Proprietăți ergodice ale unor lanțuri cu legături complete.* St. cerc. mat., **8**, 413–446 (1957).
6. H. Cohn, *Le problème limite central pour les systèmes aléatoires à liaisons complètes.* C. R. Acad. Sci. Paris, **259**, 2423–2426 (1964).
7. — *Teoreme limită pentru sisteme cu legături complete.* St. cerc. mat. 5 (1965).
8. — *On a stationary process occurring in the theory of chains of infinite order.* Revue math. pur. et appl., *3* (1966).
9. — *Quelques théorèmes limites pour une classe de variables aléatoires dépendantes.* R. Acad. Nat. del Lincei 5 (1965).
10. P. H. Diananda, *Some probability theorems with statistical applications.* Proceedings of the Cambridge Phil. Society, **49**, 239–246 (1953).
11. E. Dinkin, *О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова.* Украинский Мат. журнал, 6, *1*, 21—27 (1954).
12. R. Dobrusin, *Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова.* Теория Вероятн. 1, 27—28, 365—426, (1956).
13. J. L. Doob, *Stochastic processes.* New York–London, 1953.
14. I. A. Ibraghimov, *Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова.* Теория Вероятн., 1, 72—88, 365—446 (1950).
15. C. T. Ionescu Tulcea, *On a class of operators occuring in the theory of chains of infinite order.* Canadian J. Math., **11**, 112–121 (1959).
16. M. Iosifescu, *Случайные системы с полными связами с произвольным множеством состояний.* Revue de math. pures et appliquées, **8**, 611–635 (1963).
17. — *Sur la loi forte des grands nombres pour les systémes aléatoires homogènes à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états.* C. R. Acad. Sci. Paris, **258**, 4421–4423 (1964).
18. — *Systémes aléatoires non-homogènes à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états.* Bull. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., 1965.
19. — *Sur l'ergodicité uniforme des systèmes aléatoires homogènes à liaisons complètes à un ensemble quelconque d'états.* Bull. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., 1965.
20. A. N. Kolmogorov, *Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen.* Math. Ann., **99**, 309–319, 102, 484–488 (1928–1929).

21. A. N. Kolmogorov, *Sur la loi forte des grands nombres*. C. R. Acad., Sci. Paris, **191**, 910—913 (1930).

22. I. Kozniewska, *Sur la loi forte des grands nombres pour les variables aléatoires également bornées*. Colloquium Mathem.,**X** 290—304 (1963).

23. J. Lamberti, P. Suppes, *Chains of infinite order and their applications to learning theory*. Pacific J. Math., **9**, *16*, 93—99 (1959).

24. P. Lévy, *Loi forte des grands nombres pour les variables enchaînées* Journal de Math. pures et appliquées, **15**, 11—24 (1936).

25. M. Loève, *Etude asymptotique des sommes des variables aléatoires liées*. Journal de Math. pures et appliquées, **24**, 249—318 (1945).

26. M. Loève, *Probability theory*. Princeton, 1960.

27. G. Mihoc, *Legea limită pentru sumele de variabile vectoriale ale unui lanț cu legături complete*. Comunicările Acad. R.P.R. **13**. 5—9 (1963).

28. — *La loi limite pour les sommes de variables d'une chaîne à liaisons complètes stationnaire et multiple*. Rev. math. pures et appliquées, **8**, 217—296 (1963).

29. G. Mihoc, G. Ciucu, *Asupra unor proprietăți de limită din teoria lanțurilor cu legături complete*. Analele Univ. Buc. ser. șt. nat. mat. fiz., 225—231 (1961).

30. O. Onicescu, G. Mihoc, *Sur les chaînes statistiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, **200**, 511 (1935).

31. O. Onicescu, G. Mihoc, *Comportement asymptotique des chaînes à liaisons complètes*. Disq. Math. et Phys, **1** (1940).

32. G. Ottaviani, *Sulla teoria astratta del Calcolo della probabilità proposta dal Cantelli*. Giornale dell' Instituto degli Attuari 10—40 (1939).

33. T. Ueno, *Some limit theorems for temporally discrets random processes*. Journal of the Faculty of Sciences. University of Tokyo, **VII**, 444—462, 557—565 (1957).

ȘIRURI DE INTERPOLARE ȘI STRUCTURA SPAȚIULUI IDEALELOR MAXIMALE ALE LUI H^{∞}

DE

I. SUCIU

În această lucrare, cu caracter expozitoriu, sînt prezentate ultimele rezultate de interpolare în H^{∞} cît și soluția recentă datorită lui Newman și Carleson a problemei „corona“ a lui Kakutani.

1. *Introducere.* Cu ajutorul teoremelor de interpolare a fost rezolvată una din cele mai dificile probleme de algebre de funcții, rămasă mult timp nerezolvată, problema densității discului unitate în spațiul idealelor maximale ale lui H^{∞} (the Corona Problem).

D. I. Newman a fost acela care a arătat cum din teoreme de interpolare rezultă soluția acestei probleme. L. Carleson a demonstrat aceste teoreme de interpolare.

În această lucrare se urmărește legătura dintre studiul spațiului idealelor maximale ale lui H^{∞} și diferitele teoreme de interpolare. Se reface aproape în întregime calea care a dus la rezolvarea problemei coroanei, demonstrîndu-se teoremele de interpolare ale lui L. Carleson după [1] și [2]. În plus sînt puse în evidență și alte legături între spațiul idealelor maximale ale lui H^{∞} și convergențele pe șiruri din $|z| < 1$ și în special pe șiruri de interpolare.

Teoremele de funcții analitice, de spații H^{p} sînt folosite după și în terminologia lui K. Hauffman din [3].

2. *Preliminarii.* Fie D discul unitate $|z| < 1$ din planul complex și H^{∞} algebra funcțiilor analitice și mărginite în D. Cu norma

$$\|f\| = \sup_{|z|<1} |f(z)|$$

H^{∞} este o algebră Banach. Din teorema lui Fatou rezultă că H^{∞} se poate scufunda izometric în $L^{\infty}(|z| = 1)$ funcțiile din H^{∞} fiind acele funcții din L^{∞} care au coeficienții Fourier negativi egali cu zero.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 1029–1038, BUCUREȘTI, 1966

Să notăm cu X respectiv $\mathcal{M}$ spaţiul idealelor maximale ale lui L^{∞} respectiv H^{∞}. Se vede imediat că X se scufundă omeomorf în $\mathcal{M}$.

Există mai multe caracterizări ale punctelor din X printre cele din $\mathcal{M}$. Amintim aici doar una pe care o vom folosi mai departe şi anume :

$$X = \{\varphi \in \mathcal{M} / \varphi(B) \neq 0 \text{ pentru orice produs Blaschke } B \in H^{\infty}\}.$$

Pentru orice $z \in D$, $\varphi_z(f) = f(z)$ este evident un omomorfism complex al lui H^{∞} şi deci un punct din $\mathcal{M}$. Aplicaţia $z \to \varphi_z$ este, după cum se verifică uşor, o scufundare omeomorfă a lui D în $\mathcal{M}$. Problema mare care s-a pus (problema coroanei) a fost dacă prin această scufundare, D este o mulţime densă în $\mathcal{M}$.

Problema a fost rezolvată afirmativ de D. J. Newman ca urmare a unor teoreme de interpolare date de L. Carleson [2]. Se pleacă de la următoarea teoremă adevărată pentru orice supnorm algebră Banach.

TEOREMA 1. *Fie A o supnorm algebră Banach şi $\mathcal{M}$ spaţiul idealelor maximale ale lui A. O submulţime $\Delta \subset \mathcal{M}$ este densă în $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă pentru orice sistem $f_1, \ldots, f_n$ de funcţii din A care verifică*

$$|f_1| + \ldots + |f_n| \geqslant \delta > 0 \text{ pe } \Delta \tag{2.1}$$

există un sistem $g_1, \ldots, g_n$ de funcţii din A astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} g_i f_i = 1 \tag{2.2}$$

Demonstraţie. Fie că Δ nu este densă în $\mathcal{M}$. Atunci există $\varphi_0 \in \mathcal{M}$ şi o vecinătate a sa care nu taie pe Δ. Dar vecinătăţile din $\mathcal{M}$ sînt de tipul

$$V(\varphi_0; h_1, h_2, \ldots, h_n; \varepsilon) = \{\varphi \mid |h_j(\varphi)| < \varepsilon, j = 1, \ldots, n\}$$

cu $h_j(\varphi_0) = 0$.

Cum V nu taie pe Δ, rezultă că pe Δ cel puţin un h_{j_0} verifică $|h_{j_0}| \geqslant \varepsilon$.

Fie $f_j = h_j$ pentru $j \neq j_0$ şi $f_{j_0} = \dfrac{\delta}{\varepsilon} h_{j_0}$. Atunci e clar că

$$|f_1| + \ldots + |f_n| \geqslant \delta$$

pe Δ. Dacă (2.1) implică (2.2) pentru orice sistem $f_1, \ldots, f_n$ din A, rezultă că există $g_1, \ldots, g_n \in A$ astfel încît

$$\Sigma f_i g_i = 1.$$

Dar aceasta înseamnă că $f_1, \ldots, f_n$ nu pot aparţine nici unui ideal propriu al lui A, ceea ce este absurd deoarece $f_1, \ldots, f_n$ aparţin lui φ_0 (nucleului lui φ_0).

Reciproc, fie că există un sistem de funcţii $f_1, \ldots, f_n$ din A astfel încît

$$|f_1| + \ldots + |f_n| \geqslant \delta > 0 \text{ pe } \Delta$$

şi că nu există nici un sistem $g_1, \ldots, g_n$ de funcţii din A astfel încît

$$\Sigma f_i g_i = 1.$$

Din ultima afirmație rezultă că $f_1, \ldots, f_n$ generează un ideal propriu al lui A. Fie φ_0 un ideal maximal care-l conține pe acesta. E clar că $f(\varphi_0) = 0$ și că vecinătatea $V(\varphi_0; f_1, \ldots, f_n: \delta)$ a lui φ_0 nu taie pe Δ. Deci Δ nu este densă în $\mathfrak{M}$.

Definim aplicația $\pi: \mathfrak{M} \to D$ prin $\pi(\varphi) = \varphi(z)$ (z fiind funcția $f(z) = z$ din H^∞). Evident, π aplică D pe D biunivoc. Dacă $|\alpha| = 1$, notăm cu $\mathfrak{M}_\alpha = \pi^{-1}(\alpha)$. Se arată ușor că $\mathfrak{M}_\alpha$ sînt disjuncte între ele. Mai enunțăm următoarea teoremă care va fi folosită în cele ce urmează.

TEOREMA 2. *Fie* $|\alpha| = 1$ *și* (α_n) *un șir de puncte din* D *care converge către* α. *Dacă* $f(\alpha_n)$ *cu* $f \in H^\infty$ *converge către 0, atunci există* $\varphi \in \mathfrak{M}_\alpha$ *astfel încît* $f(\varphi) = 0$.

Reciproc, dacă $\varphi \in \mathfrak{M}_\alpha$ *și* $f(\varphi) = 0$, *atunci există* $\alpha_n \to \alpha$ *astfel încît* $f(\alpha_n) \to 0$.

Se observă că dacă f se prelungește continuu la α, atunci f este constantă pe $\mathfrak{M}_\alpha$.

3. *Șiruri de interpolare.* Fie (z_k) un șir din D. Vom spune că (z_k) este un *șir de interpolare* dacă pentru orice șir mărginit (w_k) de numere complexe există $f \in H^\infty$ astfel încît

$$f(z_k) = w_k. \tag{3.1}$$

Să găsim mai întîi condiții necesare ca (z_k) să fie șir de interpolare.

Fie că (z_k) este un șir de interpolare. E clar că pentru aceasta este necesar ca $\Sigma(1 - |z_k|) < +\infty$ pentru a putea interpola șirul $w_k = 0$. Definim operatorul $R: H^\infty \to l^\infty$ prin

$$Rf = (f(z_k)).$$

E clar că $\|Rf\| \leqslant \|f\|$ și deci R este continuu.

Cum (z_k) este un șir de interpolare, R aplică H^∞ pe l^∞. Fie I idealul închis al funcțiilor din H^∞ care se anulează pe (z_k).

Cum I este nucleul lui R, operatorul R devine o aplicație liniară biunivocă și continuă de la H^∞/I la l^∞. Conform teoremei graficului închis, inversa acestei aplicații este mărginită. Deci dacă $Rf = (w_k)$, atunci

$$\|f + I\| \leqslant M \sup |w_k|,$$

M nedepinzînd de (w_k).

Deci șirurile w_k cu $\|w_k\| \leqslant 1$ pot fi interpolate uniform cu funcții din H^∞.

În particular, găsim funcțiile $f_k \in H^\infty$ astfel încît

$$f_k(z_j) = \delta_{kj}$$

$$\|f_k\| \leqslant M, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Fie B_k produsul Blaschke cu zerourile în (z_j), $j \neq k$. E clar că

$$f_k = B_k\, g_k \text{ cu } g_k \in H^\infty.$$

Cum B_k sînt funcţii interioare, se verifică uşor că

$$\|g_k\| = \|f_k\| \leqslant M.$$

Dar

$$1 = |f_k(z_k)| = |B_k(z_k)|\,|g_k(z_k)| \leqslant M\,|B_k(z_k)|.$$

Deci

$$|B_k(z_k)| \geqslant \frac{1}{M} = \delta > 0.$$

Şi atunci o condiţie necesară de interpolare este ca să existe $\delta > 0$ astfel încît

$$\prod_{j \neq k} \frac{|z_k - z_j|}{|1 - \bar{z}_j z_k|} \geqslant \delta. \tag{3.2}$$

Vom arăta că această condiţie este şi suficientă.

Vom demonstra mai întîi o teoremă care ne va da o formă duală a normei funcţiei de normă minimă care interpolează un număr finit de puncte.

Fie $z_1, \ldots, z_n$ un sistem finit de puncte distincte din D şi $w_1, \ldots, w_n$ un sistem de numere complexe. Se verifică uşor că există o funcţie $f \in H^\infty$ astfel încît

$$f(z_k) = w_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

$$\|f\| = \inf_{f \in H^\infty} \|f\| \text{ cu } f(z_k) = w_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Fie π_n produsul Blaschke cu zerourile în $z_1 \ldots z_n$

$$\pi_n = \prod_1^n \frac{z - z_k}{1 - z\bar{z}_k}.$$

TEOREMA 3. *Fie $f \in H^\infty$ care satisface* (3.3) *şi* (3.4). *Atunci*

$$\|f\| = \sup_{\substack{\|G\|_1 = 1 \\ G \in H^1}} \left| \sum \frac{G(z_k)}{\pi_n'(z_k)} \right|. \tag{3.5}$$

Demonstraţie. Vom nota cu f_q funcţia din H^∞ care verifică (3.3) şi cu norma

$$m_q = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f_q|^q \, d\theta \right)^{1/q}$$

minimă.

Evident, astfel de funcţii există şi orice altă funcţie f din H^∞ care verifică (3.3) se poate scrie sub forma

$$f = f_q + \mu\, \pi_n\, g \text{ cu } g \in H^\infty.$$

Minimizînd funcţionala

$$\int_{|z|=1} |f_q + \mu \pi_n g|^q \, \mathrm{d}\theta$$

obţinem

$$\int_{|z|=1} |f_q|^{q-2} \bar{f}_q \, \pi_n \, g \, \mathrm{d}\theta = 0.$$

Scriind această formulă pentru $g = z^k$, $k = 0, 1, \ldots$, obţinem

$$\int_{|z|=1} (|f_q|^{q-2} \bar{f}_q \, \pi_n \, z^{-1}) \, z^k \, \mathrm{d}\theta = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

şi din teorema fraţilor Riesz rezultă că există $F_q \in H^1$, astfel încît

$$F_q = |f_q|^{q-2} \bar{f}_q \, \pi_n \, z^{-1} \, m_q^{1-q}.$$

Din inegalitatea lui Hölder rezultă

$$\|F_q\| \leqslant 1. \tag{3.6}$$

Pe de altă parte,

$$m_q = \frac{1}{2\pi} m_q^{1-q} \int_{|z|=1} |f_q|^q \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{F_q f_q}{\pi_n} z \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{F_q \cdot f_q}{\pi_n} \mathrm{d}z.$$

Aplicînd teorema lui Cauchy obţinem:

$$m_q = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_q(z_k) f(z_k)}{\pi_n'(z_k)}$$

adică

$$m_q = \sum \frac{F_q(z_k) \, w_k}{\pi_n'(z_k)}.$$

Făcînd $q \to \infty$, e clar că putem alege cîte un subşir din şirurile (f_q), (F_q), astfel încît să avem limitele f, F cu $f \in H^\infty$, $F \in H^1$, astfel încît f să satisfacă (3.3), (3.4) şi

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{F(z_k) \, w_k}{\pi_n'(z_k)}. \tag{3.7}$$

Pe de altă parte, pentru orice $G \in H^1$, $\|G\|_1 \leqslant 1$, avem

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{G(z_k) \, w_k}{\pi_n'(z_k)} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{Gf}{\pi_n} \mathrm{d}z \right| \leqslant \|f\| \, \|G\|_1 \leqslant \|f\|.$$

Din această ultimă inegalitate şi din (3.7) rezultă că

$$\|f\| = \sup_{\substack{G \in H^1 \\ \|G\|_1 = 1}} \left| \sum \frac{G(z_k) \, w_k}{\pi_n'(z_k)} \right|. \qquad \text{c.c.t.d.}$$

Următoarea lemă a lui Carleson este un punct nodal în demonstrarea teoremelor de interpolare. Demonstrația fiind prea laborioasă, nu o mai dăm.

LEMĂ. *Fie* $A(z)$ *un produs Blaschke și* (z_k) *șirul zerourilor lui. Pentru orice* n *și* $\varepsilon < {}^1/_4$ *există sistemul de domenii disjuncte* Ω_k, $k \leqslant n$, *astfel încît* $z_k \in \Omega_k$, *și dacă notăm* $\Gamma = \bigcup \partial \Omega_k$ *să avem :*

1) *Există o constantă absolută* μ *(nu depinde nici de* ε *nici de* n*) astfel încît să avem*

$$\varepsilon \leqslant |A(z)| \leqslant \varepsilon^{\mu} \quad pe\ \Gamma$$

2) *Mulțimile* $\partial \Omega_k$ *sînt rectificabile și avem*

$$\int_{\Gamma} |G|\,|dz| = \frac{\nu}{\varepsilon^2} \|G\|_1$$

TEOREMA 4. *Fie* $B(z)$ *și* $C(z)$ *două produse Blaschke și* (b_k) *și* (c_k) *șirurile zerourilor lor în* $|z| < 1$. *Necesar și suficient ca interpolarea*

$$f(b_k) = 0,\ f(c_k) = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

să fie posibilă cu $f \in H^{\infty}$, *este ca să existe* $\delta > 0$ *astfel încît*

$$|B(z)| + |C(z)| > \delta > 0 \ \text{în}\ |z| < 1 \tag{3.9}$$

Demonstrație. Fie că există $f \in H^{\infty}$ care satisface (3.8). Atunci avem

$$f = Bg,\ f - 1 = hC,$$

cu h și g funcții din H^{∞}, de unde

$$Bg - hC = 1$$

și deci

$$1 \leqslant \|g\|\ |B(z)| + \|h\|\ |C(z)|.$$

Dar e clar că

$$\|g\| = \|f\| \ \text{și}\ \|h\| \leqslant 1 + \|f\|$$

și deci obținem

$$1 \leqslant (\|f\| + 1)\ (|B| + |C|)$$

și deci

$$|B| + |C| \geqslant \delta > 0 \ \text{cu}\ \delta = \frac{1}{\|f\| + 1}.$$

Invers, fie că avem (3.9) și fie $\varepsilon^{\mu} = \dfrac{\delta}{2}$. Construim curba Γ din lema de mai sus pentru produsul Blaschke $A = BC$ și pentru zerourile (b_k) (c_k) $k \leqslant n$.

Din teorema 3 funcţia $f_n \in H^\infty$ care verifică (3.8) pentru $k < n$, satisface la :

$$\|f_n\| = \sup_G \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{G(b_k)}{(B_n C_n)(b_k)} + \frac{G(c_k)}{(B_n C_n)(c_k)} \right| =$$

$$= \sup_G \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{G(z)}{B_n(z) C_n(z)} \mathrm{d}z \right| \leqslant 2^{\mu^{-1}} \delta^{-1-\mu^{-1}} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |G(z)|\, |\mathrm{d}z| \leqslant \delta^{-k},$$

unde

$$B_n = \prod_{1}^{n} \frac{b_k - z}{1 - z\,\overline{b}_k} \frac{\overline{b}_k}{|b_k|}$$

şi C_n analog.

Şirul f_n converge (conţine un subşir convergent) deci către $f \in H^\infty$ care satisface evident (3.8) şi

$$\|f\| \leqslant \delta^{-k}.$$

TEOREMA 5. *Necesar şi suficient ca şirul* (z_k) *din* D *să fie şir de interpolare, este ca să existe* $\delta > 0$ *astfel încît*

$$\prod_{j \neq k} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - z_j \overline{z}_k} \right| \geqslant \delta > 0. \tag{3.10}$$

Demonstraţie. Necesitatea am demonstrat-o mai înainte. Suficienţa este o consecinţă a teoremei 3. În adevăr, fie (b_k), (c_k) două subşiruri disjuncte ale lui z_k şi B şi C produsele Blaschke respective. E clar că din (3.10) rezultă că

$$|B| + |C| \geqslant \delta > 0$$

şi deci există $f \in H^\infty$ astfel încît $f(b_k) = 0$, $f(c_k) = 1$.

Fie w_k un şir mărginit de numere complexe. Putem presupune $|w_k| \leqslant 1$. Rearanjăm pe w_k şi deci şi pe z_k, astfel încît părţile reale ale lui w_k să verifice $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n$. Punînd $u_0 = 0$, definim

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) f_k(z),$$

unde $f_k(z_i) = 1$ pentru $0 < i \leqslant k$ şi $f_k(z_i) = 0$ pentru $k < i \leqslant n$.

E clar că $g_n(z_j) = u_j$ şi în plus

$$\|g_n\| \leqslant \sum |u_k - u_{k-1}|\, \|f_k\| \leqslant M \left(\sum (u_k - u_{k-1})\right) \leqslant 2M.$$

Analog găsesc şirul h_n care interpolează părţile imaginare ale lui w_k. Atunci $F_n = f_n + i h_n$ interpolează pe w_k pînă la n şi avem

$$\|F_n\| \leqslant 4\,M.$$

Alegînd un subşir convergent şi trecînd la limită obţinem $F \in H^\infty$ care verifică

$$F(z_k) = w_k$$

şi deci (z_k) este şir de interpolare c.c.t.d.

Dăm cîteva consecinţe care ne pun în posesia unor clase de şiruri de interpolare.

COROLAR 1. (Neumann). *Fie* (z_k) *un şir din* D *care tinde exponenţial la frontieră, adică*

$$\frac{1-|z_k|}{1-|z_{k-1}|}<c<1.$$

Atunci (z_k) *este şir de interpolare.*

Demonstraţie. Se pleacă de la inegalitatea

$$\frac{|\alpha-\beta|}{|1-\bar{\alpha}\beta|}\geqslant\frac{|\alpha|-|\beta|}{1-|\alpha|\,|\beta|}\qquad \text{cu } |\alpha|, |\beta|<1.$$

Avem

$$\prod_{j\neq k}\left|\frac{z_k-z_j}{1-z_j\bar{z}_k}\right|\geqslant\prod_{j<k}\frac{|z_k|-|z_j|}{1-|z_j|\,|z_k|}\prod_{j>k}\frac{|z_j|-|z_k|}{1-|z_k|\,|z_j|}$$

Dacă $j>k$ avem

$$1-|z_j|\leqslant c^{j-k}(1-|z_k|)$$

şi deci

$$|z_j|-|z_k|\geqslant(1-c^{j-k})\,(1-|z_k|).$$

Dar

$$1-|z_j|\,|z_k|\leqslant(1+c^{j-k})\,(1-|z_k|)$$

şi deci

$$\prod_{j>k}\geqslant\prod_{1}^{\infty}\frac{1-c^n}{1+c^n}.$$

Analog se arată că

$$\prod_{j<k}\geqslant\prod_{1}^{\infty}\frac{1-c^n}{1+c^n}$$

şi e clar atunci că (3.10) este satisfăcută.

COROLAR 2. *Orice şir* (z_k) *cu* $\overline{\lim}\,|z_k|=1$ *posedă un subşir de interpolare.*

4. *Şiruri de interpolare şi spaţiul idealelor maximale ale lui* H^{∞}. Demonstrăm întîi următoarea teoremă de interpolare.

TEOREMA 5. *Fie* $A(z)$ *un produs Blaschke finit şi fie că mulţimea* $\{z\,|\,|A(z)|<\delta\}$, $\delta<1/2$, *are un număr finit de componente conexe* $D_1,\ldots,D_q$. *Fie* F_i *olomorfe pe* D_i *şi* $|F_i(z)|\leqslant 1$ *pe* D_i. *Pentru orice* (a_k) *există* $f\in H^{\infty}$ *astfel încît*

$$f(a_k)=F_i(a_k)\quad \textit{pentru } a_k\in D_i. \tag{4.1}$$

Demonstrație. Construim Γ pentru A și $\varepsilon^{\mu} = \delta$. Atunci punînd $F(z) = F_i(z)$ pentru $z \in D_i$, avem

$$\|f_n\| = \sup\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(z)\,G(z)}{A(z)}\,dz\right| \leqslant \varepsilon^{-1}\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}|G(z)|\;|dz| < \delta^{-C},$$

și deci putem găsi $f \in H^{\infty}$ care satisface (4.1).

Teorema 6 (Problema coroanei). *Fie $f_1, \ldots, f_n \in H^{\infty}$ astfel încît există $\delta > 0$ cu proprietatea*

$$|f_1| + \ldots + |f_n| \geqslant \delta > 0. \tag{4.2}$$

Atunci există $g_1, \ldots, g_n \in H^{\infty}$ astfel încît

$$f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1. \tag{4.3}$$

Invers, dacă (4.3) *are loc, există $\delta > 0$ astfel încît* (4.2) *are loc.*

Demonstrație. Demonstrăm prin inducție după n. Pentru $n = 1$, rezultă din teorema 2. Să observăm că (4.3) este conform invariantă și deci putem presupune că pentru $(n-1)$, (4.3) este adevărată pentru orice domeniu simplu conex.

Presupunem întîi că f_n este un produs Blaschke cu un număr finit de zerouri $b_1, \ldots, b_s$ și fie $D_1, \ldots, D_q$ componentele conexe ale mulțimii $\{z \mid |f_n(z)| < \delta\}$. Pe fiecare D_i avem

$$\sum_{k=1}^{n-1} P_{ik}(z) f_i(z) = 1 \text{ cu } P_{ik} \in H^{\infty}.$$

Din teorema 5 găsesc $P_k \in H^{\infty}$ astfel încît

$$P_k(b_j) = P_{ik}(b_j).$$

Definim

$$g_n(z) = \left[1 - \sum_{1}^{n-1} P_k(z)\, f_k(z)\right] f_n(z)^{-1}.$$

E clar că $g_n \in H^{\infty}$ și că avem

$$\sum_{i=1}^{n} f_k\, g_k = 1.$$

În general se obține teorema aproximînd pe f_k cu produsele B în afara unei vecinătăți a lui $|z| = 1$.

Invers, dacă 4.2 nu este adevărată, găsim un șir z_j cu $|z_j| \to 1$ astfel încît

$$\lim_{j\to\infty} f_i(z_j) = 0 \quad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Din teorema 2 rezultă că există $\varphi \in \mathfrak{M}$ astfel încît

$$\varphi(f_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

și deci (4.3) nu poate avea loc.

Și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Am văzut că pentru orice $\varphi \in \mathfrak{M} - X$ există un produs Blaschke B astfel încît $B(\varphi) = 0$.

Ce putem spune în plus despre φ dacă zerourile lui B formează șir de interpolare ?

Definiție. Punctul $\varphi \in \mathfrak{M}_\alpha$ se zice *esențial* dacă există un șir $z_k \to \alpha$ $z_k \in D$ și $\delta > 0$, astfel încît pentru orice k (suficient de mare) există un produs Blaschke B_k cu $B_k(\varphi) = 0$ și $|B_k(z_k)| \geqslant \delta$.

Teorema 7. *Fie $\varphi \in \mathfrak{M}$ astfel încît există un produs Blaschke B cu $B(\varphi) = 0$ și șirul zerourilor lui B formînd un șir de interpolare. Atunci φ este un punct esențial.*

Demonstrație. Fie b_k zerourile lui B și fie

$$B_k = B\frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j}.$$

Avem

$$B = B_k \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}.$$

Cum $\dfrac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}$ se prelungește continuu la frontieră, avem, conform teoremei 2, $\left|\dfrac{z - z_j}{1 - z_j z}\right| = 1$ pe $\mathfrak{M} - D$. Deci dacă $B(\varphi) = 0$, avem și $B_k(\varphi) = 0$. Pe de altă parte avem

$$|B_k(z_k)| = \prod_{j \neq k} \frac{|z_k - z_j|}{|1 - z_j z_k|} \geqslant \delta > 0.$$

Primită la redacție la 17 octombrie 1965

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Lennart Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*. Amer. J. Math., **80**, 921–930 (1958).
2. — *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*. Annals of Mathematics, **76**, 3, 547–559 (1962).
3. K. Hoffman, *Banach Spaces of analytic functions*. Prentice Hall, 1962.
4. I. Suciu, *Algebre Banach analitice*. St. cerc. mat., **15**, *1*, 55–76 (1964).

O COMPARAȚIE ÎNTRE METODA FEI ȘI METODA SIMPLEX REVIZUITĂ

DE

ILEANA NĂDEJDE

Se expune pe scurt definiția transformării „*S*" și metoda Fei de rezolvare a programelor liniare. De asemenea, se redă algoritmul metodei simplex revizuită și, din compararea acestor metode, se stabilește analogia lor. În sfîrșit, se discută avantajele pe care le prezintă folosirea simplexului revizuit.

Matematicianul I. Fei, profesor la universitatea din Yale (S.U.A.) definește un tip de transformări matriciale, denumit transformarea „*H*" care, particularizat, conduce la transformarea „*S*" sau transformarea „simplex". Autorul folosește această transformare la rezolvarea programelor liniare. În cele ce urmează ne propunem să arătăm echivalența acestei metode cu metoda simplex revizuită datorită lui G. B. Dantzig și W. Orchard-Hays. În acest scop se vor prezenta pe scurt metodele amintite.

A. REZOLVAREA PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ PRIN TRANSFORMAREA „S" 1)

Transformarea „*H*" se definește [3], [4] astfel: Fie dată o matrice A de dimensiuni $m \times n$ și a_{rk} un element nenul al acestei matrice. Se construiește vectorul H' înlocuind în vectorul coloană a_k al matricei A elementul a_{rk} prin -1; înmulțind vectorul astfel format prin scalarul $-\dfrac{1}{a_{rk}}$, avem:

$$(1)\qquad H' = \left[-\frac{a_{1k}}{a_{rk}};\ -\frac{a_{2k}}{a_{rk}}, \ldots -\frac{a_{r-1,k}}{a_{rk}}, \frac{1}{a_{rk}}, -\frac{a_{r+1,k}}{a_{rk}}, \ldots -\frac{a_{mk}}{a_{rk}} \right],$$

---

1) Vectorii coloană se vor nota cu [ ] și vectorii linie cu ( ).

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 1039–1055, BUCUREȘTI, 1966

Fie $E^{(m)}$ matricea identică de ordin m şi e_r vectorul unitar de ordin r. Se construieşte matricea $E_r^{(m)}$ înlocuind în $E^{(m)}$ vectorul e_r prin vectorul H', deci :

$$E_r^{(m)} = (e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}, H', e_{r+1}, \ldots e_m). \tag{2}$$

Prin definiţie, *transformata matricei A de pivot a_{rk}* este matricea :

$$A^* = E_r^{(m)} \cdot A. \tag{3}$$

Transformarea astfel definită se notează : $A - a_{rk} - A^*$.

Dezvoltînd definiţia dată de formula (3) avem :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & -a_{1k}/a_{rk} & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & -a_{2k}/a_{rk} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1/a_{rk} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -a_{mk}/a_{rk} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rk} & \ldots & a_{rn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Deci :

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{r1}\left(-\frac{a_{1k}}{a_{rk}}\right) & a_{12} + a_{r2}\left(-\frac{a_{1k}}{a_{rk}}\right) & \ldots\ 0 \ldots & a_{1n} + a_{rn}\left(-\frac{a_{1k}}{a_{rk}}\right) \\ a_{21} + a_{r1}\left(-\frac{a_{2k}}{a_{rk}}\right) & a_{22} + a_{r2}\left(-\frac{a_{2k}}{a_{rk}}\right) & \ldots\ 0 \ldots & a_{2n} + a_{rn}\left(-\frac{a_{2k}}{a_{rk}}\right) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{a_{r1}}{a_{rk}} & \frac{a_{r2}}{a_{rk}} & \ldots\ 1 \ldots & \frac{a_{rn}}{a_{rk}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} + a_{r1}\left(-\frac{a_{mk}}{a_{rk}}\right) & a_{m2} + a_{r2}\left(-\frac{a_{mk}}{a_{rk}}\right) & \ldots\ 0 \ldots & a_{mn} + a_{rn}\left(-\frac{a_{mk}}{a_{rk}}\right) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Matricea transformată A^* dată de (4) se mai poate obţine şi astfel : se construieşte vectorul H înlocuind în H' elementul $\frac{1}{a_{rk}}$ prin $1 - \frac{1}{a_{rk}}$, deci :

$$H = \left[-\frac{a_{1k}}{a_{rk}}, -\frac{a_{2k}}{a_{rk}}, \ldots, -\frac{a_{r-1\ k}}{a_{rk}}, \frac{1-a_{rk}}{a_{rk}}, -\frac{a_{r+1,\ k}}{a_{rk}}, \ldots, -\frac{a_{mk}}{a_{rk}}\right]. \tag{5}$$

Se definește transformata A^* prin operația notată simbolic :

$$(6) \qquad \left(\begin{array}{c|c|c} a_{11}\ a_{12} \dots & a_{1k} & \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots & a_{2k} & \dots\ a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline a_{r1}\ a_{r2} \dots & a_{rk} & \dots\ a_{rn} \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots & a_{mk} & \dots\ a_{mn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} -\,a_{1k}/a_{rk} \\ -\,a_{2k}/a_{rk} \\ \vdots \\ (1-a_{rk})/a_{rk} \\ \vdots \\ -\,a_{mk}/a_{rk} \end{array}\right) \Rightarrow A^*$$

căreia i se atașează următoarele reguli de calcul :

Regula I. Un element oarecare a^*_{lj} $(j = 1, \dots, n)$ din linia l a matricei A^* se obține adunînd elementului a_{lj} din A, produsul dintre elementul a_{rj}, situat la intersecția coloanei j cu linia pivot, și elementul vectorului H situat pe linia l, adică :

$$(7) \qquad a^*_{lj} = a_{lj} + a_{rj}\left(-\frac{a_{lk}}{a_{rk}}\right), \qquad j = (1, \dots, n)$$

Regula II. Un element a^*_{ip} $(i = 1, \dots, m)$ din coloana p a matricei A^* se calculează adunînd elementului a_{ip} din A, produsul dintre elementul a_{rp}, situat la intersecția coloanei p cu linia pivot, și elementul vectorului H din linia i, adică :

$$(8) \qquad a^*_{ip} = a_{ip} + a_{rp}\left(-\frac{a_{ik}}{a_{rk}}\right), \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Din aceste reguli de calcul a elementelor matricei transformate A^* rezultă că :

— o linie l din A^* se poate calcula cunoscînd elementele liniei pivot și elementul vectorului H situat în linia l ;

— o coloană p din A^* se poate calcula cunoscînd elementul din linia pivot situat în coloana p și vectorul H ;

— echivalența dintre transformarea dată prin formula (3) și cea dată prin operația (6), completată din regulile I și II, este evidentă.

Transformarea „S" este o transformare H în care alegerea pivotului se face așa fel încît o succesiune de astfel de transformări aplicată matricei extinse a unui sistem de ecuații liniare, să conducă la determinarea unei soluții realizabile de bază a sistemului sau să arate că nu există o astfel de soluție.

Pentru a defini transformarea „S" să considerăm sistemul de m ecuații liniare cu n necunoscute :

$$(9) \qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = d_m \end{array}$$

în care toţi d_i $(i = 1, \ldots, m)$ sînt nenegativi. Dacă într-o ecuaţie s, d_s este nul, primul coeficient diferit de zero trebuie să fie nenegativ. Aceste ipoteze nu micşorează generalitatea sistemului şi fac ca toate liniile matricei $[d \,\vdots\, A]$ să fie lexicografic pozitive. Se adaugă sistemului (9) ecuaţia :

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n = d_0 \tag{10}$$

în care :

$$a_{0j} = - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{11}$$

şi

$$d_0 = - \sum_{i=1}^{m} d_i. \tag{12}$$

Matricea extinsă a sistemului (9) — (10), notată A_e, este :

$$A_e = \left(\begin{array}{c|ccc} d_0 & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ \hline d_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_m & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right).$$

E uşor de văzut că A_e este o matrice Dantzig (matrice de sumă nulă) ; prima linie a acestei matrice se numeşte *linie principală.*

Algoritmul pentru determinarea unei soluţii realizabile a sistemului (9) constă în următoarele reguli :

1° Se studiază semnul elementelor a_{0j} $(j = 1, \ldots, n)$ din linia principală. Dacă toţi a_{0j} sînt nenegativi, nu se poate aplica matricei A_e o transformare „S". În acest caz sistemul (9) nu are soluţie realizabilă de bază. Dacă există elementele a_{0j} negative, fie N_1 mulţimea indicilor j a acestor elemente.

2° Se studiază vectorii-coloană de indice $j \in N_1$. Dacă există un vector cu toate componentele a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j \in N_1)$ nepozitive, nu se poate face o transformare H şi sistemul nu admite o soluţie de bază realizabilă. În caz contrar se alege elementul :

$$a_{0k} = \min_{j \in N_1} a_{0j}. \tag{13}$$

Coloana de indice k determinată de relaţia (13) este *coloana-pivot.*

3° Se studiază elementele pozitive a_{ik} din coloana pivot. Fie M_1 mulţimea indicilor i a acestor elemente. Se împart vectorii linie α_i, $i \in M_1$, ai matricei A_e prin elementele corespunzătoare a_{ik}, $i \in M_1$, din coloana pivot şi se alege linia $r \in M_1$, pentru care vectorul linie $\dfrac{\alpha_r}{a_{rk}}$ este minim în sens lexicografic pe mulţimea $i \in M_1$, adică :

$$\frac{\alpha_r}{a_{rk}} = \min_{i \in M_1} (\text{lex}) \left\{\frac{\alpha_i}{a_{ik}}\right\}. \tag{14}$$

Linia de indice r determinată de relaţia (14) este *linia-pivot*. Elementul a_{rk} situat la intersecţia coloanei-pivot cu linia-pivot este *pivotul transformării „S”*.

4° Se construieşte transformata matricei A_e de pivot a_{rk} şi se reia aplicarea algoritmului. După un număr finit, t, de transformări „S” avem :

$$A_e^{(0)} = S \Rightarrow A_e^{(t)},$$

$A_e^{(t)}$ fiind o matrice în care nu se mai poate determina pivotul dintr-una din cauzele menţionate în 1° şi 2°. Se pot prezenta situaţiile următoare :

a) Primul element $d_0^{(t)}$ al matricei $A_e^{(t)}$ este negativ. În acest caz sistemul nu are soluţii realizabile.

b) $d_0^{(t)} = 0$. În acest caz s-a găsit o soluţie realizabilă de bază în care :

— orice variabilă asociată unui vector nefolosit ca pivot în cursul transformării S este nulă ;

— orice variabilă asociată unui vector unitar l_i, obţinut în cursul transformării S, este egal cu elementul situat în prima coloană, pe linia i.

E uşor de văzut că regulile după care se face alegerea coloanei şi liniei pivot în transformarea H sînt analoage criteriilor de ieşire şi intrare în bază a unui vector în algoritmul simplex primal. Regula (14) înlătură eventualele ambiguităţi în alegerea vectorului care iese din bază şi este analoagă cu metoda lexicografică de evitare a ciclării stabilite de R. B. Dantzig [1].

Problemele de programare liniară se rezolvă prin transformarea „S” aplicată unei matrici, numită *matrice-program*, care se construieşte adăugînd matricei extinse a sistemului de restricţii (9)—(10) o linie formată din coeficienţii funcţiei obiectiv. Fie :

$$C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n = Z \tag{15}$$

funcţia pentru care trebuie determinată valoarea minimă pe mulţimea soluţiilor realizabile a sistemului (9). Matricea program pentru această problemă de programare liniară este :

$$P^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} c_0 & c_1 c_2 \ldots c_n \\ a_{00} & a_{01}a_{02} \ldots a_{0n} \\ \hline d_1 & a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_m & a_{m1}a_{m2} \ldots a_{mn} \end{array}\right) \tag{16}$$

Determinarea soluţiei optime comportă două etape şi anume :

Etapa I constă în determinarea unei soluţii realizabile de bază a sistemului restricţiilor dacă există o astfel de soluţie. Soluţia căutată se obţine aplicînd o succesiune de transformări „S” matricei $P^{(0)}$, alegerea pivotului făcîndu-se pe baza elementelor $a_{0j}\,(j = 1, \ldots, n)$ deci fără a ţine seama de elementele $c_j\ (j = 0, 1, \ldots, n)$. Notăm cu S succesiunea de transformări H care conduce la determinarea unei soluţii realizabile de bază

$$P^{(0)} = S \Rightarrow P^{(r)}.$$

Matricea $P^{(r)}$ conţine această soluţie sau dovedeşte inexistenţa ei.

Etapa II. Dacă $P^{(r)}$ oferă o soluţie realizabilă de bază a sistemului de restricţii, etapa II constă în îmbunătăţirea acestei soluţii pînă la optimizarea funcţiei obiectiv. Acest lucru se realizează aplicînd o succesiune de transformări „S'' matricei $P^{(r)}$, dar alegerea pivotului se face în această etapă pe baza elementelor primei linii. Se demonstrează că după un număr finit de transformări se ajunge la una din următoarele situaţii :

a) Se obţine o matrice care conţine un vector-coloană cu toate elementele nepozitive. În acest caz problema nu are un minim finit.

b) După un şir de transformări „S'', elementele primei linii, cu excepţia primului element al matricei, sînt nenegative. Această matrice oferă soluţia optimă, iar primul element este valoarea optimă a funcţiei obiectiv.

Pentru exemplificare se rezolvă prin metoda Fei, următoarea problemă :

$$\min z = x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4$$

pe mulţimea soluţiilor nenegative a sistemului :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 15, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 10. \end{aligned}$$

Prima ecuaţie din sistemul restricţiilor, avînd termenul constant negativ, se înmulţeşte cu -1. După această transformare, toate liniile matricei $(d \,\vdots\, A)$ sînt lexicografic pozitive. Avem :

$$(d \,\vdots\, A) = \left(\begin{array}{r|rrrr} 2 & -2 & 3 & -1 & -4 \\ 15 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 10 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Se formează matricea Dantzig, adăugînd matricei $[d \,\vdots\, A]$ o linie ale cărei elemente sînt sumele componentelor fiecărui vector-coloană înmulţite cu -1. Avem :

$$A_e = \left(\begin{array}{r|rrrr} -27 & -2 & -5 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 3 & -1 & -4 \\ 15 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 10 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Matricea program $P\,(^0)$ se formează adăugînd matricei A_e o linie care conţine coeficienţii funcţiei obiectiv ; primul element din această linie este nul deoarece funcția obiectiv nu are termen constant; avem deci:

$$P^{(0)} = \left(\begin{array}{r|rrrr} 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -27 & -2 & -5 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 3 & -1 & -4 \\ 15 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 10 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Etapa I. În linia principală există elemente negative deci se poate alege coloana pivot; min $a_{0j} = a_{02} = -5$. Coloana a doua este coloană pivot.

Elementele acestei coloane sînt toate pozitive încît linia-pivot se determină luînd min $\left(\frac{2}{3}, \frac{15}{1}, \frac{10}{1}\right) = \frac{2}{3}\cdot$ Găsim că linia întîi este linie pivot și $a_{12} = 3$ este elementul pivot. Avem:

$$H = [-1/3 \quad -5/3 \quad -2/3^{*} \, -1/3 \quad -1/3].$$

Deoarece în practică transformata liniei pivot se calculează împărțind elementele acestei linii prin pivot, elementul vectorului H situat în linia pivot se înlocuiește printr-un punct.

În acest fel s-a definit transformarea:

$$P^{(0)} - a_{12} - P^{(1)}$$

și avem:

$$P^{(1)} = \left(\begin{array}{r|r|r|rr} 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -27 & -2 & -5 & 2 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 3 & -1 & -4 \\ 15 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 10 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{r} -1/3 \\ 5/3 \\ \cdot \\ -1/3 \\ -1/3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{r|rrr|r} -2/3 & 5/3 & 0 & -5/3 & 1/3 \\ -71/3 & -16/3 & 0 & 1/3 & -20/3 \\ \hline 2/3 & -2/3 & 1 & -1/3 & -4/3 \\ 43/3 & 17/3 & 0 & -5/3 & 7/3 \\ 28/3 & -1/3 & 0 & 4/3 & 13/3 \end{array}\right)$$

Elementele matricei $P^{(1)}$ se calculează aplicînd regula I sau II. Succesiunea de transformări necesare obținerii unei soluții realizabile de bază se continuă alegînd ca pivot elementul $a_{34} = 13/3$ din $P^{(1)}$. Avem:

$$P^{(2)} = P^{(1)}H_1 =$$

$$= \left(\begin{array}{r|rrr|r} -2/3 & 5/3 & 0 & -5/3 & 1/3 \\ -71/3 & -16/3 & 0 & 1/3 & -20/3 \\ \hline 2/3 & -2/3 & 1 & -1/3 & -4/3 \\ 43/3 & 17/3 & 0 & -5/3 & 7/3 \\ 28/3 & -1/3 & 0 & 4/3 & 13/3 \end{array}\right) \left(\begin{array}{r} -1/13 \\ 20/13 \\ 4/13 \\ -7/13 \\ \cdot \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{r|r|rrr} -18/13 & 22/13 & 0 & -23/13 & 0 \\ -121/13 & -76/13 & 0 & 31/13 & 0 \\ \hline 46/13 & -10/13 & 1 & 1/13 & 0 \\ 121/13 & 76/13 & 0 & -31/13 & 0 \\ 28/13 & -1/13 & 0 & 4/13 & 1 \end{array}\right)$$

$P^{(2)}$ mai are un element negativ în linia principală, deci se continuă succesiunea de transformări, noul pivot este $a_{21} = 76/13$ din $P^{(2)}$ și : $H_2 = [-11/38 \ 1 \ 5/38 \bullet 1/76]$; se găsește $P^{(3)} = P^{(2)} H_2$:

$$P^{(3)} = \left(\begin{array}{c|cccc} -155/38 & 0 & 0 & -41/38 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 181/38 & 0 & 1 & -9/38 & 0 \\ 121/76 & 1 & 0 & -31/76 & 0 \\ 173/76 & 0 & 0 & 21/76 & 1 \end{array}\right).$$

Toate elementele liniei principale din $P^{(3)}$ sînt nule, deci s-a ajuns la sfîrșitul etapei I. Soluția obținută este :

$$x_1 = 121/76 \,;\quad x_2 = 181/38 \,;\quad x_3 = 0 \,;\quad x_4 = 173/76$$

și valoarea funcției obiectiv pentru această soluție este :

$$Z = 155/38.$$

Cercetînd semnele elementelor primei linii din $P^{(3)}$, se constată existența unui element negativ. Problema cere minimizarea funcției obiectiv, deci soluția găsită la sfîrșitul primei etape nu este optimă și se trece la :

Etapa II. Elementul pivot este $a_{33} = 21/76$ din $P^{(3)}$ și transformarea $P^{(3)} - a_{33} - P^{(4)}$ dă ;

$$P^{(4)} = P^{(3)} [82/21 \ 0 \ 18/21 \ 31/21 \bullet] = \left(\begin{array}{c|cccc} 101/21 & 0 & 0 & 0 & 82/21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 141/21 & 0 & 1 & 0 & 18/21 \\ 104/21 & 1 & 0 & 0 & 31/21 \\ 173/21 & 0 & 0 & 1 & 76/21 \end{array}\right)$$

Cu această transformare s-a ajuns la soluția optimă :

$$x_1 = 104/21 \,;\quad x_2 = 141/21 \,;\quad x_3 = 173/21 \,;\quad x_4 = 0$$

pentru care avem $Z = 101/21$.

B. METODA SIMPLEX REVIZUITĂ [2]

Fie dată problema de programare liniară :

$$\begin{aligned} & A\, x \geqslant d \\ & x \geqslant 0 \\ & \min\, z = cx \end{aligned} \tag{17}$$

în care A este o matrice $m \times n$ dimensională de rang m ; d un vector coloană cu m componente nenegative ; x vectorul activităților care trebuie determinat şi c vectorul preţurilor — vector linie cu n componente. Sistemul restricţiilor se transformă într-un sistem de ecuaţii liniare prin adăugarea variabilelor artificiale x_{n+i}, $(i = 1, \dots, m)$ şi se completează acest sistem prin adăugarea ecuaţiei :

$$a_{01}\, x_1 + a_{02}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n - w = d_0 \tag{18}$$

în care a_{0j} $(j = 1, \dots, n)$ sînt sumele coeficienţilor variabilelor x_j din ecuaţiile sistemului de restricţii, luaţi cu semn schimbat, adică :

$$a_{0j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \text{ pentru } j = 1, \dots, n$$

$$d_0 = -\sum_{i=1}^{m} d_i \tag{19}$$

iar :

$$w = -\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}.$$

Funcţia obiectiv se scrie ca o ecuaţie liniară cu $(n + 1)$ variabile, x_j $(j = 1, \dots, n)$ şi z sub forma :

$$-c_1 x_1 - c_2 x_2 \dots - c_n x_n + z = 0. \tag{20}$$

Cu aceste modificări, problema de programare liniară se prezintă ca un sistem de $(m + 2)$ ecuaţii liniare cu $(n + 2)$ necunoscute x_j $(j=1, \dots, n)$, w şi z, obiectivul fiind determinarea valorilor nenegative ale variabilelor x_j, pentru care $w = 0$ şi z minim.

Iteraţia 0 se prezintă sub forma :

Tabelul iteraţiei 0 a metodei simplex revizuite

Variab. bazice	Variabile de structură	Variabile artificiale			z	w	Const.
	$x_1 \dots x_k \dots x_n$	$x_{n+1} \dots$	$x_{n+r} \dots$	x_{n+m}			
x_{n+1}	$a_{11} \dots a_{1k} \dots a_{1n}$	1	0	0			d_1
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_{n+r}	$a_{r1} \dots a_{rk} \dots a_{rn}$	0	1	0			d_r
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_{n+m}	$a_{m1} \dots a_{mk} \dots a_{mn}$	0	0	1			d_m
$Ec : z$	$-c_1 \quad -c_k \quad -c_n$	0	0	0	1	0	0
$Ec : w$	$-a_{01} \dots -a_{0k} \dots -a_{0n}$	0	0	0	0	1	d_0

Baza este o matrice unitate de ordinul $(m + 2)$ şi soluţia în această iteraţie este : $x_j = 0$ $(j = 1, \dots, n)$; $x_{n+i} = d_i$ $(i = 1, \dots, m)$, $z = 0$, $w = d_0$.

Această soluție verifică sistemul extins, dar nu satisface sistemul inițial. Determinarea soluției căutate prin metoda simplex revizuită comportă două faze :

Faza I. Aceasta constă în determinarea unei soluții realizabile de bază care minimizează w. Schimbarea bazei se face aplicînd regulile simplexului primal pentru ieșirea și intrarea vectorului în bază. Dacă pentru soluția optimă min w este diferit de zero, problema propusă nu are o soluție realizabilă de bază. Dacă pentru soluția optimă min $w = 0$, s-a determinat o soluție realizabilă de bază a sistemului inițial și se trece la :

Faza II, în care schimbările bazei se fac în scopul optimizării funcției z, după aceleași reguli.

Elementele necesare pentru construirea iterației $(k + 1)$ sînt :

a. Inversa bazei $(B_k)^{-1}$ din iterația k,

b. Elementele liniei w în interația k, pentru faza I ;

Elementele liniei z în iterația k, pentru faza II ;

c. Expresia, în baza B_k, a vectorului care intră în bază în iterația $(k + 1)$

d. Expresia în baza B_k a vectorului constantelor, d.

Dacă folosim pentru iterația k notația din tabelul următor,

Tabelul simplex al iterației k

Variab. bazice	Variabile structurale	Inversa bazei	z w	Const.
	$x_1 \dots x_k \dots x_n$	$x_{n+1} \dots x_{n+m}$		
x_{j_1}	$\bar{a}_{11} \dots \bar{a}_{1k} \dots \bar{a}_{1n}$	$\beta_{11} \dots \beta_{1,m}$		$\bar{d}_1$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_{j_r}	$\bar{a}_{r1} \dots \bar{a}_{rk} \dots \bar{a}_{rn}$	$\beta_{r,1} \dots \beta_{r,m}$		$\bar{d}_r$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_j	$\bar{a}_{m1} \dots \bar{a}_{mk} \dots \bar{a}_{m,n}$	$\beta_{m,1} \dots \beta_{m,m}$		$\bar{d}_m$
Ec : z	$\bar{c}_1 \dots \bar{c}_k \dots \bar{c}_n$	$\bar{c}_{n+1} \dots \bar{c}_{n+n}$	1	$\bar{z}_0$
Ec : w	$\bar{a}_{01} \dots \bar{a}_{02} \dots \bar{a}_{0n}$	$\bar{a}_{0,n+1} \dots \bar{a}_{0,n+n}$	1	$\bar{d}_0$

se știe că :

a) Elementul $\bar{a}_{ij}$ din linia i și coloana j, este dat de produsul scalar dintre vectorul-linie $\beta^{(i)}$ din $(B_k)^{-1}$ și coloana j din tabelul iterației 0 adică : $\bar{a}_{ij} = \beta_{i1} a_{ij} + \beta_{i2} a_{2j} + \dots + \beta_{im} \cdot a_{mj}$.

b) Un vector linie $a^{(i)}$ în iterația $(k + 1)$ se calculează făcînd produsele scalare dintre vectorul linie $\beta^{(i)}$ din $(B_k)^{-1}$ și toți vectorii-coloană din tabelul iterației 0.

În particular, linia z și w în iterația $(k + 1)$ se calculează făcînd produsele scalare ale liniei $(m + 1)$ respectiv $(m + 2)$ din $(B_k)^{-1}$ prin vectorii coloană din tabelul iterației 0.

c) Elementele unui vector coloană $\bar{a}_k[\bar{a}_{1k}, \dots, \bar{a}_{rk} \dots \bar{a}_{mk}]$, sînt egale cu produsele scalare ale vectorului-coloană a_k $[a_{1k}, \dots, a_{rk}, \dots, a_{mk}]$ din iterația 0 prin vectorii linie ai matricei $(B_k)^{-1}$.

d) Constantele $\bar{d}_i$, $\bar{z}_0$ si d_0 constituie un vector coloană al matricei extinse A_e, deci se calculează după regula de calcul a oricărui vector coloană, adică sînt egale cu produsele scalare ale vectorului $[d_1, d_2, \ldots, d_m, 0, d_0]$ prin vectorii linie ai matricei $(B_k)^{-1}$. Avem :

$$\begin{aligned} d_i &= \beta_{i1} d_1 + \beta_{i2} d_2 + \ldots + \beta_{im} d_m \\ \bar{z}_0 &= \bar{c}_{n+1} d_1 + \bar{c}_{n+2} d_2 + \ldots + \bar{c}_{n+m} d_m \\ \bar{d}_0 &= \bar{a}_{0,\, n+1} d_1 + \bar{a}_{0,\, n+1} d_2 + \ldots + \bar{a}_{0,n+m} d_m + d_0 . \end{aligned} \tag{22}$$

Din cele de mai sus rezultă că pentru construirea unei iteraţii e suficient să fie cunoscută inversa bazei din iteraţia precedentă şi elementele tabelei iniţiale.

Bazele a două iteraţii consecutive diferă printr-un singur vector, deci $(B_{k+2})^{-1}$ se poate calcula din $(B_k)^{-1}$ folosind forma produs a inversei :

$$(B_{k+1})^{-1} = E_{r^*}^{(m+2)} (B_k)^{-1}, \tag{23}$$

unde :

$$E_{r*}^{(m+2)} = (e_1,\ e_2, \ldots,\ e_{r-1},\ Y^*,\ e_{r+1,\ldots}\ e_{m+2})$$

$$Y^* = \left[-\frac{y_1}{y_r}, -\frac{y_2}{y_r}, \ldots, -\frac{y_{r-1}}{y_r}, \frac{1}{y_r}, -\frac{y_{r+1}}{y_r}, \ldots -\frac{y_m}{y_r}, -\frac{y_{m+1}}{y_r}, -\frac{y_{m+2}}{y_r} \right]$$

$$Y = [y_1, y_2, \cdots, y_{r-1}, y_r, y_{r+1}, \cdots, y_m, y_{m+1}, y_{m+2}] = (B_k)^{-1} a_{j_s}$$

dacă B_{k+1} se obţine înlocuind în B_k vectorul a_{j_r} prin a_{j_s}.

Pentru a exemplifica metoda simplex revizuită, se reia exemplul anterior. După adăugarea variabilelor artificiale şi a ecuaţiilor w şi z, problema se prezintă sub forma :

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl} -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -4x_4 & +x_5 & & & & = & 2 \\ 5x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & & +x_6 & & & = & 15 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & & & +x_7 & & = & 10 \\ -2x_1 & -5x_2 & +2x_3 & & & & & -w & = & -27 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & & & & +z & = & 0. \end{array}$$

Se poate alcătui :

Tabelul iteraţiei 0

Variab. bazice	Var. de structură				Var. artificiale			z	w	Const.
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			
x_5	−2	3*	−1	−4	1					2
x_6	5	1	−2	1		1				15
x_7	−1	1	1	3			1			10
z	−1	−1	2	1				1		0
w	2	5	−2	0					1	27

Faza I. Pentru soluţia iniţială, w nu este minim, deoarece în ultima linie a tabelului există elementele pozitive. Regulile obişnuite de schimbare a bazei în metoda simplex, conduc la baza formată de vectorii $a_2 a_6 a_7$. Calculînd linia w în noua bază, se constată că nici această bază nu este optimă. Datele necesare continuării iterațiilor se înregistrează în :

Tabelul coeficienților a_{0j} și c_j [1]

Iterația		Variabile			
		x_1	x_2	x_3	x_4
a_{0j}	0	-2	-5^*	-2	0
	1	16/3	0	$-1/3$	$20/3^*$
	2	$76/13^*$	0	31/13	0
	3	0	0	0	0
c_j	3	0	0	$41/38^*$	0
	4	0	0	0	$-82/21$

Din acest tabel rezultă că în iterația următoare, x_4 intră în bază. Se scrie inversa bazei $(a_2\, a_6\, a_7)$; se recalculează vectorul constantelor și se stabilește că a_4 înlocuiește în bază pe a_7. Avem :

Iterația 1

Baza	Inversa bazei					Const.	x_4
	x_5	x_6	x_7	z	w		
a_2	1/3					2/3	$-4/3$
a_6	$-1/3$	1				43/3	7/3
a_7	$-1/3$		1			28/3	$13/3^*$
z	1/3			1		2/3	$-1/3$
w	5/3				1	$-71/3$	$-20/3$

Iterația 2

							x_1
a_2	3/13		4/13			46/13	$-10/13$
a_6	$-2/13$	1	$-7/13$			121/13	$76/13^*$
a_4	$-1/13$		3/13			28/13	$-1/13$
z	4/13		1/13	1		18/13	$-22/13$
w	15/13		20/13		1	$-121/13$	$-76/13$

Faza I. Iterația 3^a. Faza II. Iterația 0

							x_3
a_2	8/38	10/76	9/38			181/38	$-9/38$
a_1	$-1/38$	13/76	$-7/76$			121/76	$-31/76$
a_4	$-3/38$	1/76	17/76			173/76	$21/76^*$
z	10/38	11/38	$-3/38$	1		155/38	41/38
w	1	1	1		1	0	0

---

[1] Acest tabel se completează în cursul aplicării algoritmului.

În iterația 3 se obține min $w = 0$, deci soluția $x_1 = 121/76$, $x_2 = 181/38$, $x_3 = 0$, $x_4 = 173/76$ este o soluție realizabilă de bază pentru problema inițială. Cu această iterație se încheie faza I. Vectorii (a_2, a_1, a_4) formează baza inițială pentru :

Faza II. Obiectivul este minimizarea funcției z. Calculînd linia z în baza $(a_2\ a_1\ a_4)$ — înscrisă în tabelul coeficienților — se constată că soluția asociată acestei baze nu este optimă. Iterația necesară îmbunătățirii soluției se calculează ușor, deoarece se cunoaște inversa bazei $(a_2\ a_1\ a_4)$ și cu ajutorul ei se calculează vectorul constantelor și a_3. În această fază, linia și coloana w nu mai apar în bază.

Faza II. Iterația 1

a_2	1/7	1/7	3/7		141/21
a_1	−1/7	4/21	5/21		104/21
a_3	−2/7	1/21	17/21		173/21
z	12/21	5/21	−20/21	1	−101/21

Avînd inversa bazei formată de vectorii (a_2, a_1, a_3, z), se calculează vectorul c în această bază. Componentele acestui vector (înregistrate în tabelul coeficienților pe linia iterației 4) sînt nepozitive, deci s-a găsit soluția optimă.

C. ECHIVALENȚA METODEI FEI CU METODA SIMPLEX REVIZUITĂ

Pentru compararea acestor metode se remarcă, în primul rînd, că matricea program $P^{(0)}$ conține :

— vectorii variabilelor de structură,

— vectorul constantelor și

— coeficienții ecuațiilor z și w înmulțite cu -1 deci $P^{(0)}$ repetă tabelul iterației 0 din metoda simplex revizuită, fără a pune în evidență matricea unitate de ordinul $m + 2$.

Analizînd modul în care se construiește succesiunea de transformări S pentru etapa I (metoda Fei) și iterațiile fazei I (metoda simplex revizuită), se constată că :

— alegerea coloanei pivot (metoda Fei) este determinată de elementele liniei principale $a_{0j} = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ exceptînd primul element $d_0 = -\sum_{i=1}^{m} d_i$;

— alegerea vectorului care intră în bază (metoda Dantzig) este determinată de elementele liniei w care sînt egale cu $(-a_{0j})$.

Criteriile folosite fac ca pivotul transformării H să fie identic cu elementul de soluție al metodei Dantzig. Cu aceste observații se poate demonstra :

Teoremă. *Transformata matricei program* :

$$P^{(0)} = H \Rightarrow P^{(s)}$$

este produsul matricei $\left[\begin{array}{c:c} -z & 0 \\ -w & -w_0 \\ \hdashline A & d \end{array}\right]$ *prin inversa bazei din iterația s.*

În adevăr, fie a_{rk} elementul pivot în prima iterație. Din definiția transformării H avem :

$$P^{(1)} = E_r^{(m+2)} \cdot P^{(0)} \tag{24}$$

unde : $E_r^{(m+2)} = (e_1\, e_2, \ldots, e_{r-1}, H', e_{r+1}, \ldots, e_{m+2})$ și

$$H' = \left[-\frac{c_k}{a_{rk}},\ -\frac{a_{0k}}{a_{rk}},\ -\frac{a_{1k}}{a_{rk}},\ \ldots,\ -\frac{a_{r-1,\,k}}{a_{rk}},\ \frac{1}{a_{rk}},\ -\frac{a_{r+1,\,k}}{a_{rk}},\ -\frac{a_{mk}}{a_{rk}} \right].$$

Dar, din forma produs a inversei unei matrici rezultă că $E_r^{(m+2)}$ este inversa matricei obținute înlocuind în matricea identică $E^{(m+2)}$ vectorul e_r, prin vectorul H'. Deoarece vectorii matricei $P^{(0)}$ sînt scriși în baza $E^{(m+2)}$ formată de vectorii unitari ai spațiului $(m+2)$-dimensional, matricea $P^{(1)}$ dată de (24) este expresia matricei $P^{(0)}$ în noua bază. Fie acum a_{pq} pivotul ales pentru transformarea matricei $P^{(1)}$. Avem :

$$P^{(2)} = E_p^{(m+2)} P^{(1)}, \tag{25}$$

unde $E_p^{(m+2)}$ se construiește în același mod cu $E_r^{(m+2)}$. Ținînd seama de relația (24), se poate scrie :

$$P^{(2)} = E_p^{(m+2)} \cdot E_r^{(m+2)} \cdot P^{(0)}. \tag{26}$$

Produsul $E_p^{(m+2)} \cdot E_r^{(m+2)}$ este însă inversa matricei obținute înlocuind în $E^{(m+2)}$ vectorii unitari e_r și e_p prin a_k și a_q, deci $P^{(2)}$ este expresia matricei $P^{(0)}$ în baza astfel construită.

Pentru generalizarea acestui rezultat să notăm cu $a_{i_1 j_1}$, $a_{i_2 j_2}, \ldots$ $\ldots, a_{i_s j_s}$ elementele pivot din succesiunea de transformări H care conduce de la $P^{(0)}$ la $P^{(s)}$. Cu această notație se poate scrie :

$$P^{(s)} = E_{i_s}^{(m+2)} \cdot E_{i_{s-1}}^{(m+2)} \ldots E_{i_2}^{(m+2)} \cdot E_{i_1}^{(m+2)} \cdot P^{(0)} \tag{27}$$

Produsul matricelor $E_{i_s}^{(m+2)} \cdot E_{i_{s-1}}^{(m+2)} \ldots E_{i_2}^{(m+2)} \cdot E_{i_1}^{(m+2)}$, este inversa matricei obținute înlocuind în matricea $E^{(m+2)}$ vectorii $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{s-1}}$ prin vectorii $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{s-1}}, a_{j_s}$, adică inversa bazei formate de acești vectori dacă $s = m + 2$ sau a unei baze care conține pe lîngă acești vectori, $m + 2 - s$ vectori unitari. De aici rezultă că $P^{(1)}$ este produsul dintre $P^{(0)}$ și inversa bazei astfel formate, adică o succesiune de transformări „S" este echivalentă o scuuccesiune de iterații. Identitatea acestor operații este asigurată prin aceea că regulile folosite fac ca pivotul unei transformări să coincidă cu elementul de soluție a unei iterații.

Etapa I a metodei Fei conduce la determinarea unei soluții realizabile de bază dacă, după un număr finit de transformări, primul element al liniei principale a_{00} se anulează și toate celelalte elemente sînt nenegative.

În metoda Dantzig, prima fază care urmărește minimizarea funcției w, se încheie cu determinarea unei soluții realizabile de bază a sistemului inițial dacă min $w_0 = 0$. Condițiile $a_{00} = 0$ și min $w_0 = 0$ sînt identice.

Etapa I a metodei Fei poate conduce și la concluzia că problema studiată nu admite o soluție realizabilă de bază dacă :

a) în linia principală a unei matrici $P^{(s)}$ obținută după un număr de transformări, există un element negativ, dar toate componentele vectorului-coloană căruia îl aparține acest element sînt nepozitive, sau dacă

b) toate elementele liniei principale sînt nenegative dar primul element este diferit de zero. E ușor de văzut că acest element nu poate fi decît negativ și astfel devine evident că nu pot exista valori nenegative ale variabilelor pentru care

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{a}_{0j} \cdot x_j < 0 \text{ dacă } \bar{a}_{0j} \geqslant 0 \text{ pentru } j = 1, \ldots, n$$

(a_{0j} fiind corespondentul elementului a_{0j} în $P^{(s)}$).

E ușor de stabilit identitatea acestor condiții cu cele care semnalează inexistența unei soluții realizabile de bază în cazul aplicării algoritmului simplex primal deci și în simplexul revizuit.

Deosebirea între modul de prezentare a calculelor în metodele studiate, face ca elementele care se înregistrează să fie diferite.

În exemplul rezolvat mai sus, prin metoda Fei, $P^{(3)}$ este matricea finală în etapa I și pentru același exemplu, rezolvat prin metoda Dantzig, iterația 3 încheie faza I. Succesiunea de transformări S a avut pivoturile : $a_{12} = 3$, $\bar{a}_{34} = 13/3$ și $\bar{\bar{a}}_{21} = 76/13$. Elementele de soluție din cele trei iterații ale metodei Dantzig au coincis cu pivoturile. În $P^{(3)}$ avem $a_{00} = 0$ și în iterația 3, $w_0 = 0$, iar soluțiile găsite prin ambele metode coincid. În timp ce P^{3} conține elementele necesare optimizării soluției găsite, la sfîrșitul iterației 3 (Dantzig) sînt cunoscute numai inversa bazei și toate elementele liniei w. Pentru testul de optimalitate a soluției se calculează elementele liniei z în baza iterației 3. Fiindcă c_3 este pozitiv, se deduce că soluția nu este optimă și trebuie calculat vectorul a_3 în baza formată de vectorii (a_2, a_1, a_4, z). Se observă că în timp ce matricele succesiunii de transformări S conțin numai vectorii asociați variabilelor de structură, metoda Dantzig înregistrează numai vectorii asociați variabilelor artificiale. De aici se poate deduce că metoda Dantzig oferă o economie de muncă în toate problemele în care numărul variabilelor este mai mare decît al restricțiilor, cazul cel mai frecvent în problemele reale.

Etapa II și faza II urmăresc optimizarea soluției. Alegerea pivotului transformării S se face pe baza elementelor primei linii a matricei program $P^{(s)}$obținute la încheierea etapei I, iar schimbările bazei în metoda

Dantzig sînt determinate de elementele liniei z scrise în baza optimă a fazei I. Deoarece s-a văzut că aceste elemente sînt egale în valoare absolută și că succesiunea de transformări S coincide cu schimbările bazelor urmează că etapa II Fei conduce la același rezultat cu faza II Dantzig.

În complexul rezolvat mai sus, optimizarea soluției s-a obținut după o singură transformare S de pivot $a_{33} = 21/76$, element care constituie și elementul de soluție în unica iterație, din faza II.

Soluția găsită, cît și valoarea optimă a funcției obiectiv coincid, cu deosebirea că în $P^{(4)}$ această valoare apare înmulțită cu -1.

D. OBSERVAȚII

Metoda Fei, stabilită de autor pentru rezolvarea problemelor de programare liniară în care sistemul de restricții este :

$$Ax = d$$

prezintă avantajul de a nu cere construirea unei baze unitare. Matricea program $P^{(0)}$ are dimensiunile $(m + 2) \times (n + 1)$, așa cum s-a văzut. Metoda se poate folosi fără modificări și în cazul cînd sistemul de restricții este de forma

$$Ax \geqslant d.$$

Pentru cazul în care sensul inecuațiilor este „$\leqslant$”, etapa I nu mai este necesară. În aceleași condiții algoritmul simplex revizuit începe cu faza II.

Dacă sistemul condițiilor cuprind inecuațiile cu semnul „$\geqslant$”, ecuații și inecuații cu semnul „$\leqslant$”, toate restricțiile trebuie transformate în ecuații prin adăugarea variabilelor artificiale (unde semnele sînt „$=$” sau „$\geqslant$”) și de abatere (unde semnele sînt „$\leqslant$”).

În acest caz, matricea $P^{(s)}$ obținută după un număr de transformări, prezintă o soluție realizabilă de bază a sistemului inițial chiar dacă $a_{00} \neq 0$, cu condiția ca nici unul dintre vectorii asociați variabilelor artificiale să nu fie vector unitar în $P^{(s)}$. În același caz, metoda simplex revizuită condiționează existența soluției realizabile prin obligația ca baza optimă pentru min w să nu conțină vectori artificiali, min w putînd fi diferit de zero. Echivalența acestor condiții este evidentă.

Primită la redacție la 9 noiembrie 1965

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. G. B., DANTZIG, A. ORDEN and P. WOLFE, *The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints.* Pacific Journal of Mathematics, **5**, *2*, 183—195 (1955).
2. G. B. DANTZIG and WILLIAM ORCHARD-HAYS, *Notes on linear Programming : Part V-Alternate Algorithm for the Revised Simplex method Using Product Form for the Inverse.* The RABD Corporation, Research Memorandum R.N.—1268 November **19** (1953).
3. H. IONESCU, P. MIRESCU, I. NĂDEJDE, *Programarea liniară.* Cap. IV § 3—7, Ed. științifică, București, 1964.
4. VENIERO DEL PUNTO, Rivista di Politica Economica, Iulie 1957.

LANȚURI CU LEGĂTURI COMPLETE LINIARE OMOGENE

DE

RODICA TRANDAFIR

În această lucrare ne ocupăm de studiul ergodic al lanțurilor cu legături complete, omogene cu trei și patru stări.

I

Fie $(\xi)_{n\in N^\star}$ un șir de variabile aleatoare care pot lua fiecare valorile $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$. Vom nota cu $p_j = P(x_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$, repartiția inițială, cu $p_j^{(n)}$ probabilitățile condiționate la momentul n, unde $0 \leqslant p_j^{(n)} \leqslant 1$ și $\sum_{j=1}^{m+1} p_j^{(n)} = 1$ și cu $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $p^{(n)} = (p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)})$.

Șirul de variabile aleatoare $(\xi)_{n\in N^\star}$ formează un lanț cu legături complete*) liniar omogen dacă

$$p_j^{(n+1)} = \varphi_{i,j}\,(p^{(n)}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m+1,\ 1 \leqslant j \leqslant m,$$

unde $\varphi_{i,j}$ sînt funcții liniare în raport cu $p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)}$ [1]**).

Să notăm cu $P_i^{(n)}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $n \in N^\star$, probabilitatea absolută ca după n pași variabila ξ_n să ia valoarea x_i,

$$\sum_{i=1}^{m+1} P_i^{(n)}(p) = 1.$$

Un lanț cu legături complete este ergodic dacă

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(n)}(p) = P_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m+1,$$

unde P_i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, sînt constante care nu depind de $p = (p_1, \ldots, p_m)$.

---

*) Lanțurile cu legături complete au fost introduse în teoria probabilităților de O. Onicescu și G. Mihoc în [4]; pentru detalii vezi monografia [1].

**) pag. 10–11.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 1057–1063, BUCUREȘTI 1966

Pentru lanţurile cu legături complete liniare omogene, relaţia funcţională a probabilităţii absolute este

$$P_i^{(n+1)}(p) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(n)}(\varphi_i(p)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m+1.$$

O. Onicescu şi G. Mihoc au demonstrat următoarea teoremă de ergodicitate pentru lanţurile cu legături complete omogene :

Un lanţ cu legături complete omogen este ergodic dacă sînt verificate condiţiile :

(1) funcţiile fundamentale $\varphi_{i,j}(p)$, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $1 \leqslant j \leqslant m$, sînt definite şi continue în domeniul Δ, de puncte p din $R^{(m)}$ definit de relaţiile :

$$0 \leqslant p_j \leqslant 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1$$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial \varphi_{i,j}(p)}{\partial p_k} \right| < 1$$

R. Fortet a dat în [2] o descriere completă a comportării ergodice a lanţurilor cu legături complete liniare omogene în cazul $m = 1$.

M. Iosifescu şi R. Theodorescu în [3] au arătat cum se poate reduce în anumite condiţii studiul lanţurilor liniare cu $m > 1$, la cazul $m = 1$ examinat de R. Fortet.

Dacă $m = 2$, funcţiile fundamentale se scriu

$$\varphi_{i,j}(p_1, p_2) = a_0^{ij} + a_1^{ij} p_1 + a_2^{ij} p_2, \qquad 1 \leqslant i, \ j \leqslant 3.$$

Aplicînd acestor funcţii teorema de ergodicitate Onicescu-Mihoc, condiţiile (1) şi (2) devin :

$$(3) \qquad 0 < a_0^{ij} + a_1^{ij} p_1 + a_2^{ij} p_2 < 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 2$$

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{2} \left| \frac{\partial \varphi_{i,j}(p)}{\partial p_k} \right| < 1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant k \leqslant 2.$$

Rezultă că dacă sînt satisfăcute condiţiile (3) şi (4), lanţul este ergodic.

Pentru $m = 3$, funcţiile fundamentale se scriu

$$\varphi_{i,j}(p_1, p_2, p_3) = a_0^{ij} + a_1^{ij} p_1 + a_2^{ij} p_2 + a_3^{ij} p_3, \ 1 \leqslant i, j \leqslant 4.$$

Lanţul cu legături complete este ergodic dacă funcţiile fundamentale $\varphi_{i,j}(p)$ definite şi continue în domeniul Δ verifică condiţiile (1) şi (2) din teorema Onicescu-Mihoc.

Pentru a studia comportarea lanţului în cazul în care condiţiile de ergodicitate nu sînt satisfăcute, vom reduce, conform [3], studiul acestor lanţuri la cazul $m = 1$.

Dacă $m = 2$, considerăm $\widetilde{x}_1 = x_1$ şi $\widetilde{x}_2 = x_2 \cup x_3$, de unde rezultă $\widetilde{p} = p_1$, $1 - \widetilde{p} = p_2 + p_3$.

Notăm cu $a_k^{i1} = a_k^i$, $0 \leqslant k \leqslant 2$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

În lucrarea citată mai sus, M. Iosifescu şi R. Theodorescu introduc funcţiile

$$\widetilde{\varphi}_{1,1} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{\alpha} p_j\,(\varphi_{j,1} + \cdots + \varphi_{j,\alpha})}{\sum\limits_{j=1}^{\alpha} p_j},$$

$$\widetilde{\varphi}_{2,1} = \frac{\sum\limits_{j=\alpha+1}^{m+1} p_j\,(\varphi_{j,1} + \cdots + \varphi_{j,\alpha})}{\sum\limits_{j=\alpha+1}^{m+1} p_j},$$

pentru gruparea $\widetilde{x}_1 = x_1 \cup x_2 \cup \cdots \cup x_\alpha$, $\widetilde{x}_2 = x_{\alpha+1} \cup \cdots \cup x_{m+1}$. În cazul nostru, ţinînd seama de notaţiile de mai sus, aceste funcţii se scriu :

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} &\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p}) = \varphi_{1,1}(p) \\ &\widetilde{\varphi}_{2,1}(\widetilde{p}) = \frac{p_2\left(\sum\limits_{k=1}^{2} a_k^2\,p_k + a_0^2\right) + (1-p_1-p_2)\left(\sum\limits_{k=1}^{2} a_k^3\,p_k + a_0^3\right)}{1 - p_1}. \end{aligned}$$

Pentru ca lanţul cu legături complete dat să poată fi considerat ca un lanţ liniar alternativ, trebuie ca funcţiile $\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p})$ şi $\widetilde{\varphi}_{2,1}(\widetilde{p})$ să fie liniare în raport cu $\widetilde{p} = p_1$, adică

$$\text{(5')}\qquad \widetilde{\varphi}_{1,1} = \widetilde{a}\,\widetilde{p} + \widetilde{b},\quad \widetilde{\varphi}_{2,1} = \widetilde{c}\,\widetilde{p} + \widetilde{d}\,.$$

Identificînd (5) cu (5′), obţinem

$$\text{(6)}\qquad \begin{aligned} &a_2^1 = 0,\quad a_0^1 = \widetilde{b}, \\ &a_1^1 = \widetilde{a},\ a_1^3 = \widetilde{c}, \\ &a_2^3 + a_0^2 = a_0^3 = \widetilde{d}, \\ &a_2^2 - a_2^3 = 0, \\ &a_1^2 - a_1^3 - a_2^3 = 0. \end{aligned}$$

În aceste condiţii, avem $\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p}) = a_1^1\,p_1 + a_0^1$, $\widetilde{\varphi}_{2,1}(\widetilde{p}) = a_1^3\,p_1 + a_0^3$. Dacă $m = 3$ vom considera două grupări :

1. $\widetilde{x}_1 = x_1$, $\widetilde{x}_2 = x_2 \cup x_3 \cup x_4$.

Repartiţiile iniţiale vor fi $\widetilde{p} = p_1$, $1 - \widetilde{p} = p_2 + p_3 + p_4$, iar funcţiile fundamentale :

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned} &\widetilde{\varphi}_{1,1} = \varphi_{1,1} \\ &\widetilde{\varphi}_{2,1} = \frac{p_2\,\varphi_{2,1} + p_3\,\varphi_{3,1} + (1 - p_1 - p_2 - p_3)\,\varphi_{4,1}}{1 - p_1}. \end{aligned}$$

Notăm $a_k^{j1} = a_k^j$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 4$.

Pentru ca funcțiile $\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p})$ și $\widetilde{\varphi}_{2,1}(\widetilde{p})$ să fie de forma $\widetilde{\varphi}_{1,1} = \widetilde{a}\,\widetilde{p} + \widetilde{b}$, $\widetilde{\varphi}_{2,1} = \widetilde{c}\,\widetilde{p} + \widetilde{d}$, trebuie să avem:

$$\begin{aligned}
&a_0^1 = \widetilde{b},\ a_1^1 = \widetilde{a},\\
&a_1^4 = \widetilde{c},\ a_0^4 = \widetilde{d},\\
&a_2^1 = a_3^1 = 0,\ a_1^2 - a_2^4 - a_1^4 = 0,\\
&a_1^3 - a_1^4 - a_3^4 = 0,\ a_3^2 + a_2^3 - a_3^4 - a_2^4 = 0,\\
&a_2^2 - a_2^4 = 0,\ a_3^3 - a_3^4 = 0,\\
&a_0^2 - a_0^4 - a_2^4 = 0,\ a_0^3 - a_0^4 - a_3^4 = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Deci

$$\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p}) = a_1^1 p_1 + a_0^1,\ \widetilde{\varphi}_{2,1}(\widetilde{p}) = a_1^4 p_1 + a_0^4.$$

2. Pentru gruparea $\widetilde{x}_1 = x_1 \cup x_2$ și $\widetilde{x}_2 = x_3 \cup x_4$, repartițiile inițiale vor fi $\widetilde{p} = p_1 + p_2$, $1 - \widetilde{p} = p_3 + p_4$.

Funcțiile fundamentale vor fi de forma:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p}) = \frac{p_1(\varphi_{1,1} + \varphi_{1,2}) + p_2(\varphi_{2,1} + \varphi_{2,2})}{p_1 + p_2}\\
&\widetilde{\varphi}_{2,1} = \frac{p_3(\varphi_{3,1} + \varphi_{3,2}) + (1 - p_1 - p_2 - p_3)(\varphi_{4,1} + \varphi_{4,2})}{1 - p_1 - p_2}
\end{aligned} \tag{9}$$

Făcînd notația $\sum_{l=1}^{2} a_k^{jl} = a_k^j$, $0 \leqslant k \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, ca să avem $\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p}) = \widetilde{a}\,\widetilde{p} + \widetilde{b}$, $\widetilde{\varphi}_{2,1}(\widetilde{p}) = \widetilde{c}\,\widetilde{p} + \widetilde{d}$, obținem relațiile:

$$\begin{aligned}
&a_1^1 = a_2^2 = \frac{a_1^2 + a_2^1}{2} = \widetilde{a},\\
&a_0^1 + a_0^2 = \widetilde{b},\\
&a_1^4 = a_2^4 = \widetilde{c},\\
&a_3^4 + a_0^3 = a_0^4 = \widetilde{d},\\
&a_1^3 = a_3^2 = 0,\ a_3^3 - a_3^4 = 0,\\
&a_2^3 - a_2^4 - a_3^4 = 0,\ a_1^3 - a_1^4 - a_3^4 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

II

În studiul structurii ergodice a lanțului, ținînd seama de clasificarea lui R. Fortet [2], distingem următoarele cazuri:

1) $|\widetilde{a}| < 1,\ |\widetilde{c}| < 1.$

Pentru $m = 2$, $|a_1^1| < 1$, $|a_1^2 - a_2^2| < 1$.

Ținînd seama că $-1 \leqslant a_1^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant a_2^2 \leqslant 1$, rezultă

$$\begin{cases} -1 < a_1^2 \leqslant 0, \\ -1 < a_2^2 < a_1^2 + 1, \end{cases} \text{sau} \begin{cases} 0 \leqslant a_1^2 < 1, \\ a_2^2 - 1 < a_2^2 < 1. \end{cases}$$

Pentru $m = 3$, $\alpha = 1$, avem $|a_1^1| < 1$, $|a_1^4| < 1$, dar $a_1^4 = a_1^2 - a_2^2$ deci $|a_1^2 - a_2^2| < 1$, iar pentru $m = 3$, $\alpha = 2$, $\left|\dfrac{a_1^2 + a_2^1}{2}\right| < 1$, $|a_1^4| = |a_2^4| < 1$.

Vom distinge subcazurile :

$1_1)$ $\widetilde{a} = \widetilde{c} = 0$.

Lanțul cu legături complete se reduce la un lanț Markov

$1_2)$ $\widetilde{a} \neq 0$, $\widetilde{c} = 0$.

În acest caz, limitele vor fi :

	$m = 2$	$m = 3$
$\alpha = 1$	$p_1 = \dfrac{a_0^1}{1 - a_1^1}$, $p_2 = a_0^2 + a_2^3$	$p_1 = \dfrac{a_0^1}{1 - a_1^1}$, $p_2 = a_0^4$
$\alpha = 2$	—	$p_1 = \dfrac{2a_0^1}{2 - a_1^2 - a_2^1}$, $p_2 = a_3^4 + a_0^3 = a_0^4$

Lanțul este ergodic

$2)$ $\widetilde{a} = 1$

$2_1)$ $\widetilde{c} = 1$.

În acest caz, $P^{(n)}(\widetilde{p}) = 0$ pentru orice $n \in N^*$ și deci lanțul este semiergodic.

$2_2)$ $\widetilde{c} = -1$.

Rezultă $\widetilde{\varphi}_{1,1}(\widetilde{p}) = 1 - \widetilde{p}$. $P^{(n)}(\widetilde{p})$ tinde către o limită care depinde de $\widetilde{p}$, deci lanțul este semiergodic

$2_3)$ $|\widetilde{c}| < 1$.

Vom distinge subcazurile :

$2_{3_1})$ $\widetilde{d} < 1$, $\widetilde{c} + \widetilde{d} < 1$. Fie α un număr astfel încît $\widetilde{c}\,\widetilde{p} + \widetilde{d} \leqslant \alpha$ pentru orice $\widetilde{p}$ și Δ_α domeniul $0 \leqslant \widetilde{p} \leqslant 1 - \alpha$

Deoarece $\widetilde{\varphi}_{2,1}(\widetilde{p})$ admite punctele de atracție de mai sus pentru $m = 2$ și $m = 3$ pentru $\widetilde{p} \neq 1$, lanțul este semiergodic.

$2_{3_2})$ $\widetilde{d} = 1$, $\widetilde{c} + \widetilde{d} < 1$.

Rezultă $\widetilde{c} + \widetilde{d} > 0$ și $P^{(n+1)}(0) = P^{(n)}(1)$. Lanțul este semiergodic.

2_{3_3}) $\widetilde{d} < 1, \quad \widetilde{c} + \widetilde{d} = 1$.

Pentru $m = 2$ și $\alpha = 1$, $P^{(n+1)}(0) = P^{(n)}(a_0^2 + a_2^3)$, pentru $m = 3$, $\alpha = 1$, $P^{(n+1)}(0) = P^{(n)}(a_0^2 - a_2^4) = P^{(n)}(a_0^3 - a_3^4)$, iar pentru $m = 3$, $\alpha = 2$, $P^{(n+1)}(0) = P^{(n)}(a_0^3 + a_3^4) = P^{(n)}(a_0^4)$.

Lanțul este ergodic

2_{3_4}) $\widetilde{d} = 1$, $\widetilde{c} + \widetilde{d} = 1$. $P^{(n)}(\widetilde{p})$ tinde uniform către 1. Lanțul este ergodic.

3) $\widetilde{a} = -1$.

3_1) $\widetilde{c} = -1$.

Rezultă că $P^{(2n+1)}(\widetilde{p}) = \widetilde{p}$ și $P^{(2n)}(\widetilde{p}) = 1 - \widetilde{p}$. Lanțul este oscilant.

3_2) $\widetilde{d} = 0, \ 0 < \widetilde{c} < 1$.

3_{2_1}) $0 < \widetilde{d} < 1, 0 < \widetilde{c} + \widetilde{d} < 1$. Expresia $P^{(n)}(\widetilde{p})$ tinde către o limită, independentă de $\widetilde{p}$. Lanțul este ergodic, iar limitele sînt

	$m = 2$	$m = 3$
$\alpha = 1$	$p_1 = \dfrac{a_0^1}{2}, \ p_2 = \dfrac{a_0^2 + a_2^3}{1 - a_1^2 + a_2^3}$	$p_1 = \dfrac{a_0^1}{2}, \quad p_2 = \dfrac{a_0^2 - a_2^4}{1 - a_1^3 + a_3^4}$
$\alpha = 2$	——	$p_1 = \dfrac{a_0^1 + a_0^2}{2}, \quad p_2 = \dfrac{a_0^3 + a_3^4}{1 - a_1^4}$

3_{2_2}) $\widetilde{d} = 0, \ 0 < \widetilde{c} < 1$.

	$m = 2$	$m = 3$
$\alpha = 1$	$p_1 = \dfrac{a_0^1}{2}, p_2 = 0$	$p_1 = \dfrac{a_0^1}{2}, p_2 = 0$
$\alpha = 2$	——	$p_1 = \dfrac{a_0^1 + a_0^2}{2}, \quad p_2 = 0$

Lanțul este ergodic.

3_{2_3}) $\widetilde{d} = 1, \ 0 > \widetilde{c} > -1$. Lanțul este oscilant.

3_{2_4}) $\widetilde{c} + \widetilde{d} = 0, \ 0 \leqslant \widetilde{d} < 1$.

Lanțul este ergodic.

	$m = 2$	$m = 3$
$\alpha = 1$	$p_1 = \frac{\overset{1}{a}_0}{2},\ p_2 = \frac{\overset{3}{a}_2 + \overset{2}{a}_0}{1 - \overset{3}{a}_1 + \overset{3}{a}_2}$	$p_1 = \frac{\overset{1}{a}_0}{2},\ p_2 = \frac{\overset{3}{a}_0 - \overset{4}{a}_3}{1 - \overset{3}{a}_1 + \overset{4}{a}_3}$
$\alpha = 2$	——	$p_1 = \frac{\overset{1}{a}_0 + \overset{2}{a}_0}{2},\ p_2 = \frac{\overset{3}{a}_0 + \overset{4}{a}_3}{1 + \overset{4}{a}_3 + \overset{3}{a}_0}$

3_{2_5}) $\widetilde{c} + \widetilde{d} = 1,\ 0 < \widetilde{d} < 1$. Lanțul este ergodic

	$m = 2$	$m = 3$
$\alpha = 1$	$p_1 = \frac{\overset{1}{a}_0}{2},\ p_2 = \frac{\overset{3}{a}_2 + \overset{2}{a}_0}{1 - \overset{2}{a}_1 + \overset{3}{a}_2} = 1$	$p_1 = \frac{\overset{\prime}{a}_0}{2},\ p_2 = \frac{\overset{3}{a}_0 - \overset{4}{a}_3}{1 - \overset{3}{a}_1 + \overset{4}{a}_3} = 1$
$\alpha = 2$	——	$p_1 = \frac{\overset{1}{a}_0 + \overset{2}{a}_0}{a},\ p_2 = \frac{\overset{3}{a}_0 + \overset{4}{a}_3}{1 - \overset{3}{a}_2 + \overset{4}{a}_3} = 1$

3_3) $\widetilde{c} = 1$. Lanțul se reduce la un lanț Markov.

3_{3_1}) $\widetilde{d} \neq 1$. Expresia $P^{(n)}(\widetilde{p})$ tinde către o limită independentă de $\widetilde{p}$. Lanțul este ergodic.

3_{3_2}) $\widetilde{d} = 1$. Expresiile $P^{(2n)}(\widetilde{p})$ și $P^{(2n+1)}(\widetilde{p})$ tind respectiv către limite distincte care depind de $\widetilde{p}$. Lanțul este oscilant.

Primită la redacție la 6 octombrie 1965

Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej”
București

BIBLIOGRAFIE

1. G. Ciucu și R. Theodorescu, *Procese cu legături complete.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1960.
2. R. Fortet, *Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilitiés en chaîne.* Rer. Ci. Lima, **40**, 185—261, 337—447, 481—528 (1938).
3. М. Иосифеску, Р. Теодореску, *О некоторых линейных цепях с полными связями.* Rev. math. pures et appl., (1961).
4. O. Onicescu, G. Mihoc, *Sur les chaînes statistiques.* C. R. Acad. Sci. Paris, **200**, 511—512 (1935).

ASUPRA ECUAȚIEI INTEGRO-DIFERENȚIALE A LUI D. A. SPENCE DIN TEORIA PROFILELOR SUBȚIRI CU JET

DE

PAUL COCÎRLAN

În această Notă, se deduce, ecuația integrodiferențială a mișcării în jurul unui profil subțire și puțin curbat, cu jet la bordul de fugă. Pentru aceasta, se pleacă direct de la problema la limită, la care conduce studiul mișcării exterioare profilului. Această problemă la limită se reduce la rezolvarea unei probleme de tip Voltera-Signorini și apoi la rezolvarea unei probleme Dirichlet pentru semiplanul superior. Impunînd ca soluția astfel obținută să verifice condiția la limită pe linia jetului, se obține ecuația integro-diferențială a lui D. A. Spence [4].

Problema aripii de avion cu jet la bordul de fugă a făcut obiectul multor cercetări experimentale și teoretice întreprinse, în special, în ultimii zece ani. Semnalăm în acest domeniu lucrările și studiile dezvoltate la noi în țară de către N. N. Patraulea [2], și în străinătate de către: M. Roy [3], D. A. Spence [4], [5], G. G. Tumașev [6], R. Legendre [7], L. Malavard [8], R. Siestrunck și J. J. Bernard [9] și alții.

D. A. Spence reduce studiul mișcării în jurul unei aripi cu jet (jet-flap) la rezolvarea unei ecuații integro-diferențiale. Aceeași ecuație este regăsită de G. G. Tumașev, dar printr-o metodă diferită.

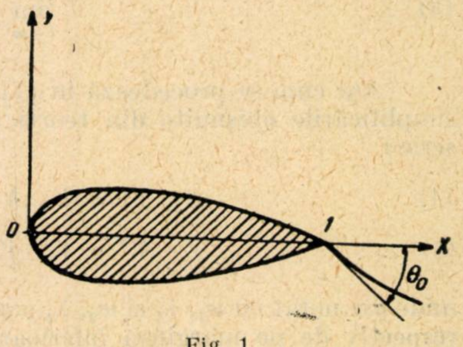


Fig. 1

În cele ce urmează vom da o metodă directă de deducere a acestei ecuații, pe care o putem numi ecuația lui Spence și Tumașev.

Fie, așadar, un profil de aripă, subțire și puțin curbat (fig. 1).

Fie

$$y = h(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

ecuaţia scheletului său.

Jetul emis la bordul de fugă face cu axa profilului un unghi θ_0, mic în modul. Dacă acest jet este subţire şi puţin curbat, putem presupune că cele două linii de separaţie ale jetului de fluidul înconjurător nu diferă prea mult de linia lui mediană.

Fie

$$y = j(x), \qquad 1 < x < +\infty$$

ecuaţia liniei mediane.

În acord cu presupunerile anterioare, admitem deci că $|h(x)|$, $|h'(x)|$, $|j(x)|$, $|y'(x)|$ sînt suficient de mici pentru a putea asimila profilul şi jetul respectiv cu intervalele $[0, 1]$, $[1, \infty]$ ale axei reale.

Mişcarea în exteriorul aripii şi jetului se presupune permanentă şi irotaţională. În aceste condiţii, există un potenţial complex $f(z)$, pe care-l vom căuta sub forma :

$$f(z) = V_\infty \cdot z + F(z), \tag{1}$$

unde V_∞ este viteza mişcării la infinit, presupusă paralelă cu axa Ox, iar $F(z)$ este potenţialul vitezelor de perturbaţie.

Fie U' şi V' componentele vitezei de perturbaţie, pe care le presupunem mici în modul. Fie $\vec{u}$ un vector normal la scheletul profilului. Condiţiile la limită ale problemei sînt :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \qquad \text{pe profil şi pe jet} \tag{2}$$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{3}$$

Aşa cum se procedează în [1], pag 687, cu ipotezele anterioare şi cu simplificările obişnuite din teoria profilelor subţiri, condiţia (2) se poate scrie :

$$V' = V_\infty \cdot h'(x) \qquad \text{pe } w_1 + w_2 \tag{4}$$

$$V' = V_\infty \cdot j'(x) \qquad \text{pe } \lambda_1 + \lambda_2, \tag{5}$$

unde am notat cu w_1, λ_1 şi w_2, λ_2 porţiunile corespunzătoare aripii şi jetului respectiv de pe marginea inferioară şi superioară a tăieturii practicate de-a lungul axei reale pozitive, la care am redus ansamblul profil-jet (fig. 2).

De obicei, ecuaţia (5) se înlocuieşte cu alta pentru partea reală U' a vitezei complexe de perturbaţie. O astfel de condiţie obţinem exprimînd continuitatea presiunii la traversarea liniei jetului. Pentru detalii trimitem la [1], pag. 688, sau la [4], [6].

Condiţia este :

$$U_2' - U_1' = \frac{V_j q_i}{\rho V_\infty} j''(x), \qquad 1 < x < +\infty, \tag{6}$$

unde indicii desemnează valorile mărimilor respective pe marginea superioară (2), respectiv inferioară (1) a tăieturii. Cu V_j am notat viteza jetului la emisie, iar q este debitul masic al jetului. Cu ρ am notat densitatea fluidului exterior. Conform condiţiilor la limită (4) şi (5),

$$V' = \mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right\}$$

ia valori egale în punctele de abscise egale de pe $w_1 + \lambda_1$, $w_2 + \lambda_2$.

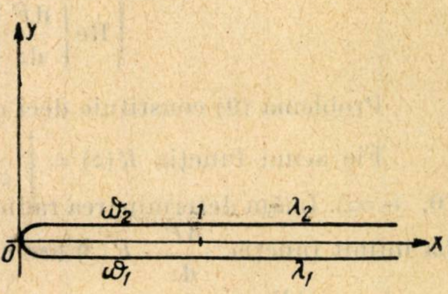


Fig. 2

Aceasta ne conduce la a pune, în virtutea principiului de simetrie al lui Schwarz, $U' = 0$ pe axa reală negativă, astfel încît $-i(U' - iV')$ se va putea prelungi, prin simetrie, din semiplanul superior în cel inferior.

Prin urmare $U_1'(x) = -U_2'(x)$ şi în loc de (6) vom avea

$$U_2' = \frac{V_j q_j}{2\rho V_\infty} \cdot j''(x) \quad \text{pe } \lambda_2 ; \tag{7}$$

introducînd coeficientul debitului cantităţii de mişcare

$$c_\mu = \frac{V_j q_j}{{}^1\!/_2 \rho V_\infty^2}$$

şi apoi funcţia

$$g(x) = -\frac{c_\mu}{2} y'(x)$$

(7) devine :

$$U_2' = -\frac{V_\infty}{2} g'(x) \text{ pentru } 1 < x < +\infty. \tag{8}$$

Problema la limită pe care o avem de rezolvat este deci următoarea : să se determine funcţia de variabilă complexă $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ olomorfă şi regulată în semiplanul superior, care să satisfacă următoarele condiţii la limită:

$$(9)\quad \begin{cases} \operatorname{Re}\left\{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right\} = 0, & -\infty < x < 0, \\ \operatorname{Im}\left\{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right\} = V_\infty \cdot h'(x) & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \operatorname{Re}\left\{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right\} = \dfrac{V_\infty}{2}\, g'(x), & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Problema (9) constituie deci o problemă Volterra-Signorini.

Fie acum funcţia $R(z) = \sqrt{\dfrac{z}{z-1}}$ considerată în planul cu tăietura $[0, +\infty)$. Luăm determinarea radicalului care ia valoarea 1 pentru $z = \infty$. La infinit funcţia $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \cdot R(z)$ are aceeaşi comportare ca şi $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$, deoarece $\lim\limits_{z\to\infty} R(z) \cdot \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = 0$.

Condiţiile (9) devin, introducînd funcţia ajutătoare $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \cdot R(z)$,

$$(10)\quad \begin{cases} \operatorname{Re}\left\{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \cdot R(z)\right\} = 0 & -\infty < x < 0 \\ \operatorname{Re}\left\{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \cdot R(z)\right\} = -\, V_\infty \cdot h'(x) \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \operatorname{Re}\left\{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} \cdot R(z)\right\} = -\, \dfrac{V_\infty}{2} \cdot g'(x) \sqrt{\dfrac{x}{1-x}} & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Problema (10) reprezintă o problemă Dirichlet pentru semiplanul superior şi conform unei formule cunoscute (vezi [1] pag. 60, formula (28)), soluţia ei este:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\sqrt{\frac{z}{z-1}} = \frac{i}{\pi}\left[\int_0^1 \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} \frac{(-V_\infty)\, h'(\zeta)}{z-\zeta}\, \mathrm{d}\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty \left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{1/2} \frac{(-V_\infty)}{2} \cdot \frac{g'(\eta)\, \mathrm{d}\eta}{z-\eta}\right]$$

sau

$$(11)\quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \frac{i}{\pi}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{1/2} \frac{V_\infty}{2}\left[2\int_0^1 \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} \frac{h'(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta}{\zeta - x} + \int_1^\infty \left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{1/2} \frac{g'(\eta)\, \mathrm{d}\eta}{\eta - z}\right].$$

Formula (11) ne-ar rezolva problema dacă am cunoaște funcția $g(x)$. Dar $g(x)$ depinde de $j'(x)$, care nu este *apriori* cunoscută. Problema constă tocmai în determinarea lui $j'(x)$, adică a formei jetului.

Funcția $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$ dată de formula (11) trebuie să verifice, între altele, condiția la limită pe linia jetului adică (5):

$$\lim_{z\to x} \operatorname{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\right\} = V_\infty \cdot j'(x) = -\frac{\lambda}{2}\, g(x), \tag{12}$$

unde am ținut seama de legătura dintre $g(x)$ și $j'(x)$ și am notat cu

$$\lambda = \frac{4}{c_\mu}.$$

Conform formulei lui Picard-Plemelj (vezi [1], pag. 128, formula (16)) pentru a găsi limita părții imaginare a membrului drept al formulei (11) este suficient să înlocuim direct $z = x$. Obținem astfel:

$$\begin{aligned}
&\lim \operatorname{Im}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{1/2} V_\infty \left[2\int_0^1 \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} \frac{h'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - x} + \right.\right.\\
&\qquad\left.\left. + \int_1^\infty \left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{1/2} \frac{g'(\eta)\,\mathrm{d}\eta}{\eta - z}\right]\right\} = \\
&= -\frac{V_\infty}{2\pi}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2}\left[2\int_0^1 \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} \frac{h'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - x} + \int_1^\infty \left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{1/2} \frac{g'(\eta)\,\mathrm{d}\eta}{\eta - x}\right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Comparînd (12) cu (13) deducem:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} \int_1^\infty \left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{1/2} \frac{g'(\eta)\,\mathrm{d}\eta}{\eta - x} + \\
&+ \frac{2}{\pi}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/2} \int_0^1 \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/2} \frac{h'(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - x} = \lambda g(x),
\end{aligned} \tag{14}$$

adică tocmai ecuația integro-diferențială a lui D. A. Spence [4].

Ecuația (14) trebuie integrată în condițiile:

$$g(1) = -{}^{1}\!/_{2}\, c_\mu j'(1) = -{}^{1}\!/_{2}\, c_\mu \theta_0. \tag{15}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \tag{16}$$

condiția (16) exprimînd faptul că la infinit aval, jetul are o direcție paralelă cu direcția generală a mișcării exterioare.

Primită la redacție la 30 august 1965

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucureşti-Paris, 1959.
2. N. N. Patraulea, *Studii de aerodinamica hipersustentaţiei*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.
3. M. Roy, *Théorie du profil d'aile à jet*. C. R. Acad. Sci., Paris, **242**, p. 3017 (1956); *La Recherche Aéronautique*, **52** (1956).
4. D. A. Spence, *The lift coefficient of a thin, jet-flapped wing*. Proc. Roy, Soc. (A) **238**, 1212 (1956).
5. D. A. Spence, *A solution of the integro-differential equation for the slope of the jet*. Proc. Roy. Soc. (A), **261**, *1304*, p. 97—118 (1961).
6. Г. Г. Тумашев, Гроепалская, *Нахождение формы струн крыла с реактивным закрылком*. Изв. выст. углед. заб, *I*, 3—37, (1962).
7. R. Legendre, C. R. Acad. Sci., Paris, **242**, 2438 (1956).
8. L. Malavard, *Sur une théorie linéaire du soufflage au bord de fuite d'un profil d'aile*. C. R. Acad. Sci., Paris, **242**, 2440 (1956).
9. R. Siestrunck, J. J. Bernard, *Sur une méthode de détermination numérique des potentiels de perturbation dans la théorie linéarisée du soufflage au bord de fuite des profils d'ailes*. C.R. Acad. Sci., Paris, **242**, 2443 (1956).

ASUPRA UNOR TEOREME DE RECURSIUNE A ALGORITMILOR NORMALI *)

DE

GH. S. NADIU

(Oradea)

În această lucrare punem problema construirii unui algoritm normal, care să realizeze o anumită schemă primitiv recursivă. Demonstrăm în acest sens două teoreme de recursiune a algoritmilor normali. Prima teoremă se referă la existenţa unui algoritm normal $\mathfrak{N}$ care realizează o schemă primitiv recursivă, analogă unei scheme recursiv primitive din teoria funcţiilor recursive. A doua teoremă se obţine din prima, prin trecerea la un alfabet mai general şi din teorema de iteraţie demonstrată. În lucrare întrebuinţăm terminologia din [3].

Fie $\mathcal{A}$ un alfabet oarecare. Să considerăm alfabetul $\mathcal{B}=\mathcal{A}\cup\{I, *\}$ unde I şi $*$ pot să aparţină alfabetului $\mathcal{A}$. Se poate demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Dacă* $\mathfrak{A}$ *este un algoritm normal dat în alfabetul* $\mathcal{A}$, *iar* $\mathfrak{B}_0$ *şi* $\mathfrak{B}_1$ *sînt algoritmi normali daţi în alfabetul* $\mathcal{B}$, *astfel că* $\mathfrak{B}_1$ *transformă cuvintele din alfabetul* $\mathcal{B}$ *în cuvinte din alfabetul* $\mathcal{A}$, *atunci se poate construi un algoritm normal* $\mathfrak{N}$ *peste alfabetul* $\mathcal{B}$ *astfel încît să fie satisfăcute următoarele proprietăţi*:

1. $\mathfrak{N}(I^{(0)} * P) \simeq \mathfrak{A}(P)$;

2. $\mathfrak{N}(I^{(n+1)} * P) \simeq \mathfrak{B}_0(I^{(n)} * \mathfrak{N}(I^{(n)} * \mathfrak{B}_1(I^{(n)} * P * \mathfrak{N}(I^{(n)} * P))))$,

unde $P \in \Omega(\mathcal{A})$, $\Omega(\mathcal{A})$ *fiind semigrupul liber generat de* $\mathcal{A}$.

Am notat, pentru prescurtare, cu $I^{(n)}$ cuvîntul format din n bare în alfabetul $\{I\}$, iar $I^{(0)}$ înseamnă cuvîntul vid în alfabetul $\{I\}$.

---

*) Lucrare prezentată la colocviul de teoria funcţiilor convexe cu aplicaţii la calcul numeric din Cluj, 1—5 iulie 1965.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 1071–1078, BUCUREŞTI, 1966

Demonstrație. Fie $\square$ un simbol care nu aparține alfabetului $\mathcal{B}$, şi să considerăm alfabetul $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{\square\}$. Să construim în *alfabetul* $\mathcal{C}$ *un algoritm normal* $\mathfrak{C}$ cu proprietatea :

$$\mathfrak{C}\,(I^{(n)} * R \square Q) \simeq I^{(n+1)} * P \square \mathfrak{B}_0\,(I^{(n)} * Q), \tag{1}$$

unde R, $Q \in \Omega\,(\mathcal{B})$, iar $P \in \Omega\,(\mathcal{A})$ este un cuvînt fixat.

Pentru construcția algoritmului $\mathfrak{C}$, să considerăm algoritmii normali $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_4, \mathfrak{X}_5$ peste alfabetul $\mathcal{C}$ cu proprietățile :

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_1\,(I^{(n)} * R \square Q) = I^{(n)}\\
&\mathfrak{X}_2\,(I^{(n)} * R \square Q) = R\\
&\mathfrak{X}_3\,(I^{(n)} * R \square Q) = Q\\
&\mathfrak{X}_4\,(I^{(n)}) = I^{(n+1)}\\
&\mathfrak{X}_5\,(I^{(n)} * R \square Q) = \mathfrak{B}_0\,(I^{(n)} * Q).
\end{aligned} \tag{2}$$

Se vede uşor că schemele algoritmilor $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_4$ sînt :

$$\mathfrak{X}_1 : \begin{cases} * \xi \to * \;(\xi \in \mathcal{C}) \\ * \to \end{cases} \qquad \mathfrak{X}_2 : \begin{cases} \square \xi \to \square\; (\xi \in \mathcal{B}) \\ \quad \square \to \\ \alpha \mid \to \alpha \\ \alpha * \to \cdot \\ \qquad \to \alpha\; (\alpha \neg \in \mathcal{C}) \end{cases}$$

$$\mathfrak{X}_3 : \begin{cases} \alpha \xi \to \alpha\; (\xi \in \mathcal{B}) \\ \alpha \square \to \cdot \\ \qquad \to \alpha\; (\alpha \neg \in \mathcal{C}) \end{cases} \qquad \mathfrak{X}_4 : \{ \to \cdot \mid$$

iar algoritmul $\mathfrak{X}_5$ se defineşte prin compoziția algoritmilor $\mathfrak{B}_0$ şi $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 * \mathfrak{X}_3$, adică $\mathfrak{X}_5 = \mathfrak{B}_0 \circ \mathfrak{X}$. Considerînd algoritmul $\mathfrak{M}^{P}_{\mathcal{A}}$ cu schema :

$$\mathfrak{M}^{P}_{\mathcal{A}} : \begin{cases} \alpha \xi \to \alpha \quad (\xi \in \mathcal{A}) \\ \quad \alpha \to \cdot\, P\; (P \in \Omega\,(\mathcal{A})) \\ \qquad \to \alpha \quad (\alpha \neg \in \mathcal{C}), \end{cases}$$

atunci algoritmul $\mathfrak{C}$ se defineşte prin :

$$\mathfrak{C} \simeq (\mathfrak{X}_4 \circ \mathfrak{X}_1) * ((\mathfrak{M}^{P}_{\mathcal{A}} \circ \mathfrak{X}_2) \square \mathfrak{X}_5). \tag{3}$$

Să construim acum un algoritm normal $\widetilde{\mathfrak{C}}$ cu proprietatea :

$$\widetilde{\mathfrak{C}}\,(I^{(n)} * P \square Q) \simeq * \mathfrak{B}_1 (I^{(n)} * P * Q) \square \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}_1 (I^{(n)} * P * Q))\,;\; P \in \Omega\,(\mathcal{A}). \tag{4}$$

Construcția acestuia este imediată, considerînd algoritmii normali $\mathfrak{X}_6$ şi $\mathfrak{X}_7$ definiții prin schemele :

$$\mathfrak{X}_6 : \begin{cases} \square \to \cdot \\ \mathfrak{B}_1 \end{cases} \qquad \mathfrak{X}_7 : \{ \to \cdot\, * \tag{5}$$

Algoritmul $\widetilde{\mathfrak{C}}$ este algoritmul de unificare:

$$\widetilde{\mathfrak{C}} \simeq (\mathfrak{T}_7 \circ \mathfrak{T}_6) \square (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{T}_6). \tag{6}$$

Considerăm acum algoritmul de iterație $\mathfrak{S}$ definit prin:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}\,(I^{(0)} * P) \simeq P \\ &\mathfrak{S}\,(I^{(n+1)} * P) \simeq \mathfrak{S}\,(\mathfrak{S}\,(I^{(n)} * \widetilde{\mathfrak{C}}\,(\mathfrak{S}\,(I^{(n)} * P)))), \end{aligned} \tag{7}$$

unde $P \in \Omega\,(\mathcal{C})$.

În sfîrșit, să considerăm algoritmul normal $\mathfrak{D}$ definit prin

$$\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{T}_1 * * \mathfrak{T}_2 \square (\mathfrak{A} \circ \mathfrak{T}_2) \tag{8}$$

de unde rezultă ușor următoarea proprietate a algoritmului $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{D}\,(I^{(n)} * P) \simeq I^{(n)} * * P \square \mathfrak{A}(P).$$

Cu ajutorul algoritmilor normali construiți mai sus se poate da algoritmul $\mathcal{N}$ care verifică condițiile teoremei, sub forma compoziției algoritmilor $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$, adică:

$$\mathcal{N} \simeq \mathfrak{T}_3 \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D}. \tag{9}$$

Să arătăm acum că algoritmul $\mathcal{N}$ astfel construit, verifică condițiile din teoremă.

Într-adevăr, pentru $n = 0$ avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\,(I^{(0)} * P) &\simeq (\mathfrak{T}_3 \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D})\,(I^{(n)} * P) \simeq \mathfrak{T}_3\,(\mathfrak{S}(\mathfrak{D}(I^{(0)} * P))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3\,(\mathfrak{S}\,(I^{(0)} * * P \square \mathfrak{A}\,(P))) \simeq \mathfrak{T}_3\,(* P \square \mathfrak{A}\,(P)) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{A}\,(P). \end{aligned}$$

ceea ce rezultă din construcția algoritmilor $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$.

Pentru $n = 1$ avem:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}\,(I^{(1)} * P) \simeq (\mathfrak{T}_3 \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D})\,(I^{(1)} * P) \simeq \mathfrak{T}_3\,(\mathfrak{S}\,(\mathfrak{D}\,(I^{(1)} * P))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{S}\,(I^{(1)} * * P \square \mathfrak{A}\,(P))) \simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}\,(\mathfrak{S}\,(I^{(0)} * \widetilde{\mathfrak{C}}\,(\mathfrak{S}\,(I^{(0)} * * P \square \mathfrak{A}\,(P)))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}\,(\mathfrak{S}\,(I^{(0)} * \widetilde{\mathfrak{C}}\,(I^{(0)} * P \square \mathcal{N}\,(I^{(0)} * P)))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}\,(\mathfrak{S}\,(I^{(0)} * \mathfrak{B}_1\,(I^{(0)} * * P * \mathcal{N}\,(I^{(0)} * P)) \square \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}_1\,(I^{(0)} * P * \mathcal{N}\,(I^{(0)} * P)))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}\,(I^{(0)} * \mathfrak{B}_1\,(I^{(0)} * P * \mathcal{N}\,(I^{(0)} * P)) \square \mathcal{N}\,(I^{(0)} * \mathfrak{B}_1\,(I^{(0)} * P * \mathcal{N}\,(I^{0} * P))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(I^{(1)} * P \square \mathfrak{B}_0\,(I^{(0)} * \mathcal{N}\,(I^{(0)} * B_1\,(I^{(0)} * \mathfrak{B}_1\,(I^{(0)} * P * \mathcal{N}\,(I^{(0)} * P))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{B}_0\,(I^{(0)} * \mathcal{N}\,(I^{(0)} * \mathfrak{B}_1\,(I^{(0)} * P * \mathcal{N}\,(I^{(0)} * P)))), \end{aligned}$$

adică $\mathcal{N}(I^{(1)} * P) \simeq \mathfrak{B}_0(I^{(0)} * \mathcal{N}(I^{(0)} * \mathfrak{B}_1(I^{(0)} * P * \mathcal{N}(I^{(0)} * P))))$.

Pe parcursul calculului pentru $n = 1$ am arătat de fapt și următoarea proprietate a algoritmului $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}\,(I^{(1)} * * P \square \mathfrak{A}\,(P)) \simeq I^{(1)} * P \square \mathcal{N}\,(I^{(1)} * P).$$

Presupunem că această relație are loc pentru $n = k + 1$, și să arătăm că ea are loc pentru $n = k + 2$, adică are loc :

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{N}(I^{(k+1)} * P) \simeq \mathfrak{B}_0(I^{(k)} * \mathcal{N}(I^{(k)} * \mathfrak{B}_1(I^{(k)} * P * \mathcal{N}(I^{(k)} * P)))), \\ &\mathfrak{S}(I^{(k+1)} * P) \simeq I^{(k+1)} * P \,\square\, \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P). \end{aligned}$$

Pe baza acestei ipoteze avem :

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(I^{(k+2)} * P) \simeq (\mathfrak{T}_3 \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D})(I^{(k+2)} * P) \simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{S}(I^{(k+2)} * * P \,\square\, \mathfrak{A}(P)))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}(I^{(k+1)} * \widetilde{\mathfrak{C}}(\mathfrak{S}(I^{(k+1)} * * P \,\square\, \mathfrak{A}(P)))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}(I^{(k+1)} * \widetilde{\mathfrak{C}}(I^{(k+1)} * P \,\square\, \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}(\mathfrak{S}(I^{(k+1)} * * \mathfrak{B}_1(I^{(k+1)} * P * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P)) \,\square\, \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1(I^{(k+1)} * P * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P)))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(\mathfrak{C}(I^{(k+1)} * \mathfrak{B}_1(I^{(k+1)} * P * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P)) \,\square\, \mathcal{N}(I^{(k+1)} * \mathfrak{B}_1(I^{(k+1)} * P * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P))))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{T}_3(I^{(k+2)} * P \,\square\, \mathfrak{B}_0(I^{(k+1)} * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * \mathfrak{B}_1(I^{(k+1)} * P * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P)))) \simeq \\ &\simeq \mathfrak{B}_0(I^{(k+1)} * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * \mathfrak{B}_1(I^{(k+1)} * P * \mathcal{N}(I^{(k+1)} * P)))), \end{aligned}$$

adică prima relație din (10) este verificată și ea atrage după sine verificarea celei de-a doua relații pentru $n = k + 2$. Cu aceasta demonstrația teoremei este terminată.

Teorema demonstrată se poate generaliza în felul următor. Să considerăm alfabetul $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A} \cup \mathcal{D} \cup \{*\}$, unde $* \urcorner\in \mathcal{D}$ și $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$. Are loc atunci următoarea teoremă :

TEOREMA 2. *Dacă* $\mathfrak{A}$ *este un algoritm normal dat în alfabetul* $\mathcal{A}$ *iar* $\mathfrak{B}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{B}_m^{(0)}$ *și* $\mathfrak{B}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{B}_m^{(1)}$ *sînt algoritmi normali dați în alfabetul* $\mathcal{B}_1$ *astfel că* $\mathfrak{B}_i^{(1)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *transformă cuvintele din alfabetul* $\mathcal{B}_1$ *în cuvinte din alfabetul* $\mathcal{A}$, *atunci se poate construi un algoritm normal* $\mathcal{N}$ *peste alfabetul* $\mathcal{B}_1$ *astfel ca să fie satisfăcută următoarele proprietăți :*

1. $\mathcal{N}(\Lambda * P) \simeq \mathfrak{A}(P)$

2. $\mathcal{N}(Xd_\mu * P) \simeq \mathfrak{B}_\mu^{(0)}(X * \mathcal{N}(X * \mathfrak{B}_\mu^{(1)}(X * P * \mathcal{N}(X * P))))$,

unde $P \in \Omega(\mathcal{A})$ și $X \in \Omega(\mathcal{D})$.

Demonstrația acestei teoreme necesită demonstrarea prealabilă a existenței unui algoritm de iterație care este asigurat prin următoarea teoremă :

TEOREMĂ DE ITERAȚIE. *Dacă* $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_m$ *sînt algoritmi normali dați în alfabetul* $\mathcal{B}_1$ *și* $\widetilde{\mathfrak{C}}_1, \ldots, \widetilde{\mathfrak{C}}_m$ *sînt algoritmi normali dați în alfabetul* $\mathcal{B}_1$ *astfel că* $\widetilde{\mathfrak{C}}_\mu$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, *transformă cuvintele din alfabetul* $\mathcal{B}_1$ *în cuvinte din alfabetul* $\mathcal{A}$, *atunci există un algoritm normal* $\mathfrak{I}$ *care verifică proprietățile :*

1. $\mathfrak{I}(\Lambda * P) \simeq P$

2. $\mathfrak{I}(Xd_\mu * P) \simeq \mathfrak{C}_\mu(\mathfrak{I}(X * \widetilde{\mathfrak{C}}_\mu(\mathfrak{I}(X * P))))$,

unde $P \in \Omega(\mathcal{A})$ *și* $X \in \Omega(\mathcal{D})$.

Demonstrația teoremei de iterație: Fie $|, \Box \urcorner\in \mathcal{B}_1$ și să considerăm alfabetul $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1 \cup \{|, \Box\}$. Să construim în alfabetul $\mathcal{C}_1$, algoritmul normal $\mathfrak{z}$ cu schema de mai jos:

$$\mathfrak{z}: \begin{cases} |\,\Box\,\xi \to \Box & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \Box\Box\,\xi \to \Box\Box & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \Box\,\xi \to \xi\,\Box\Box & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \Box\Box \to \cdot & \end{cases}$$

care prezintă proprietatea că pentru $n < l(P)$ ($l(P)$ fiind lungimea cuvîntului P), unde $P \in \Omega(\mathcal{B}_1)$, transformă cuvîntul $I^{(n)}\Box P$ în a $n+1$ literă a cuvîntului P.

Să considerăm algoritmii $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_5$ cu proprietățile:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{z}_1\,(I^{(n)}\Box P \Box Q) \simeq I^{(n)}\Box P \\ &\mathfrak{z}_2\,(I^{(n)}\Box Q) \simeq Q \\ &\mathfrak{z}_3\,(I^{(n)}\Box P \Box Q) \simeq Q \\ &\mathfrak{z}_4\,(I^{(n)}\Box P \Box Q) \simeq X \\ &\mathfrak{z}_5\,(I^{(n)}\Box P \Box Q) \simeq P \end{aligned} \tag{11}$$

care au schemele de mai jos:

$$\mathfrak{z}_1: \begin{cases} \alpha| \to |\alpha & \\ \alpha\Box \to \beta & (\beta\urcorner\in \mathcal{C}_1) \\ \beta\xi \to \xi\beta & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \beta\Box\xi \to \beta\Box & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \beta\Box \to \cdot & \\ \to \alpha & (\alpha\urcorner\in \mathcal{C}_1) \end{cases} \qquad \mathfrak{z}_2: \begin{cases} \alpha| \to \alpha & \\ \alpha\Box \to \beta & (\beta\urcorner\in \mathcal{C}_1) \\ \beta\xi \to \xi\beta & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \beta \to \cdot & \\ \to \alpha & (\alpha\urcorner\in \mathcal{C}_1) \end{cases}$$

$$\mathfrak{z}_3: \begin{cases} | \to & \\ \Box\Box \to \cdot & \\ \Box\,\xi \to \Box & (\xi \in \mathcal{B}_1) \end{cases} \qquad \mathfrak{z}_5: \begin{cases} \alpha| \to \alpha & \\ \alpha\Box \to \beta & (\beta\urcorner\in \mathcal{C}_1) \\ \beta\xi \to \xi\beta & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \beta\Box\xi \to \beta\Box & (\xi \in \mathcal{B}_1) \\ \beta\Box \to \cdot & \\ \to \alpha & (\alpha\urcorner\in \mathcal{C}_1) \end{cases}$$

iar $\mathfrak{z}_4 = \mathfrak{M}^X_{\mathcal{D}} \circ \mathfrak{z}_5$, unde $\mathfrak{M}^X_{\mathcal{D}}$ este algoritmul cu schema:

$$\mathfrak{M}^X_{\mathcal{D}}: \begin{cases} \alpha\,\xi \to \alpha & (\xi \in \mathcal{C}_1), \\ \alpha \to \cdot\, X & (X \in \Omega(\mathcal{D})), \\ \to \alpha & (\alpha\urcorner\in \mathcal{C}_1). \end{cases}$$

Pe baza acestor algoritmi să construim algoritmii normali:

$$\mathfrak{B}^{(0)}_{\mu} \simeq \mathfrak{C}_{\mu} \circ \mathfrak{z}_2 \;;\quad \mathfrak{B}^{(1)}_{\mu} \simeq \mathfrak{z}_4 * (\widetilde{\mathfrak{C}}_{\mu} \circ \mathfrak{z}_3) \tag{12}$$

pentru care avem

$$\mathfrak{B}_{\mu}^{(0)}(I^{(n)} \square Q) \simeq \mathfrak{C}_{\mu}(Q)$$

$$\mathfrak{B}_{\mu}^{(1)}(I^{(n)} \square P \square Q) \simeq X * \tilde{\mathfrak{C}}_{\mu}(Q)$$

pentru $P,\ Q \in \Omega(\mathcal{B}_1)$, $X \in \Omega(\mathcal{D})$. Să considerăm algoritmul $\mathfrak{K}_{\mu}$ pentru $\mu = 1, 2, \ldots, m$ cu schema

$$\mathfrak{K}_{\mu} : \begin{cases} d_{\mu} \rightarrow \cdot\, d_{\mu} \\ \xi \rightarrow \qquad (\xi \in \mathcal{C}_1) \end{cases}$$

de unde se vede ușor că :

$$\mathfrak{K}_{\mu}(d_{\mu}) = d_{\mu} \text{ și } \mathfrak{K}_{\mu}(d_{\nu}) = \wedge \qquad \text{pentru } \nu \neq \mu.$$

Cu ajutorul acestora construim algoritmii :

$$(13) \qquad \mathcal{F}_{\mu} = \mathfrak{K}_{\mu} \circ \mathfrak{z} \circ \mathfrak{z}_1, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m$$

De aici rezultă proprietatea :

$$\mathcal{F}_{\mu}(I^{(k)} \square P \square Q) \simeq (\mathfrak{K}_{\mu} \circ \mathfrak{z} \circ \mathfrak{z}_1)(I^{(k)} \square P \square Q) \simeq \mathfrak{K}_{\mu}(\mathfrak{z}(I^{(k)} \square P)) \simeq \mathfrak{K}_{\mu}(\xi^*),$$

unde ξ^* este a $k+1$ literă a cuvîntului P și $k < l(P)$.

Se vede ușor că :

$$\mathcal{F}_{\mu}(I^{(k)} \square P \square Q) \simeq \begin{cases} \wedge \ ; & \xi^* \neq d_{\mu}, \\ d_{\mu} \ ; & \xi^* = d_{\mu}. \end{cases}$$

Să considerăm algoritmii de ramificare $\mathfrak{B}^{(0)}$, $\mathfrak{B}^{(1)}$ ai algoritmilor $\mathfrak{B}_{\mu}^{(0)}$, $\mathfrak{B}_{\mu}^{(1)}$, $\mu = 1, 2, \ldots m$, dirijați după algoritmii $\mathcal{F}_{\mu}$; $\mu = 1, 2, \ldots m$:

$$\mathfrak{B}^{(0)}(P) = \begin{cases} \mathfrak{B}_0^{(0)}(P)\,; & \mathcal{F}_1(P) = \Lambda, \ldots, \mathcal{F}_m(P) = \Lambda \\ \mathfrak{B}_1^{(0)}(P)\,; & \mathcal{F}_1(P) \neq \Lambda,\ \mathcal{F}_2(P) = \Lambda, \ldots, \mathcal{F}_m(P) = \Lambda \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \mathfrak{B}_m^{(0)}(P) & \mathcal{F}_m(P) \neq \Lambda \end{cases}$$

$$\mathfrak{B}^{(1)}(P) = \begin{cases} \mathfrak{B}_0^{(1)}(P)\,; & \mathcal{F}_1(P) = \Lambda, \ldots, \mathcal{F}_m(P) = \Lambda \\ \mathfrak{B}_1^{(1)}(P) : & \mathcal{F}_1(P) \neq \Lambda,\ \mathcal{F}_2(P) = \Lambda, \cdots, \mathcal{F}_m(P) = \Lambda \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \mathfrak{B}_m^{(1)}(P)\,; & \mathcal{F}_m(P) \neq \Lambda \end{cases}$$

unde $P \in \Omega(\mathcal{C}_1)$ iar $\mathfrak{B}_0^{(0)}$, $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ fiind algoritmii oarecare peste alfabetul $\mathcal{C}_1$. Dacă $X \in \Omega(\mathcal{D})$ și $k < l(X)$, iar d_{μ} este a $k+1$ literă a lui X, avem :

$$\mathfrak{B}^{(1)}(I^{(k)} \square X * P \square Q) \simeq X * \tilde{\mathfrak{C}}_{\mu}(Q)$$

$$\mathfrak{B}^{(0)}(I^{(k)} \square Q) \simeq \mathfrak{C}_{\mu}(Q)$$

deoarece $\mathcal{F}_{\mu}(I^{(k)} \square X * P \square Q) = \Lambda$; $\quad \nu \neq \mu$.

Să considerăm algoritmul $\mathfrak{A}^{(0)}$ în alfabetul $\mathcal{B}_1$ definit prin schema

$$\mathfrak{A}^{(0)} : \begin{cases} \alpha\,\xi \to \alpha \quad (\xi \in \mathcal{D}) \\ \alpha * \to \cdot \\ \quad \to \alpha \quad (\alpha \urcorner \in \mathcal{C}_1) \end{cases}$$

adică $\mathfrak{A}^{(0)}(X * P) = P,\ X \in \Omega(\mathcal{D})$.

Există atunci, conform teoremei 1, un algoritm normal $\mathfrak{N}$ peste alfabetul $\mathcal{C}_1$ astfel că:

$$\mathfrak{N}\,(I^{(0)} \square P) \simeq \mathfrak{A}^{(0)}(P)$$

$$\mathfrak{N}\,(I^{(0+1)} \square P) \simeq \mathfrak{B}^{(0)}\,(I^{(n)} \square\ \mathfrak{N}\,(I^{(n)} \square\ \mathfrak{B}^{(1)}\,(I^{(n)} \square P \square\ \mathfrak{N}\,(I^{(n)} \square P))));$$
$P \in \Omega(\mathcal{B}_1)$.

Considerăm acum algoritmii $\mathfrak{z}_6$, $\mathfrak{z}_7$ cu schemele

$$\mathfrak{z}_6 : \begin{cases} * \xi \to * \quad (\xi \in \mathcal{A}) \\ * \to \end{cases} \qquad \mathfrak{z}_7 : \{\, \xi \to | \quad (\xi \in \mathcal{D})$$

pentru care avem:

$$\mathfrak{z}_6\,(X * P) = X; \quad X \in \Omega(\mathcal{D}),\ P \in \Omega(\mathcal{A})$$

$$\mathfrak{z}_7\,(X) = I^{(l(X))}.$$

Atunci algoritmul căutat este dat prin:

$$\mathfrak{T} \simeq \mathfrak{N} \circ ((\mathfrak{z}_7 \circ \mathfrak{z}_6) \square\ \mathfrak{z}_8), \tag{14}$$

unde $\mathfrak{z}_8$ este algoritmul identic peste alfabetul $\mathcal{C}_1$; $\mathfrak{z}_8\,(P) \simeq P$; $P \in \Omega(\mathcal{C}_1)$. Rezultă atunci din (18) că:

$$\mathfrak{T}\,(X * P) \simeq \mathfrak{N}\,(I^{(l(X))} \square X * P); \quad X \in \Omega(\mathcal{D}),\ P \in \Omega(\mathcal{A}).$$

Să arătăm că algoritmul $\mathfrak{T}$ satisface condițiile teoremei de iterație. Într-adevăr,

$$\mathfrak{T}\,(\Lambda * P) \simeq \mathfrak{N}\,(I^{(0)} \square \Lambda * P) \simeq \mathfrak{A}^{(0)}\,(\Lambda * P) \simeq P$$

și

$$\mathfrak{T}\,(Xd_\mu * P) \simeq \mathfrak{N}\,(I^{(l(X)+1)} \square Xd_\mu * P) \simeq \mathfrak{B}^{(0)}\,(I^{(l(X))} \square\ \mathfrak{N}\,(I^{(l(X))} \square\ \mathfrak{B}^{(1)}\,(I^{(l(X))}$$
$$\square Xd_\mu * P \square \mathfrak{N}(I^{(l(X))} \square Xd_\mu * P)))) \simeq \mathfrak{B}^{(0)}(I^{(l(X))} \square \mathfrak{N}(I^{(l(X))} \square X * \widetilde{\mathfrak{C}}_\mu(\mathfrak{T}(X * P)))) \simeq$$
$$\simeq \mathfrak{B}^{(0)}\,(I^{(l(X))} \square\ \mathfrak{T}\,(X * \widetilde{\mathfrak{C}}_\mu\,(\mathfrak{T}\,(X * P)))) \simeq \mathfrak{C}_\mu\,(\mathfrak{T}\,(X * \widetilde{\mathfrak{C}}_\mu\,(\mathfrak{T}\,(X * P)))).$$

deoarece $\mathfrak{T}\,(X * P) \simeq \mathfrak{N}\,(I^{(l(X))} \square Xd_\mu * P)$ datorită proprietății algoritmului $\mathfrak{A}^{(0)}$. Cu aceasta teorema de iterație este terminată.

Pentru demonstrația teoremei 2, să considerăm în alfabetul $\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \cup \{\square\}$ algoritmul $\mathfrak{C}_\mu$ dat prin

$$\mathfrak{C}_\mu(X * R \square Q) \simeq Xd_\mu * P \square \mathfrak{B}_\mu^{(0)}(X * Q), \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{15}$$

unde R, $Q \in \Omega(\mathcal{B}_1)$ iar $P \in \Omega(\mathcal{A})$ și algoritmul $\widetilde{\mathfrak{C}}_\mu$ cu proprietatea

$$\widetilde{\mathfrak{C}}(X * P \square Q) \simeq * \mathfrak{B}_\mu^{(1)}(X * P * Q) \square \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_\mu^{(1)}(X * P * Q)) \tag{16}$$

construcția lor fiind identică cu aceea a algoritmilor $\mathfrak{C}$ și $\widetilde{\mathfrak{C}}$ din demonstrația teoremei 1.

Există atunci, conform teoremei de iterație, algoritmul normal $\mathfrak{S}$ astfel că

$$\begin{aligned} &\mathfrak{S}(\Lambda * P) \simeq P \\ &\mathfrak{S}(Xd_\mu * P) \simeq \mathfrak{C}_\mu(\mathfrak{T}(X * \widetilde{\mathfrak{C}}_\mu \mathfrak{T}(X * P)))), \end{aligned} \tag{17}$$

unde $X \in \Omega(\mathcal{D})$, $P \in \Omega(\mathcal{A})$. Considerînd algoritmii $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{X}_3$ cu proprietățile

$$\mathfrak{D}(X * P) \simeq X * * P \square \mathfrak{A}(P)$$

$$\mathfrak{X}_3(X * P \square Q) \simeq Q$$

pentru $X \in \Omega(\mathcal{D})$, $P \in \Omega(\mathcal{A})$, $Q \in \Omega(\mathcal{B}_1)$, algoritmul căutat este compoziția normală a algoritmilor $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{X}_3 \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D}. \tag{18}$$

Se vede ușor că :

$$\mathfrak{N}(\Lambda * P) \simeq (\mathfrak{X}_3 \circ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{D})(\Lambda * P) \simeq \mathfrak{X}_3(\mathfrak{S}(* * P \square \mathfrak{A}(P))) \simeq \mathfrak{X}_3(* P \square \mathfrak{A}(P)) \simeq \mathfrak{A}(P).$$

Analog se arată că :

$$\mathfrak{N}(Xd_\mu P) \simeq \mathfrak{B}_\mu^{(0)}(X * \mathfrak{N}(X * \mathfrak{B}_\mu^{(1)}(X * P * \mathfrak{N}(X * P))))$$

$$\mathfrak{S}(Xd_\mu * * P \square \mathfrak{A}(P)) \simeq Xd_\mu * P \square \mathfrak{N}(Xd_\mu * P)$$

care demonstrează de fapt complet teorema 2 de recursiune.

Primită la redacție la 6 august 1965

Institutul pedagogic
Oradea

BIBLIOGRAFIE

1. G. Asser, *Zwei Rekursionstheoreme für normale Algorithmen*. Wissenschaftliche Zeit. der Humboldt — Univ. zu Berlin. Math. — Natur Reihe, J G. **IX**, *2* (1959/60).
2. Детловс, *Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций*. Труды математического Института им. ,,Стеклова'', **52** (1953).
3. А. А. Марков, *Теория алгорифмов*. Труды математического Института им. ,,Стеклова'', **42** (1954).
4. А. А. Марков, *Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции*. DANSSER, **90** (1953)
5. Р. Петер, *Рекурсивные функции*. 1954.

ASUPRA PARALELISMULUI VECTORILOR ÎN LUNGUL CURBELOR UNUI SPAȚIU CU CONEXIUNE AFINĂ L_n ȘI FORMULELOR LUI HLAVATY

DE

P. STAVRE
(Craiova)

Se stabilesc cîteva rezultate relative la problema enunțată iar în § 4 se găsesc formulele care dau curburile din [2] și care particularizate duc la formulele lui Hlavaty.

Dacă (C) este o curbă în L_n iar $\mu_1^\lambda(s)$ o familie de direcții pe (C) pentru același parametru afin „s" pe (C) și aceeași familie de direcții $\mu_1^\lambda(s)$, am notat sistemele de invarianți din [3], [2] (K_a) respectiv (X_a) $a = 1,2,\ldots \ldots, n-1$, iar vectorii principali ai familiei cu $(\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda\, \eta_2^\lambda \ldots \eta_n^\lambda)$ respectiv $(\mu_1^\lambda\, \mu_2^\lambda \ldots \mu_n^\lambda)$ și

$$\eta_1^{[\lambda_1}\, \eta_2^{\lambda_2} \ldots \eta_n^{\lambda_n]} \neq 0, \qquad \mu_1^{[\lambda_1}\, \mu_2^{\lambda_2} \ldots \mu_n^{\lambda_n]} \neq 0. \tag{a}$$

Folosind cele două sisteme de vectori (η_i^λ), (μ_i^λ), vom obține noi formule Frenet. Vom nota cu litere grecești, indicii de covarianță respectiv contravarianță și cu litere arabe pe cei de numerotare.

Rezultatele găsite le vom folosi la studiul paralelismului vectorilor în lungul curbelor din L_n.

1. Presupunem că $\prod\limits_{a=1}^{n-1} K_a = \mathrm{ct}\ (\neq 0)$.

S-au stabilit în [3], prin metoda din [1], formulele :

$$t^\lambda = \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{j=1}^{n} a^j\, \eta_j^\lambda$$

$$\frac{\delta \eta_1^\lambda}{\mathrm{d}s} = K_1\, \eta_2^\lambda\ \frac{\delta \eta_p^\lambda}{\mathrm{d}s} = -K_{p-1} \eta_{p-1}^\lambda + K_p\, \eta_{p-1}^\lambda\ \frac{\delta \eta_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{k=1}^{n} b^k\, \eta_k^\lambda, \tag{b}$$

$$p = 1, 2, \ldots, (n-1), \ \ (K_0 = 0).$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 1079–1084, BUCUREȘTI, 1966

Presupunem curba generală în sensul că toți $K_a \neq 0$, δ este operatorul de diferențiere covariantă în (L_n).

Sistemul

$$\eta_i^\lambda \eta_\lambda^j = \delta_\lambda^j, \qquad \lambda_{ij} = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

determină n vectori covarianți (η_λ^i) liniari independenți.

Făcînd construcția

$$\bar{\eta}^n = \left(\varepsilon^n (-1)^{n-1} \Big/ \sum_{a=1}^{n-1} K_a\right) \cdot \eta_\lambda^n \quad \frac{\delta \bar{\eta}_\lambda^p}{\mathrm{d}s} = \varepsilon \bar{\eta}_\lambda^{p-1}, \quad p = n, n-1, \ldots, 2, \tag{1.2}$$

vectorii $(\bar{\eta}_\lambda^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt liniari independenți. Ca atare din :

$$\bar{\eta}_i^\lambda \bar{\eta}_\lambda^j = \delta_i^j, \qquad \lambda_{ij} = 1, 2, \ldots, n \tag{1.3}$$

obținem vectorii contravarianți $(\bar{\eta}_i^\lambda)$ cu $(\bar{\eta}_1^{[\lambda_1} \bar{\eta}_2^{\lambda_2} \ldots \bar{\eta}_n^{\lambda k]} \neq 0$ și

$$\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda = \bar{\eta}_1^\nu$$

adică sînt asociați aceleiași familii de direcții. Folosindu-i obținem noi formule Frenet (vezi [4])

$$\begin{aligned} & t^\lambda = \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}^i \bar{\eta}_i^\lambda \\ & \frac{\delta \bar{\eta}_i^\lambda}{\mathrm{d}s} = \bar{K}_i^1 \bar{\eta}_1^\lambda - \varepsilon \bar{\eta}_{i+1}^\lambda \qquad \frac{\delta \bar{\eta}_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \bar{K}_n^1 \bar{\eta}_1^\lambda, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{1.4}$$

unde $\bar{K}_i^1 = \bar{K}_i^1 \left(K, \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}, \varepsilon\right)$ iar $-\bar{K}_i^1$ sînt soluții ale unui sistem algebric liniar (1.11) [4].

2. Ținînd seama de cele spuse în introducere și presupunînd curba (C) generală și în sensul că între curburile X_a $(a = 1, 2, \ldots, n-1)$ nu mai este dată o anumită relație, cu ajutorul sistemului de vectori $(\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda \mu_2^\lambda \ldots \ldots \mu_n^\lambda)$ și al invarianților X_a legați prin formulele [2] :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{i-1}^{n} c^i \mu_i^\lambda \\ & \frac{\delta \mu_p^\lambda}{\mathrm{d}s} = \mu_{p+1}^\lambda, \ p = 1, 2, \ldots, (n-1), \quad \frac{\delta \mu_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{a=1}^{n-1} X_a \mu^\lambda \end{aligned} \tag{2.1}$$

vom găsi noi formule Frenet. Procedeul este cel indicat în primul paragraf cu deosebirea că în loc de η, $\bar{\eta}$ vom pune μ, $\bar{\mu}$, iar construcția (1.2) o vom alege sub forma :

$$\bar{\mu}_1^n = (-1)^{n-1} \varepsilon^{n-1} \mu_\lambda^n \frac{\delta \bar{\mu}_\lambda^p}{\mathrm{d}s} = \varepsilon \bar{\mu}_\lambda^{p-1}, \ p = n, n-1, \ldots, 2, \ \varepsilon = \pm 1. \tag{2.2}$$

Din

$$\overline{\mu}_i^\lambda \overline{\mu}_\lambda^j = \delta_i^j \qquad \lambda_{ij} = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

obținem vectorii contravarianți (μ_i^λ) cu $\overline{\mu}_1^{[\lambda_1} \overline{\mu}_2^{\lambda_2} \ldots \overline{\mu}_n^{\lambda_n]} \neq 0$ $(\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda = \widetilde{\mu}_1^\lambda)$. Folosindu-i [3] obținem formulele Frenet

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}^i \overline{\mu}_i^\lambda \\ &\frac{\delta\overline{\mu}_i^\lambda}{\mathrm{d}s} = \overline{x}_i^1 \overline{\mu}_1^\lambda - \varepsilon\overline{\mu}_{i+1}^\nu \quad \frac{\delta\mu_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \overline{x}_n^1 \overline{\mu}_1^\lambda, \ i = 1, 2, \ldots, (n-1) \text{ cu } \overline{x}_1^1 = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

unde $\overline{X}_i^1 = \overline{X}_i^1\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \varepsilon\right)$ iar $(-\overline{X}_i)$ sînt bine determinate ca soluții ale unui sistem algebric liniar cu determinant diferit de zero [4].

3. Dacă $V_{(\lambda)}^\lambda = \sum_{a=1}^{n} \mathrm{e}^a/\overline{\mu}_a^\lambda$ este o familie de vectori pe curba (C), s-a stabilit în [2] că paralelismul vectorilor $V^\lambda(s)$ de-a lungul curbei (C) este caracterizat prin sistemul de ecuații diferențiale ordinare:

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^a}{\mathrm{d}s} + \mathrm{e}^{a-1} + \mathrm{e}^n X_a = 0, \ a = 1, 2, \ldots n \text{ cu } \mathrm{e}^0 = 0 \text{ și } x_n = 0. \tag{3.1}$$

În cazul $X_a = \text{ct}$, sistemul devine un sistem liniar cu coeficienți constanți și deci problema determinării paralelismului vectorilor $V(s)$ de-a lungul lui (C) se reduce la operații algebrice. Cum însă formulele (2.1) în cazul unui spațiu Riemannian V_n nu mai coincid cu formulele lui Frenet din acest spațiu, dar acest lucru se întîmplă cu formulele (b), vom folosi pentru studiul paralelismului și formulele (b) cît și altele.

Putem scrie $V^\nu = \sum_{a=1}^{n} c^a \eta_a^\lambda$ iar prin diferențiere covariantă conform (b) obținem

$$\frac{\delta V^\lambda}{\mathrm{d}s} = \Sigma\left(\frac{\mathrm{d}c^a}{\mathrm{d}s} + c^{a-1} K_{a-1} - c^{a+1} K_a + c^n b^a\right)\eta_a^\lambda, \qquad a = 1, 2, \ldots n. \tag{3.2}$$

Paralelismul vectorilor se caracterizează deci prin

$$\frac{\mathrm{d}c^a}{\mathrm{d}s} + c^{a-1} K_{a-1} - c^{a+1} K_a + c^n b^a = 0, \qquad a = 1, 2, \ldots n. \tag{3.3}$$

În cazul unui spațiu V_n avem $b^i = 0$, $i = 1, \ldots, n-2, n$ și $b^{n-1} = -K_{n-1}$. Deci în acest caz în (3.3) vor apare curburile $K_1 K_2 \ldots K_{n-2}$ și torsiunea K_{n-1}. Așadar în cazul L_n putem folosi (3.1) sau (3.3) iar în cazul unui V_n, folosim ecuațiile (3.3). Avem

TEOREMA 1. *Dacă* $K_a = \text{ct}$, $a = 1, 2, \ldots n-1$, $b^i = \text{ct}$, $i = 1, \ldots n$ *problema studiului paralelismului vectorilor de-a lungul lui* (C) *se reduce la o problemă algebrică prin* (*3.3*).

Cum

$$\sum_{k=j}^{n-1} A^j_k x_k = A^j_{n+1}\left(k, \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}, b_i\right), \text{ unde } A_k = A^j_k\left(k, \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}, \varepsilon\right) \text{ (vezi [3])},$$

$$j = 1, 2, - (n-1)$$

sînt elementele matricei de trecere de la reperul $R^n(\mu)$ la reperul $R^n(\eta)$, obținem ușor :

TEOREMA 2. *Dacă studiul paralelismului prin* (*3.3*) *duce la operații algebrice, atunci și studiul prin* (*3.1*) *duce la operații algebrice.*

Cum matricea de trecere $\|A^j_k\|$, j, $k = 1, 2, \ldots n$, este nesingulară iar elementele sale sînt bine determinate, obținem

TEOREMA 3. *Cunoscînd soluțiile sistemului* (*3.3*) *putem găsi direct soluțiile sistemului* (*3.1*) *și reciproc.*

În cazuî cînd X_a sau K_a, b^i nu sînt constanți dar $\prod_{a=1}^{n-1} K_a = \text{ct}$ ($\neq 0$), (3.3)poate fi simplificat folosind formulele (1.4).

Scriind $V^\lambda = \sum_{a=1}^{n} l^a \overline{\eta}^\lambda_a$ și diferențiind covariant conform (1.4) obținem :

TEOREMA 4. *Paralelismul vectorilor* $V^\lambda(s)$ *de-a lungul lui* (C) *cînd* $\prod_{a-1}^{n-1} K_a = \text{ct}$ ($\neq 0$) *se caracterizează prin*

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}l^1}{\mathrm{d}s} + \sum_{p=1}^{n-1} l^p \overline{K}_p + l^n \overline{K}_n = 0 \\ (3.4)\quad &\frac{\mathrm{d}l^a}{\mathrm{d}s} - \varepsilon\, l^{a-1} = 0 \qquad a = 2, 3, \ldots n \ (\varepsilon = \pm 1). \end{aligned}$$

Se observă că în acest caz $\prod_{a=1}^{n-1} K_a = \text{ct} \neq 0$ putem folosi și sistemul (3.3) la care am adăugat această condiție și evident este mai complicat decît (3.4) care are deja ($n-1$) ecuații diferențiale ordinare liniare cu coeficienți constanți.

Ținînd seama de felul cum sînt determinați $\overline{K}$ în [4] avem :

TEOREMA 5. *Dacă* (3.3) *e un sistem de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți, atunci și* (3.4) *are coeficienți constanți* (*adică prima ecuație*). În acest caz sistemul (3.4) este și mai simplu.

Formulele (2.2) sînt valabile în cazul unei curbe generale (în sensul specificat în paragraful 2) din L_n. Folosindu-le în acest caz, o să obținem un sistem de formă (3.4) să-i zicem (3.4′), unde l^a vor fi acum componentele vectorului V^λ în reperul $R^n(\overline{\mu}^\lambda_i)$. Așadar, studiul paralelismului vectorilor $V^\lambda(s)$ de-a lungul unei curbe din L_n se reduce la aceste cazuri mari :

1. Dacă $K_a = \mathrm{ct}$, $b^k = \mathrm{ct}$ (și deci $X_a = \mathrm{ct}$) putem folosi sistemele (3.1), (3.3), (3.4) sau (3.4′) amintit.

2. Dacă K_a, b^k nu sînt constanți (la fel și X_a) dar $\prod\limits_{a=1}^{n-1} K_a = \mathrm{ct} \neq 0$, atunci putem folosi sistemul (3.3) la care adăugăm această condiție, sau sistemul mai simplu (3.4). La fel în cazul cînd numai $K_a = \mathrm{ct}$ dar b^k nu sînt constanți.

Sistemele (3.3), (3.4) se pot folosi în cazurile respective și pentru spații V_n.

3. Dacă $X_a = \mathrm{ct}$, $a = 1, 2, \ldots, n-1$, putem aplica (3.1) sau (3.4′).

În cazul general se pot folosi sistemele (3.1), (3.3), (3.4′). Studiul lor se face conform teoriei sistemelor de ecuații diferențiale ordinare.

4. În [2] s-au dat formulele (2.1) din prezenta Notă în cazul unei familii de direcții, care în cazul particular $\mu_1^\gamma = \dfrac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}$ duc la rezultatele lui Hlavaty [1], caz în care x_α sînt date de :

$$x_\alpha = \frac{\mu_\alpha}{\mu}, \tag{4.1}$$

unde μ_α, μ sînt determinanții ale căror linii sînt de forma

$$\left(\mu_1^\alpha\, \mu_2^\alpha \ldots \mu_{\alpha-1}^\alpha \frac{\delta\mu_n^\alpha}{\mathrm{d}s}\, \mu_{\alpha+1}^\alpha \ldots \mu_n^\alpha\right) \text{ respectiv } \left(\mu_1^\alpha\, \mu_2^\alpha \ldots \mu_{\alpha-1}^\alpha\, \mu_\alpha^\alpha\, \mu_{\alpha+1}^\alpha \ldots \mu_n^\alpha\right). \tag{4.2}$$

În cazul general (2.1) s-ar putea stabili că x_α sînt date tot prin niște relații de forma (4.1), folosind metoda lui Hlavaty, dar ținînd seama de condițiile date.

Vom da acum o altă metodă pentru cazul (2.1) și deci în particular pentru cazul $\mu_1^\lambda = \dfrac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}$ al lui Hlavaty. În [3] pentru același parametru afin „s" pe (C) și familie de direcții μ_1^λ s-au considerat sistemele de invarianți x_α, K_α și vectorii principali (η_i^λ), (μ_i^λ) ai familiei $\mu_1^\lambda = \eta_1^\lambda$ cu :

$$\eta_1^{[\lambda_1}\, \eta_2^{\lambda_2} \ldots \eta_n^{\lambda_n]} \neq 0 \cdot \mu_1^{[\lambda_1}\, \mu_2^{\lambda_2} \ldots \mu_n^{\lambda_n]} \neq 0. \tag{a}$$

S-au stabilit relațiile : (vezi [3])

$$\sum_{k=j}^{n-1} A_k^j x_k = A_{n+1}^j,\ j = 1, 2, \ldots n-1 \text{ cu } \det \|A_k^j\| = \prod_{p=1}^{n} A_p^p \neq 0 \tag{4.3}$$

$$\mu_k^\lambda = \sum_{j=1}^{k} A_k^j\, \eta_j^\lambda,\ k = 1, 2, \ldots n,\ \frac{\delta\mu_n^\lambda}{\mathrm{d}s} = \sum_{j=1}^{n} A_{n+1}^j\, \eta_j^\lambda \tag{4.4}$$

$$\mu_1^{[\lambda_1}\, \mu_2^{\lambda_2} \ldots \mu_n^{\lambda_n]} = \prod_{p=1}^{n} A_p^p\, \eta_1^{[\lambda_1}\, \eta_2^{\lambda_2} \ldots \eta_n^{\lambda_n]}. \tag{4.5}$$

Din (1.3) obținem :

$$x_\alpha = \frac{\Delta}{\prod\limits_{p=1}^{n} A_p^p}, \tag{4.6}$$

unde Δ este determinantul sistemului (4.3) în care înlocuim coloana α prin coloana termenilor liberi. Din relația (a) rezultă că determinantul η al matricei $\| \eta_k^\lambda \|$, $\lambda, k = 1, 2, \dots n$, este diferit de zero. Amplificînd membrul drept din (4.6) cu acest determinant, obținem :

$$x_\alpha = \frac{\begin{vmatrix} A_1^1 \eta_1^1 \sum\limits_{j=1}^{2} A_2^j \eta_j^1 \dots \sum\limits_{j=1}^{\alpha-1} A_{\alpha-1}^j \eta_j^1 \sum\limits_{j=1}^{n} A_{n+1}^j \eta_j^1 \sum\limits_{j=1}^{\alpha+1} A_{\alpha+1}^j \eta_j^1 \dots \sum\limits_{j=1}^{n} A_n^j \eta_j^1 \\ A_1^1 \eta_1^2 \sum\limits_{j=1}^{2} A_2^j \eta_j^2 \dots \sum\limits_{j=1}^{\alpha-1} A_{\alpha-1}^j \eta_j^2 \sum\limits_{j=1}^{n} A_{n+1}^j \eta_j^2 \sum\limits_{j=1}^{\alpha+1} A_{\alpha+1}^j \eta_j^2 \dots \sum\limits_{j=1}^{n} A_n^j \eta_j^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_1^1 \eta_1^\alpha \sum\limits_{j=1}^{2} A_2^j \eta_j^\alpha \dots \sum\limits_{j=1}^{\alpha-1} A_{\alpha-1}^j \eta_j^\alpha \sum\limits_{j=1}^{n} A_{n+1}^j \eta_j^\alpha \sum\limits_{j=1}^{\alpha+1} A_{\alpha+1}^j \eta_j^\alpha \dots \sum\limits_{j=1}^{n} A_n^j \eta_j^\alpha \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_1^1 \eta_1^n \sum\limits_{j=1}^{2} A_2^j \eta_j^n \dots \sum\limits_{j=1}^{\alpha-1} A_{\alpha-1}^j \eta_j^n \sum\limits_{j=1}^{n} A_{n+1}^j \eta_j^n \sum\limits_{j=1}^{\alpha+1} A_{\alpha+1}^j \eta_j^n \dots \sum\limits_{j=1}^{n} A_n^j \eta_j^n \end{vmatrix}}{\prod\limits_{p=1}^{n} A_p^p \cdot \eta}$$

Ținînd seama de (4.4) și (4.5), se vede că numărătorul este chiar determinantul (μ_α), iar numitorul este derminantul (μ) în cazul respectiv. Așadar avem formulele :

$$x_\alpha = \frac{\mu_\alpha}{\mu}, \tag{4.7}$$

care în cazul particular $\mu_1^\lambda = \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s}$ sînt chiar formulele lui Hlavaty. Am găsit astfel numai în baza formulelor stabilite în [3] formulele lui Hlavaty.

Primită la redacție la 12 iulie 1965 *Institutul pedagogic-Craiova*

BIBLIOGRAFIE

1. V. Hlavaty, *Les courbes de la variété générale à n dimensions*. Mémorial des Sci. Math., **LXIII** (1934).
2. R. Miron, *Familii de direcții în spațiul cu conexiunea afină*. St. cerc. științ., Iași, **2** (1963).
3. P. Stavre, *Asupra invarianților unei familii de direcții într-un spațiu cu conexiunea afină L_n*. St. cerc. științ., Iași, **2** (1963).
4. P. Stavre, *Asupra formulelor lui Trenet pentru curbe din L_n*. St. cerc. mat., **15**, 10 (1964).
5. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*, vol. I, București, 1963, p. 163.

MARIA-TERESA CALAPSO, *Sulla geometria non euclidea iperbolica* (*Asupra geometriei neeuclidiene hiperbolice*) Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, Tomo V, 1960—61, pag. 95—180.

De curînd biblioteca Institutului de matematică Bucureşti a primit colecţia Revistei matematice ce apare la Messina sub conducerea profesorului Renato Calapso, fiul lui Pasquale Calapso ale cărui lucrări sînt citate în cartea lui G. Ţiţeica, *Teoria reţelelor*.

Prof. Renato Calapso este el însuşi un geometru bine cunoscut şi mulţi din matematicienii noştri au avut cinstea să fie invitaţi de prof. Calapso la simpozioanele pe care le organizează periodic în oraşul Siracuza, în memoria marelui matematician grec Arhimede. Printre numeroasele articole publicate în Rendiconti di Messina, este şi acela considerat în titlul acestei recenzii al Mariei-Teresa Calapso, fiica prof. Calapso. Considerăm să facem o recenzie a acestui articol care însumează aproape 100 de pagini, deci are proporţiile unei cărţi şi conţine o expunere completă a geometriei neeuclidiene iperbolice, cu mijloace care o fac accesibilă unui mare număr de cititori. Se ştie că geometria iperbolică, deci prima geometrie neeuclidiană, a fost creată independent de doi mari geometri la începutul secolului trecut (1826—1831), de N. Lobacevski, profesor la Universitatea din Kazan, şi de Janos Bolyai, inginer militar la Timişoara.

Trebuie să adăugăm că expunerile pe care Lobacevski şi Bolyai le-au dat geometriei noi create de ei sînt şi astăzi un domeniu greu de urmărit şi de aceea a trebuit să treacă mulţi ani pentru ca noua geometrie să se impună întregii lumi matematice. Un pas înainte pe această cale a fost făcut de matematicianul italian E. Beltrami în 1872 care a arătat că geometria planului neeuclidian iperbolic se poate realiza pe o suprafaţă numită pseudosferă, şi mai ales de Henri Poincaré, care a arătat că se obţine o geometrie plană iperbolică dacă se consideră un semiplan $(x, y > 0)$ în care se dă ca metrică

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \tag{1}$$

unde R este o constantă, $k = -1/R^2$ fiind curbura spaţiului. În acest caz dreptele planului iperbolic, deci geodezicile metricei (1), sînt date de semicercuri ortogonale axei x $(y=0)$ şi din semidrepte perpendiculare la această axă.

Plecînd de la această reprezentare a lui Poincaré, autoarea expune, fără a se preocupa de consideraţii de ordin istoric, în mod simplu şi elegant diferitele proprietăţi ale geometriei iperbolice plane precum şi unele generalizări ale lor în spaţiul cu trei sau mai multe dimensiuni.

Vom menţiona aici că şi în ţara noastră, unde geometria neeuclidiană a fost deseori în atenţia geometrilor români, au fost considerate asemenea reprezentări. Ne putem referi la lucrarea regretatului prof. S. Sanielevici intitulată : *Geometria lui Lobacevski dedusă din expresia elementului liniar*, Buletinul ştiinţific, tomul III, 1952, p. 1—39, în care se pleacă de la elementul liniar

$$ds^2 = \mathrm{ch}^2 y \, dx^2 + dy^2 \tag{2}$$

în care caz geodezicile sînt definite de ecuații de forma

$$\text{th}\, y = a\,\text{ch}\, x + b\,\text{sh}\, x, \tag{2'}$$

unde a, b sînt constante. De asemenea ne putem referi la cărțile de geometrie neeuclidiană ale prof. N. Mihăileanu sau la cartea apărută recent a lui C. Teleman și referent ,,Geometria euclidiană, geometrii neeuclidiene și teoria relativității'', Edit. științifică, 1965, în care metrica se ia sub forma

$$ds^2 = e^{-\frac{2y}{R}} dx^2 + dy^2 \tag{3}$$

și atunci geodezicile sînt sau drepte $x = c$ sau cvasicercuri

$$(x - m)^2 + R^2 e^{\frac{2y}{R}} = n^2,$$

unde m, n sînt constante. Atît în cazul (2) considerat de S. Sanielevici, cît și în cazul (3) metrica este definită și regulată în întreg planul euclidian al variabilelor (x, y), deci pentru orice valori finite ale variabilelor (x, y), ceea ce este important din punctul de vedere al intuiției noastre.

Expunerea Mariei-Teresa Calapso ne arată însă că modelul lui Poincaré al planului iperbolic, deci cazul metricei (1), are proprietăți geometrice remarcabile, care permit o tratare completă și unitară a problemei fără calcule anevoioase. De altfel autoarea introduce procedee de demonstrații noi, ce-i permit să demonstreze cu ușurință diferitele proprietăți ale planului iperbolic. În adevăr, să considerăm o dreaptă p oarecare a semiplanului $y > 0$ definit de (1), deci un semicerc ortogonal axei x. Utilizînd faptul că introducînd numărul complex $z = x + iy$, orice transformare de forma

$$z' = \frac{az + b}{cx + d}, \tag{4}$$

unde a, b, c, d sînt constante, transformă planul iperbolic în el însuși, dreapta p poate fi considerată ca semiaxa y $(x = 0)$. Dîndu-se o altă dreaptă r, perpendiculară lui p, rezultă că r este un semicerc $x^2 + y^2 = a^2$. Fiind date deci două drepte r, r' perpendiculare la aceeași dreaptă p, ele nu se întîlnesc niciodată, căci în cazul nostru dreapta r' va fi dată de o ecuație $x^2 + y^2 = a'^2$ deci r, r' sînt cercuri concentrice.

Dîndu-se un punct P pe axa y se obține în mod foarte simplu formula lui Lobacevski

$$e^{\frac{\delta}{R}} = \text{cotg}\, \frac{\alpha}{2}, \tag{5}$$

unde δ este distanța neeuclidiană de la punctul P la dreapta r și α este unghiul de paralelism al paralelei duse din P la dreapta r. Numind cercuri ale lui Gauss, în planul iperbolic, acelea pentru care distanța iperbolică δ la un punct fix (x_0^*, y_0^*) de la un punct variabil (x, y) este o constantă şi ținînd seama de formula

$$\text{sh}\, \frac{\delta}{2R} = \frac{d}{2\sqrt{y\, y_0^*}},$$

unde d este distanța euclidiană, se obține pentru definiția cercurilor lui Gauss ecuația

$$(x - x_0^*)^2 + (y - y_0^*)^2 = 4\, y\, y_0^*\, \text{sh}^2 \frac{\rho}{2R},$$

unde ρ este o constantă. Rezultă deci că cercurile lui Gauss sînt cercuri euclidiene avînd ca centru $C\,(x_0, y_0)$ și rază r definite de formulele

$$x_0 = x_0^*, \quad y_0 = y_0^*\left(1 + 2\,\mathrm{sh}^2\frac{\rho}{2R}\right)$$

$$r = 2\,\mathrm{sh}\frac{\rho}{2R}\,\mathrm{ch}\frac{\rho}{2R}\,y_0^*.$$

Cum avem evident $y_0^* > 0$, rezultă că, invers, la orice cerc euclidian cu $y_0 > r > 0$, corespunde un cerc al lui Gauss.

În mod analog se obțin alte rezultate ale geometriei iperbolice folosind, cum spune autoarea în introducere, ,,ca raționament de cercetare geometria euclidiană și primele noțiuni de geometrie analitică, astfel că orice proprietate a geometriei neeuclidiene iperbolice apare ca un ansamblu de proprietăți de geometrie euclidiană, fapt care face să considerăm geometria euclidiană ca actuală și de neînlocuit''.

G. Vrănceanu

T. LUPESCU, A. ROȘU, M. CERCHEZ, *Programarea matematică cu aplicații militare.* Editura Militară, București, 1965, 448 p.

Cartea de față se adresează unui cerc larg de cititori în special militarilor care doresc să se familiarizeze cu unele capitole moderne ale cercetării operaționale. Ea are un vădit caracter didactic, căutînd să prezinte cîteva aspecte ale programării matematice : programarea liniară (inclusiv problema transporturilor), programarea liniară în numere întregi, programarea liniară parametrică, programarea neliniară, programarea liniară stocastică, programarea dinamică. Avîndu-se în vedere strînsa legătură între problemele de programare liniară și principiul minimax s-au introdus și elemente de teoria jocurilor matriciale.

Cartea este împărțită în 6 capitole.

Capitolul 1, ,,Noțiuni de algebră liniară'', are un caracter auxiliar, introductiv, tratînd vectori și spații vectoriale, matrici, sisteme de ecuații liniare, inecuații liniare. Capitolul 2, ,,Problema transporturilor'', este consacrat modelului matematic corespunzător și metodelor sale de rezolvare. Capitolul 3, ,,Metoda simplex'', se ocupă de problema generală a programării liniare, aspecte privind dualitatea, metoda simplex de rezolvare și variante ale ei. Capitolul 4, ,,Aplicațiile metodei simplex'', trece în revistă probleme clasice de programare liniară, care servesc la ilustrarea teoriei. Capitolul 5, ,,Programarea liniară'' și teoria jocurilor caută să prezinte legătura intimă dintre aceste domenii aparent diferite. Capitolul 6, ,,Alte tipuri de programare matematică'', trece succint în revistă unele aspecte privind programarea liniară parametrică, programarea neliniară, programarea liniară stocastică, programarea dinamică.

Textul este ilustrat de numeroase aplicații și exemple, unele provenind de la probleme cu caracter militar.

R. Theodorescu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1883

1966 AUG 5

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcțiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
ROMULUS CRISTESCU și GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicații ale teoriei distribuțiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.
N. DINCULEANU, **Integrarea pe spații local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
SILVIU GUIAȘU și RADU THEODORESCU, **Teoria Matematică a informației**, 1966, 227 p., 8,25 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice și hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.
SOLOMON MARCUS, **Gramatici și automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferențială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă. Teoria corespondenței**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor și ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
S. STOÏLOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.
P.P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, 1966, 660 p., 38 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 7, P. 943—1088, BUCUREȘTI, 1966

I. P. I. – c. 3421

43 831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

8

TOMUL 18

1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

ACAD. **MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;**
ACAD. GR. C. MOISIL — **redactor responsabil adjunct;**
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. **G. VRĂNCEANU;**
ACAD. **CAIUS IACOB;**
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, **Bucureşti**, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa : **Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.**

F 762 ~~1269~~

TOM. 18, NR. 8
1966

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

SUMAR

Pag.

RADU ROȘCA, Asupra congruențelor pseudosferice cu pînze focale în corespondență echiarie 1091
L. LIVOVSCHI, O problemă de sinteză a automatelor finite . . 1097
E. MUNTEANU, Analiza logică a algoritmilor (I) 1113
EMIL TOKACI, Asupra ecuațiilor mecanicii analitice pentru cazul sistemelor materiale percutate 1129
B. JANKÓ și A. GAIDICI, Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale prin metoda lui Cebîșev 1139
B. JANKÓ și V. POP, Asupra metodei iperbolelor tangente aplicate la rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare 1147
V. I. ISTRĂȚESCU, Asupra operatorilor regularizabili 1155
VALENTIN POPESCU, Integrarea în raport cu măsuri cu valori în spații vectoriale topologice oarecare 1159
LIVIU I. DINU, Asupra mișcării lente, axial simetrice, a unui fluid vîscos într-un semispațiu racordat la un canal perpendicular pe frontiera sa 1181
I. MATEI, Asupra unor densități asociate unui spațiu A_3 cu torsiune 1185
ALEXANDRU I. ȘCHIOP, Legătura dintre problema variațională de bază pentru funcționalele pătratice și problema minimei abateri de la resurse mărginite 1193
M. DRAGOMIRESCU și C. BERGTHALER, Asupra continuității optimului unui program liniar 1197
ȘERBAN SĂNDULESCU, Considerații asupra mișcărilor cvasiconice 1201
C. I. ISPAS, Extensiunile Riemann simplu armonice $\mathcal{A}_2$ și spațiile local euclidiene A_2 1209
GHEORGHE LUSZTIG, Construcția fibrărilor universale peste poliedre oarecare 1215

CRONICĂ ȘTIINȚIFICĂ 1221

RECENZII 1223

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1089-1228, BUCUREȘTI, 1966

ASUPRA CONGRUENȚELOR PSEUDOSFERICE CU PÎNZE FOCALE ÎN CORESPONDENȚĂ ECHIARIE

DE

RADU ROȘCA

Se pune în evidență o clasă de congruențe pseudosferice depinzînd de o funcție arbitrară de un argument și a căror pînze focale se corespund și prin egalitatea curburilor mijlocii.

Fie $[\mathcal{L}]$ o congruență rectilinie oarecare, $T \equiv \{\mathbf{A}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *reperul canonic* atașat fiecărei raze și ω_1^3, ω_2^3 Pfaffieni de bază ai deplasării infinitezimale a lui T. Desemnînd cu 2φ unghiul focal corespunzător razei $\mathcal{L}$ și cu $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ Pfaffieni desfășurabilelor lui $[\mathcal{L}]$, avem relațiile [1] :

$$\bar{\omega}_1 = \omega_2^3 \cos\varphi - \omega_1^3 \sin\varphi, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2^3 \cos\varphi + \omega_1^3 \sin\varphi. \tag{1}$$

Dacă 2ρ este distanța focală, se știe că formele metrice fundamentale ale celor două suprafețe focale $(\mathbf{F})$ și $(\mathbf{F}')$ sînt respectiv

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi} + B^2\right)(\bar{\omega}_1)^2 + 2BC\,\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 + C^2(\bar{\omega}_2)^2, \\ ds'^2 &= \left(\frac{4\rho^2}{\sin^2 2\varphi} + B'^2\right)(\bar{\omega}_2)^2 + 2B'C'\,\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 + C'^2(\bar{\omega}_1)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

unde B, C, B' și C' sînt funcții de cei doi parametri esențiali ai lui T.

În cazul cînd congruența $[\mathcal{L}]$ este pseudosferică ($\rho = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ și $B = C'$, $B' = C$), ω^3 și ω_1^2 au ca expresii

$$\omega^3 = \alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3, \quad \omega_1^2 = \frac{\sin 2\varphi}{2\rho}(-\alpha\omega_1^3 + \beta\omega_2^3), \tag{3}$$

unde s-a notat

$$\alpha = (B' - B)\sin\varphi, \quad \beta = (B + B')\cos\varphi. \tag{4}$$

ST. CERC. MAT. ,TOM. 18, NR. 8, P. 1091–1096, BUCUREȘTI, 1966

Acestea fiind reamintite şi desemnînd cu $[\mathcal{L}_p]$ o congruenţă pseudosferică oarecare, ne propunem să căutăm dacă există congruenţe $[\mathcal{L}_p]$ ale căror suprafeţe focale să fie într-o *corespondenţă echiarie* (equiareal mapping [2]).

Dacă însemnăm cu $\mathrm{d}\,\Sigma$ şi $\mathrm{d}\,\Sigma'$ elementele de arie corespunzătoare lui (**F**) şi (**F**′), condiţia de mai sus se traduce prin

$$|\mathrm{d}\,\Sigma| = |\mathrm{d}\,\Sigma'| \tag{5}$$

şi acest gen de corespondenţă pentru suprafeţele focale ale unei congruenţe $[\mathcal{L}]$ am mai întîlnit-o în studiul congruenţelor ∞ ciclice [3].

Cum putem mereu presupune forma metrică a reprezentării sferice a lui $[\mathcal{L}_p]$ redusă la forma ortogonală, se poate scrie

$$\omega_1^3 = \alpha^*\,\mathrm{d}u\,, \quad \omega_2^3 = \beta^*\,\mathrm{d}v \tag{6}$$

şi ţinînd seama de (1) şi (2) precum şi de $B = C'$, $B' = C$ se găseşte că egalitatea (5) se reduce la

$$B = \pm\, B'.$$

Luînd drept primă ipoteză $B = B'$, adică $\alpha = 0$, vom avea de considerat sistemul de patru ecuaţii liniare

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \rho \operatorname{cotg} \varphi\, \omega_2^3\,, \\ \omega^2 &= \rho \operatorname{tg} \varphi\, \omega_1^3\,, \\ \omega^3 &= \beta\, \omega_2^3\,, \\ \omega_1^2 &= \frac{\sin 2\varphi}{2\rho}\, \omega_2^3\,, \end{aligned} \tag{7}$$

unde primele două sînt, cum se ştie [1], satisfăcute pentru orice reper canonic. Dacă adunăm ultimele două ecuaţii (7) şi ţinem seama de ecuaţiile de structură ale grupului euclidian,

$$D\,\omega^j = [\omega^k\, \omega_k^j]\,, \quad D\,\omega_i^j = [\omega_i^k\, \omega_k^j]$$

obţinem prin diferenţiere exterioară

$$\left[\mathrm{d}\beta + \frac{\beta^2 \sin^2 \varphi + \rho^2}{\rho} \operatorname{cotg} \varphi\, \omega_1^3\,,\ \omega_2^3\right] = 0\,. \tag{8}$$

Este uşor de constatat că sistemul (S) format de ecuaţiile (7) şi (8) este închis şi utilizînd notaţia cunoscută, avem $r = 5$ (numărul formelor necunoscute, adică ω^1, ω^2, ω^3, ω_1^2 şi $\mathrm{d}\beta$), $s = 4$ (număr caracteristic de ordin zero) şi $s_1 = 1$ (număr caracteristic de ordin unu). Aşadar sistemul (S) este *în involuţie* şi congruenţele $[\mathcal{L}_p]$ de tipul considerat şi pe care le vom nota $[\mathcal{L}_p^*]$, există şi depind *de o funcţie arbitrară de un argument*. Dacă scriem

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \rho\, \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{F}' = \mathbf{A} - \rho\, \mathbf{e}_3$$

se deduce ușor din ecuațiile deplasării lui T, ecuațiile deplasărilor reperelor ortonormate τ și τ' atașate respectiv suprafețelor (**F**) și (**F**′) și introducînd, cu Finikov, Pfaffieni Ω_j^i, avem în primul rînd

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
d\mathbf{F} &= \Omega_1 \mathbf{E}_1 + \Omega_2 \mathbf{E}_2 \\
d\mathbf{E}_1 &= \Omega_1^2 \mathbf{E}_2 + \Omega_1^3 \mathbf{E}_3 \\
d\mathbf{E}_2 &= -\Omega_1^2 \mathbf{E}_1 + \Omega_2^3 \mathbf{E}_3 \\
d\mathbf{E}_3 &= -\Omega_1^3 \mathbf{E}_1 - \Omega_2^3 \mathbf{E}_2
\end{aligned}
$$

cu

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_1 \cos\varphi - \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi .$$

Dar în cazul considerat formele Ω^1, Ω^2, Ω_1^3, Ω_2^3 au următoarele expresii :

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
&\Omega_1 = \beta\,\omega_2^3, \quad \Omega_2 = \frac{2\rho}{\sin 2\varphi}\,(\omega_2^3 \cos\varphi - \omega_1^3 \sin\varphi) \\
&\Omega_1^3 = -\,(\omega_2^3 \cos\varphi + \omega_1^3 \sin\varphi), \quad \Omega_2^3 = \beta\,\frac{\sin 2\varphi}{2\rho}\,\omega_2^3
\end{aligned}
$$

de unde deducem că multiplicatorii a, b și c care, conform teoremei lui Cartan, figurează în relațiile

$$\Omega_1^3 = a\Omega_1 + b\Omega_2, \quad \Omega_2^3 = b\Omega_1 + c\Omega_2$$

au valorile

$$(11) \qquad a = -\frac{2\cos\varphi}{\beta}, \quad b = \frac{\sin 2\varphi}{2\rho}, \quad c = 0 .$$

De asemenea, pentru suprafața focală (**F**′) pentru care vectorii $\mathbf{E}'_k$ reperului τ' sînt dați de

$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{E}'_2 = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \quad \mathbf{E}'_3 = -\,\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi ,$$

formele corespunzătoare Ω'_1, Ω'_2, $\Omega_1'^3$, $\Omega_2'^3$ au ca expresii

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
&\Omega'_1 = \beta\omega_2^3, \quad \Omega'_2 = \frac{2\rho}{\sin 2\varphi}\,(\omega_2^3 \cos\varphi + \omega_1^3 \sin\varphi) \\
&\Omega_1'^3 = -\,(\omega_2^3 \cos\varphi - \omega_1^3 \sin\varphi), \quad \Omega_2'^3 = \frac{\beta \sin 2\varphi}{2\rho}\,\omega_2^3 .
\end{aligned}
$$

de unde se deduce

$$(13) \qquad a' = -\frac{2\cos\varphi}{\beta}, \quad b' = \frac{\sin 2\varphi}{2\rho}, \quad c' = 0 .$$

Dar, după cum se știe, curbura totală K și cea mijlocie H a unei suprafețe (din spațiul euclidian E_3) fiind date de formulele

$$K = ac - b^2, \quad H = a + c$$

deducem imediat din (11) și (13) că în cazul $\alpha = 0$, (**F**) și (**F**′) se corespund prin egalitatea curburilor totale și a celor mijlocii (în cazul unei congruenţe pseudosferice generale, se ştie că se corespund numai curburile totale). În aceeaşi ipoteză mai deducem

$$[\Omega_1\,\Omega_2] = \frac{\rho\beta}{\sin\varphi}\,[\omega_1^3\,\omega_2^3] = -\,[\Omega_1'\,\Omega_2'],$$

cu alte cuvinte avem

$$d\,\Sigma = -\,d\,\Sigma'$$

şi acest tip de corespondenţă echiarie o vom numi-o *sinistrorsum* pentru a o distinge de cea *dextrorsum* definită de

$$d\,\Sigma = d\,\Sigma'.$$

Dacă se consideră acum ipoteza $B = -\,B'$ (sau $\beta = 0$), printr-un calcul analog se găseşte că congruenţa $[\mathfrak{L}_p^*]$ corespunzătoare depinde şi ea de o funcţie de un argument, dar curburile mijlocii ale lui (**F**) şi (**F**$'$) sînt egale şi de semn contrar pe cînd în schimb corespondenţa echiarie este de tipul dextrorsum.

Pe de altă parte, Cartan a studiat [4] cuplurile de suprafeţe în corespondenţă punctuală care conservă liniile de curbură şi curburile principale şi pe care le vom numi *cupluri C*; suprafeţele unui asemenea cuplu depinzînd de şase funcţii de un argument. Este acum suficient să ne reamintim că pentru o congruenţă pseudosferică oarecare $[\mathfrak{L}_p]$, liniile de curbură se corespund pe cele două suprafeţe focale, pentru a formula următorul rezultat. *Congruenţele pseudosferice pentru care există o corespondenţă echiarie între suprafeţele focale, depind de o funcţie (arbitrară) de un argument şi dacă această corespondenţă este de tip sinistrorsum, cele două suprafeţe focale formează un cuplu C.*

2. Vom termina această Notă prin determinarea congruenţelor $[\mathfrak{L}_p^*]$ de tip sinistrorsum care să prezinte şi caracterul Ribaucour, adică desfăşurabilele lui $[\mathfrak{L}_p^*]$ să traseze pe suprafaţa mijlocie (**A**) o reţea conjugată. Ecuaţiile deplasării lui T fiind

$$(14)\qquad \begin{aligned} d\mathbf{A} &= \omega_2^3\,\rho\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\mathbf{e}_1 + \omega_1^3\,\rho\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathbf{e}_2 + \beta\,\omega_1^3\,\mathbf{e}_3\\ d\mathbf{e}_1 &= \beta\,\omega_2^3\,\frac{\sin 2\varphi}{2\rho}\,\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\,\mathbf{e}_3\\ d\mathbf{e}_2 &= -\,\beta\,\omega_2^3\,\frac{\sin 2\varphi}{2\rho}\,\mathbf{e}_1 + \omega_2^3\,\mathbf{e}_3\\ d\mathbf{e}_3 &= -\,\omega_1^3\,\mathbf{e}_1 - \omega_2^3\,\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

deducem în primul rînd că un vector **N** normal lui (**A**) este de forma

$$\mathbf{N} = \beta\,\mathbf{e}_1 - \rho\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\mathbf{e}_3$$

şi apoi prin diferenţierea lui **N** şi prin introducerea derivatelor invariante $\beta_{,1}$, $\beta_{,2}$ ale lui β în raport cu ω_1^3 şi ω_2^3 se obţin pentru coeficienţii formei

$$d\mathbf{A}\cdot d\mathbf{N} = D\,(\omega_1^3)^2 + 2\,D'\,\omega_1^3\,\omega_2^3 + D''\,(\omega_2^3)^2$$

(care este vizibil proporțională cu forma metrică exterioară a lui (**A**)), următoarele valori

$$D = 0\,, \quad D' = \beta_{,1} + \beta\,(1 + \sin^2\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi\beta^2 + \rho\,\mathrm{cotg}\,\varphi, \quad D'' = \beta_{,2}\,.$$

Condiția de anulare a formei polare [1]

$$D\,\omega_1^3(d)\,\omega_1^3(\delta) + D'\,\{\omega_1^3(d)\,\omega_2^3(\delta) + \omega_1^3(\delta)\,\omega_2^3(d)\} + D''\,\omega_2^3(d)\,\omega_2^3(\delta)$$

ne dă așadar

$$D'' = \beta_{,2} = 0$$

sau ținînd seama de (6),

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{d}\beta = \beta_{,1}\,\omega_1^3 = \alpha^*\,\beta_{,1}\,\mathrm{d}u\,.$$

Pe de altă parte, obținem din (6) prin diferențiere exterioară

$$D\,\omega_1^3 = -\frac{\alpha_v^*}{\alpha^*\,\beta^*}\,[\omega_1^3\,\omega_2^3]\,, \quad D\,\omega_2^3 = \frac{\beta_u^*}{\alpha^*\,\beta^*}\,[\omega_1^3\,\omega_2^3]$$

și deoarece avem prin ipoteză $\omega_1^2 = \frac{\sin 2\varphi}{2\rho}\,\omega_2^3$, cu ajutorul ecuațiilor de structură găsim

$$\alpha_v^* = 0\,, \quad \frac{\beta_u^*}{\beta^*} = \frac{\alpha^*\,\beta}{2\rho}\,.$$

Rezultă de aici prin diferențierea exterioară a lui (15) că β *este funcție numai de u* și din (8) deducem

$$\text{(15)}' \qquad \mathrm{d}\beta + \frac{\beta^2\sin^2\varphi + \rho^2}{\rho}\,\alpha^*\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\mathrm{d}u = 0$$

de unde printr-o schimbare de parametri astfel ca $\alpha^* = 1$, găsim în definitiv pentru β ecuația imediat integrabilă de forma

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u} = c_1\,\beta^2 + c_2 \qquad (c_1,\ c_2 = \text{const.})$$

Vedem așadar că, în cazul unei congruențe $[\mathcal{L}_p^*]$ tip Ribaucour, sistemul (S) se reduce la sistemul (7) de ecuații liniare Pfaff care este complet integrabil deoarece prin diferențiere exterioară nu se introduce nici o ecuație nouă.

În fine, introducînd vectori unitari $\overline{\mathbf{E}}_k$ și Pfaffieni $\overline{\Omega}_1$, $\overline{\Omega}_2$ definiți de

$$\text{(16)} \qquad \mathbf{e}_1 = f(\rho\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\overline{\mathbf{E}}_2 + \beta\,\overline{\mathbf{E}}_3),\ \mathbf{e}_3 = f(\beta\,\overline{\mathbf{E}}_2 - \rho\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,\overline{\mathbf{E}}_3),\ \mathbf{e}_2 = \overline{\mathbf{E}}_1$$

$$\text{(16)}' \qquad \overline{\Omega}_1 = \rho\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\omega_1^3, \quad \overline{\Omega}_2 = \frac{\omega_2^3}{f}, \quad \left(f^2 = \frac{1}{\rho^2\,\mathrm{cotg}^2\,\varphi + \beta^2}\right)$$

putem scrie

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \overline{\Omega}_1\,\overline{\mathbf{E}}_1 + \overline{\Omega}_2\,\overline{\mathbf{E}}_2\,.$$

Diferențiind pe (16), și utilizînd ecuațiile (14) și (15)′ (unde s-a înlocuit $\alpha^* \mathrm{d}u$ cu ω_1^3), se găsește

$$\overline{\Omega}_1^3 = -f \operatorname{cotg}^2 \varphi\, \overline{\Omega}_1 - f^2 \beta^2 \frac{\sin 2\varphi}{2\rho}\, \overline{\Omega}_2$$

$$\overline{\Omega}_2^3 = -f^2 \beta^2 \frac{\sin 2\varphi}{2\rho}\, \overline{\Omega}_2$$

și prin urmare cele două curburi ale lui (**A**) sînt

$$\overline{K} = -\frac{\beta^4 \sin 2\varphi}{4\rho^2 (\beta^2 + \rho^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi)^2}, \quad \overline{H} = -\frac{\operatorname{cotg}^2 \varphi}{\sqrt{\beta^2 + \rho^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}}$$

și (**A**) este vizibil o suprafață W.

Este de altfel ușor de văzut că forma metrică fundamentală a lui (**A**) este cea a unei suprafețe de revoluție. Într-adevăr, se deduce din (16)′ și ținînd seama de (6)

$$(\mathrm{d}\mathbf{A})^2 = \alpha^{*2} \rho^2 \operatorname{tg}^2 \varphi\, (\mathrm{d}u)^2 + \frac{\beta^{*2}}{f^2} \mathrm{d}v^2 .$$

Dar α^* fiind, cum am văzut, funcție numai de u, putem, printr-o schimbare de parametri, să punem

$$\alpha^* \rho \operatorname{tg} \varphi = 1$$

și cum $\overline{K}$ este și el funcție numai de u, această calitate decurge și pentru β^*. Putem deci scrie pe $(\mathrm{d}\mathbf{A})^2$ sub forma bine cunoscută

$$(\mathrm{d}\mathbf{A})^2 = \mathrm{d}u^2 + U^2 \mathrm{d}v^2 \quad (U = \text{funcție numai de } u)$$

care confirmă afirmația de mai sus.

Datorită acestei forme a lui $(\mathrm{d}\mathbf{A})^2$, ar fi desigur interesant să se studieze congruențele de contact arbitrar deformabile [5] care se pot asocia la înfășurătoarele de sfere admițînd pe (**A**) drept deferentă.

Primită la redacție la 30 martie 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. S. P. Finikow, *Theorie der Kongruenzen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
2. O. I. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*. Addison-Wesley Comp. Massachusetts U.S.A., 1961.
3. R. Roșca, *Sur les congruences ∞ cycliques du type* (ω). Acad. royale de Belgique 5e Série, 1965.
4. E. Cartan, *Des systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.
5. P. Vincensini, *Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes des sphères*. Ann. Ec. Norm., **LXI**, *2* (*3*).

O PROBLEMĂ DE SINTEZĂ A AUTOMATELOR FINITE

DE

L. LIVOVSCHI

Se studiază problema sintezei unui automat finit în cazul cînd elementele de comandă nu sînt precizate.

1. INTRODUCERE

În problema sintezei unui automat se presupun date semnalele de comandă (sau elementele de comandă) și semnalele la ieșire (sau elementele executive). Sinteza automatului constă în alegerea semnalelor intermediare (sau a elementelor intermediare) și deducerea formulelor structurale ale circuitelor.

Destul de frecvent se pune problema sintezei unui automat dacă se cunosc numai semnalele la ieșire sau execuțiile automatului. În acest caz, în afară de alegerea elementelor intermediare și deducerea formulelor structurale ale circuitelor, mai este necesară și alegerea elementelor de comandă. În lucrarea de față studiem modul în care se rezolvă această problemă de sinteză. Ne ocupăm de automate constituite din relee electromagnetice și comandate cu ajutorul butoanelor, cheilor și a comutatorilor. Pentru alte tipuri de automate problema se poate trata în mod similar.

Pentru reprezentarea funcționării automatelor, utilizăm grafurile [1]. Arcele grafurilor sînt notate în origine cu valorile variabilei Z care descrie *starea internă* a automatului, adică starea releelor intermediare. Extremitățile arcelor sînt notate cu valorile variabilei K care descrie *comenzile*, adică starea elementelor de comandă. Valorile lui K și Z sînt luate în același interval de timp N. Rezultă că arcele grafului reprezintă stările automatului, adică elementele produsului cartezian $(K \times Z)_N$.

În extremitățile arcelor mai sînt notate valorile lui Z la momentul $N + 1$ și ale lui W (variabila care descrie *execuțiile* sau starea releelor executive) la momentul N (se neglijează întîrzierea cu care se schimbă

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1097–1111, BUCUREȘTI, 1966

starea elementelor executive). Din figura 1 se deduce că arcele grafului reprezintă argumentele iar nodurile grafului valorile funcţiilor

$$Z_{N+1} = f(K_N, Z_N), \quad W_N = g(K_N, Z_N). \tag{1}$$

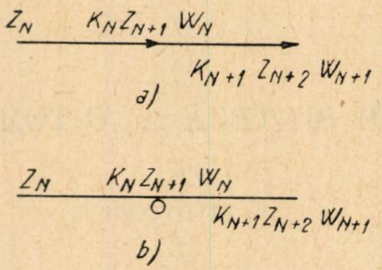


Fig. 1

Dacă sub o comandă K_N starea internă a automatului şi starea ieşirilor lui nu se schimbă, se obţine un arc închis pe care-l vom reprezenta printr-un mic cerc (fig. 1*b*).

Mai reamintim că un automat se numeşte *în doi timpi* dacă o schimbare a comenzilor provoacă schimbarea stării cel mult a unui releu intermediar al automatului. Dacă schimbarea comenzilor poate provoca schimbarea succesivă a stării mai multor relee intermediare, automatul se numeşte *în mai mulţi timpi.*

Nodurile grafului unui automat în doi timpi sînt origini şi extremităţi ale unor arce închise care reprezintă *stări stabile* ale automatului. Tot stabile sînt şi stările cărora le corespund arce notate cu aceleaşi valori ale lui Z în origine şi extremitate. Stările automatului cărora le corespund arce notate în origine şi extremitate cu valori distincte ale lui Z sînt *nestabile.* În graful unui automat în mai mulţi timpi există şi noduri în care nu se închid arce. Valorile lui Z din asemenea noduri reprezintă *stări interne nestabile.* Amintim cu această ocazie că o stare internă se numeşte stabilă dacă ea nu se schimbă decît dacă se schimbă comenzile automatului. În caz contrar starea internă este *nestabilă.* În mod analog o stare K_N Z_N a automatului este *stabilă* sau *nestabilă* după cum ea poate dura un timp oricît de mare sau durata ei este limitată.

2. DETERMINAREA VALORILOR DISTINCTE ALE VARIABILEI K

Considerăm pentru început automatele în doi timpi. Automatele în mai mulţi timpi vor fi discutate mai tîrziu.

Presupunem că programul automatului este dat sub formă de propoziţiuni care exprimă modul în care se succed valorile variabilei W.

Acest program poate fi transcris sub formă de graf. Nodurile acestui graf sînt notate cu valorile succesive ale variabilei W (fig. 2). Este posibil ca în graful automatului să existe unele noduri notate cu aceeași valoare a lui W. Vom conveni să identificăm două asemenea noduri dacă nu se precizează că ele trebuie să fie distincte. În caz contrar, vom nota în mod diferit valorile corespunzătoare ale lui W. În acest mod va rezulta un graf în care nu există perechi de noduri notate cu aceleași valori ale variabilei W.

După ce graful automatului a fost construit, notăm nodurile lui cu valori distincte ale variabilelor K și Z. Pentru fiecare nod i construim expresia

$$i = K^i (Z^{i_1}, Z^{i_2}, \dots, Z^{i_{n_i}}, Z^i) \tag{2}$$

unde $Z^{i_1}, Z^{i_2}, \dots, Z^{i_{n_i}}, Z^i$ sînt valorile lui Z din originile arcelor convergente în nodul i. Se vede ușor că expresia i dă toate stările K^i_N Z^i_N ale automatului pentru care variabila W are valoarea notată în nodul i.

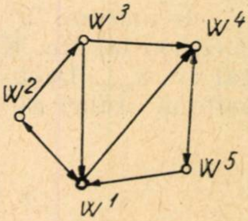


Fig. 2

Comparînd expresiile i corespunzătoare tuturor nodurilor automatului, deducem inegalitățile :

$$\begin{aligned} &K^p (Z^{p_1}, Z^{p_2}, \dots, Z^{p_{n_p}}, Z^p) \neq \\ &\neq K^r (Z^{r_1}, Z^{r_2}, \dots, Z^{r_{n_r}}, Z^r) \neq \\ &\neq \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \neq \\ &\neq K^s (Z^{s_1}, Z^{s_2}, \dots, Z^{s_{n_s}}, Z^s). \end{aligned} \tag{3}$$

Inegalitățile (3) exprimă faptul că argumentele funcției g din (1) sînt distincte pentru valorile distincte ale lui W. Semnalele corespunzătoare sînt fie distincte, fie identice, dar în acest din urmă caz sînt notate în mod diferit și le considerăm tot distincte. Sistemul de inegalități (3) va fi notat (I).

Considerăm acum o valoare Z^p a lui Z și identificăm expresiile (2) din (I) în care apare această valoare. Fie o pereche de asemenea expresii. Deducem că valorile corespunzătoare ale lui K, fie ele K^r și K^s, sînt diferite. Procedînd în mod analog cu toate valorile lui Z, vom deduce un sistem de inegalități între valorile lui K pe care-l vom nota (I').

Trecem acum la determinarea numărului minim de valori distincte ale variabilei K. Cunoașterea acestui minim permite construirea unui automat cu număr redus de elemente de comandă. Asemenea automate sînt de obicei preferabile. Pentru găsirea minimului căutat, din sistemul (I') se deduc mai întîi mulțimile de cîte două valori ale lui K care pot fi egale între ele. Vom nota aceste mulțimi cu M^{ij}. Determinăm apoi mulțimile M^{ijk} de cîte trei valori egale ale lui K. Pentru aceasta este necesar să existe mulţimile M^{ij}, M^{ik}, M^{ki}. În mod analog determinăm mulţimile de cîte patru valori egale ale lui K (dacă există) ş.a.m.d.

Din sistemul de mulţimi obţinut eliminăm mulţimile de cîte $n-1$ valori egale care au servit la construirea mulţimilor de cîte n valori egale. Sistemul de mulţimi obţinut va fi notat (M^i). Aceste mulţimi conţin împreună toate valorile lui K. Pentru determinarea numărului minim $n_{\min}$ de mulţimi M^i care conţin împreună toate valorile lui K, se aplică procedeul lui Mc. Kluskey [3]. Numărul minim de valori ale lui K este egal cu $n_{\min}$. Dacă o valoare a lui K apare în două sau mai multe mulţimi, atunci ea se poate repartiza pe rînd fiecăreia dintre ele.

3. ALEGEREA ELEMENTELOR DE COMANDĂ

Presupunînd alese valorile lui K în modul arătat mai sus, confundăm nodurile grafului automatului notate cu aceleaşi valori ale lui K. Graful astfel obţinut se numeşte *graful redus al comenzilor* şi va fi notat G_K.

Fie acum mai multe elemente de comandă $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Pentru fiecare element putem construi un graf în care nodurile reprezintă stările ieşirilor elementului considerat iar arcele unesc două noduri reprezentînd stări vecine. Menţionăm că două stări se numesc vecine dacă dintr-una din ele se poate trece în cealaltă prin acţionarea asupra intrărilor elementului de comandă studiat. Grafurile construite în modul indicat se numesc *grafuri reduse* ale elementelor de comandă.

Pe figurile 3 a), b) şi c) sînt arătate grafurile reduse ale unui buton, cheie cu trei poziţii şi comutator cu patru poziţii.

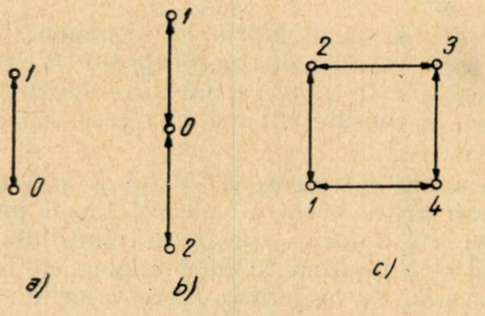


Fig. 3

Fiind date grafurile reduse g_{R1} şi g_{R2} a două elemente de comandă se poate construi *graful produs* $g_{R1} \times g_{R2}$ [1], [4]. Modul în care se face această construcţie se deduce uşor din figura 4, unde este arătat graful produs al grafurilor din figurile 3 a) şi b). Mai multe elemente de comandă pot fi utilizate pentru realizarea comenzilor unui automat dacă graful produs al grafurilor reduse al acestor elemente conţine ca subgraf graful redus al comenzilor G_K. Se verifică ușor că un buton și o cheie cu trei poziții nu pot fi utilizate pentru comanda unui automat avînd graful G_K din figura 5 a). Dimpotrivă, cele două elemente de comandă de mai sus pot fi utilizate pentru comanda automatului avînd graful G_K din figura 5 b).

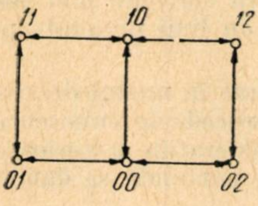


Fig. 4

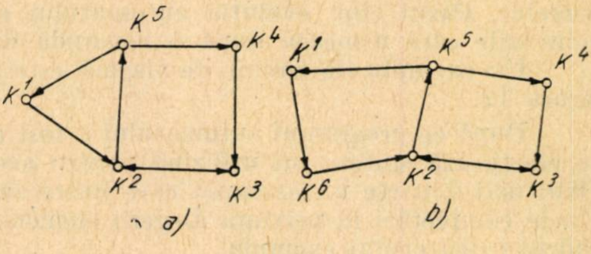


Fig. 5

Se vede ușor că problema alegerii comenzilor se reduce la problema construirii de asignări care să satisfacă condiția tehnică de bună funcționare. Problema asignării nu are soluție generală, dar există cîteva procedee universale de asignare date de D. A. Huffman care pot fi utilizate. Menționăm însă că orice asemenea asignare va conține în general mai multe comenzi decît este necesar și din acest motiv programul automatului va trebui refăcut. De exemplu dacă pentru graful din figura 5 a) se utilizează asignarea din figura 4 și presupunînd că am luat $K^1 = 11$, $K^2 = 00$, $K^3 = 02$, $K^4 = 12$, $K^5 = 10$, va mai trebui completat programul automatului cu specificarea comportării lui sub comanda $K^6 = 01$.

O asignare care permite construirea de automate comod de manipulat este arătată pe figura 6, unde s-a considerat cazul particular cînd numărul comenzilor distincte este $n = 4$. Fiecare comandă asupra automatului constă în acționarea unui buton după care urmează eliberarea lui.

Procedînd în modul descris vom obține un program de funcționare în care vor exista în general (după cum am văzut mai sus) comenzi pentru care execuțiile nu sînt precizate. Pentru evitarea unor evoluții nedorite în cazul cînd s-ar da unele dintre comenzile neprecizate, este necesar să se precizeze stările ieșirilor automatului pentru toate comenzile care urmează după o comandă dată.

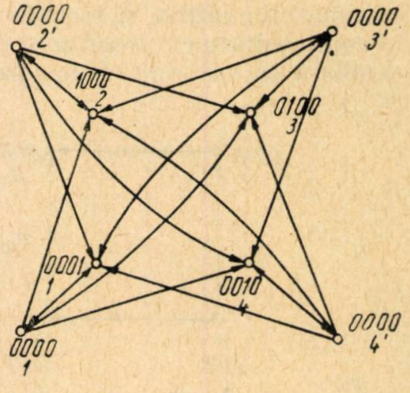


Fig. 6

Deoarece în felul acesta automatul se complică, este preferabilă semnalizarea comenzilor nedorite (greșite) cu ajutorul unui element executiv de semnalizare (de exemplu un bec). În exemplul tratat mai jos am considerat numai asemenea soluții. Comenzile pentru care trebuie conectat semnalul de alarmă sînt notate cu semnul !. Comenzile greșite sînt reprezentate de acele stări vecine ale unei comenzi corecte care nu sînt comenzi corecte. Pentru fiecare comandă greșită am presupus că execuțiile rămîn aceleași ca și pentru comanda anterioară (care este o comandă corectă). Cazul cînd evoluția automatului este precizată pentru toate comenzile care urmează după o comandă dată, este cercetat mai jos. Un exemplu de circuit de alarmă este arătat cu linii punctate pe figura 12.

După ce programul automatului a fost completat în modul descris, se efectuează sinteza lui utilizînd pentru aceasta procedeele cunoscute. Dăm mai departe un exemplu care ilustrează considerațiile anterioare. Unele completări în privința alegerii elementelor de comandă se dau în cadrul următorului exemplu.

4. EXEMPLU

Un motor electric este echipat cu patru relee M_s, M_d, F_s, F_d care execută următoarele operații. Releele M_s și M_d comutează înfășurările motorului pentru rotația în sens orar și antiorar. Releele F_s și F_d comandă două frîne, prima pentru frînarea motorului atunci cînd el se rotește în sens orar, iar a doua pentru frînarea motorului atunci cînd el se rotește în sens antiorar. Se cere să se construiască un automat care să asigure comanda acestui motor.

Cele patru relee M_s, M_d, F_s, F_d sînt elemente executive ale automatului căutat și trebuie acționate în timpul funcționării motorului în conformitate cu programul ilustrat pe figura 7, unde am presupus deocamdată că variabila K are patru valori distincte.

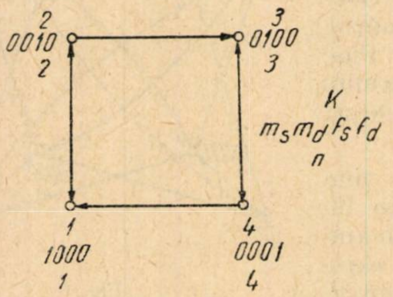


Fig. 7

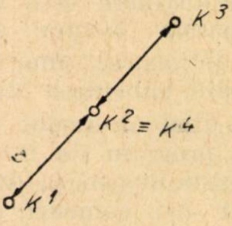


Fig. 8

Inegalitățile (I) sînt :

$$K^1(Z^1, Z^2, Z^4) \neq K^2(Z^1, Z^2) \neq \tag{4}$$
$$\neq K^3(Z^2, Z^3, Z^4) \neq K^4(Z^3, Z^4).$$

Inegalitățile (I') sînt :

$$K^1 \neq K^2,\ K^1 \neq K^3,\ K^1 \neq K^4,\ K^2 \neq K^3,\ K^3 \neq K^4. \tag{5}$$

Din inegalitățile (5) deducem mulțimile de valori ale lui K care pot fi egale

$$K^1,\ K^2 \sim K^4,\ K^3, \tag{6}$$

unde semnul $\sim$ înseamnă ,,poate fi egal''.

Graful redus al comenzilor este arătat pe figura 8.

Dăm mai departe cîteva soluții ale problemei

Soluția 1. Din examinarea grafului din figura 8 deducem că pentru comanda automatului studiat poate fi utilizată o cheie cu trei poziții avînd graful redus din figura 3 b). Revenind la expresiile (4) și omițînd pentru simplificarea scrierii literele K și Z, obținem :

$$\begin{aligned} 1 &= 1\,(1,\ 2,\ 4),\\ 2 &= 2\,(1,\ 2),\\ 3 &= 3\,(2,\ 3,\ 4),\\ 4 &= 2\,(3,\ 4). \end{aligned} \tag{7}$$

Comparînd între ele aceste expresii deducem

$$Z^1 \sim Z^2 \neq Z^3 \sim Z^4,$$

de unde rezultă că este necesar un releu intermediar. Notînd acest releu cu X, obținem pentru automatul căutat graful final de pe figura 9. Menționăm că numim *graf final*, graful care reprezintă evoluția unui automat pentru care se cunosc toate elementele lui.

Pe figura 9 am notat cu a variabila care descrie starea cheii de comandă. Procedînd în mod obișnuit, obținem circuitele din figura 10.

Soluția 2. Cele trei valori distincte ale lui K pot fi realizate și cu ajutorul a două butoane A și B. Luînd $K^1 = 00$, $K^2 = 10$, $K^3 = 11$ și completînd programul automatului pentru comanda $K^4 = 01$, se obține graful din figura 11.

Inegalitățile (3) sînt în acest caz (omitem literele)

$$2 = 10\,(1,\ 2),\ 4 = 10\,(3,\ 4),\ 5 = 01\,(1,\ 5),\ 6 = 01\,(3,\ 6). \tag{8}$$

Pentru valorile lui Z deducem inegalitățile

$$Z^1 \sim Z^2 \neq Z^3 \sim Z^4,\ Z^1 \sim Z^5 \neq Z^3 \sim Z^6.$$

Din aceste inegalități rezultă :

$$Z^1 \sim Z^2 \sim Z^5 \neq Z^3 \sim Z^4 \sim Z^5$$

și prin urmare este suficient un singur releu intermediar. Notînd acest releu X și efectuînd sinteza automatului se obțin circuitele din figura 12.

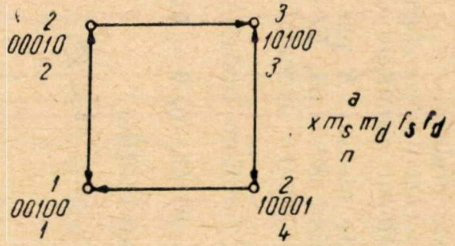

2
00010
2
3
10100
3
1
00100
1
2
10001
4
a
x m_s m_d f_s f_d
n

Fig. 9

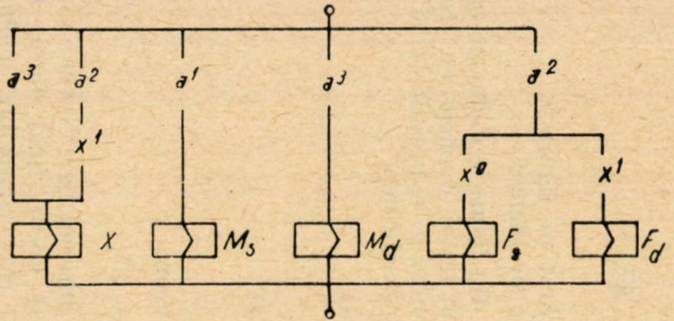

a^3
a^2
x^1
a^1
a^3
a^2
x^0
x^1
X
M_s
M_d
F_s
F_d

Fig. 10

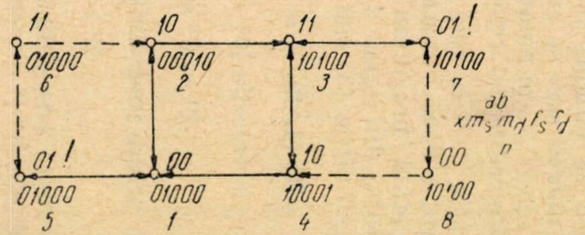

11
10
11
01!
01000
6
00010
2
10100
3
10100
7
01!
00
10
00
01000
5
01000
1
10001
4
10'00
8
ab
x m_s m_d f_s f_d
n

Fig. 11

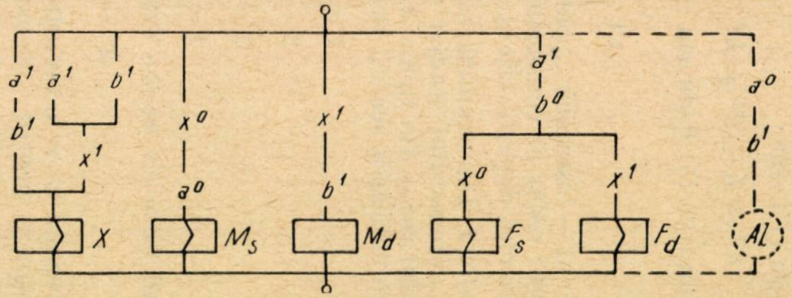

a^1
a^1
b^1
b^1
x^1
x^0
a^0
x^1
b^1
a^1
b^0
x^0
x^1
a^0
b^1
X
M_s
M_d
F_s
F_d
AL

Fig. 12

Soluția 3. Evident că se pot considera distincte toate valorile lui K. În acest caz pentru comanda automatului studiat se poate folosi un comutator rotativ avînd graful redus din figura 3 c). Funcționarea automatului este atunci descrisă prin graful din figura 13. La fel ca mai sus deducem

$$Z^1 \sim Z^2 \sim Z^5 \neq Z^3 \sim Z^4 \sim Z^5$$

și este suficient un singur releu intermediar. Circuitele sînt arătate pe figura 14. Cu a^1, a^2, a^3, a^4 sînt notate contactele comutatorului de comandă A.

Soluția 4. În cazul $K^2 \neq K^4$ dacă pentru asignarea comenzilor se utilizează două butoane A și B, se obține graful de pe figura 15. Circuitele se pot obține direct din cele de pe figura 14, înlocuind pe a^1, a^2, a^3, a^4 cu $a^\circ\, b^\circ$, $a^1\, b^\circ$, $a^1\, b^1$, $a^\circ\, b^1$. Ele sînt arătate pe figura 16.

Dacă se compară soluțiile precedente, se constată că automatele corespunzătoare nu sînt la fel de comod de comandat. În cazul automatelor comandate prin butoane, unele comenzi constau în acționarea butoanelor și menținerea acestei acționări. Această împrejurare constituie evident un inconvenient care poate fi înlăturat dacă se înlocuiesc butoanele prin chei cu două poziții. Automate comod de comandat se obțin dacă se utilizează asignări de tipul arătat pe figura 6.

Să considerăm cazul cînd se utilizează trei butoane de comandă A, B, C, astfel încît (v. fig. 8) să avem :

$$K^1 = 010, \quad K^2 = 100, \quad K^3 = 001. \tag{9}$$

Urmează acum completarea programului cu precizarea comportării automatului pentru comenzi greșite. În cazul de față vom considera comenzi greșite numai comenzile care constau din acționarea unui singur buton, deoarece acționarea concomitentă a două butoane este puțin probabilă iar pe de altă parte considerarea ca greșite și a altor comenzi complică destul de mult structura automatului. În aceste presupuneri graful automatului este arătat pe figura 17, iar circuitele pe figura 18. Menționăm că această soluție este indicată în [3].

Soluția 6. O soluție asemănătoare cu cea precedentă se obține cu patru butoane A, B, C și D dacă luăm

$$K^1 = 1000, \quad K^2 = 0001, \quad K^3 = 0010, \quad K^4 = 0100. \tag{10}$$

Completînd programul automatului cu precizarea comportării lui în cazul comenzilor greșite, se obține graful din figura 19 și circuitele din figura 20.

Din compararea soluțiilor precedente rezultă că cele mai simple automate se obțin în cazul cînd numărul de stări diferite ale elementelor de comandă este mic, deoarece în acest caz scade numărul de comenzi greșite. Menționăm că dacă ar exista certitudinea că nu se dau comenzi greșite, s-ar putea obține automate simple cu comandă directă luînd un număr de butoane egal cu numărul de relee executive, astfel încît fiecare releu executiv să fie acționat de alt buton. O asemenea soluție elimină însă complet avantagiile automatizării și evident că nu poate fi acceptată.

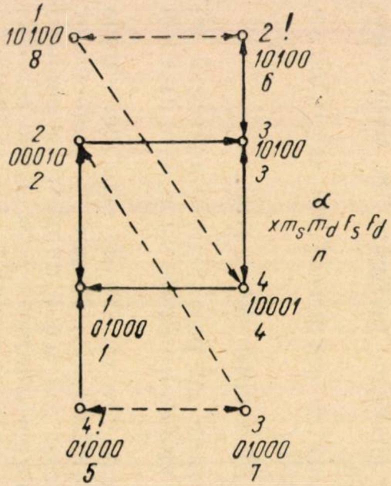

1
10100
8
2 !
10100
6
2
00010
2
3
10100
3
α
$x m_s m_d f_s f_d$
n
1
01000
1
4
10001
4
4!
01000
5
3
01000
7

Fig. 13

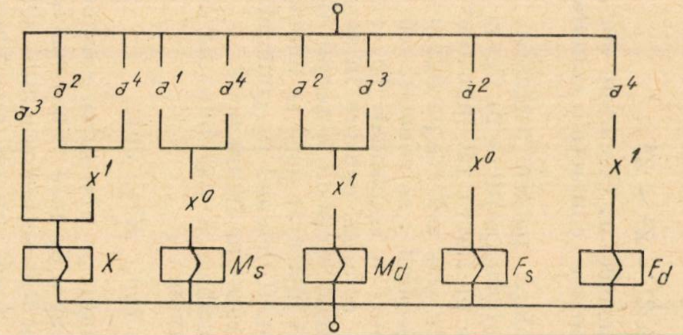

a^3
a^2
a^4
a^1
a^4
a^2
a^3
a^2
a^4
x^1
x^0
x^1
x^0
x^1
X
M_s
M_d
F_s
F_d

Fig. 14

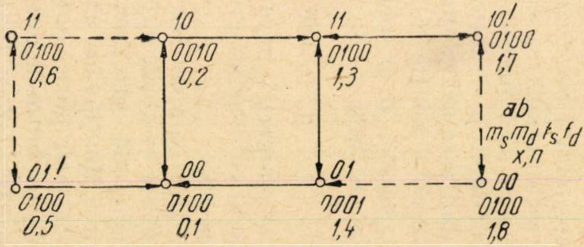

11
0100
0,6
10
0010
0,2
11
0100
1,3
10!
0100
1,7
ab
$m_s m_d f_s f_d$
x,n
01!
0100
0,5
00
0100
0,1
01
0001
1,4
00
0100
1,8

Fig. 15

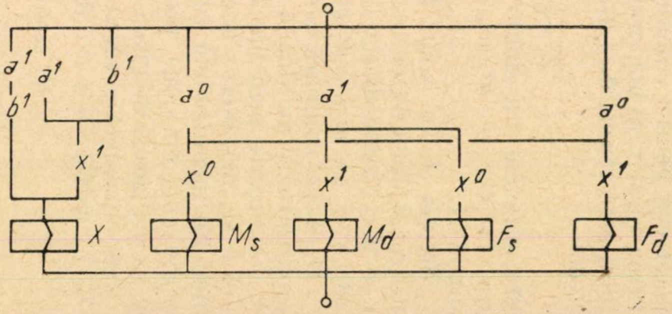

a^1
b^1
a^1
b^1
a^0
a^1
a^0
x^1
x^0
x^1
x^0
x^1
X
M_s
M_d
F_s
F_d

Fig. 16

5. CAZUL AUTOMATELOR ÎN MAI MULȚI TIMPI

În acest caz graful automatului va conține și evoluții de forma din figurile 21 a) și b), unde arcele punctate reprezintă stări ale automatului din alte evoluții de forma din figurile 21 a) și b). În particular, ele pot fi stări stabile ale automatului (fig. 21 c).

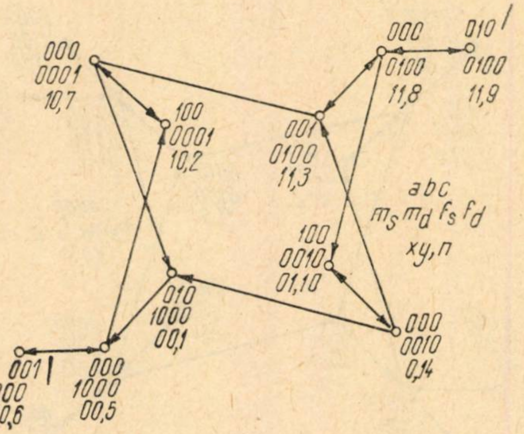

000
0001
10,7
100
0001
10,2
001
0100
11,3
000
0100
11,8
010
0100
11,9
abc
$m_s m_d f_s f_d$
xy,n
100
0010
01,10
010
1000
00,1
000
0010
0,14
001
1000
00,6
000
1000
00,5

Fig. 17

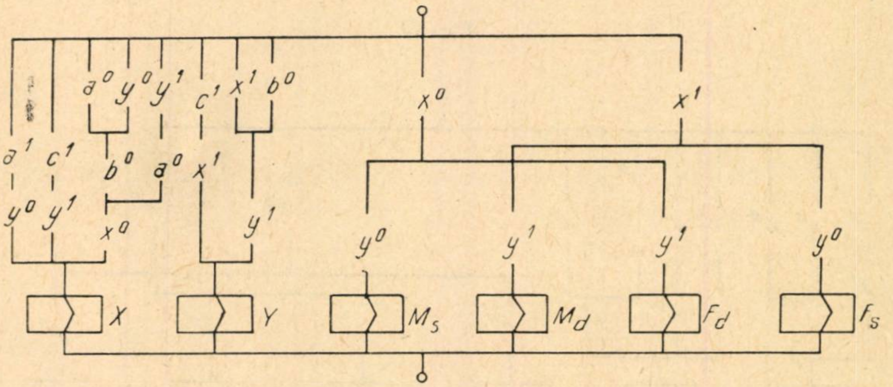

a^0 y^0 y^1 c^1 x^1 b^0
a^1 c^1
y^0 y^1
b^0 a^0 x^1
x^0
y^1
x^0
x^1
y^0 y^1 y^1 y^0
X
Y
M_s
M_d
F_d
F_s

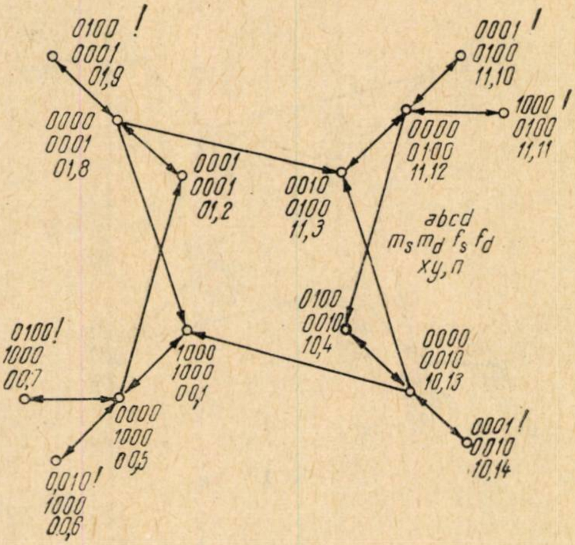
Fig. 18

Este natural să se ia aceiași valoarea a lui K pentru toate stările unui șir de forma din figurile 21.

Determinarea valorilor distincte ale lui K se face ca mai înainte cu ajutorul inegalităților (I). Apoi se aleg elementele de comandă și se completează programul automatului cu specificarea comportării lui la comenzi greșite, după care sinteza se face în mod obișnuit.

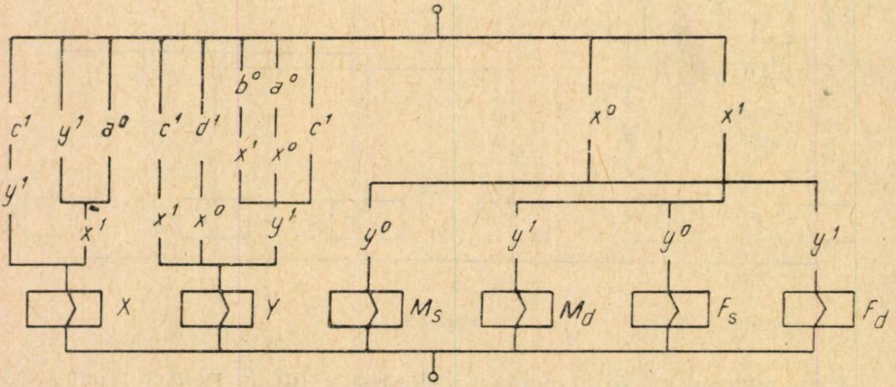
6. CAZUL COMENZILOR COMPLETE

Vom conveni să spunem că un automat are *comenzi complete* dacă evoluţia lui este precizată pentru toate comenzile care urmează după o comandă dată. Graful unui automat cu comenzi complete se construieşte în felul următor. Fie G_K graful redus al comenzilor automatului studiat, j un nod al grafului automatului corespunzător unei comenzi corecte şi K^j comanda corespunzătoare acestui nod. Fie apoi K^{i_1}, K^{i_2}, ..., K^{i_j}



0100 !
0001
01,9
0001 !
0100
11,10
1000 !
0100
11,11
0000
0001
01,8
0000
0100
11,12
0001
0001
01,2
0010
0100
11,3
abcd
m_s m_d f_s f_d
xy,n
0100
0010
10,4
0000
0010
10,13
0001 !
0010
10,14
0100!
1000
00,7
1000
1000
00,1
0000
1000
00,5
0,010!
1000
00,6

Fig. 19



c¹
y¹
a⁰
c¹
d¹
b⁰
a⁰
c¹
x¹
x⁰
x⁰
x¹
y¹
x¹
x¹
x⁰
y¹
y⁰
y¹
y⁰
y¹
X
Y
M_s
M_d
F_s
F_d

Fig. 20

comenzile corecte care urmează după K^j. Construim subgraful $G_K(j)$ al lui G_K ale cărui noduri reprezintă comenzi necorecte împreună cu arcele care unesc perechile de asemenea noduri. Notăm cu $j_1, j_2, \ldots, j_n$ nodurile grafului $G_K(j)$. Construim apoi arcele lui G_K care unesc nodul j cu nodurile $j_1, j_2, \ldots, j_n$ ale lui $G_K(j)$ și arcele care unesc nodurile $j_1, j_2, \ldots, j_n$ cu nodurile notate cu comenzile corecte $K^{i_1}, K^{i_2}, \ldots, K^{i_n}$ și orientate spre aceste din urmă noduri.

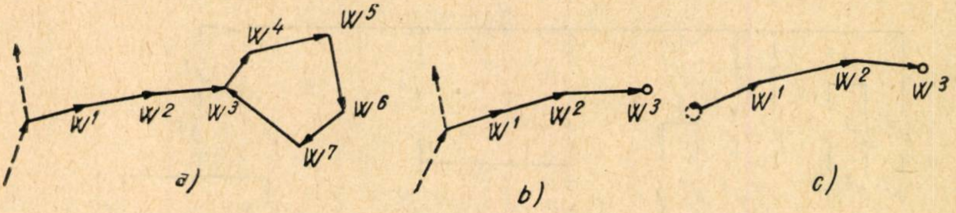


Fig. 21

În încheiere nodurile lui $G_K(j)$ se notează cu execuțiile nodului j. Procedînd la fel pentru toate nodurile corespunzătoare la comenzi corecte, se obține un automat a cărui execuție se schimbă numai dacă după o comandă corectă s-a dat fie tot o comandă corectă, fie un șir de comenzi necorecte care se încheie cu o comandă corectă. În asemenea automate orice execuție greșită este evitată. Pe figura 22 este ilustrat procedeul descris pentru nodul 1 al automatului din figura 11. Pe figurile 11, 13 și 15 sînt arătate, cu arce punctate, completările comenzilor pentru automatele respective.

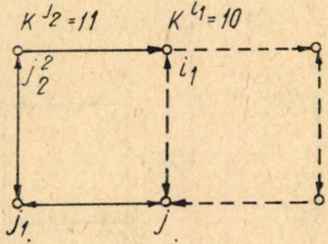


Fig. 22

Menționăm că automatele cu comenzi complete sînt mai complexe decît automatele cu semnal de alarmă sau automatele în care apar numai comenzi corecte (așa este automatul al cărui graf ar conține numai nodurile *1*, *2*, *3*, *4* ale grafului din fig. 11).

În figura 23 sînt arătate pentru exemplificare circuitele automatului cu comenzi complete corespunzător grafului din figura 11 în care se consideră și arcele punctate. După cum se vede, sînt necesare două relee intermediare iar circuitele conțin mai multe contacte.

7. MANIPULAREA UNUI AUTOMAT

În procedeul descris de alegere al elementelor de comandă am presupus cunoscute ieșirile (contactele) și grafurile reduse ale elementelor de comandă. Diferite elemente de comandă care au același graf redus conduc la automate cu circuite identice.

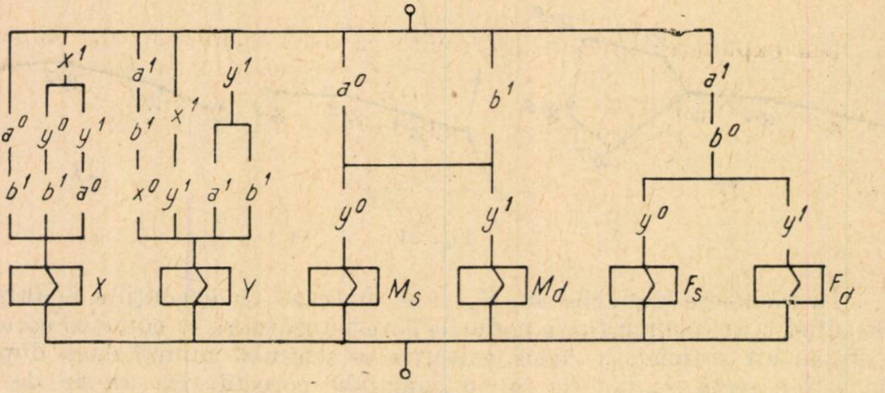
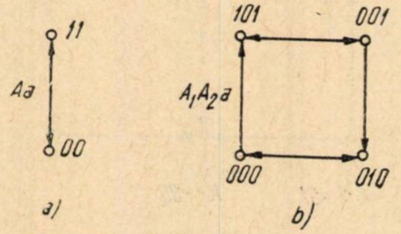


Fig. 23

Manipularea unui automat depinde însă de construcția efectivă a elementelor lui de comandă, și poate fi dedusă dacă se cunosc *grafurile caracteristice* [1], [4] ale elementelor de comandă, adică grafurile care reprezintă aplicația :

$$(A \times a)_N \to a_{N+1},$$



a) b)

Fig. 24

unde *A* și *a* sînt variabilele care descriu intrările și ieșirile unui element de comandă. Pe figura 24 sînt arătate grafurile caracteristice a două elemente cu două poziții și anume : buton de sonerie și buton dublu (apăsarea pe primul buton provoacă trecerea elementului de comandă în starea 1, iar apăsarea pe al doilea buton îl readuce în starea de repaus 0). Manipularea unui automat echipat cu butoane de primul tip este mai puțin comodă decît manipularea unui automat echipat cu contacte de-al doilea tip. Într-adevăr, în primul caz pentru realizarea stării $a = 1$, butonul trebuie apăsat în continuu pe cînd în al doilea caz este suficient să se apese primul buton numai pînă cînd elementul de comandă schimbă de stare. La alegerea elementelor de comandă este necesar să se ţină deci seama şi de comoditatea manipulării unui automat.

8. ÎNCHEIERE

Din expunerea precedentă rezultă că dacă elementele de comandă nu sînt impuse, este indicat să se efectueze alegerea lor în modul descris. Etapele sintezei automatului sînt în acest caz următoarele :

a) se transcrie programul ecuaţiilor sub formă de graf ;

b) presupunînd mai întîi că nu există comenzi greşite, se aleg pe baza inegalităţilor (*I*) valorile distincte ale lui K ;

c) se aleg elementele de comandă în modul arătat la p. 3 ;

d) programul automatului se completează cu specificarea comportării lui la comenzi greşite sau pînă la un automat cu comenzi complete ;

e) se efectuează sinteza automatului în mod obişnuit.

Menţionăm că în mod asemănător se poate efectua simplificarea unui automat dat. Pentru aceasta se construieşte graful G_W care se obţine din graful automatului dat contopind nodurile notate cu aceleaşi valori ale lui W, în afară de cazul cînd se precizează că există asemenea noduri care trebuie lăsate distincte. Notînd apoi nodurile grafului astfel obţinut cu valori distincte ale lui W, alegerea elementelor de comandă se face în modul descris. Exemplul tratat mai sus ilustrează acest mod de punere a problemei.

Mulţumim în încheiere lui Gh. Ioanin pentru preţioasele sugestii privind prezentarea subiectului tratat.

Primită la redacţie la 17 februarie 1966

Institutul de Petrol, Gaze şi Geologie, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. L. Livovschi, *Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice.* Editura Acad. R.P.R., Bucureşti, 1963.
2. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Editura tehnică, Bucureşti, 1959.
3. P. Naslin, *Circuits à relais et automatismes à séquences*, Paris, Dunod, 1958.
4. Л. Львовский, *Использование графов в задачах синтеза конечных автоматов.* Авт. и Телем., **XXVI**, 5 (1965).

ANALIZA LOGICĂ A ALGORITMILOR (I)

DE

E. MUNTEANU
(Cluj)

În această lucrare se formulează o nouă problemă de analiză a algoritmilor şi se propune o metodă de construire a formulei complet ataşate unui algoritm schemă-graf fără cicluri.

§. 1. INTRODUCERE

Succesele obţinute în ultimul timp, în automatizarea programării, prin creerea limbajelor de programare de tip ALGOL şi a translatoarelor din aceste limbaje au dus la uşurarea esenţială a muncii de programare.

Folosirea programelor de programare îl scuteşte pe programator de o muncă laborioasă, care nu este legată de esenţa rezolvării problemei, ci apare datorită particularităţilor maşinii cu ajutorul căreia se rezolvă problema. Totuşi, aşa cum arată experienţa, scrierea algoritmului de rezolvare a problemei într-un limbaj de programare comportă unele greutăţi specifice chiar şi atunci cînd expunerea acestuia în limbajul matematic obişnuit este făcută clar. Acestea sînt greutăţile legate de aducerea algoritmului la o formă comodă pentru programare şi ele sînt legate de specificul maşinilor electronice de calcul în general. Unele dintre aceste greutăţi, cum ar fi de exemplu acelea legate de necesitatea ca reprezentarea informaţiei să aibă o structură asemănătoare cu structura în formă de adrese a memoriei maşinii, pot fi probabil rezolvate în cadrul limbajului ALGOL, printr-o extindere a acestuia.

Pentru a înlătura însă complet greutăţile legate de aducerea algoritmului la o formă comodă pentru programare, considerăm că este necesar să se elaboreze limbaje de programare cu posibilităţi principial noi.

Descrierea metodei de rezolvare a problemei într-un astfel de limbaj, spre deosebire de limbajele existente pînă în prezent nu trebuie să co-

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1113–1127, BUCUREŞTI, 1966

incidă cu descrierea precisă a succesiunii de operații, care trebuie realizate pentru a obține rezultatul problemei. Cu alte cuvinte, descrierea rezolvării problemei într-un astfel de limbaj nu trebuie să fie neapărat un algoritm în înțelesul obișnuit al cuvîntului. Munca de elaborare a algoritmului propriu-zis să fie lăsată în seama mașinii.

Se știe că în anumite cazuri, descrierea unui algoritm simplu poate fi înlocuită cu descrierea sistemului de legături logice dintre informația inițială a problemei și rezultatul obținut în urma îndeplinirii algoritmului. Prin urmare este natural ca un astfel de limbaj să conțină posibilitatea de a descrie probleme printr-un sistem de condiții logice. Totuși, posibilitățile unei astfel de descrieri trebie să fie limitate, deoarece, în caz contrar, ar urma să pretindem unui program de programare, dintr-un astfel de limbaj, să elaboreze algoritmul de rezolvare a oricărei probleme matematice. În realitate este vorba de a trece în sarcina mașinii numai cele mai simple elemente de construire a unui algoritm, acelea care au un caracter pur tehnic și nu sînt legate de esența problemei.

Astfel devine actuală formularea următoarei probleme : să se găsească o metodă, care să permită, în cazurile cele mai simple, construirea în mod automat a algoritmilor pornindu-se de la sistemul de legături logice dintre informația inițială și rezultatul final.

Această problemă conduce la abordarea analizei algoritmilor dintr-un punct de vedere cu totul nou. Caracteristica generală a metodelor de analiză a algoritmilor, [1], [2], [3], cunoscute pînă în prezent, constă în determinarea contradicțiilor de ordin formal existente în construcția algoritmului. În cazul cînd algoritmul nu conține contradicții de ordin formal, rămîne totuși deschisă următoarea problemă : algoritmul analizat corespunde problemei pentru care a fost construit?

Este deci natural ca, analiza algoritmilor să se trateze din punctul de vedere al corespondenței acestuia cu sistemul de condiții logice care descrie formularea problemei ce se rezolvă cu algoritmul respectiv. Cu alte cuvinte, problema analizei algoritmilor trebuie formulată în sensul elaborării unor metode de restabilire a sistemului de condiții logice care descrie formularea problemei, pornindu-se numai de la descrierea formală a algoritmului și în a verifica pe urmă dacă acest sistem coincide cu cel dat inițial prin formularea problemei.

O rezolvare a problemei de analiză a algoritmilor în sensul descris mai sus ar putea să constituie un prim pas, în găsirea metodelor de construire automată a algoritmilor. În afară de aceasta ea poate să devină un instrument foarte util în controlul programelor pentru mașinile electronice de calcul.

Într-adevăr, dispunînd de o metodă de stabilire a sistemului de condiții logice, care descrie formularea problemei, pornindu-se numai de la programul de rezolvare a acesteia și comparînd pe urmă acest sistem cu cel dat inițial, se va putea stabili corectitudinea programului relativ la problema propusă.

Greutățile foarte mari, care apar în controlul programelor atît în programarea manuală, cît și în programarea automată, precum și lipsa unor programe universale de control justifică în suficientă măsură importanța acestei idei în rezolvarea problemei de analiză a algoritmilor.

§ 2. FORMULAREA PROBLEMEI DE ANALIZĂ A ALGORITMILOR

Să considerăm problema P și să notăm cu X° datele inițiale ale problemei iar cu X^1 rezultatele finale.

Presupunem că pentru rezolvarea problemei P, a fost construit algoritmul $\mathfrak{A}$, descris într-un limbaj formal. În continuare, ca limbaj formal pentru descrierea algoritmilor vom considera limbajul schemelor-graf.

DEFINIȚIA 1. Formula $F(X^{\circ}, X^1)$ se numește formulă *atașată algoritmului* $\mathfrak{A}$, dacă ea este adevărată atunci cînd algoritmul $\mathfrak{A}$ aplicat datelor inițiale X°, le transformă în rezultatul final X^1.

DEFINIȚIA 2. Formula $F(X^{\circ}, X^1)$ se numește formulă *complet atașată algoritmului* $\mathfrak{A}$, dacă ea este adevărată atunci și numai atunci cînd aplicînd algoritmul $\mathfrak{A}$ datelor inițiale X°, acesta le transformă în rezultatul final X^1.

Rezolvarea problemei de analiză a algoritmilor cere, pe lîngă elaborarea unei metode de construire a formulei atașate sau a formulei complet atașate, un algoritm și fixarea unui limbaj, în care urmează să fie scrise aceste formule precum și sistemul de relații logice inițiale, care reprezintă formularea problemei P. În continuare vom descrie toate aceste formule în limbajul logico-matematic.

Presupunem că formularea problemei P este descrisă de formula logică $\mathcal{F}(X^{\circ}, X^1)$, care este un predicat definit pe mulțimea datelor inițiale și a rezultatelor finale. De exemplu, pentru găsirea maximului numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, predicatul respectiv va fi

$$[(x=x_1) \vee (x=x_2) \vee \ldots \vee (x=x_n)] \,\&\, (x \geqslant x_1) \,\&\, (x \geqslant x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, (x \geqslant x_n), \tag{1}$$

unde x este maximul căutat. Formula (1) nu este altceva decît definiția maximului numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ea nu reprezintă algoritmul de găsire a maximului deoarece nu ne dă nici-o informație privitoare la succesiunea de operații, care trebuie realizate pentru a găsi maximul numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dacă reușim să construim o formulă $F(X^{\circ}, X^1)$, care să satisfacă definiția 1 sau 2, atunci spunem că algoritmul $\mathfrak{A}$ este *corect* relativ la problema P, dacă formula

$$\forall X^{\circ} \, \forall X^1 \, [F(X^{\circ}, X^1) \supset \mathcal{F}(X^{\circ}, X^1)] \tag{2}$$

este adevărată.

Astfel formulată, problema analizei algoritmului $\mathfrak{A}$ se reduce la construirea unei formule, care să satisfacă definiția 1 sau 2 și la verificarea adevărabilității formulei (2).

În această lucrare vom da o metodă de construire a formulei complet atașate unui algoritm schemă-graf fără cicluri.

§ 3. SCHEME – GRAF CU MEMORIE

În cele ce urmează vom atașa unei scheme-graf Γ definită de A. L. Kalujnin [4] noțiunea de memorie și de stare de memorie.

O mulțime finită de obiecte $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se numește *memorie* a schemei-graf Γ. Elementele mulțimii M le vom numi celule ale memoriei.

Să considerăm o mulțime $S = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots, x_1^j, x_2^j, \ldots, \ldots, x_n^j, \ldots\}$ ale cărei elemente le vom numi *stări*. Starea x_i^j o numim conținut al celulei x_i.

Imaginea $x_i^j = U(x_i)$ a mulțimii M în mulțimea S se numește *stare a memoriei* schemei-graf Γ.

Vectorul $\xi = (x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j)$ se numește *vector complet* al stării memoriei. Vom nota cu $\int = \{\xi\}$ mulțimea vectorilor compleți a tuturor stărilor memoriei.

Fie $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, un vector complet al memoriei, f un simbol funcțional oarecare iar p un simbol arbitrar de relație.

DEFINIȚIA 3. O expresie de forma $y := f(X)$, unde $y \in M$ se numește *operator de arbitrare.*

DEFINIȚIA 4. O expresie de forma $p(x)$ se numește *operator logic.*

În definițiile operatorilor de atribuire și a operatorului logic, funcțiile f și p sînt definite pe toată memoria schemei-graf Γ, dar de obicei expresiile $f(X)$ și $p(X)$ nu conțin toate celulele memoriei. Acele celule care nu figurează în aceste expresii nu sînt esențiale pentru operatorii respectivi.

DEFINIȚIA 5. O expresie de forma

$$\eta = f(\xi),$$

unde $\eta \in S$ și $\xi \in \int$ se numește *formulă elementară atașată* operatorului de atribuire $y := f(X)$.

DEFINIȚIA 6. O expresie de forma $p(\xi)$, unde $\xi \in \int$ se numește *formulă elementară atașată* operatorului logic $p(X)$.

Cînd nu este esențial faptul că o formulă elementară este atașată unui operator de atribuire sau unui operator logic, atunci vom denumi simplu, formulă elementară.

Pentru formulele elementare este valabilă observația făcută mai sus în cazul operatorilor.

Prin interpretarea unei scheme-graf Γ cu memorie, definită de mulțimea $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ a operatorilor de transformare și de mulțimea $R = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ a operatorilor de ramificare, înțelegem următoarele : fiecărui element $T_i \in T$ îi punem în corespondență un operator de atribuire f (corespondența nu trebuie să fie neapărat biunivocă) și fiecărui element $R_j R$ îi punem în corespondență un operator logic p_j (și în acest caz corespondența nu este obligatorie să fie biunivocă). În ultimul caz se subînțelege descompunerea mulțimii $\int$ în două mulțimi disjuncte $\int_{\overset{+}{p}_j}$, ale cărei elemente satisfac proprietatea p_j și $\int_{\overset{-}{p}_j}$, ale cărei elemente nu satisfac proprietatea p_j. Vom nota o astfel de interpolare prin $\{M, \int ; T \rightarrow f ; R \rightarrow p\}$.

Dacă este dată o schemă-graf Γ cu memorie și o interpretare $\{M, \int ; T \rightarrow f ; R \rightarrow p\}$, atunci noi spunem că este dat un algoritm schemă-graf $\mathfrak{A}$, a cărei acțiune este următoarea :

1° Presupunem că vectorul datelor inițiale $X^\circ \in \int$, parcurgînd nodurile schemei-graf Γ, s-a transformat în vectorul $\xi = (x_1^s, x_2^s, \ldots, \ldots, x_n^s)$ care a ajuns în nodul T_i. Nodului T_i îi corespunde, prin interpretarea dată, operatorul de atribuire $x_h := f_i(X)$. Procesul de calcul se continuă, după unica săgeată care pornește din acest nod, cu vectorul

$$\xi' = (x_1^{s'}, x_2^{s'}, \ldots, x_h^{s'}, x_{h+1}^{s'}, \ldots, x_n^{s'}) \text{ unde } x_i^{s'} = x_i^s \text{ pentru } i = $$

$$= 1, 2, \ldots, h, h+1, \ldots, n, \text{ iar corespunde } x_h^{s'}$$

se obține

$$x_h^{s'} = f_i(\xi), \tag{3}$$

care este formula elementară atașată operatorului de atribuire

$$x_h := f_i(X).$$

2° Presupunem că vectorul ξ, transformatul vectorului X°, a ajuns într-un nod R_j : Nodului R_j îi corespunde, prin interpretarea dată, operatorul logic p_j. În acest caz procesul de calcul se continuă cu același vector ξ, după săgeata marcată cu semnul plus, dacă formula elementară $p_j(\xi)$ este adevărată sau după săgeata marcată cu semnul minus în caz contrar.

3° Dacă la o anumită etapă a procesului de calcul elementul X^1 al mulțimii $\int$ ajunge la ieșirea schemei-graf, atunci spunem că X^1 este rezultatul aplicării algoritmului $\mathfrak{A}$ definit de schema-graf Γ prin interpretarea $\{M, \int ; T \rightarrow f ; R \rightarrow p\}$. Vom nota acest lucru astfel

$$\mathfrak{A}(X^\circ) = X^1.$$

Dacă în schema-graf a algoritmului $\mathfrak{A}$ este esențial nu tipul operatorului, ci numărul lui, atunci notăm acest operator cu simbolul O_i. Dacă de la operatorul O_i pornește o săgeată spre operatorul O_j, atunci vom numi operatorul O_j *succesor* al operatorului O_i, iar pe acesta din urmă îl vom numi *predecesor* al operatorului O_j

3.1. *Distribuirea memoriei unui algoritm schemă-graf.* Fie algoritmul schemă-graf $\mathfrak{A}$ definit de schema-graf Γ prin interpretarea $\{M, \int ; T \rightarrow f ; R \rightarrow p\}$.

Vom nota cu $M_V = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}\}$ acea submulțime a mulțimii M care se caracterizează prin aceea că, în timpul realizării algoritmului $\mathfrak{A}$, conținutul celulelor x_{i_k} $(k = 1, 2, \ldots, r)$ se schimbă. Mulțimea M_V este formată din acele celule ale memoriei care figurează în membrul drept al operatorilor de atribuire. Mulțimea celorlalte celule ale memoriei o vom nota cu $M_c = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ $(s + r = n$, unde n este numărul celulelor memoriei). Notăm cu c_i^0 starea inițială a celulei c_i și cu $M_c^0 = \{c_1^0, c_2^0, \ldots, c_s^0\}$ mulțimea stării inițiale a celulelor mulțimii M_c. Evident că $M_c \in S$.

Fie $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\}$ acele celule ale mulțimii M_V ale căror stări inițiale sînt date inițiale pentru algoritmul $\mathfrak{A}$. Pentru simplitate presupunem că acestea sînt primele m celule ale memoriei și mulțimea lor o notăm în continuare cu $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Mulțimea N poate să fie vidă. Notăm cu $N^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\}$ mulțimea stării inițiale a celulelor mulțimii N. Atunci elementele mulțimii $I^0 = N^0 \bigcup M_c^0$ sînt date inițiale ale algoritmului $\mathfrak{A}$.

Dacă mulțimea N nu coincide cu mulțimea M_V, atunci înseamnă că în timpul acționării algoritmului $\mathfrak{A}$, anumite celule ale mulțimii M_V, se folosesc pentru păstrarea unor rezultate intermediare sau a unor rezultate finale. Acele celule care se folosesc numai pentru păstrarea rezultatelor intermediare, se numesc *celule lucrătoare*. Este evident că algoritmul $\mathfrak{A}$ trebuie în așa fel construit, încît rezultatul final obținut să nu depindă de starea inițială a celulelor lucrătoare.

După terminarea procesului de calcul, anumite celule ale mulțimii M_V (e posibil ca toate) conțin rezultatul aplicării algoritmului $\mathfrak{A}$.

Notăm mulțimea acestor celule cu $R = \{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_p}\}$. Dacă notăm cu x^1 starea finală a celulei x, atunci mulțimea $R^1 = \{x_{t_1}^1, x_{t_2}^1, \ldots, \ldots, x_{t_p}^1\}$ este mulțimea rezultatelor aplicării algoritmului $\mathfrak{A}$.

Pentru descrierea unei stări intermediare a unei celule oarecare introducem noțiunea de *rang*.

Simbolurile x_i^j care intră într-o formulă elementară se numesc *variabile* ale formulei elementare respective. Numărul j se numește rangul variabilei x_i^j. Rangul fiecărei variabile este un număr întreg pozitiv care se referă la celula a cărei stare este variabila respectivă.

Din notația introdusă pentru starea finală a unei celule rezultă că toate variabilele cu rangul 1 reprezintă rezultate finale ale algoritmului respectiv.

Dacă algoritmul schemă-graf $\mathfrak{A}$ nu conține cicluri și dacă analizăm schema-graf corespunzătoare de la ieșire spre intrare, atunci de fiecare dată cînd conținutul unei celule se schimbă, rangul variabilei corespunzătoare se mărește (de obicei cu o unitate). Dacă x_i^n este starea inițială a celulei x_i, atunci convenim să numim numărul n, *rang maximal* al variabilei x_i^n. Dacă x_i^n este o variabilă cu rang maximal, atunci notăm această variabilă cu x_i^0.

§ 4. CONSTRUIREA FORMULEI COMPLET ATAȘATE UNUI ALGORITM SCHEMĂ-GRAF FĂRĂ CICLURI

În continuare printr-un algoritm schemă-graf $\mathfrak{A}$ vom înțelege întotdeauna un algoritm fără cicluri, adică un algoritm a cărui schemă-graf nu conține cicluri [5].

Presupunem că schema-graf a algoritmului $\mathfrak{A}$ conține $n - 1$ operatori în afară de intrare și de ieșire. Introducem următoarea numerotare a operatorilor algoritmului $\mathfrak{A}$:

1°. Notăm cu O_0 intrarea schemei-graf a algoritmului $\mathfrak{A}$.

2°. Dacă succesorul operatorului de atribuire O_i sau a intrării este operatorul O_j, atunci convenim ca $j > i$; dacă succesorii operatorului logic O_k sînt operatorii O_{k_1} și O_{k_1}, atunci convenim ca $k_1 > k$ și $k_2 > k$.

3°. Notăm cu O_n ieșirea schemei-graf a algoritmului $\mathfrak{A}$.

Operatorii oricărui algoritm fără cicluri pot fi întotdeauna numerotați în așa fel încît să fie satisfăcute condițiile 1°, 2° și 3°. Pentru a demonstra această afirmație, indicăm următorul procedeu de realizare a unei astfel de numerotări :

a) Notăm intrarea schemei-graf cu O_0

b) Presupunem că operatorii $O_0, O_1, \ldots, O_i$ au fost astfel numerotați încît sînt satisfăcute condițiile 1°, 2° și 3° și în nici unul din acești operatori nu intră săgeți care pornesc din operatori nenumerotați. Dacă algoritmul nu conține operatori nenumerotați, atunci numerotarea este terminată și ea satisface condițiile 1°, 2°, și 3°.

c) Dacă algoritmul conține operatori nenumerotați, atunci căutăm printre aceștia unul în care nu intră nici-o săgeată ce pornește din operatori nenumerotați.

Din ipoteza că algoritmul $\mathfrak{A}$ nu conține cicluri, rezultă că întotdeauna găsim un astfel de operator. Într-adevăr, să presupunem că un astfel de operator nu există. Atunci fie O un operator nenumerotat. Operatorul O are cel puțin un predecesor nenumerotat, care la rîndul său are de asemenea un predecesor nenumerotat. Întrucît numărul operatorilor nenumerotați este finit, rezultă că operatorul O aparține unui ciclu. Această concluzie contrazice însă ipoteza că algoritmul $\mathfrak{A}$ nu conține cicluri.

Notăm cu O_{i+1} operatorul în care nu intră nici-o săgeată ce pornește din operatori nenumerotați. După un număr finit de pași, numerotarea operatorilor algoritmului $\mathfrak{A}$ se termină și ea satisface condițiilor 1°, 2° și 3°.

4.1. *Construirea formulei elementare atașate operatorilor de atribuire.* Formula elementară atașată unui operator de atribuire așa cum a fost definită (definiția 5) nu este unică. Vom arăta că dacă este dată o formulă logică φ, ce satisface o anumită condiție și un operator de atribuire $z := g(X)$, atunci relativ la φ întotdeauna se poate construi în mod unic formula elementară atașată operatorului $z := g(X)$.

Vom nota cu $A_\varphi[z := g(X)]$ expresia din membrul drept a formulei elementare atașate operatorului $z := g(X)$, relativ la φ. Prin notația $[\psi]^x_\omega$ înțelegem rezultatul operației de înlocuire a fiecărei intrări libere a variabilei x în ψ, cu expresia ω.

Condiția α. Dacă variabila x_i^s intră liberă în formula ψ și $s \geqslant 2$, atunci ea este unica variabilă, de rang mai mare sau egal cu doi, relativă la celula x_i care intră liberă în ψ.

Fie dat operatorul $z := g(X)$ și formula φ, care satisface condiția α. Expresia $A_\varphi[z := g(X)]$ se construiește în felul următor :

C 1.1. Dacă z este o componentă a vectorului X și dacă există variabila z^s, unde $s \geqslant 2$, care intră liberă în φ, atunci definim

$$A^1_\varphi\lfloor z := g(X)] ::= [g(X)]^z_{z^{s+1}}\,{}^{1)}. \tag{4}$$

---

1) Simbolul folosit $::=$ în această formulă precum și în continuare însemnează „este prin definiție”.

C 1.2 Dacă z este o componentă a vectorului X și z^1 este unica variabilă relativ la z care intră liberă în φ sau φ nu conține variabile relativ la z, atunci definim

$$A^1_\varphi\,[z:=g\,(X)]::=[g\,(X)]^{z}_{z^2}. \tag{5}$$

C 1.3. Dacă z nu este o componentă a vectorului X, atunci definim

$$A^1_\varphi\,[z:=g\,(X)]::=g\,(X). \tag{6}$$

C 2. Pentru toate celulele C_i, care intră în expresia $A^1_\varphi\,[z:=g\,(X)]$, definim

$$A^2_\varphi\,[z:=g\,(X)]::=[A^1_\varphi\,[z:=g\,(X)]]^{c_i}_{c^0_i} \tag{7}$$

C 3. Pentru toate celulele x_i, care intră în expresia $A^2_\varphi\,[z:=g\,(X)]$ și relativ la care nu există nici-o variabilă ce intră în φ, definim

$$A^3_\varphi\,[z:=g\,(X)]::=[A^2_\varphi\,[z:=g(X)]]^{x_i}_{x^1_i}. \tag{8}$$

C 4. Pentru toate celulele x_i, care intră în expresia $A^3_\varphi\,[z:=g(X)]$ și relativ la care există variabila $x^{s_i}_i$, unde $s_i \geqslant 2$, care intră liberă în φ, definim

$$A^3_\varphi\,[z:=g\,(X)]::=[A^3_\varphi\,[z:=g\,(X)]]^{x_i}_{x^{s_i}_i}. \tag{9}$$

C 5. Pentru toate celulele x_i, care intră în expresia $A^4_\varphi\,[z:=g(X)]$ și relativ la care există variabilele x^1_i, care intră în membrul drept al unei formule elementare atașate unui operator de atribuire sau într-o formulă elementară atașată unui operator logic, conținute în φ, definim

$$A^5_\varphi\,[z:=g\,(X)]::=[A^4_\varphi\,[z:=g\,(X)]]^{x_i}_{x^1_i} \tag{10}$$

C 6. Pentru toate celulele x_i, care intră în expresia $A^5_\varphi\,[z:=g\,(X)]$ și relativ la care formula φ conține formule elementare de forma $x^1_i=f\,(\xi)$, unde x^1_i nu intră în expresia $f\,(\xi)$, definim

$$A^6_\varphi\,[z:=g\,(X)]::=[A^5_\varphi\,[z:=g\,(X)]]^{x_i}_{x^2_i} \tag{11}$$

Expresia $A^6_\varphi\,[z:=g(X)]$ este membrul drept al formulei elementare, relativ la φ, atașate operatorului de atribuire $z:=g\,(X)$ adică $A_\varphi\,[z:=g\,(X)]$. În procesul de construire a expresiei $A_\varphi\,[z:=g\,(X)]$ cele 6 condiții descrise mai sus se verifică întotdeauna în ordinea C1, C2, C3, C4, C5, C6.

Din aceste condiții rezultă că, dacă expresia $A_\varphi\,[z:=g\,(X)]$ conține o variabilă relativ la celula x, atunci conține numai una la această celulă.

4.2. *Construirea formulei elementare atașate operatorului logic.* Dacă este dată o formulă φ și operatorul logic $p(X)$, atunci, ca și în cazul operatorului de atribuire, se poate întotdeauna construi în mod unic o formulă elementară, relativ la φ, atașată operatorului $p(X)$. Notăm această formulă cu $L_\varphi[p(X)]$.

Construirea formulei $L_\varphi[p(X)]$ se face în mod analog cu construirea formulei $A_\varphi[z := f(X)]$, exceptînd doar condiția C4, care se înlocuiește cu următoarea :

C′4. Pentru toate celulele x_i, care intră în expresia $L^3_\varphi[p(x)]$ și relativ la care există variabilele $x_i^{s_1}, x_i^{s_2}, \ldots, x_i^{s_r}$, care intră libere în φ și pentru care $s_k \geqslant 2$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, definim

$$L^4_\varphi[p(x)] :: = [L^3_\varphi[p(x)]]^{x_i}_{x_i^s}, \tag{12}$$

unde $s = \max(s_1, s_2, \ldots, s_r)$.

Evident că pentru construirea formulei $L_\varphi[p(x)]$ nu are sens să fie folosită condiția C 1. Și pentru $L_\varphi[p(x)]$ este adevărată proprietatea : dacă $L_\varphi[p(x)]$ conține o variabilă relativă la celula x, atunci conține numai una relativ la această celulă.

4.3. *Operația de egalare a rangurilor* (ER). Operația *ER* se aplică la numai două formule φ_1 și φ_2, care satisfac condiția α. Ca rezultat al aplicării acestei operații, vom obține două formule $E(\varphi_1, \varphi_2)$ și $E(\varphi_2, \varphi_1)$, în felul următor.

Dacă variabilele x^s și $x^{s'}$ intră libere în formula φ_1 și respectiv φ_2 iar $s \geqslant 2$ și $s > s'$, atunci înlocuim fiecare intrare a variabilei $x^{s'}$ în formula φ_2 cu variabila x^s. Dacă $s' = 1$, înlocuirea se face numai atunci cînd x^1 intră în expresia din membrul drept a unei formule elementare atașate unui operator de atribuire sau într-o formulă elementară atașată unui operator logic, conținute în φ.

Efectuînd toate înlocuirile posibile, notăm formula obținută cu $E(\varphi_2, \varphi_1)$.

Schimbînd între ele formulele φ_1 și φ_2 și făcînd toate înlocuirile posibile în aceleași condiții, obținem al doilea rezultat al operației, adică formula pe care o notăm cu $E(\varphi_1, \varphi_2)$.

După aplicarea operației *ER*, toate variabilele care intră în formulele $E(\varphi_1, \varphi_2)$ și $E(\varphi_2, \varphi_1)$ și care satisface condițiile aplicării acestei operații, au același rang.

4.4. *Construirea formulei complet atașate algoritmului* $\mathfrak{A}$. Fie dat algoritmul $\mathfrak{A}$, precum și mulțimile N, R și Mc. Construirea formulei complet atașate algoritmului $\mathfrak{A}$ se face inductiv în felul următor :

1°. Atașăm operatorului O_n, adică ieșirii, formula

$$F_n :: = (0 = 0).$$

Este evident că formula F_n satisface condiția α.

2°. Presupunem că fiecărui operator O_j $(j = i + 1, \ldots, n)$ i-am atașat formula F_j, care satisface condiția α. Pentru a construi formula F_i, atașată operatorului O_i, deosebim două cazuri

2.1. Operatorul O_i este operatorul de atribuire

$$y := f(X)$$

În acest caz presupunem că operatorul O_t este succesorul operatorului O_i. Din ipoteza de inductivitate rezultă că formula F_t este construită, şi ea satisface condiţia α.

2.1.1. Dacă formula F_t nu conţine variabile relativ la celula y şi $y \in R$, atunci

$$F_i ::= [y' = A_{F_t}[y := f(X)] \& F_t], \tag{I}$$

iar dacă $y \overline{\in} R$, atunci

$$F_i ::= F_t. \tag{II}$$

Într-adevăr, dacă formula F_t nu conţine variabile relativ la celula y, atunci înseamnă că în timpul realizării procesului de calcul, începînd cu operatorul O_t şi pînă la sfîrşit, conţinutul celulei y rămîne neschimbat. Prin urmare, dacă $y \in R$, atunci starea celulei y, după realizarea operatorului O_i, este o stare finală, ceea ce exprimă formula (I). Dacă $y \overline{\in} R$, înseamnă că rezultatul intermediar obţinut după realizarea operatorului O_i este un rezultat de prisos. În acest caz operatorul O_i este un operator de prisos ceea ce exprimă formula (II).

2.1.2. Dacă formula F_t conţine variabila y^s, unde $s \geqslant 2$, atunci

$$F_i ::= [F_t]^{y^s}_{A_{F_t}[y:=f(X)]}. \tag{III}$$

În acest caz conţinutul celulei y obţinut după realizarea operatorului O_i se foloseşte în continuare ca rezultat intermediar.

2.1.3. Dacă formula F_t conţine o formulă elementară ataşată unui operator logic, în care intră liberă variabila y^1 sau o formulă elementară ataşată unui operator de atribuire, în a cărei expresie din membrul drept intră de asemenea variabila y^1 şi $y \in R$, atunci

$$F_i ::= [y^1 = A_{F_t}[y := f(X)]] \& [F_t]^{y^1}_{A_{F_t}[y:=f(X)]}, \tag{IV}$$

iar dacă $y \overline{\in} R$, atunci

$$F_i ::= [F_t]^{y^1}_{A_{F_t}[y:=f(X)]}. \tag{V}$$

Din condiţia 2.1.3 rezultă că starea celulei y, obţinută după executarea operatorului O_i, se foloseşte în continuare ca un rezultat intermediar. Prin urmare, dacă $y \in R$, atunci starea respectivă este în acelaşi timp şi un rezultat final, ceea ce exprimă formula (IV). Dacă $y \overline{\in} R$, atunci starea corespunzătoare a celulei y reprezintă numai un rezultat intermediar (formula (V)).

2.2. Operatorul O_i este operatorul logic $p(X)$. Presupunem că operatorul O_{t_1} este succesorul O_i, urmînd săgeata care pleacă din acesta şi este marcată cu „+", iar operatorul O_{t_2} este succesorul operatorului O_i, urmînd săgeata care pleacă din aceasta şi este marcată cu „—". Din ipoteza de inductivitate rezultă că formulele F_{t_1} şi F_{t_2} ataşate operatorilor O_t, și relativ la O_{t_2}, sînt construite și ele satisfac condiția α. Notăm cu φ formula $F_{t_1} \& F_{t_2}$ și definim

$$\text{(VI)}\quad F_i ::= [L_\varphi [p(X)] \supset E(F_{t_1}, F_{t_2})] \& [\neg L_\varphi [p(X)] \supset E(F_{t_2}, F_{t_2})].$$

Vom demonstra că formula F_i, construită prin metoda indicată, satisface condiția α.

Presupunem că formula F_i are forma (I). În acest caz expresia $A_{F_t}[y := f(X)]$ poate fi obținută cu ajutorul formulelor (9) sau (11). Presupunem că F_i nu satisface condiția α. Atunci există variabilele x^s și $x^{s'}$ care intră în F_i și pentru care avem $s \geqslant 2$, $s' \geqslant 2$ și $s \neq s'$. Întrucît prin ipoteza inductivă am presupus că F_t satisface condiția α, rezultă că în formula F_t intră numai una din aceste formule. Presupunem că $x^{s'}$ intră în F_t și x^s intră în expresia $A_{F_t}[y := f(X)]$. Însă, dacă expresia $A_{F_t}[y := f(X)]$ a fost construită cu ajutorul formulei (9), atunci $s = s'$, iar dacă această expresie a fost construită cu ajutorul formulei (11), atunci $s = 2$ și $s' = 1$. Concluziile la care am ajuns contrazic ipoteza că $s' = s$ și $s' \geqslant 2$. Prin urmare, formula F_i de forma (I) satisface condiția α.

Presupunem că formula F_i are forma (III). În acest caz expresia $A_{F_t}[y := f(X)]$ se obține aplicînd formulele de construire a acestei expresii, începînd cu formula (4). Din aceasta rezultă că unica variabilă relativ la celula y și care intră în expresia $A_{F_t}[y := f(X)]$ este y^{s+1}, unde $s \geqslant 2$. Atunci singura variabilă de rang mai mare sau egal cu doi, care intră în formula F_t, relativ la celula y, este y^{s+1}. Prin urmare, relativ la stările celulei y, formula F_i de forma (III) satisface condiția α. Demonstrația că formula F_i de forma (III) satisface condiția α și relativ la restul variabilelor se face la fel ca și în cazul cînd formula F_i este de forma (I).

Presupunem că formula F_i are forma (IV) sau (V). În acest caz expresia $A_{F_t}[y := f(X)]$ se obține aplicînd formulele corespunzătoare, începînd cu formula (5). Din aceasta rezultă că unica variabilă relativă la celula y și care intră în expresia A_{F_t} $[y := f(X)]$ este y^2. Prin urmare, formula F_i nu conține alte variabile relative la celula y, decît pe y^2 și y^1. Înseamnă deci că relativ la stările celulei y, formula F_i satisface condiția α. Demonstrația că formula F_i satisface condiția α și relativ la restul variabilelor se face la fel ca și în cazul cînd F_i este de forma (I).

Presupunem că F_i este de forma (VI) și ea nu satisface condiția α. Atunci înseamnă că există variabilele x^s și $x^{s'}$, care intră în formula F_i și pentru care $s \neq s'$, $s \geqslant s$ și $s' \geqslant 2$. Din definiția operației ER rezultă că fiecare dintre formulele $E(F_{t_2}, F_{t_1})$ și $E(F_{t_1}, F_{t_2})$ poate conține numai una din aceste variabile. Fie, de exemplu, variabila x^s conținută în formula elementară $L_\varphi [p(X)]$ și variabila $x^{s'}$ conținută în formula $E(F_{t_1}, F_{t_2})$. Din definiția operației ER rezultă că variabila $x^{s'}$ intră numai în formula F_{t_1} și că nu există o altă variabilă $x^{s''}$, unde $s'' > s'$, care să intre în formula F_{t_2}. Din aplicarea formulei (12) pentru construirea expresiei $L_\varphi [p(X)]$ rezultă că $s = s'$, sau dacă $s = 2$, atunci formula $L_\varphi[p(X)]$ poate conține variabila x^s numai ca rezultat al aplicării formulei (11), și în acest caz $s' = 1$. Ambele aceste cazuri contrazic ipoteza că formula F_i de forma (VI) nu satisface condiția α.

3°. După $n + 1$ pași obținem formula F_0 care satisface condiția α.

Din faptul că formula F_0 satisface condiția α, rezultă că dacă ea conține două variabile relativ la aceiași celulă, atunci una dintre ele are rangul egal cu unitatea. Prin urmare, dacă $x_{i_1}^{\rho_1}, x_{i_2}^{\rho_2}, \ldots, x_{i_p}^{\rho_p}$, unde $\rho_j \geqslant 2$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ sînt toate variabile care intră în F_0, atunci ρ_i este rangul maximal al variabilei $x_{i_j}^{\rho_i}$. Conform convenției făcute, $x_{i_j}^{\rho_j}$ reprezintă conținutul inițial al celulei x_{i_j} și acesta se notează cu $\overset{0}{x}_{i_j}$.

Înlocuim în formula F_0 toate variabilele $x_{i_k}^{\rho_k}$, unde $\rho_k \geqslant 2$ cu variabilele $\overset{0}{x}_{i_k}$. După această înlocuire, formula obținută conține numai variabile cu rang zero sau unu. Notăm această formulă cu $F(X^0, X^1)$. Toate variabilele de rang egal cu unitatea care intră în $F(X^0, X^1)$ reprezintă rezultate finale ale algoritmului $\mathfrak{A}$. Într-adevăr, dacă variabila x^1 ar figura în expresia din membrul drept al unei formule elementare atașate unui operator de atribuire sau într-o formulă elementară atașată unui operator logic, atunci $x \in M_c$. Această concluzie nu poate fi adevărată deoarece din regulile de construire a expresiilor $A_\varphi[z := g(X)]$ și $L_\varphi[p(x)]$ rezultă că în acest caz formula F_0 trebuie să conțină pe x^0 și nu pe x^1, așa cum am presupus noi. Prin urmare intrarea variabilei x^1 în formula $F(X^0, X^1)$ este membrul stîng al unei formule elementare atașate unui operator de atribuire. Componentele vectorului X^1 sînt deci elemente ale mulțimii R^1, iar componentele vectorului X^0 sînt elemente ale mulțimii I^0.

TEOREMĂ. *Formula $F(X^0, X^1)$ este o formulă complet atașată algoritmului $\mathfrak{A}$.*

Pentru a demonstra această teoremă introducem următoarele notații.

Notăm cu $\mathfrak{A}_i$ algoritmul schemă-graf dat de schema-graf prin interpretarea $\{M_i, \int; T \to f; R \to p\}$, unde M_i este acea parte a memoriei (poate fi chiar memoria M) care se folosește la realizarea algoritmului $\mathfrak{A}$, începînd cu îndeplinirea operatorului O_i. Schema-graf Γ_i constă din operatorii $O_i, O_{i_1}, \ldots, O_{i_r}$, unde O_{i_r} este ieșirea algoritmului $\mathfrak{A}$, și fiecare operator O_{i_k} $(k = 1, 2, \ldots, r)$ este succesorul cel puțin unuia dintre operatorii $O_i, O_{i_1}, \ldots, O_{i_{k-1}}$. Dacă este dată schema-graf a algoritmului $\mathfrak{A}$, atunci întotdeauna se poate construi schema-graf Γ_i prin înlăturarea tuturor operatorilor algoritmului $\mathfrak{A}$ în afară de operatorii $O_i, O_{i_1}, \ldots, O_{i_r}$, și a săgeților care pornesc din operatorii înlăturați.

Vom nota cu ξ_i^0 și cu ξ_i^1, datele inițiale și respectiv rezultatele finale ale algoritmului $\mathfrak{A}_i$. Ca date inițiale pentru algoritmul $\mathfrak{A}_i$ vom considera acele date inițiale ale algoritmului $\mathfrak{A}$ și acele rezultate intermediare care au fost obținute prin realizarea procesului de calcul pînă la îndeplinirea operatorului O_i, care se folosesc la obținerea rezultatelor finale începînd cu îndeplinirea operatorului O_i. Ca rezultate finale ale algoritmului $\mathfrak{A}_i$ vom considera acele rezultate finale ale algoritmului $\mathfrak{A}$ care se obțin prin realizarea acestui algoritm începînd cu îndeplinirea operatorului O_i.

Notăm cu $F_i^*(\xi_i^0, \xi_i^1)$ formula obținută după înlocuirea în F_i a datelor inițiale ale algoritmului $\mathfrak{A}_i$ cu vectorul ξ_i^0 și a rezultatelor finale cu vectorul ξ_i^1.

Vom demonstra că formula $F_i^*(\xi_i^0, \xi_i^1)$ este o formulă complet atașată algoritmului $\mathfrak{A}_i$.

a) Formula F_n^* este o formulă complet atașată algoritmului $\mathfrak{A}_n$. Într-adevăr, algoritmul $\mathfrak{A}_n$ este algoritmul vid care constă din realizarea operatorului O_n, adică a ieșirii algoritmului $\mathfrak{A}$. Formula complet atașată acestui algoritm este $\xi_n^0 = \xi_n^1$, unde $\xi_n^0 : = \xi_n^1 : = 0$ și, prin urmare, formula $F_n^* : : = (0 = 0)$ este complet atașată algoritmului $\mathfrak{A}_n$.

b) Presupunem că formula $F_n^* (j = i + 1, \ldots, n)$ este complet atașată algoritmului $\mathfrak{A}_n$.

1°. Presupunem că F_i are forma (I), unde F_t nu conține variabile relativ la celula y. Atunci y^1 este un rezultat final al algoritmului $\mathfrak{A}$. Rezultatele finale ale algoritmului $\mathfrak{A}_i$ vor fi y^1 și ξ_t^1, unde ξ_t^1 sînt rezultatele finale ale algoritmului $\mathfrak{A}_t$. Notăm cu $\overline{\xi}_i^0$ acele date inițiale ale algoritmului $\mathfrak{A}_i$ care sînt folosite pentru obținerea rezultatului y^1. Formula $F_i^*(\xi_i^0, \xi_i^1)$ va avea următoarea formă

$$(y^1 = f(\overline{\xi}_i^0))\,\&\,F_t^*(\xi_{it}^0, \xi_t^1). \tag{13}$$

Presupunem că formula (13) este adevărată. Atunci $y^1 = f(\overline{\xi}_i^0)$ și $F_t(\xi_t^0, \xi_t')$ sînt formule adevărate și prin urmare $\mathfrak{A}_t(\xi_t^0) = \xi_t'$ iar prin realizarea operatorului O_i, datele inițiale $\overline{\xi}_i^0$ se transformă în rezultatul y^1. Prin urmare

$$\mathfrak{A}_i(\xi)_i^0 = \xi_i^1.$$

Presupunem că $\mathfrak{A}_i(\xi_i^0) = \xi_i^1$. Atunci, prin realizarea operatorului O_i, datele inițiale $\overline{\xi}_i^0$ sînt transformate în rezultatul y^1 și avem de asemenea $\mathfrak{A}_t(\xi_t^0) = \xi_t'$. Prin urmare, formulele $y' = f(\overline{\xi}_i^0)$ și $F_t^*(\xi_t^0, \xi_t^1)$ sînt adevărate, deci și formula (13) este adevărată.

2°. Presupunem că formula F_i este de forma (III), unde F_t conține variabila y^s, $s \geqslant 2$. În acest caz y^s este un rezultat intermediar al algoritmului $\mathfrak{A}_i$.

Presupunem că formula F_i^* este adevărată. Atunci formulele $y^s = f(\overline{\xi}_i^0)$ și F_t^* sînt adevărate. Prin urmare, $\mathfrak{A}_t(\xi_t^0) = \xi_t^1$, unde componenta y^s a vectorului ξ_t^0 a fost înlocuită cu expresia $f(\overline{\xi}_i^0)$. Din aceasta rezultă că $\mathfrak{A}_i(\xi_i^0) = \xi_i^1$, unde $\xi_i^1 = \xi_t^1$ iar datele inițiale ale algoritmului $\mathfrak{A}$ sînt $\overline{\xi}_i^0$ și ξ_t^0.

Presupunem că $\mathfrak{A}_i(\xi_i^0) = \xi_i^1$. Atunci $\mathfrak{A}_t(\xi_t^0) = \xi_t'$ și după îndeplinirea operatorului O_i, $\overline{\xi}_i^0$ se transformă în y^s. Prin urmare formulele $F_t^*(\xi_t^0, \xi_t^1)$ și $y^s = f(\overline{\xi}_i^0)$ sînt adevărate. Din aceasta rezultă că și formula F_i^* este adevărată.

3°. Dacă formula F_i este de forma (IV) sau (V), atunci demonstrarea teoremei se face în mod analog ca și în cazurile 1° și 2°.

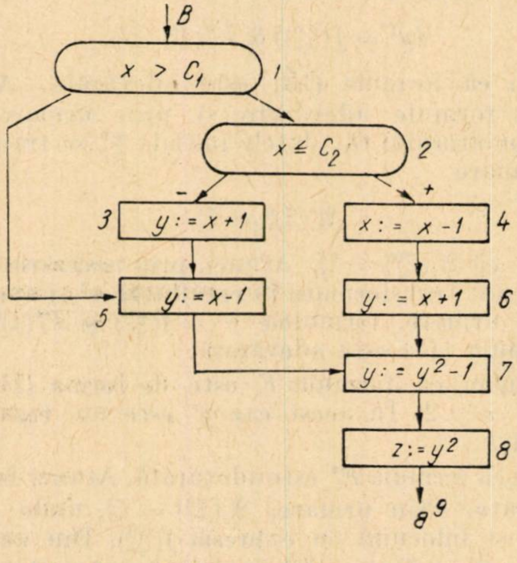
4°. Presupunem că F_i este de forma (VI), unde F_t și F_{t_2} sînt formule complet atașate algoritmilor $\mathfrak{A}_{t_1}$ și respectiv $\mathfrak{A}_{t_2}$.

Presupunem că formula F_i^*, corespunzătoare lui F_i, este adevărată. Atunci sînt adevărate formulele $p(\overline{\xi}_i^0) \supset E\,[F_{t_1}, F_{t_2}]$ și $\neg\, p(\overline{\xi}_i^0) \supset$ $\supset E(F_{t_2}, F_{t_1})$. Fie $p(\overline{\xi}_i^0)$ o formulă adevărată. Atunci $E(F_{t_1}, F_{t_2})$ este adevărată și prin urmare F_{t_1} este adevărată. Rezultă de aici că $\mathfrak{A}_{t_1}(\xi_{t_1}^0) = \xi_{t_1}^1$. Atunci $\mathfrak{A}_i(\xi_i^0) = \xi_i^1$, unde $\xi_i^1 = \xi_{t_1}^1$ și datele inițiale ale algoritmului $\mathfrak{A}_i$ sînt $\overline{\xi}_i^0$ și $\xi_{t_1}^0$. Dacă presupunem că $\neg\, p(\overline{\xi}_i^0)$ este adevărată, atunci ajungem la concluzia că $\mathfrak{A}_i(\xi_i^0) = \xi_i^1$, unde $\xi_i^1 = \xi_{t_2}^1$ iar datele inițiale ale algoritmului $\mathfrak{A}_i$ sînt $\overline{\xi}_i^0$ și $\xi_{t_2}^0$.

Presupunem că $\mathfrak{A}_i(\xi_i) = \xi_i^1$. În acest caz sau formula $p(\overline{\xi}_i^0)$ este adevărată și $\mathfrak{A}_{t_1}(\xi_{t_1}^0) = \xi_{t_1}^1$ sau formula $\neg\, p(\overline{\xi}_i^0)$ este adevărată și $\mathfrak{A}_{t_2}(\xi_{t_2}^0) = \xi_{t_2}^1$. În ambele cazuri rezultă imediat că formula F_i^* este adevărată.

Am demonstrat în felul acesta teorema enunțată pentru formula $F_i^*(\xi_i^0, \xi_i^1)$ și algoritmul $\mathfrak{A}_i$. Teorema este deci adevărată și pentru formula F_0 și algoritmul $\mathfrak{A}_0$, care este algoritmul $\mathfrak{A}$.

Exemplu. Să considerăm următorul algoritm schemă-graf (figură). În acest caz $N = \{x\}$, $R = \{x\}$, $M_c = \{c_1, c_2\}$.



Aplicînd metoda de construire a formulei complet atașate acestui algoritm obținem

$F_9 ::= (0 = 0)$

$F_8 ::= (z^1 = (y^1)^2)$

$F_7 ::= (z^1 = ((y^2)^2 - 1)^2)$

$F_6 ::= (z^1 = ((x^1 + 1)^2 - 1)^2)$

$F_5 ::= (z^1 = ((x^1 - 1)^2 - 1)^2)$

$F_4 ::= (z^1 = ((x^2)^2 - 1)^2)$

$$F_3 ::= (z^1 = ((x^1 - 1)^2 - 1)^2)$$

$$F_2 ::= [(x^2 \leqslant c_2^0) \supset F_4] \,\&\, [\urcorner (x^2 \leqslant c_2^0) \supset [F_3]_{x^2}^{x^1}]$$

$$F_1 ::= [(x_1^2 > c_1^0) \supset F_2] \,\&\, [\urcorner (x_1^2 > c_1^0) \supset [F_5]_{x^2}^{x^1}]$$

$$\mathbf{F}_0 ::= \mathbf{F}_1.$$

După înlocuirea variabilei x^2 cu variabila x^0 obținem formula

$$\{(x^0 > c_1^0) \supset [[(x^0 \leqslant c_2^0) \supset (z^1 = ((x^0)^2 - 1)^2)] \,\&\, [\urcorner (x^0 \leqslant c_2) \supset$$

$$\supset (z^1 = ((x^0 - 1)^2 - 1)^2)]]\} \,\&\, \{\urcorner (x^0 > c_1^0) \supset (z' = ((x^0)^2 - 1)^2)\},$$

care este formula complet atașată algoritmului considerat.

Primită la redacție la 9 decembrie 1965

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. M. R. Karp, *A note on the application of graph theory to digital computer programmin*, Inf. and Control, 3, *2* 170—190 (1960).
2. T. R. Prosser, *Application of Boolean matrices to the analysis of flow diagrams*. Proc. Eastern Joint Computer Conf., 1959.
3. В. В. Мартинюк, *О некоторых методах анализа операторных схем*, Автореферат, МГУ, 1963.
4. Л. А. Калугин, *Об алгоритмизации математических задач*. Проблемы кибернетики, вып. 3 (1959).
5. C. Berge, *Theorie des Graphes et ses applications*. Dunod, Paris, 1958.
6. Е. Мунтяну, *Метод анализа граф-схемных алгорифтов*, Matematica, **5/28/**, *2* (1963).

ASUPRA ECUAȚIILOR MECANICII ANALITICE PENTRU CAZUL SISTEMELOR MATERIALE PERCUTATE

DE

EMIL TOKACI
(Petroșani)

Lucrarea prezintă o generalizare a ecuațiilor Lagrange, Hamilton și Appell, pentru studiul mișcării sistemelor materiale care sînt simultan acționate de forțe continue în raport cu timpul și de forțe percutante, prin utilizarea teoriei distribuțiilor.

Pentru exemplificare s-au considerat și cazurile particulare ale unui corp rigid-liber, percutat, corp rigid cu un punct fix și corp rigid cu o axă fixă, acționate de forțe continue în raport cu timpul și de forțe percutante.

Prin considerarea mișcării discontinui, a unui sistem material percutat, ca un caz limită de mișcare continuă, devine posibilă utilizarea ecuațiilor lui Lagrange, ecuațiilor canonice ale lui Hamilton, sau ecuațiilor lui Appell, în studiul sistemelor materiale percutate.

Fie $\overline{\Phi}_s$ o funcție vectorială de timp, de forma :

$$\overline{\Phi}_s = \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj}\, y_j \tag{1}$$

unde $y_j = y_j(\lambda, t)$ este o funcție scalară, astfel încît

$$\lim_{\lambda \to a} y_j = \delta(t - \tau_j)\,, \tag{2}$$

$\delta(t - \tau_j)$ fiind distribuția lui Dirac.

Se poate verifica imediat că funcția continuă și indefinit derivabilă în raport cu timpul (t),

$$y_j = \frac{1}{(\lambda - a)^2\left[e^{\frac{t-\tau_j}{(\lambda-a)^2}} + e^{-\frac{t-\tau_j}{(\lambda-a)^2}} + 2\right]} \tag{3}$$

satisface condiția (2).

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1129–1138, BUCUREȘTI, 1966

Într-adevăr,

$$(4)\qquad \lim_{\lambda\to a}\int_l^m \frac{\mathrm{d}t}{(\lambda-a)^2\left[\mathrm{e}^{\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+2\right]}=\begin{cases}1, \text{ pentru } \tau\in(l,\,m)\\ 0, \text{ pentru } \tau\notin(l,\,m)\end{cases}$$

şi

$$\left|\int_l^m \frac{\mathrm{d}t}{(\lambda-a)^2\left[\mathrm{e}^{\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+2\right]}\right|<1 \text{ pentru orice } \lambda,\ l \text{ şi } m.$$

Pentru un sistem format din n puncte materiale M_s $(s=1,2,\ldots,n)$ şi avînd h grade de libertate, ecuaţiile de speţa a doua ale lui Lagrange sînt :

$$(5)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=P_i\,, \qquad (i=1,2,\ldots,h)$$

în care T este energia cinetică, t este timpul, q_i şi $\dot q_i$ sînt coordonatele generalizate respectiv vitezele generalizate, iar

$$P_i=\sum_{s=1}^{n}\overline{R}_s\frac{\partial\overline{r}_s}{\partial q_i}$$

este forţa generalizată.

Vectorii de poziţie $\overline{r}_s=\overline{r}_s(t,q_i)$ sînt funcţii care aparţin cel puţin clasei C^2, în raport cu cele $h+1$ variabile ale lor, iar forţele $\overline{R}_s$ vor fi considerate, în vederea studiului percuţiilor, ca avînd expresia :

$$(6)\qquad \overline{R}_s=\overline{F}_s+\sum_{j=1}^{k}\frac{\overline{p}_{sj}}{(\lambda-q)^2\left[\mathrm{e}^{\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+2\right]}$$

ceea ce este întotdeauna posibil, ţinînd seama de faptul că vectorii constanţi $\overline{p}_{sj}$ pot fi, în particular, şi nuli.

Dacă $\overline{F}_s$ este o funcţie ce aparţine clasei C^p, atunci şi $\overline{R}_s$ va aparţine aceleaşi clase, pentru că (3) este indefinit derivabilă.

Adoptînd notaţia $Q_i=\sum\limits_{s=1}^{n}\overline{F}_s\dfrac{\partial\overline{r}_s}{\partial q_i}$, sistemul (5) devine :

$$(5')\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{\overline{p}_{sj}\dfrac{\partial\overline{r}_s}{\partial q_i}}{(\lambda-a)^2\left[\mathrm{e}^{\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau j}{(\lambda-a)^2}}+2\right]}$$

prin a cărui integrare se obţin coordonatele generalizate $q_i=q_i(t,\lambda)$ care se presupun că aparţin cel puţin clasei C^2.

Fie

$$(7)\qquad \lim_{\lambda\to a}q_i=\omega_i\,;\ \lim_{\lambda\to a}\dot q_i=\dot\omega_i\,;\ \lim_{\lambda\to a}\ddot q_i=\ddot\omega_i\,.$$

În ipoteza că funcţia $T = T(t, q_i, \dot{q}_i)$ şi derivatele sale

$$\frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial q_i}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial q_i}, \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial \dot{q}_i}, \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial q_\alpha}, \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_\alpha}, \quad (i, \alpha = 1, 2, \ldots, h)$$

sînt uniform continue şi că ω_i şi $\dot{\omega}_i$ aparţin domeniului de definiţie al lui T, se pot scrie egalităţile :

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\lim_{\lambda \to a} T = T(t, \omega_i, \dot{\omega}_i) = T_p \\ &\lim_{\lambda \to a} \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial T_p}{\partial \omega_i} \\ &\lim_{\lambda \to a} \frac{\partial^2 T}{\partial t \, \partial \dot{q}_i} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial t \partial \dot{\omega}_i} \\ &\lim_{\lambda \to a} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial \dot{\omega}_i \, \partial \omega_\alpha} \\ &\lim_{\lambda \to a} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial^2 T_p}{\partial \dot{\omega}_i \, \partial \dot{\omega}_\alpha}. \end{aligned} \qquad (i, \alpha = 1, 2, \ldots, h)$$

cu $\frac{\partial^2 T_p}{\partial \dot{\omega}_i \, \partial \omega_\alpha}$ finită, $\dot{\omega}_i$ finită, $\frac{\partial^2 T_p}{\partial \dot{\omega}_i \partial \dot{\omega}_\alpha}$ finită şi diferită de zero, ceea ce corespunde realităţii fizice; deoarece orice sistem are o viteză finită şi o derivată finită şi nenulă, a energiei cinetice în raport cu viteza, se poate considera limita

$$\lim_{\lambda \to a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \lim_{\lambda \to a} \frac{\partial^2 T}{\partial t \, \partial \dot{q}_i} + \lim_{\lambda \to a} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial q_\alpha} \lim_{\lambda \to a} \dot{q}_\alpha + \lim_{\lambda \to a} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \, \partial \dot{q}_\alpha} \lim_{\lambda \to a} \ddot{q}_\alpha$$

care, în virtutea relaţiilor (7) şi (8), ia forma :

$$(8') \qquad \lim_{\lambda \to a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial^2 T_p}{\partial t \, \partial \dot{\omega}_i} + \frac{\partial^2 T_p}{\partial \dot{\omega}_i \, \partial \omega_\alpha} \dot{\omega}_\alpha + \frac{\partial^2 T_p}{\partial \dot{\omega}_i \, \partial \dot{\omega}_\alpha} \ddot{\omega}_\alpha$$

unde α este indice mut, iar energia cinetică T_p întotdeauna o funcţie polinomică în raport cu $\dot{\omega}_i$, ceea ce rezultă chiar din modul de definire al energiei cinetice.

Sub altă formă :

$$(8'') \qquad \lim_{\lambda \to a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_p}{\partial \dot{\omega}_i}\right).$$

Fiindcă $\overline{F}_s$ nu depinde de parametrul λ, şi potrivit egalităţilor (1), (2), (3), (4), rezultă :

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\lim_{\lambda \to a} \overline{F}_s = \overline{F}_s, \\ &\lim_{\lambda \to a} \overline{\Phi}_s = \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj} \, \delta(t - \tau_j). \end{aligned}$$

Ultima relație dă tocmai forța de percuție care acționează punctul M_s $(s = 1, 2, \ldots, h)$ al sistemelor materiale, sub acțiunea percuțiilor $\overline{p}_{sj}$. Afirmația se justifică imediat, dacă se ține seama că aplicarea percuțiilor $\overline{p}_{sj}$ în punctul M_s și la momentele τ_j, conduce la o variație a impulsului $\Delta \overline{G}_s$, care se poate exprima în felul următor :

$$\Delta \overline{G}_s = \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj} H(t - \tau_j) \tag{10}$$

$H(t - \tau_j)$ fiind funcția lui Heaviside.

Forța de percuție $\overline{\Phi}_{ps}$ va fi obținută prin derivarea, în raport cu timpul, a vectorului $\Delta \overline{G}_s$:

$$\overline{\Phi}_{ps} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta \overline{G}_s) = \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj}\, \delta(t - \tau_j)\,. \tag{11}$$

Derivarea trebuie considerată în sensul teoriei distribuțiilor.

Comparînd (9) cu (11) se ajunge la :

$$\lim_{\lambda \to a} \overline{\Phi}_s = \overline{\Phi}_{ps} \tag{9'}$$

ceea ce era de demonstrat.

Deci cazul limită $(\lambda \to a)$ corespunde situației în care sistemul material este percutat.

Pe de altă parte, cum $\overline{r}_s$ aparține cel puțin clasei C^2, în raport cu toate cele $h + 1$ variabile ale sale, ω_i făcînd parte din domeniul de definiție al funcției $\overline{r}_s = \overline{r}_s(t, q_i)$, rezultă :

$$\begin{gathered} \lim_{\lambda \to a} \overline{r}_s = r_s(t, \omega_i) = \overline{r}_{ps} \\ \lim_{\lambda \to a} \frac{\partial \overline{r}_s}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{r}_{ps}}{\partial \omega_i}\,. \end{gathered} \tag{12}$$

Și ca o consecință imediată, apar limitele :

$$\begin{gathered} \lim_{\lambda \to a} Q_i = Q_{pi} = \sum_{s=1}^{n} \overline{F}_s \frac{\partial \overline{r}_{ps}}{\partial \omega_i}\,, \\ \lim_{\lambda \to a} \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{p}_{sj} \dfrac{\partial \overline{r}_s}{\partial q_i}}{(\lambda - a)^2 \left[\mathrm{e}^{\frac{t - \tau_i}{(\lambda - a)^2}} + \mathrm{e}^{-\frac{t - \tau_j}{(\lambda - a)^2}} + 2 \right]} = \Gamma_i = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj} \frac{\partial \overline{r}_{ps}}{\partial \omega_i}\, \delta(t - \tau_j). \end{gathered} \tag{13}$$

Ținînd seama de faptul că trecerea la limită $(\lambda \to a)$ corespunde cazului în care sistemul suferă percuții, considerînd sistemul (5′) pentru acest caz limită, conform relațiilor (8), (8″) și (13) se obțin ecuațiile lui Lagrange pentru sistemele percutate :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_p}{\partial \dot{\omega}_i}\right) - \frac{\partial T_p}{\partial \omega_i} = Q_{pi} + \Gamma_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h), \tag{14}$$

unde T_p, ω_i şi $\dot{\omega}_i$ sînt energia cinetică a sistemului percutat, coordonatele generalizate şi vitezele generalizate, respectiv.

Q_{pi} este forţa generalizată corespunzătoare forţelor nepercutate (continue) care acţionează sistemul percutat, iar Γ_i este forţa generalizată de percuţie.

De remarcat că integrarea sistemului (14), care trebuie făcută în sensul teoriei distribuţiilor, dă legea de mişcare a sistemului studiat, pentru întregul interval de timp în care are loc mişcarea, cu excepţia unei mulţimi de momente de măsură nulă, adică cu excepţia momentelor în care se aplică percuţiile ($t = \tau_j$) în care vitezele şi acceleraţiile nu sînt determinate. Aceasta însă nu diminuează cu nimic eficacitatea metodei, care permite stabilirea efectelor percuţiilor şi a tuturor parametrilor mişcării, cunoscuţi în orice vecinătate a lui $t = \tau_j$.

Interesant de observat este că funcţiei (3) îi corespunde şirul aproape uniform convergent

$$\left\{\frac{n}{e^{n(t-\tau_j)} + e^{-n(t-\tau_j)} + 2}\right\} \rightrightarrows \delta(t - \tau_j)$$

care, după Mikuzinski, este unul dintre şirurile fundamentale ce definesc distribuţia lui Dirac.

Evident că în locul funcţiei (3) se putea considera oricare altă funcţie, care să satisfacă condiţia (2).

Revenind la ecuaţiile (14), dacă există o funcţie de potenţial $U_p = U_p(t, \omega_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ astfel încît $Q_{pi} = \dfrac{\partial U_p}{\partial \omega_i}$ cum întotdeauna se poate scrie:

$$\Gamma_i = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj} \frac{\partial \overline{r}_{ps}}{\partial \omega_i} \delta(t - \tau_j) = \frac{\partial}{\partial \omega_i}\left[\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj} \overline{r}_{ps} \delta(t - \tau_j)\right]$$

pentru că percuţiile $\overline{p}_{sj}$, fiind aplicate instantaneu, sînt constante în timp şi spaţiu, notînd:

$$L = T_p + U_p + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \overline{p}_{sj} \overline{r}_{ps} \delta(t - \tau_j) \tag{15}$$

se stabileşte:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h) \tag{14'}$$

Ecuaţiile (14') sînt formal identice cu cele din cazul sistemelor nepercutate. Aici, însă, unde apar percuţiile, funcţia lui Lagrange, L, conţine termenul suplimentar corespunzător.

Pentru stabilirea sistemului canonic al lui Hamilton în cazul sistemelor materiale percutate, se consideră iniţial sistemul canonic, corespunzător lui (5'), ceea ce este întotdeauna posibil, datorită continuităţii.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial \gamma_i}. \end{aligned} \tag{16}$$

În (16) H este funcţia lui Hamilton, γ_i impulsul generalizat, iar q_i coordonatele generalizate pentru mişcarea continuă reprezentată de (5').

Dacă

$$\lim_{\lambda \to a} \gamma_i = \gamma_{pi} ; \ \lim_{\lambda \to a} \dot{\gamma}_i = \dot{\gamma}_{pi} ; \ \lim_{\lambda \to a} q_i = \omega_i ; \ \lim_{\lambda \to a} \dot{q}_i = \dot{\omega}_i$$

$$\lim_{\lambda \to a} H(t, q_i, \gamma_i) = H(t, \omega_i, \gamma_{pi}) = H_p, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

pentru sistemele percutate, forma canonică va fi :

$$\text{(16')} \qquad \begin{aligned} \dot{\gamma}_{pi} &= -\frac{\partial H_p}{\partial \omega_i} \\ \dot{\omega}_i &= \frac{\partial H_p}{\partial \gamma_{pi}} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

identică cu cea din cazul mişcărilor continue (cînd nu sînt percuţii) însă numai formal, pentru că H în (16') conţine termenul suplimentar, corespunzător forţei generalizate de percuţie din (14). Acest termen suplimentar introducînd distribuţia lui Dirac, integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale trebuie, de asemenea, făcută în sensul teoriei distribuţiilor. Legea de mişcare astfel găsită dă imediat toţi parametrii mişcării, pe întregul interval de timp, cu excepţia mulţimii de măsură nulă a momentelor ciocnirilor ($t = \tau_j$) în care nu se pot cunoaşte vitezele şi acceleraţiile. (Acestea sînt însă perfect cunoscute pentru $t = \tau_j \pm \varepsilon$, unde ε poate să fie oricît de mic).

În sfîrşit, ecuaţiile de mişcare date de Paul Appell, atunci cînd alături de forţele continue apar şi percuţiile, se obţin tot ca un caz limită al mişcării continue.

Fie astfel ecuaţiile lui Appell,

$$\text{(17)} \qquad \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i} = P_i$$

unde $A = A(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$ este energia de acceleraţie. Din definiţia energiei de acceleraţie $\left(A = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{2} m_s \frac{d^2 \bar{r}_s}{dt^2}\right)$, rezultă că aceasta este o funcţie polinomică în raport cu $\ddot{q}_i$ (coeficienţii polinomului fiind evident funcţie de celelalte variabile) şi continuă pentru toate variabilele sale, coordonate, viteze şi acceleraţii generalizate.

Cu ω_i, $\dot{\omega}_i$ şi $\ddot{\omega}_i$ aparţinînd domeniului de definiţie al funcţiei A, potrivit egalităţilor (7), energia de acceleraţie a sistemului percutat este :

$$\text{(18)} \qquad A_p = \lim_{\lambda \to a} A = A(t, \omega_i, \dot{\omega}_i, \ddot{\omega}_i)$$

iar

$$\text{(18')} \qquad \lim_{\lambda \to a} \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{\partial A_p}{\partial \ddot{\omega}_i}.$$

Dacă P_i este acelaşi ca în (5), adică dacă

$$P_i = Q_i + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{\overline{p}_{sj} \dfrac{\partial \overline{r}_s}{\partial q_i}}{(\lambda - a)^2 \left[e^{\frac{t-\tau_j}{(\lambda-a)^2}} + e^{-\frac{t-\tau_j}{(\lambda-a)^2}} + 2 \right]},$$

pentru sistemul percutat, partea din dreapta a egalităţii (19) devine $\lim\limits_{\lambda \to a} P_i = Q_{pi} + \Gamma_i$ cu notaţiile din (13).

În consecinţă, ecuaţiile lui Appell, pentru sistemele materiale acţionate de forţe continue şi de forţe de percuţie vor fi :

$$\text{(19)} \qquad \frac{\partial A_p}{\partial \ddot{\omega}_i} = Q_{pi} + \Gamma_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

Remarca făcută în legătură cu ecuaţiile lui Lagrange îşi păstrează valabilitatea şi pentru ecuaţiile (21).

În concluzie, printr-un proces de limită, ecuaţiile mecanicii analitice au fost adoptate studiului mişcărilor discontinue. Prin integrarea acestora, în sensul teoriei distribuţiilor (datorită introducerii distribuţiei lui Dirac), se cunoaşte poziţia sistemului studiat, în orice moment t. Deşi vitezele şi acceleraţiile nu sînt definite pentru $t = \tau_j$, ele sînt cunoscute în orice vecinătate a lui $t = \tau_j$; $(j = 1, 2, \ldots, k)$, ceea ce face ca eficienţa metodei să nu fie afectată.

În cele ce urmează se dau cîteva exemple de calcul.

a) Mişcarea unui corp rigid liber, neacţionat de forţe continue, căruia i se aplică la momentul $t = \tau$ percuţia $\overline{P}$, în punctul $M(x_s, y_s, z_s)$.

Se vor utiliza ecuaţiile lui Lagrange (14).

Pentru că $\overline{F}_s = 0$, atunci şi $Q_{pi} = 0$. Pentru alegerea coordonatelor generalizate se consideră sistemele de referinţă $O_1x_1y_1z_1$ fix, şi $Oxyz$ mobil, solidar cu rigidul, cu originea O în centrul de masă al acestuia. Cele şase coordonate generalizate, corespunzătoare celor şase grade de libertate ale corpului liber sînt :

$$\omega_1 = x_0;\ \omega_2 = y_0;\ \omega_3 = z_0;\ \omega_4 = \int \Omega_x \, dt + \theta_1;\ \omega_5 = \int \Omega_y \, dt + \theta_2;$$

$$\omega_6 = \int \Omega_z \, dt + \theta_3;$$

unde x_0, y_0 şi z_0 sînt coordonatele centrului de greutate O al corpului, faţă de $O_1x_1y_1z_1$; Ω_x, Ω_y şi Ω_z proiecţiile vitezei unghiulare $\overline{\Omega}$ pe axele sistemului $Oxyz$ legat de rigid, iar θ_1, θ_2 şi θ_3 constante care depind de poziţia iniţială.

Aplicînd (14) se obţine :

$$m\ddot{x}_0 = P_{x_1} \delta(t - \tau)$$

$$m\ddot{y}_0 = P_{y_1} \delta(t - \tau)$$

$$m\ddot{z}_0 = P_{z_1} \delta(t - \tau)$$

$$I_x \varepsilon_x = (y_s P_z - z_s P_y)\, \delta (t - \tau)$$
$$I_y \varepsilon_y = (z_s P_x - x_s P_z)\, \delta (t - \tau)$$
$$I_z \varepsilon_z = (x_s P_y - y_s P_x)\, \delta (t - \tau)\,.$$

S-a notat cu m masa corpului, cu I_x, I_y, I_z momentele de inerție față de axele Ox, Oy și Oz, care au fost alese tocmai axele principale de inerție (pentru simplificarea calculelor $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$); ε_x, ε_y și ε_z sînt proiecțiile accelerației unghiulare pe axele sistemului legat de rigid, iar P_{x_1}, P_{y_1}, P_{z_1} și P_x, P_y, P_z sînt proiecțiile percuției P pe axele sistemului $O_1 x_1 y_1 z_1$ și $O\,xyz$.

Integrînd (în sensul teoriei distribuțiilor) se stabilește:

$$m\,\dot{x}_0 = P_{x_1} H (t - \tau) + C_1\,; \quad m\,\dot{y}_0 = P_{y_1} H (t - \tau) + C_2\,;$$
$$m\,\dot{z}_0 = P_{z_1} H (t - \tau) + C_3$$
$$I_x \Omega_x = (y_s P_z - z_s P_y) H (t - \tau) + C_4\,; \; I_y \Omega_y = (z_s P_x - x_s P_z) H (t - \tau) + C_5$$
$$I_z \Omega_z = (x_s P_y - y_s P_x) H (t - \tau) + C_6\,.$$

Constantele $C_1, C_2, \ldots, C_6$ se determină din condițiile inițiale. În cazul de față, pentru că nu acționează forțe continue, este suficient să se considere $t < \tau$, și se găsește:

$$C_1 = mV_{0x_1}\,; \; C_2 = mV_{0y_1}\,; \; C_3 = mV_{0z_1}\,; \; C_4 = I_x \Omega_{0x}\,;$$
$$C_5 = I_y \Omega_{0y}\,; \; C_6 = I_z\, \Omega_{0z}$$

unde

$$V_{0x_1},\; V_{0y_1},\; V_{0z_1} \text{ și } \Omega_{0x},\; \Omega_{0y},\; \Omega_{0z}$$

sînt proiecțiile vitezei centrului de masă pe axele sistemului fix $O_1 x_1 y_1 z_1$ și respectiv proiecțiile vitezei unghiulare $\overline{\Omega}$, în jurul centrului de masă, pe axele sistemului $Oxyz$ legat de corp, *înainte de percuție*.

Rezultă că percuția $\overline{P}$ a determinat variațiile de viteză

$$\Delta V_{0x_1} = \frac{P_{x_1}}{m}\,; \quad \Delta V_{0y_1} = \frac{P_{y_1}}{m}\,; \quad \Delta V_{0z_1} = \frac{P_{z_1}}{m}$$

$$\Delta \Omega_x = \frac{y_s P_z - z_s P_y}{I_x}\,; \quad \Delta \Omega_y = \frac{z_s P_x - x_s P_z}{I_y}\,; \quad \Delta \Omega_z = \frac{x_s P_y - y_s P_z}{I_z}$$

care se obțin imediat, dacă în relațiile de mai sus se ia un moment $t > \tau$.

S-au regăsit pe această cale rezultatele cunoscute.

Pentru determinarea coordonatelor generalizate se integrează încă odată.

b) Aplicarea ecuațiilor canonice ale lui Hamilton, unui corp cu punct fix care primește percuția $\overline{P}$ la momentul $t = \tau$ în punctul $M(x_s, y_s, z_s)$.

Coordonatele generalizate vor fi în acest caz

$$\omega_1 = \int \Omega_x \,\mathrm{d}t + \theta_1\,; \quad \omega_2 = \int \Omega_y \,\mathrm{d}t + \theta_2\,; \quad \omega_3 = \int \Omega_z \,\mathrm{d}t + \theta_3$$

cu notațiile cunoscute.

Funcţia lui Hamilton va fi

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_{p_1}^2}{I_x} + \frac{\gamma_{p_2}^2}{I_y} + \frac{\gamma_{p_3}^2}{I_z}\right] - [P_x(z_s\omega_2 - y_s\omega_3) + P_y(x_s\omega_3 - z_s\omega_1) +$$

$$+ P_z(y_3\,\omega_1 - x_s\,\omega_2)]\,\delta(t-\tau) + U_0 .$$

Sistemul de referinţă ales este şi aici format din axele principale de inerţie. γ_{p_1}, γ_{p_2}, γ_{p_3} sînt impulsurile generalizate. Restul notaţiilor se cunosc din exemplul precedent. Funcţia de potenţial U_0 este constantă, pentru că nu acţionează forţe continue.

Ecuaţiile canonice iau forma următoare :

$$\dot{\gamma}_{p_1} = (y_s\,P_z - z_s\,P_y)\,\delta(t-\tau),$$

$$\dot{\gamma}_{p_2} = (z_s\,P_x - x_s\,P_z)\,\delta(t-\tau),$$

$$\dot{\gamma}_{p_3} = (x_s\,P_y - y_s\,P_x)\,\delta(t-\tau),$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\gamma_{p_1}}{I_x} = \Omega_x ,$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{\gamma_{p_2}}{I_y} = \Omega_y ,$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{\gamma_{p_3}}{I_z} = \Omega_z .$$

Integrîndu-le pe primele trei în sensul teoriei distribuţiilor şi determinînd constantele arbitrare, rezultă variaţiile proiecţiilor vitezei unghiulare, datorite percuţiei :

$$\Delta\Omega_x = \frac{y_sP_z - z_sP_y}{I_x}\,;\;\; \Delta\Omega_y = \frac{z_sP_x - x_sP_z}{I_y}\,;\;\; \Delta\Omega_z = \frac{x_sP_y - I_sP_x}{I_z}$$

adică se regăsesc expresiile stabilite pe altă cale.

Coordonatele generalizate se găsesc imediat, din integrarea ecuaţiilor :

$$\dot{\omega}_1 = \frac{y_sP_z - z_sP_y}{I_x}\,H(t-\tau) + \Omega_{0x}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{z_sP_x - x_sP_z}{I_y}\,H(t-\tau) + \Omega_{0y}$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{x_sP_y - z_sP_x}{I_z}\,H(t-\tau) + \Omega_{0z}$$

în care $H(t-\tau)$ este funcţia lui Heaviside, iar Ω_{0x}, Ω_{0y} şi Ω_{0z} proiecţiile vitezei unghiulare înainte de percuţie.

c) Ecuațiile lui Appell în studiul unui corp cu axă fixă, percutat cu $\overline{P}$, la momentul $t = \tau$ în punctul $M(x_s, y_s, z_s)$, și acționat în punctul $N(x_A, y_A, z_A)$ de o forță continuă $\overline{F} = \bar{i} F_x + j F_y + \bar{k} F_z$.

Rigidul are un singur grad de libertate, singura coordonată generalizată fiind $\omega = \int \Omega \, \mathrm{d}t$ cu Ω viteza unghiulară, iar energia de accelerație $A = I_z \dfrac{\varepsilon^2 + \Omega^4}{2}$.

Sistemul (21) se reduce la o singură ecuație diferențială :

$$I_z \varepsilon = x_A F_y - y_A F_x + (x_s P_y - y_s p_x) \, \delta (t - \tau)$$

unde ε este $\dot{\Omega}$ sau $\ddot{\omega}$. În sistemul de referință, $Oxyz$, ales, care este legat de rigid și are axa OZ chiar axa de rotație, restul notațiilor sînt evidente.

Integrînd se obține :

$$I_z \Omega = (x_s P_y - y_s P_x) H (t - \tau) + \int (x_A F_y - y_A F_x) \, \mathrm{d}t$$

unde F_x și F_y au fost presupuse funcții continue de timp.

Saltul vitezei unghiulare, provocat de percuție, rezultă imediat, din introducerea în relația de mai sus a valorilor $t = \tau - \varepsilon$ și $t = \tau + \varepsilon$, situate într-o vecinătate a lui τ :

$$\Delta\Omega = \frac{x_s P_y - y_s P_x}{I_z}$$

Notînd $\int (x_A F_y - y_A F_x) \, \mathrm{d}t = \varphi (t)$ și integrînd încă o dată (în sensul teoriei distribuțiilor) rezultă :

$$I_z \omega = (x_s P_y - y_s P_x) (t - \tau) H (t - \tau) + \int \varphi (t) \, \mathrm{d}t ,$$

ω, coordonata generalizată, este tocmai unghiul de rotație.

Regăsirea, în exemplele simple de mai sus, a rezultatelor cunoscute, și considerarea unei diversități de cazuri particulare mai complicate, justifică folosirea metodei prezentate în această lucrare.

Primită la redacție la 17 ianuarie 1966

Institutul de Mine Petroșani

BIBLIOGRAFIE

1. M. BOUIX, *Les fonctions generalisées ou distributions*. Masson, Paris, 1964.
2. WILHELM KECS, *Asupra unor aplicații ale teoriei distribuțiilor în Mecanica teoretică și aplicată*. St. cerc. mat., **15**, (1964).
3. IOAN PLĂCINȚEANU, *Mecanica vectorială și analitică*, Ed. tehnică, București, 1958.
4. VICTOR VÂLCOVICI, ȘTEFAN BĂLAN, RADU VOINEA, *Mecanica teoretică*. Ed. tehnică, București, 1963.

DESPRE REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE PRIN METODA LUI CEBÎȘEV

DE

B. JANKÓ și A. GAIDICI
(Cluj)

În lucrarea de față sînt prezentate teoreme de existență a soluției ecuației operaționale $P(x) = 0$, derivatele $P''(x)$, $P'''(x)$ fiind mărginite în normă [1], [2] sau derivata $P''(x)$ satisfăcînd o condiție de tip Hölder [3], [4] respectiv de tip Lipschitz.

În această lucrare vom prezenta cîteva teoreme ce se referă la existența soluției ecuației operaționale

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

unde operația $P(x)$ este neliniară, definită într-un domeniu S complet și convex al spațiului liniar normat X și cu valori în spațiul Y de același tip. Mai presupunem că operația $P(x)$ este continuă și admite derivate de tip Fréchet, pînă la ordinul 3 inclusiv.

Metoda lui Cebîșev este dată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \frac{1}{2}\Gamma_n P''(x_n)[\Gamma_n P(x_n)]^2, \tag{2}$$

unde s-a notat prin $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$. La aplicarea metodei (2) se alege în prealabil aproximația inițială $x_0 \in S \subset X$, iar elementele $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots)$ se calculează succesiv prin (2).

Teoremele 1, 2 sînt asemănătoare cu cea dată de M. I. Necepurenko în [4], unde se demonstrează că ordinul de convergență este 2 iar condiția asupra lui h_0 fiind mai restrictivă decît cea impusă de noi. În [1] și [2] sînt prezentate teoreme analoage cu teoremele 1, 2 pentru ecuații funcționale.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1139–1145, BUCUREȘTI, 1966

Ideea ce stă la baza celorlalte teoreme 3 și 4 din prezenta lucrare, este aceea că în algoritmul (2) nu intervine $P'''(x)$, condiție pe care noi o vom înlocui cu cea a lui Hölder (3) aplicată asupra derivatei $P''(x)$:

$$\| P''(x') - P''(x'') \| \leqslant N \| x' - x'' \|^{\alpha}, \quad x', x'' \in S \tag{3}$$

(N și α sînt constante $0 < \alpha \leqslant 1$). În particular, pentru $\alpha = 1$, (3) devine o condiție de tip Lipschitz, iar teoremele 3 și 4 în acest caz sînt asemănătoare cu teoremele 1, 2, schimbînd rolul lui K cu cel al lui N dat de (3).

TEOREMA 1. *Dacă pentru aproximația inițială x_0 sînt satisfăcute următoarele condiții :*

1° *există $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ și are loc delimitarea $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$*

2° *are loc inegalitatea $\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \eta_0$*

3° *pentru derivatele $P''(x)$ și $P'''(x)$ avem delimitările*

$\| P''(x) \| \leqslant M$, $\| P'''(x) \| \leqslant K$, *pentru orice $x \in S$ iar constantele B_0, η_0, M și K sînt legate prin relațiile*

4° $0 < h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$

5° $E_0 \leqslant 2$

$$\textit{unde } E_n^2 = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_n}{4}\right) + \frac{K}{6M^2 B_n}\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)^3}{H_n^2} \quad \text{și } H_n = 1 - h_n\left(1 + \frac{h_n}{2}\right)$$

atunci pentru ecuația (1) există cel puțin o soluție $x^* \in S\left(x_0, \dfrac{\eta_0}{h_0}\right)$ care este limita aproximațiilor succesive $\{x_n\}$. Rapiditatea convergenței este caracterizată prin delimitarea

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{1}{h_0} H^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0. \tag{1.1}$$

Înainte de a trece la demonstrație, introducem notațiile

$$P(x_n) = P_n, \; P'(x_n) = P'_n, \; P''(x_n) = P'_n$$

Demonstrație. Se arată că trecînd de la x_0 la x_1, condițiile 1°—5° rămîn valabile.

Din formula generalizată a lui Lagrange

$$\| P'_0 - P'_1 \| \leqslant M \| x_1 - x_0 \|, \tag{I}$$

din (2) și 4° avem

$$\| \Gamma_0 (P'_0 - P'_1) \| \leqslant h_0 \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) < 1$$

Considerăm operatorul

$$R_0 = [I - \Gamma_0 (P'_0 - P'_1)]^{-1}$$

a cărui normă este $\|R_0\| \leqslant \frac{1}{H_0}$ iar $R_0 \Gamma_0 = [P'_1]^{-1} = \Gamma_1$ şi

$$\|\Gamma_1\| \leqslant \|R_0\| \; \|\Gamma_0\| \leqslant \frac{B_0}{H_0} = B_1, \; B_1 > B_0. \tag{2.1}$$

Din formula generalizată a lui Taylor :

$$\|P_1 - P_0 - P'_0 (x_1 - x_0) - \frac{1}{2} P''_0 (x_1 - x_0)^2\| \leqslant \frac{K}{6} \|x_1 - x_0\|^3 \tag{II}$$

şi (2) obţinem

$$\|P_1\| \leqslant M^2 B_0 \eta_0^3 (E_0 H_0)^2 = \frac{\eta_0}{B_0} (h_0 E_0 H_0)^2$$

iar expresia lui

$$\eta_1 = \|\Gamma_1 P_1\| \leqslant H_0 (E_0 h_0)^2 \eta_0 \leqslant H_0 \eta_0 < \eta_0 \tag{3.1}$$

respectiv a lui

$$h_1 = B_1 M \eta_1 \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_0)^3, \; h_1 \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2} \tag{4.1}$$

iar din aceasta,

$$H_1 \geqslant H_0.$$

Din (2.1), (4.1) şi (5.1) avem

$$E_1 \leqslant E_0 \leqslant 2.$$

Pe baza inducţiei complete putem scrie relaţiile

$$h_{n+1} \leqslant \frac{1}{E_0} (E_0 h_n)^3, \tag{6.1}$$

$$\eta_{n+1} \leqslant H_0 (E_0 h_0)^{2 \cdot 3^n} \eta_n. \tag{7.1}$$

Apoi din (6.1) şi (7.1) rezultă

$$\eta_n \leqslant H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0. \tag{8.1}$$

Ştiind că $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \eta_n \left(1 + \frac{h_n}{2}\right)$ şi ţinînd seama de (8.1) obţinem

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{1}{h_0} H_0^n (E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_n. \tag{9.1}$$

De aici şi din faptul că S este complet, rezultă existenţa limitei $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Să arătăm că x^* este soluţia ecuaţiei (1). Din (II) şi (2), analog ca pentru P_1, obţinem

$$\| P_n \| \leqslant \frac{\eta_{n-1}}{B_{n-1}} (h_{n-1} E_{n-1} H_{n-1})^2$$

de unde rezultă că pentru $n \to \infty$, $P(x_n) \to 0$ şi în baza continuităţii lui $P(x)$ obţinem $P(x^*) = 0$.

Inegalitatea

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \| x_0 - x_1 \| + \| x_1 - x_2 \| + \dots + \| x_{n-1} - x_n \| <$$
$$< \eta_0 \left(1 + \frac{h_0}{2}\right)(1 + H_0 + \dots + H_0^{n-1}) < \frac{\eta_0}{h_0}$$

ne arată că aproximaţiile x_n nu ies din sfera S.

TEOREMA 2. *Dacă următoarele condiţii sînt îndeplinite,*

1° *există* $\| \Gamma(x) \| \leqslant B$ *pentru orice* $x \in S \subset X$, $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$

2° $\| \Gamma_0 P_0 \| \leqslant \eta_0$

3° $\| P''(x) \| \leqslant M$, $\| P'''(x) \| \leqslant K$

4° $h_0 g_0 < 1$

unde $h_0 = BM\eta_0$ *şi* $g_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{h_0}{4}\right) + \frac{K}{6M^2B}\left(1 + \frac{h_0}{2}\right)^3$, *atunci ecuaţia (1) admite cel puţin o soluţie* $x^* \in S$ *care este limita aproximaţiilor succesive* $\{x_n\}$. *Rapiditatea convergenţei se exprimă prin evaluarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant r (h_0 g_0)^{3^n - 1} \tag{1.2}$$

r fiind raza sferei S, definită de relaţia

$$\| x - x_0 \| \leqslant r, \; r = \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H \eta_0 \text{ şi } H = \sum_{i=0}^{\infty} (h_0 g_0)^{3^i - 1}$$

Demonstraţie. Analog ca în teoremă 1 obţinem

$$\| P_1 \| \leqslant \frac{\eta_0}{B} (h_0 g_0)^2.$$

Din această relaţie şi condiţia 1° rezultă expresia lui

$$\eta_1 = \|\Gamma_1 P_1\| \leqslant (h_0 g_0)^2 \eta_0 < \eta_0 \tag{2.2}$$

Apoi expresia lui

$$h_1 = BM \eta_1 \leqslant (h_0 g_0)^2 h_0 < h_0. \tag{3.2}$$

Din (2.2) şi (3.2) avem

$$g_1 < g_0 \tag{4.2}$$

În baza inducţiei complete obţinem

$$\eta_n \leqslant (h_{n-1} \, g_{n-1})^2 \, \eta_{n-1}, \tag{5.2}$$

$$h_n \leqslant \frac{1}{g_{n-1}} (h_{n-1} \, g_{n-1})^3, \tag{6.2}$$

din care

$$\eta_n < (h_0 g_0)^{3^n - 1} \eta_0 \tag{7.2}$$

$$h_n < \frac{1}{g_0} (h_0 g_0)^{3^n} \cdot \tag{8.2}$$

Ştiind că

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \left(1 + \frac{h_n}{2}\right) \eta_n$$

şi din (7.2) obţinem

$$\| x_{n+p} - x_n \| < \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) (h_0 g_0)^{3^n - 1} \eta_0 H. \tag{9.2}$$

De aici şi din faptul că S este complet rezultă (1.2).

Din relaţia $\| P(x_n) \| \leqslant \frac{\eta_{n-1}}{B} (h_{n-1} \, g_{n-1})^2$ împreună cu (7.2), condiţia 4° şi ţinînd seama de continuitatea lui $P(x)$ se obţine $P(x^*) = 0$, $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Uşor se obţine inegalitatea

$$\| x_0 - x_n \| \leqslant \left(1 + \frac{h_0}{2}\right) H \, \eta_0 \text{ care arată că } x_n \in S.$$

TEOREMA 3. *Dacă pentru aproximaţia iniţială* x_0 *sînt satisfăcute următoarele condiţii :*

1° $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$

2° $\|\Gamma_0 P_0\| \leqslant \eta_0$

3° $\|P''(x)\| \leqslant M; \ \|P''(x') - P''(x'')\| \leqslant N\|x' - x''\|^{\alpha}$

4° $0 < h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$

5° $E_0(\alpha) \leqslant 2$

atunci ecuaţia (1) admite cel puţin o soluţie $x^* \in S$, $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Rapiditatea convergenţei se exprimă prin delimitarea de forma (1.1) unde

$$E_n^2(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{h_n}{2}\right) + \frac{N\left(1+\frac{h_n}{2}\right)^{2+\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\cdot \eta_n^{\alpha-1}}{H_n^2} \text{ şi } H_n = 1 - h_n\left(1+\frac{h_n}{2}\right)$$

TEOREMA 4. *Dacă sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

1° $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$

2° $\|\Gamma_0 P_0\| \leqslant \eta_0$

3° $\|P''(x)\| \leqslant M, \ \|P''(x') - P''(x'')\| \leqslant N\| x' - x''\|^{\alpha}$

4° $h_0 g_0(\alpha) < 1$, *unde* $h_n = BM\eta_n$ *şi*

$$g_n^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{h_n}{4}\right) + \frac{N\left(1+\frac{h_n}{2}\right)^{\alpha+2}}{(1+\alpha)(2+\alpha)BM^2}\cdot \eta_n^{\alpha-1}$$

atunci ecuaţia (1) admite cel puţin o soluţie $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x^* \in S(x_0, r)$.

Rapiditatea convergenţei se exprimă prin (1.2) unde g_0 *este dat de expresia lui* $g_0(\alpha)$.

Metoda de demonstrare a teoremelor 3 şi 4 este analoagă cu cea a teoremelor 1 şi 2. În locul lui (II) ne servim de formula lui Wertheim [4] :

$$\text{(III)} \qquad \|P_1 - P_0 - P_0'(x_1 - x_0) - \frac{1}{2}P_0''(x_1 - x_0)^2\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\|x_1 - x_0\|^{2+\alpha}.$$

Primită la redacţie la 29 decembrie 1965

Institutul pedagogic Baia Mare

BIBLIOGRAFIE

1. B. Jankó, *Asupra metodei generalizate a lui Cebîşev (I)*. St. cerc. de mat. (Cluj), **XIII**, *1* (1962).
2. B. Jankó, *Asupra metodei generalizate a lui Cebîşev (II)*. St. cerc. de mat. (Cluj), **XIV**, *1* (1963).
3. В. А. Вертхейм, *Об условиях применения метода Ньютона*, ДАН СССР, **110**, *5*, (1956).
4. M. I. Necepurenko, *Despre metoda lui Cebîşev pentru ecuaţii funcţionale*. Узпехи математических наук, **IX**, *2* (*60*) (1964).

ASUPRA METODEI IPERBOLELOR TANGENTE APLICATE LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE

DE

B. JANKÓ și V. POP

(Cluj)

Se consideră ecuația reală (sau complexă) de forma $f(x) = 0$. Pentru rezolvarea acestei ecuații, G. S. Salehov [4] a studiat așa-zisul procedeu al iperbolelor tangente. M. A. Mertvețova [3] a extins metoda iperbolelor tangente la cazul ecuațiilor operaționale neliniare $P(x) = 0$, definite în spații normate, impunînd condiții de derivabilitate în sens Fréchet pînă la ordinul 3. În lucrarea [1] s-a dat o teoremă de existență și de convergență, unde condițiile impuse de Mertvețova sînt îmbunătățite într-un anumit sens.

În cele ce urmează vom generaliza rezultatele obținute în lucrarea [1].

Considerăm ecuația operațională

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară definită într-un domeniu S complet și convex al spațiului liniar normat X avînd valorile în spațiu Y de același tip. Se presupune că operația $P(x)$ este continuă și de două ori derivabilă în sensul lui Fréchet. Metoda iperbolelor tangente este dată prin algoritmul [3]:

$$x_{n+1} = x_n - Q_n \Gamma_n P(x_n), \tag{2}$$

unde am notat

$$\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1};$$

$$Q_n = \left[1 - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n)\right]^{-1}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1147–1153 BUCUREȘTI, 1966

iar $P'(x)$ și $P''(x)$ sînt derivatele de ordinul întîi și doi în sens Fréchet.

Se alege aproximația inițială $x_0 \in S \subset X$ iar elementele $x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n, \ldots \in X$ se calculează succesiv cu formula (2).

Referitor la existența soluției ecuației (1) precum și pentru convergența metodei date prin algoritmul (2) se dau următoarele teoreme :

TEOREMA I. *Dacă pentru elementul* x_0 *al aproximației inițiale sînt îndeplinite următoarele condiții :*

1°. *pentru derivata Fréchet* $P'(x_0)$ *există operația inversă* $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ *și are loc delimitarea* $\|\Gamma_0\| \leqslant B_0$;

2°. *este îndeplinită inegalitatea*

$$\|Q_0 \Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta_0^{\frac{1}{\alpha}},$$

unde

$$\|x_1 - x_0\|^{\alpha} \leqslant \eta_0 \text{ și } 0 < \alpha \leqslant 1;$$

3°. *derivata Fréchet de ordinul doi* $P''(x)$ *este uniform mărginită și satisface condiția lui Hölder în domeniul* $S(x_0, r)$

$$\|P''(x)\| \leqslant M \text{ și } \|P''(x_1) - P''(x_2)\| \leqslant L \|x_1 - x_2\|^{\alpha},$$

unde L *este o constantă oarecare,* $0 < \alpha \leqslant 1$, *iar* $S(x_0, r)$ *este o sferă în spațiul* X *cu centrul în* x_0 *și de rază* $r = 2\,\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}$;

4°. $h_0 = B_0 M \eta_0^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \frac{1}{2}$;

5°. $\rho_0 = \dfrac{5}{4 - 2h_0} + \dfrac{5 L \eta_0^{1 - \frac{1}{\alpha}}}{(1 + \alpha)(2 + \alpha) B_0 M^2} \leqslant 4$;

atunci ecuația operațională (1) are o soluție $x^* \in S(x_0, 2\eta_0^{\frac{1}{\alpha}})$ *spre care tind aproximațiile calculate prin procedeul iperbolelor tangente iar rapiditatea convergenței este dată de*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{3^n - 1} \cdot \eta_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

Demonstrație. Se arată că trecînd de la x_0 la x_1 condițiile 1°—5° rămîn satisfăcute. Folosind analoaga formulei lui Lagrange și ținînd seama de condițiile 1°—4° se obține :

$$\|\Gamma_0 [P'(x_1) - P'(x_0)]\| \leqslant \|\Gamma_0\| \sup \|P''(\overline{x})\| \cdot \|x_1 - x_0\| \leqslant$$

$$\leqslant B_0 M \eta_0^{\frac{1}{\alpha}} = h_0 \leqslant \frac{1}{2},$$

unde

$$\bar{x} = x_0 + \theta (x_1 - x_0).$$

În aceste condiții teorema lui Banach afirmă că există operatorul

$$H = \{I - \Gamma_0 [P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1}$$

și că

$$\| H \| \leqslant \frac{1}{1 - h_0}$$

$$B_1 = \| \Gamma_1 \| = \| H \Gamma_0 \| \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} \tag{3}$$

adică condiția 1° este satisfăcută pentru x_1.

Deoarece $P''(x)$ satisface condiția lui Hölder, are loc inegalitatea [5].

$$\| P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) - \frac{1}{2} P''(x_0)(x_1 - x_0)^2 \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{(1 + \alpha)(2 + \alpha)} \| x_1 - x_0 \|^{2+\alpha}.$$

Această inegalitate se înmulțește cu $\| \Gamma_0 \|$ și se notează

$$S_0 = \Gamma_0 P(x_0) + (x_1 - x_0) + \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0)(x_1 - x_0)^2.$$

Ținînd seama de (2) pentru $n = 0$, expresia lui S_0 se poate aduce la forma

$$S_0 = \frac{1}{4} \Gamma_0 P''(x_0) \{\Gamma_0 P''(x_0)(\Gamma_0 P(x_0))(x_1 - x_0)\} \{x_1 - x_0\}.$$

Deci

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \| S_0 \| + \frac{B_0 L}{(1 + \alpha)(2 + \alpha)} \| x_1 - x_0 \|^{2+\alpha}$$

Pornind de la egalitatea

$$[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0)](x_1 - x_0) = - \Gamma_0 P(x_0),$$

se poate arăta ușor că

$$\| \Gamma_0 P(x_0) \| \leqslant \frac{\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}}{1 - \frac{h_0}{2}}.$$

Ţinînd seama de condiţiile 1° — 4° obţinem, analog ca în lucrarea [1], că

$$\|\Gamma_0 P(x_1)\| \leqslant B_0^2 \cdot M^2 \left(\frac{1}{4-2h_0} + \frac{L\eta_0^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)(2+\alpha)B_0 M^2} \right) \cdot \eta_0^{\frac{3}{\alpha}}. \tag{4}$$

Înmulţind acum cu $\|H\|$ se obţine

$$\|\Gamma_1 P(x_1)\| \leqslant \frac{h_0^2\, \eta_0^{\frac{1}{\alpha}}}{1-h_0} \left[\frac{1}{4-2h_0} + \frac{L\eta_0^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)(2+\alpha)B_0 M^2} \right] = \Delta_1 .$$

Deci

$$\eta_1^{\frac{1}{\alpha}} = \|x_2 - x_1\| = Q_1 \Gamma_1 P(x_1)\| \leqslant \frac{\Delta_1}{1 - M B_0 \Delta_1}.$$

Ţinînd seama de condiţia 5° se obţine

$$\eta_1^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 2 h_0^2\, \eta_0^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \frac{\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}}{2} \tag{5}$$

şi condiţia 2° este îndeplinită.

Condiţia 3° se menţine pentru că şirul $\{x_n\}$ al aproximaţiilor succesive obţinut cu ajutorul algoritmului (2) rămîne în sfera $S(x_0, 2\eta_0^{\frac{1}{\alpha}})$. Într-adevăr,

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \|x_0 - x_1\| + \|x_1 - x_2\| + \ldots + \|x_{n-1} - x_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \eta_0^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}}{2} + \ldots + \frac{\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}}{2^n} < 2\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Din relaţiile (3) şi (5) se obţine

$$h_1 \leqslant 4h_0^3 \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2};$$

aceasta ne arată că şi condiţia 4° este îndeplinită.

Din faptul că $B_1 > B_0$ şi $h_1 < h_0$, rezultă că $\rho_1 < \rho_0 < 4$, adică şi condiţia 5° se menţine.

Prin inducţie completă se ajunge la:

$$B_n \leqslant \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}} \leqslant 2B_{n-1} \tag{6}$$

$$\eta_n^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 2h_{n-1}^2\, \eta_{n-1}^{\frac{1}{\alpha}} \tag{7}$$

$$h_n \leqslant 4h_{n-1}^3 \tag{8}$$

$$\rho_n \leqslant \frac{5}{4-2h_n} + \frac{5L\eta_n^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)(2+\alpha)\beta_n M^2} \leqslant 4. \tag{9}$$

Din relațiile (6) și (7) se deduce că

$$\eta_n^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \frac{1}{2^n}(2\,h_0)^{3^n-1}\,\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

și

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leqslant \eta_n^{\frac{1}{\alpha}}+\eta_{n+1}^{\frac{1}{\alpha}}+\dots+\eta_{n+p}^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2\,h_0)^{3^n-1}\,\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{2^p}\right).$$

Trecînd la limită pentru $p \to \infty$ se obține

$$\|x^*-x_n\| < \frac{1}{2^{n-1}}(2\,h_0)^{3^n-1}\cdot\eta_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

Deoarece sfera S este completă, există

$$x^*=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Rămîne să mai verificăm dacă x^* este o soluție a ecuației $P(x)=0$. Pentru aceasta se consideră inegalitatea

$$\|P(x_n)\| \leqslant \frac{h_n^2}{B_{n-1}}\left[\frac{1}{4-2\,h_n}+\frac{L\,\eta_n^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)(2+\alpha)\,B_n M^2}\right]\cdot\eta_n^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Dacă $n\to\infty$, atunci $\lim\|P(x_n)\|=0$. În baza continuității și ținînd seama că $x_n \to x^*$ se obține

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n)=P(x^*)=0,$$

demonstrînd cu aceasta teorema.

TEOREMA II. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* :

1° $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$ *pentru orice* $x\in S$ *unde* $\Gamma(x)=[P'(x)]^{-1}$ *iar* S *este o sferă în* X *definită de inegalitatea*

$$\|x-x_0\| \leqslant K\,\eta^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{și} \quad K=\sum_{i=0}^{\infty}(hf)^{3^i-1};$$

2° $\|x_1-x_0\| \leqslant \eta^{\frac{1}{\alpha}}$;

3° *există derivata de tip Fréchet pînă la ordinul doi și*

$$\|P''(x)\| \leqslant M,\quad \|P''(x_1)-P''(x_2)\| \leqslant L\,\|x_1-x_2\|^{\alpha}$$

pentru orice $x\in S$;

4°. *sînt îndeplinite inegalitățile*

$$h=B\,M\,\eta^{\frac{1}{\alpha}}<2 \quad \text{și} \quad hf<1$$

unde am notat

$$f^2 = \frac{1}{1-\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{4-2h} + \frac{L\,\eta_\alpha^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)(2+\alpha)\,B\,M^2}\right);$$

atunci ecuaţia operaţională (1) admite cel puţin o soluţie $x^* \in S$ la care tind aproximaţiile succesive calculate cu ajutorul algoritmului (2). Rapiditatea convergenţei este dată de

$$\|x^* - x_n\| < K\,\eta^{\frac{1}{\alpha}}\,(h\,f)^{3^n-1}.$$

Demonstraţii. Folosind delimitările din această teoremă, relaţia (4) se transcrie

$$\|\Gamma P(x_1)\| < M^2 B^2\left(\frac{1}{4-2h} + \frac{L\,\eta^{1-\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)\,(2+\alpha)\,BM^2}\right)\|x_1 - x_0\|^3 = \Delta.$$

Deoarece $\Delta < \eta^{\frac{1}{\alpha}}$, putem scrie

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \|Q_1\,\Gamma_1\,P(x_1)\| \leqslant B^2M^2f^2\,\|x_1 - x_0\|^3.$$

Prin inducţie completă se stabileşte

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant B^2M^2f^2\,\|x_n - x_{n-1}\|^3.$$

Dînd lui n valori de la 0 pînă la n se obţine

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \eta^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant B^2M^2f^2\,\eta^{\frac{3}{\alpha}} = (h\,f)^{3^1-1}\cdot\eta^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant (h\,f)^{3^n-1}\cdot\eta^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ţinînd seama de acestea se poate scrie că

$$\|x_0 - x_n\| \leqslant \eta^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=0}^{n-1}(h\,f)^{3^i-1} < K\,\eta^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Deci şirul $\{x_n\} \subset S$.

În inegalitatea

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \eta^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=n}^{n+p-1}(h\,f)^{3^n-1}$$

se poate trece la limită pentru $p \to \infty$, deoarece sfera S este completă şi se obţine

$$\| x^{\star} - x_n \| \leqslant \eta^{\frac{1}{\alpha}} K(h f)^{3^n - 1}.$$

Faptul că x^* este soluţie a ecuaţiei (1), se demonstrează ca şi în cazul teoremei I.

Primită la redacţie la 29 decembrie 1965

Institutul pedagogic Baia Mare

BIBLIOGRAFIE

1. B. JANKÓ, *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente generalizate I.* St. cerc. mat. (Cluj), **XIV**, *2*, 265–271 (1963).
2. Л. В. КАНТОРОВИЧ, *О методе Ньютона.* Труды мат. ин-та и В. А. Стеклова, **XXVIII**, 104–114 (1949).
3. М. А. МЕРЦВЕТОВА, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений.* ДАН СССР, **88–4**, 611–614 (1953).
4. Г. С. САЛЕХОВ, *О сходимости процессов касательных гипербол.* ДАН СССР, **82**, *4* (1952).
5. Б. А. ВАРТХЕЙМ, *Об условиях применения метода Ньютона.* ДАН СССР, **110**, *5* (1956).

ASUPRA OPERATORILOR REGULARIZABILI

DE

V. I. ISTRĂŢESCU

În lucrare se dau două teoreme referitoare la clasa operatorilor regularizabili pe un spaţiu Banach X, operatori care intervin în teoria integralelor singulare [1]. Una din teoreme afirmă că dacă

$$(A - \lambda_0^{-1})\, g_n = f_n,\ \| g_n \| \leqslant M,\ \lambda_0 \overline{\in} \sigma\,(B)$$

B fiind regularizatorul lui A, atunci $\{ g_n \}$ admite un subşir convergent, iar cealaltă stabileşte faptul că spaţiul $(A - \lambda_0^{-1})\, X$ este închis.

1. Fie X un spaţiu Banach şi $B\,(X)$ algebra Banach a operatorilor liniari şi continui pe X. O clasă importantă de operatori din $B\,(X)$ este aceea a operatorilor care admit o regularizare [1].

DEFINIŢIE 1. Operatorul A admite o regularizare dacă există un operator liniar şi mărginit B astfel încît

$$BA = I + T,$$

unde I este operatorul identic iar T un operator complet continuu.

Operatorul B se numeşte regularizatorul lui A.

În cele ce urmează dăm două teoreme referitoare la această clasă de operatori. Prima teoremă are o importanţă deosebită în problema existenţei unor subspaţii invariante netriviale pentru operatorul T.

Fie A şi B operatorii din definiţia 1.

TEOREMA 1. *Dacă* $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 \overline{\in} \sigma\,(B)$ *şi*

$$(A - \lambda_0^{-1})\, g_n = f_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots,), \tag{1}$$

unde $\{g_n\}$ *este un şir mărginit iar* $\{f_n\}$ *un şir convergent, atunci* $\{g_n\}$ *admite un subşir convergent.*

Demonstraţie. Aplicînd operatorul B avem

$$BAg_n - \lambda_0^{-1}\, Bg_n = Bf_n$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1155–1157, BUCUREŞTI, 1966

şi deci

$$(I + T)\,g_n - \lambda_0^{-1} B g_n = B f_n$$

sau

$$(\lambda_0 - B)\,g_n + T g_n = B f_n$$

adică

$$g_n = -(\lambda_0 - B)^{-1}\,T g_n + (\lambda_0 - B)^{-1}\,B f_n$$

şi afirmaţia teoremei rezultă din faptul că $\{f_n\}$ este un şir convergent iar T un operator complet continuu.

Observaţia 1. Dacă $\lambda_0 = 0$, atunci acelaşi raţionament arată că dacă

$$A g_n = f_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

atunci $\{g_n\}$ admite un subşir convergent.

Observaţia 2. Dacă

$$(A - I)\,g_n = f_n$$

şi $\|B\| < 1$, atunci $\{g_n\}$ admite un subşir convergent.

Fie λ_0 ca în teorema 1. În acest caz putem demonstra

TEOREMA 2. *Spaţiul*

$$X_0 = (A - \lambda_0^{-1})\,X$$

este închis.

Demonstraţie. Fie $f \in X_0$ şi $Xf = \{g, (A - \lambda_0^{-1})\,g = f\}$. Este evident că Xf este o mulţime convexă şi închisă. Vom arăta că are un element cu normă minimă.

În adevăr, fie

$$\rho = \inf_{g \in Xf} \|g\|.$$

Deosebim două cazuri:

a) $$\rho = 0$$

b) $$\rho \neq 0.$$

În cazul a), conform teoremei 1, putem extrage un subşir convergent, $\{g_n\}$, $g_n \to g_0$. Evident, g_0 are proprietatea că $\|g_0\| = 0$, adică $g_0 = 0$ şi deci $\rho = 0$ este imposibilă.

În cazul b), putem extrage un subşir convergent $g_n \to g_0$ şi acesta are evident norma minimă. Vrem să arătăm că există o constantă M astfel ca

$$\|g_0\| \leqslant M\,\|f\|$$

oricare ar fi f şi g_0.

În caz contrar, ar exista un şir $\{f_n\}$, astfel ca

$$\|g_0^n\| > n\,\|f_n\|$$

Cum avem relaţia

$$(A - \lambda_0^{-1})\,\frac{g_0^n}{\|g_0^n\|} = \frac{f_n}{\|g_0^n\|} \to 0,$$

rezultă, conform teoremei 1, că putem extrage un subşir

$$\frac{g_0^{n_k}}{\| g_0^{n_k} \|} \to g_0'.$$

Evident, $(A - \lambda_0^{-1}) g_0' = 0$. De aici rezultă că $(A - \lambda_0^{-1})(g_0^n - g_0 \| g_0^n \|) = f_n$. Dar atunci

$$\| g_0^n - g_0 \| g_0^n \| \| \geqslant \| g_0^n \|$$

şi deci

$$\left\| \frac{g_0^{n_k}}{\| g_0^{n_k} \|} - g_0' \right\| \geqslant 1,$$

ceea ce contrazice relaţia (2) şi afirmaţia este demonstrată.

Faptul că spaţiul X este închis este acum aproape imediat.

În adevăr, din relaţia de mai sus rezultă că $\{g_0^n\}$ este un şir mărginit. Conform teoremei 1, el admite un subşir convergent

$$g_0^{n_k} \to g_0$$

Evident, g_0 este elementul pentru care

$$(A - \lambda_0^{-1}) g_0 = f,$$

unde $f = \lim f_n$ şi teorema 2 este demonstrată.

2. Fie H un spaţiu Hilbert şi T un operator liniar şi mărginit. Recent J. Rovnyak [2] a dat unele rezultate referitoare la spaţiul Hilbert al seriilor formale

$$f(z) = \sum a_n z^n,$$

unde $\sum \| a_n \|^2 < \infty$, $\{a_n\} \subset K$ (K un spaţiu Hilbert) şi care pot fi utilizate la demonstraţia existenţei subspaţiilor invariante, netriviale pentru operatorii care satisfac relaţia

$$1 - T^* T = C, \tag{α}$$

unde T^* este adjunctul lui T, iar C un operator complet continuu.

Observăm că operatorii din această clasă sînt regularizabili. În adevăr, (α) mai poate fi scrisă şi astfel

$$T^* T = 1 + c.$$

Rezultă că putem aplica rezultatele de mai sus pentru aceşti operatori.

Primită la redacţie la 7 octombrie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* Физ. мат. гит., 1962.
2. J. Rovnyak, Proc. A.M.S., **16**, *2* (1965).
3 I.V. Istrăţescu, *Asupra operatorilor cvasicompacţi, I, II.* St. cerc. mat., **18** (1966).

INTEGRAREA ÎN RAPORT CU MĂSURI CU VALORI ÎN SPAȚII VECTORIALE TOPOLOGICE OARECARE

DE

VALENTIN POPESCU

Se construiește mai întîi, cu ajutorul unor partiții de tip Kolmogorov, o ,,semiintegrală“ finit aditivă; din aceasta, prin aplicarea unui procedeu de ,,esențializare”, se obține o integrală complet aditivă de o mare generalitate. Spațiile utilizate (ale valorilor funcției, măsurii respectiv integralei) pot să nu fie local convexe, iar ,,esențializarea” se obține în absența oricărei ipoteze restrictive de mărginire sau finitudine a variațiilor măsurii.

Prezenta lucrare este o continuare directă a lucrării [13] și cuprinde o schemă de integrare (complet aditivă) avînd ca punct de plecare integrala finit aditivă a lui Kolmogorov. Pentru a se cîștiga în generalitate se lucrează cu spații ce nu sînt neapărat local convexe, deși scopul principal al lucrării nu este această generalizare, ci obținerea unei scheme de integrare cît se poate de simplă (comparabilă cu cea a integralei Riemann generalizate) și în același timp cît mai generală (de ordinul de generalitate al integralei Rickart).

În § 1 se introduce ,,semiintegrala”, o integrală finit aditivă construită prin procedee de tipul celor utilizate de Kolmogorov, Graves, Birkhoff, Price, Phillips etc. Se stabilesc condiții în care definiția semiintegralei poate fi simplificată. Se demonstrează apoi semiintegrabilitatea aplicațiilor măsurabile și cvasiaproape mărginite, precum și proprietatea de continuitate absolută a semiintegralelor aplicațiilor cvasiaproape mărginite. Dată fiind importanța acestei proprietăți, în încheierea paragrafului se arată că, în condiții destul de largi, semiintegrabilitatea implică în mod automat cvasiaproape mărginirea.

În § 2 se obține o integrală absolut continuă și complet aditivă aplicînd semiintegralei un procedeu de ,,esențializare”. Lipsa subaditivității pentru variațiile unei măsuri cu valori în spații nelocal convexe,

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1159–1180, BUCUREȘTI, 1966

a impus definirea familiilor dense cu ajutorul noţiunii de variaţie în raport cu o partiţie. Pe de altă parte, acest mod de definire a permis realizarea „esenţializării'' în absenţa oricărei ipoteze restrictive de mărginire sau de finitudine a variaţiilor măsurii (ceea ce constituie un rezultat nou chiar şi pentru măsurile cu valori în spaţii Banach). De asemenea se stabilesc condiţii în care este posibilă obţinerea integralei fără a se mai folosi noţiunile de semiintegrală şi de familie densă pseudodensă (deci prin procedee la fel de simple ca cele utilizate la definirea integralei Riemann generalizate). Aceasta are loc, de exemplu, dacă aplicaţia biliniară care leagă cele trei spaţii utilizate, posedă o anumită proprietate (satisfăcută în mod automat în cazurile integrării unei aplicaţii cu valori într-un spaţiu vectorial topologic oarecare în raport cu o măsură scalară şi al integrării unei funcţii scalare în raport cu măsuri cu valori într-un spaţiu local mărginit). Aceeaşi simplificare are loc şi în cazul în care spaţiile utilizate sînt local convexe, dacă aplicaţia care se integrează este măsurabilă.

Vom folosi notaţiile şi terminologia din [13]. Astfel vom integra aplicaţii definite pe mulţimea E şi cu valori în spaţiul vectorial F' sau în mulţimea $\mathfrak{P}(F')$ a părţilor acestuia, primul caz fiind considerat, printr-un abuz de notaţie şi limbaj, inclus în cel de-al doilea. Măsura m este definită pe un semitrib Σ de părţi ale lui E şi are valori în spaţiul vectorial F''. Spaţiul valorilor integralei se notează cu F. Filtrele vecinătăţilor originei, pentru aceste spaţii, vor fi notate prin $\mathfrak{B}'(0)$, $\mathfrak{B}''(0)$, $\mathfrak{B}(0)$. Spaţiile separate asociate se vor nota prin $\dot{F}', \dot{F}''$, $\dot{F}$, iar completatele acestora prin $\hat{\dot{F}}'$, $\hat{\dot{F}}''$, $\hat{\dot{F}}$. Pentru filtrele vecinătăţilor acestor spaţii vom folosi notaţiile $\hat{\dot{\mathfrak{B}}}'(0)$, $\hat{\dot{\mathfrak{B}}}''(0)$, $\hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$. Prin φ (φ', φ'') vom nota aplicaţia canonică a spaţiului $F(F', F'')$ în $\hat{\dot{F}}(\hat{\dot{F}}', \hat{\dot{F}}'')$. Pentru $E' \subset E$, Σ_E reprezintă urma semitribului Σ pe E, iar pentru $A \in \Sigma$ vom nota prin $\pi(A)$ familia tuturor partiţiilor finite ale mulţimii A în mulţimi din Σ. Dacă $A' \subset A$, atunci $\Delta_{A'}$ va fi urma partiţiei Δ pe A. Pentru $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ vom nota prin $\varkappa(V'')$ mulţimea tuturor părţilor convexe şi echilibrate ale lui V''. În sfîrşit, vom nota prin $m_{V''}(\Delta)$ ($m_{V''}(A)$) V'' variaţia măsurii m pentru partiţia Δ (respectiv pe mulţimea A).

§ 1. APLICAŢII SEMIINTEGRABILE

În prima parte a acestui paragraf, F', F'' vor fi spaţii vectoriale oarecare, iar F spaţiu vectorial topologic.

Propoziţia 1. *Fie* $f : A \to \mathfrak{P}(F')$, $(A \in \Sigma)$ *şi* $u : F' \times F'' \to F$ *aplicaţii oarecare iar* $\Delta = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \pi(A)$. *Să notăm*

$$S^*_{(m,\, u)}(f; \Delta) = \sum_{i=1}^{n} u(f(A_i),\ m(A_i))$$

(*unde, prin abuz de notație,* $u\,(X',\, y'') = u(X' \times \{y''\}) \subset F$ *pentru* $X' \subset F'$ *și* $y'' \in F''$),

$$S_{(m,\,u)}(f, \Delta) = \bigcup_{\substack{\Delta^* > \Delta \\ \Delta^* \in \pi\,(A)}} S^*_{(m,\,u)}(f;\ \Delta').$$

Atunci, $\Delta > \Delta'$ *implică* $S_{(m,\,u)}\,(f;\ \Delta) \supset S_{(m,\,u)}\,(f;\ \Delta')$.

Corolar. *Familia* $\mathfrak{F}_{(m,\,u)}\,(f;\Delta) = \{S_{(m,\,u)}\,(f;\ \Delta)\}_{\Delta \in \pi\,(A)}$ *este o bază de filtru.*

Atunci cînd nu sînt posibile confuzii, vom folosi notațiile prescurtate $S^*(f;\ \Delta)$, $S\,(f;\ \Delta)$ respectiv $\mathfrak{F}\,(f;\ \Delta)$.

Definiția 1. *Fie* $u : F' \times F'' \rightarrow F$ *o aplicație biliniară. Vom spune că o aplicație* $f : A \rightarrow \mathfrak{P}\,(F')$ *este* $(m,\ u)$ *semiintegrabilă (sau, mai simplu, semiintegrabilă) pe* $A \in \Sigma$, *dacă familia* $\{\mathfrak{F}_{(m,\,u)}\,(f;\Delta)\}_{\Delta \in \pi(A)}$ *este o bază de filtru Cauchy. Dacă este* F *separat, limita acestei baze de filtru în completatul* $\hat{F}$ *al spațiului* F, *se va numi semiintegrala aplicației* f *pe* A *și se va nota cu* $(u)\int_A f\ \mathrm{d}m$ *sau* $\int_A f\,\mathrm{d}m$. *Dacă* F *nu este separat, atunci, prin definiție,* $(u)\int_A \mathrm{d}m = (\varphi \circ u)\int_A \mathrm{d}m \in \hat{\dot{F}}$.

Să remarcăm strînsa legătură dintre semiintegrala și integrala finit aditivă a lui Kolmogorov ([10] sau β-integrala din [9], cap. III, § 2, no. 5, definiția 7).

Lema 1. *Fie* A', $A'' \in \Sigma$ *cu* $A' \subset A$, $\Delta \in \pi\,(A)$ și $V \in \mathfrak{B}\,(0)$. *Dacă* $S_{(m,\,u)}(f;\ \Delta)$ *este mică de ordinul* V, *atunci și* $S_{(m\,,u)}(f;\ \Delta_{A'})$ *este mică de ordinul* V.

Această lemă rezultă imediat din incluziuneă $X - Y \subset (X + Y) - (X + Y)$ valabilă pentru orice X, $Y \subset F$ cu $Y \neq \varnothing$.

Propoziția 2. 1. *O aplicație semiintegrabilă pe o mulțime* $A \in \Sigma$ *este semiintegrabilă pe orice submulțime* $A' \in \Sigma_A$.

2. *Mulțimea aplicațiilor* $f : A \rightarrow \mathfrak{P}\,(F')$ *semiintegrabile pe* A *formează un spațiu vectorial în raport cu același corp (de numere reale sau complexe) ca și spațiile* F', F. *Dacă* $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, *atunci* $\int_A f\,\mathrm{d}m = \alpha_1 \int_A f_1\,\mathrm{d}m + \alpha_2 \int_A f_2\,\mathrm{d}m$.

3. *Dacă o aplicație* f *este semiintegrabilă pe un număr finit de mulțimi disjuncte* $A_i \in \Sigma$, *atunci ea este semiintegrabilă și pe* $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ iar $\int_A f\,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f\,\mathrm{d}m$.

4) *Dacă* f *ia pe* $A \in \Sigma$ *valoarea constantă* $a' \in F'$, *atunci* f *este semiintegrabilă pe* A *și* $\int_A f\,\mathrm{d}m = \varphi\,(u\,(a',\ m\,(A)))$.

Demonstrație. Prima parte a propoziției rezultă din lema 1. Pentru a verifica afirmația de la punctul 2, fie (presupunînd F separat) $V \in \mathfrak{B}\,(0)$

închisă arbitrară, $W \in \mathfrak{B}(0)$ echilibrată cu $|\alpha_1| W + |\alpha_2| W \subset V$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \pi(A)$ cu $S(f_1; \Delta_1) \subset \int_A f_1 \, dm + W$, $S(f_2; \Delta_2) \subset \int_A f_2 \, dm + W$, $\Delta \in \pi(A)$ o anumită partiție mai fină decît Δ_1 și Δ_2 (de exemplu cea formată din toate intersecțiile mulțimilor celor două partiții) și $\Delta' = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ arbitrară, dar mai fină decît Δ. Folosind liniaritatea aplicației în raport cu primul argument, obținem $S^*(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; \Delta') =$

$$= \sum_{i=1}^{n} ((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(A_i), \; m(A_i)) \subset \sum_{i=1}^{n} u(\alpha_1 f_1(A_i) + \alpha_2 f_2(A_i), \; m(A_i)) =$$

$$= \alpha_1 S^*(f_1; \Delta') + \alpha_2 S^*(f_2; \Delta') \subset |\alpha_1| S(f_1; \Delta') + |\alpha_2| S(f_2; \Delta) \subset$$
$$\subset \alpha_1 \int_A f_1 \, dm + \alpha_2 \int_A f_2 \, dm + |\alpha_1| W + |\alpha_2| W.$$

Dar Δ' este arbitrară, deci $S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; \Delta) \subset \alpha_1 \int_A f_1 \, dm + \alpha_2 \int_A f_2 \, dm + V$ iar de aici (V fiind închisă și arbitrară) deducem succesiv $\int_A (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \, dm \in \alpha_1 \int_A f_1 \, dm + \alpha_2 \int_A f_2 \, dm + \hat{V}$, $\int_A (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \, dm = \alpha_1 \int_A f_1 \, dm + \alpha_2 \int_A f_2 \, dm$.

Pentru a verifica penultima parte a propoziției, fie $V \in \mathfrak{B}(0)$ închisă, $W \in \mathfrak{B}(0)$ cu $W + W + \ldots W$ (de n ori) $\subset V$ și $\Delta_i \in \pi(A_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ astfel ca $S(f; \Delta_i) \subset \int_{A_i} f \, dm + W$. Evident, $\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \in \pi(A)$. Orice diviziune $\Delta' \in \pi(A)$ cu $\Delta' > \Delta$ este de forma $\Delta' = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta'_i$, unde $\Delta'_i > \Delta_i$ deci $S^*(f; \Delta') = \sum_{i=1}^{n} S^*_i(f; \Delta'_i) \subset \sum_{i=1}^{n} S(f; \Delta_i) \subset \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \, dm + V$ de unde $S(f; \Delta) \subset \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \, dm + V$ iar de aici rezultă (V fiind închisă) $\int_A f \, dm \subset \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f \, dm + \hat{V}$, de unde rezultă egalitatea din enunț.

PROPOZIȚIA 3. *Orice aplicație este semiintegrabilă pe orice mulțime m-neglijabilă iar valoarea semiintegralei este egală cu zero. Orice aplicație egală aproape peste tot cu o aplicație semiintegrabilă (pe o mulțime $A \in \Sigma$) este semiintegrabilă iar valorile celor două semiintegrale coincid.*

Cazuri particulare. 1) Dacă F'' este corpul scalarilor (R sau C), $F' = F$ iar $u(a, \alpha) = \alpha a$, se obține integrarea unei aplicații vectoriale în raport cu o măsură scalară (reală sau complexă).

2) Dacă F' este corpul scalarilor, $F'' = F'$ iar $u(\alpha, a) = \alpha a$ se obține integrarea unei funcții scalare în raport cu o măsură vectorială.

Definiţia 1 prezintă inconvenientul că utilizează, pentru calcularea sumelor $S(f; \Delta)$, pe lîngă partiţia Δ şi toate partiţiile mai fine decît aceasta. Dacă s-ar considera numai sumele „simple” de tipul $S^*(f; \Delta)$, familia acestora n-ar fi constituit, întotdeauna, o bază de filtru. Vom arăta că, în anumite cazuri, semiintegrabilitatea poate fi definită cu ajutorul unor sume construite respectiv cu ajutorul unei singure partiţii (ca, de exemplu, în cazul integralelor Riemann, Riemann-Graves, Fréchet, Kolmogorov, Birkhoff, Price etc.). Să notăm $\widetilde{S}(f; \Delta) = \operatorname{co}(S(f; \Delta))$, $\widetilde{\mathfrak{F}}(f; \Delta) = \{\widetilde{S}(f; \Delta)\}_{\Delta \in \pi(A)}$ şi $\widetilde{S}^*(f; \Delta) = \operatorname{co}(\widetilde{S}^*(f; \Delta))$. Atunci $\widetilde{S}(f; \Delta) = \bigcup_{\Delta' > \Delta} \widetilde{S}^*(f; \Delta')$ şi $S(f; \Delta) = \Sigma\, u(\operatorname{co}(f(A_i)), m(A_i))$. Se verifică uşor că $\widetilde{\mathfrak{F}}(f; \Delta)$ este o bază de filtru. Vom spune că f este *convex semiintegrabilă* pe A dacă $\widetilde{\mathfrak{F}}(f; \Delta)$ este o bază de filtru Cauchy. Această noţiune este evident mai restrictivă decît cea de semiintegrabilitate, ele coincizînd dacă spaţiul F este local convex. La prima vedere această definiţie pare şi mai complicată decît definiţia 1 (folosind, în plus, înfăşurătoarea convexă). Totuşi, în cazul particular al integării în raport cu o măsură pozitivă, are loc relaţia $\widetilde{S}(f; \Delta) = \widetilde{S}^*(f; \Delta)$, deci convex-semiintegrabilitatea poate fi definită numai cu ajutorul sumelor „simple” $\widetilde{S}^*(f; \Delta)$. Aşadar vom obţine pentru semiintegrabilitate definiţii ce nu utilizează decît sume „simple” în acele cazuri în care măsura este pozitivă iar semiintegrabilitatea este echivalentă cu convex-semiintegrabilitatea. Un astfel de caz este cel al spaţiului $F' = F$ local convex dar vom arăta că, dacă măsura (pozitivă) satisface unei anumite condiţii, această echivalenţă este valabilă şi în cazul spaţiului $F' = F$ oarecare.

Fiind dată o măsură reală μ pe Σ, vom spune că o mulţime $A \in \Sigma$ este un atom pentru măsura μ dacă $\mu(A) \neq 0$ iar Σ_A nu conţine nici o mulţime de măsură nenulă şi diferită de $\mu(A)$.

LEMA 2. *Fie μ o măsură pozitivă pe Σ şi $A \in \Sigma$ o mulţime care nu conţine nici un atom al măsurii μ. Atunci, pentru orice număr pozitiv $\alpha \leqslant \mu(A)$, există o mulţime $A' \in \Sigma_A$ cu $\mu(A') = \alpha$.*

Demonstraţie. Mulţimea A conţine submulţimi de măsură nenulă oricît de mică. Într-adevăr, dacă $A^* \in \Sigma_A$ cu $0 < \mu(A^*) < \mu(A)$, atunci cel puţin pe una din mulţimile A^* sau A/A^* măsura μ are o valoare cel mult egală cu $\frac{1}{2}\mu(A)$; după operaţii vom găsi o mulţime din Σ_A pe care μ nu depăşeşte $\frac{1}{2^n}\mu(A)$.

Fie $\mathfrak{M}_1$ familia tuturor mulţimilor A^* din Σ_A pentru care $\mu(A') < \alpha$ şi fie $\beta_1 = \sup\limits_{A^* \in \mathfrak{M}_1} \mu(A^*)$. Să alegem o mulţime $A_1 \in \mathfrak{M}_1$ cu $\mu(A_1) > \frac{1}{2}\beta_1$. Presupunînd determinate mulţimile $A_1, \ldots, A_{n-1}$, dacă $\alpha_{n-1} = \alpha - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mu(A\ ) = 0$, atunci mulţimea căutată este $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$. În cazul contrar fie $\mathfrak{M}_n$ familia tuturor mulţimilor $A^* \in \Sigma_{A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i}$ pentru care $\mu(A^*) < \alpha_{n-1}$ şi fie $\beta_n = \sup\limits_{A^* \in \mathfrak{M}_n} \mu(A^*)$. Vom alege o mulţime $A_n \in \mathfrak{M}_n$ cu $\mu(A_n) > \frac{1}{2}\beta_n$. Fie acum $A' = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$; vom arăta că $\mu(A') = \alpha$. Într-adevăr, în cazul contrar ar exista o mulţime $A'' \in \Sigma_{A \setminus A'}$ pentru care $0 < \mu(A'') < \alpha - \mu(A')$. Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i < 2\mu(A) < +\infty$, rezultă $\beta_n \to 0$, deci există $\beta_{i_0} < \frac{1}{2} \mu(A'')$ ceea ce contrazice definiția numărului β_{i_0} căci $A'' \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{i_0-1} A_i$.

Corolar. *În condițiile lemei precedente, dacă* $\{\alpha_i\}$ *este un șir de numere pozitive cu* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \mu(A)$, *atunci există o partiție* $A = \bigcup_{i-1}^{\infty} A_i$ *cu* $A_i \in \Sigma$ *disjuncte și* $\mu(A_i) = \alpha_i$.

Lema 3. *Dacă* μ *este o măsură pozitivă pe* Σ *iar* $f: A \to \mathfrak{P}(F)$ *este semiintegrabilă pe* $A \in \Sigma$, *atunci* $\varphi \circ f$ *este constantă pe orice atom al măsurii* μ, *conținut în* A.

Demonstrație. Ne putem mărgini la cazul spațiului F separat. Fie $A_0 \in \Sigma_A$ un atom și să presupunem că $f(A_0)$ conține două valori b_1, b_2 diferite și fie $V \in \mathfrak{B}(0)$ cu $b_1 - b_2 \notin V$. Considerînd o partiție oarecare $A = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$, atomul A_0 va fi inclus într-o mulțime A_{i_0}. Să alegem, pentru $i \neq i_0$, $a_i \in f(A_i)$ și $a \in f(A_0 \setminus A_{i_0})$. Atunci valorile $y_1 = \sum_{i \neq i_0} \mu(A_i) a_i + \mu(A_{i_0} \setminus A_0) a_0 + \mu(A_0) b_1$ și $y_2 = \sum_{i \neq i_0} \mu(A_i) a_i + \mu(A_{i_0} \setminus A_0) a_0 + \mu(A_0) b_2$ aparțin mulțimii $S^*(f; \Delta)$. Dar este evident că $y_2 - y_1 \notin \mu(A_0) V$, deci nici o mulțime $S(f; \Delta)$ nu este mai mică de ordinul $\mu(A_0) V$, ceea ce contrazice ipoteza.

Propoziția 4. *Dacă măsura pozitivă* μ *nu conține decît cel mult un număr finit de atomi în mulțimea* $A \in \Sigma$, *atunci noțiunile de semiintegrabilitate și de convex-semiintegrabilitate coincid pe* A.

Demonstrație. Fie $f: A \to \mathfrak{P}(F)$ semiintegrabilă iar $A_1, \ldots, A_n$ atomii măsurii μ conținuți în A. Notînd $A_0 = A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\Delta_0 = \{A_i\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$, vom arăta că pentru orice partiție $\Delta \in \pi(A)$ mai fină decît Δ avem $\widetilde{S}(f; \Delta) = S(f; \Delta)$ și prin aceasta propoziția va fi demonstrată. Fie, într-adevăr, $\Delta = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \pi(A)$ $(m \geqslant n)$ mai fină decît Δ. Atunci $\widetilde{S}^*(f; \Delta') = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \operatorname{co}(f(A_i))$. Dar pentru $i > n$, $f(A_i)$ este formată dintr-un singur punct $y_i = f(A_i) = \operatorname{co}(f(A_i))$. Pentru $i > n$ fie $y_i \in \operatorname{co}(f(A_i))$ arbitrar, deci de forma $g_i = \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{i,k} y_{i,k}$ cu $\sum_{k=1}^{p_i} \alpha_{i,k} = 1$ și $y_{i,k} \in f(A_i)$. Deoarece A_i nu conține nici un atom, există pentru fiecare $i > n$ cu $\mu(A) \neq 0$ cîte o partiție. $\Delta_i = \{A_{i,k}\} \in \pi(A_i)$ cu $\mu(A_{i,k}) = \frac{\alpha_{i,k}}{\mu(A_i)}$. Atunci, pentru partiția $\Delta^* = \{A_1, \ldots, A_n\} \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \Delta_i$, suma $S^*(f; \Delta^*)$ conține $\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) y_i$ deci $\widetilde{S}(f; \Delta) \subset S(f; \Delta)$. Dar $\widetilde{S}^*(f; \Delta) = \widetilde{S}(f; \Delta)$, deci $\widetilde{S}(f; \Delta) = S(f; \Delta)$.

Corolar. Dacă μ *este o măsură pozitivă pe* Σ *iar* : $f: A \to \mathfrak{P}(F)$ *este semiintegrabilă pe* $A \in \Sigma$, *atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există* $A' \in \Sigma_A$ *astfel încît* f *să fie convex-semiintegrabilă pe* A', $\mu(A \setminus A') < \varepsilon$ *iar* $A \setminus A'$ *să fie alcătuită dintr-o mulțime numărabilă de atomi ai măsurii* μ.

Pînă acum, în acest paragraf, F', F'' au fost spații vectoriale oarecare. În continuare vom presupune că ele sînt (împreună cu F) spații vectoriale topologice.

LEMA 4. *Fie* $u : F' \times F'' \to F$ *o aplicație biliniară iar* $X' \subset F'$, $X'' \subset F''$ *mulțimi echilibrate. Atunci* $X = u(X' \times X'')$ *este echilibrată iar pentru orice* $y' \in F'$, $y'' \in F''$ *avem* $p_X(u(y', y'') \leqslant p_{X'}(y') \cdot p_{X''}(y'')$ (cu convenția $O(+\infty) = +\infty$), funcțiile p_X fiind definite după modelul funcțiilor Minkowski.

Demonstrație. Dacă unul din numerele $p_{X'}(y')$, $p_{X''}(y'')$ este infinit, relația este imediată. Presupunîndu-le finite și luînd $\varepsilon > 0$, fie $\lambda', \lambda'' > 0$ cu $\lambda' y' \in X'$, $\lambda'' y'' \in X''$, $\frac{1}{\lambda'} < p_{X'}(y') + \varepsilon$, $\frac{1}{\lambda''} < p_{X''}(y'') + \varepsilon$. Atunci $\lambda' \lambda'' u(y', y'') = u(\lambda' y', \lambda'' y'') \in X$ deci $p_X(u(y', y'')) < \frac{1}{\lambda'\lambda''} < p_{X'}(y') + \varepsilon)$ $(p_{X''}(y'') = + \varepsilon)$ iar ε este arbitrar.

DEFINIȚIA 2. *Fie* F_1, F_2 *spații vectoriale topologice oarecare și o aplicație* $g : F_1 \to F_2$. *Vom spune că* g *este convex continuă într-un punct* $y_0 \in F_1$ *dacă pentru orice vecinătate* V_2 *a punctului* $g(y_0)$ *există o vecinătate* V_1 *a punctului* y_0 *astfel încît* $co\,(f(Q)) \subset V_2$ *pentru fiecare mulțime* $Q \in \varkappa(V_1)$.

Aplicația g este convex continuă, dacă este convex continuă în toate punctele mulțimii reale de definiție.

Evident, convex-continuitatea implică continuitatea. Dacă F_2 este local convex sau, oricare ar fi F_2, dacă g este liniară, atunci continuitatea și convex-continuitatea sînt echivalente.

TEOREMA 1. *Dacă* $u : F' \times F'' \to F$ *este o aplicație biliniară și convex continuă iar* n *este cu variație mărginită pe* $A \in \Sigma$, *atunci orice aplicație* $f : F \to \mathfrak{P}(F')$ *care posedă proprietatea* : (M_5) *pe* A (*în particular orice aplicație măsurabilă și cvasiaproape mărginită pe* A) *este semiintegrabilă pe* A (*chiar convex semiintegrabilă*).

Demonstrație. Fie $V \in \mathfrak{B}(0)$ și să luăm $W \in \mathfrak{B}(0)$ cu $W + W + W \subset V$; u fiind convex continuă, există $V' \in \mathfrak{B}(0)$ și $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ echilibrate astfel încît pentru orice pereche $Q' \in \varkappa(V')$, $Q'' \in \varkappa(V'')$ să avem $co\,(u(Q' \times Q'')) \subset W$. Fie $V_1'' \in \mathfrak{B}(0)$ cu $V_1'' + V_1'' \subset V''$ și $\eta = \frac{1}{2(m_{V_1''}(A) + 1)}$.

Aplicînd proprietatea (M_5) pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\eta V'$ și V'', există $Q_1' \in \varkappa(\eta V')$, $\{A_i\}_{1 < i \leqslant n} \in \pi(A)$ și $\lambda > 0$ cu A_2 m-neglijabilă, $m_{V_1''}(A_1) < \frac{1}{2}$, $Q_3' = \frac{1}{\lambda}\, co\,(f(A_1)) \subset \eta V' \subset V'$ (deci $Q_3' \in \varkappa(V')$) iar pentru $3 \leqslant i \leqslant n$ mulțimea $f(A_i)$ să fie mică în raport cu Q_1'. Aplicînd din nou proprietatea (M_5) pentru A_1, V', V'' și $\varepsilon = \frac{1}{2\lambda}$, vom găsi o mulțime $Q_2' \in \varkappa(V')$ și o partiție $\{A_i\}_{n+1 \leqslant i \leqslant r}$ cu A_r m-neglijabilă, $m_{V''}(A_{r-1}) < \frac{1}{2\lambda}$ iar pentru $n + 1 \leqslant i \leqslant r - 2$ mulțimea $co\,(f(A_i))$ să fie mică în raport cu Q_2'. Evident, $\Delta = \{A_i\}_{2 \leqslant i \leqslant r} \in \pi(A)$.

Vom arăta că $S(f;\, A)$ este mică de ordinul V. Pentru aceasta să considerăm două partiții $\Delta^1,\ \Delta^2 \in \pi(A)$ mai fine decît Δ și fie $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n_i^1} A_{i,j}^1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n_i^2} A_{i,k}^2$ cu $A_{i,j}^1 \in \Delta^1$, $A_{i,k}^2 \in \Delta^2$. Să luăm arbitrar $y^1 \in S^*(f\,;\,\Delta')$, $y^2 \in S^*(f\,;\,\Delta^2)$, deci de forma $y^1 = \sum\limits_{3 \leqslant i \leqslant r-1\,;\,k} u(a_{i,j}^1, m(A_{i,j}^1))$, $y^2 = \sum\limits_{3 \leqslant i \leqslant r-1\,;\,k} u(a_{i,k}^2, m(A_{i,k}^2))$ cu $a_{i,j}^1,\ a_{i,k}^2 \in f(A_i)$. Să notăm $y_1^1 = \sum\limits_{3 \leqslant i \leqslant n\,;\,j} u(a_{i,j}^1,\ m(A_{i,j}^1))$, $y_2^1 = \sum\limits_{n+1 \leqslant i \leqslant n-2\,;\,j} u(a_{i,j}^1,\ m(A_{i,j}^1))$, $y_3^1 = \sum\limits_{j=1}^{n_{n-1}} u(a_{r-1,j}^1,\ m(A_{r-1,j}^1))$ și $y_1^2,\ y_2^2,\ y_3^2$ cu expresii asemănătoare. Pentru orice i să alegem arbitrar $a_i \in f(A_i)$. Notînd $\Delta_1 = \{A_{i,j}^1\}_{3 \leqslant i \leqslant n\,;\,j}$ $\Delta_2 = \{A_{i,k}^2\}_{3 \leqslant i \leqslant n\,;\,k}$, să alegem Q_4'', $Q_5'' \in \varkappa(V_1'')$ astfel ca $m_{p_{Q_4''}}(\Delta_1) \leqslant m_{V_1''}(A) + 1$, $m_{p_{Q_5''}}(\Delta_2) \leqslant m_{V_1''}(A) + 1$. Aceste două inegalități au loc *a fortiori* dacă înlocuim Q_4'', Q_5'' prin $Q_1'' = Q_4'' + Q_5''$. Evident, $Q_1'' \in \varkappa(V'')$. Fie $Q_1 = \mathrm{co}\,(u\,(Q_1' \times Q_1'')) \in \varkappa(W)$, Vom avea

$$p_{Q_1}(y_1^1 - y_1^2) \leqslant \sum_{3 \leqslant i \leqslant n\,;\,k} p_{Q_1}(u\,(a_{i,j}^1,\ m\,(A_{i,}^1))) +$$

$$+ \sum_{3 \leqslant i \leqslant n\,;\,k} p_{Q_1}(u\,(a_{i,k}^2,\ m\,(A_{i,k}^2))) \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma\, p_{Q_1'}(a_{i,j}^1 - a_i)\, p_{Q_1''}(m\,(A_{i,j}^1)) + \Sigma\, p_{Q_1'}(a_{i,k}^2 - a_i)\, p_{Q_1''}(m\,(A_{i,k}^2))) \leqslant$$

$$\leqslant \eta\,(\Sigma\, p_{Q_1''}(m\,(A_{i,j}^1)) + \Sigma\, p_{Q_2''}(m\,(A_{i,k}^2))) \leqslant \eta\,(m_{p_{Q_1''}}(\Delta_1) + m_{p_{Q_1''}}(\Delta_2)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\eta)\, m_{V_1''}(A) + 1) < 1,$$

deci $y_1^1 - y_1^2 \in Q_1^1 \subset W$.

Notînd $\Delta_3 = \{A_{i,j}^1\}_{n+1 \leqslant i \leqslant r-2\,;\,j}$, $\Delta_4 = \{A_{i,k}^2\}_{n+1 \leqslant i \leqslant r-2\,:\,k}$, să alegem $Q_6'', Q_7'' \in \varkappa\,(V_1'')$ astfel ca $m_{p_{Q_6''}}(\Delta_3) < \frac{1}{2}$, $m_{p_{Q_2''}}(\Delta_7) < \frac{1}{2}$. Fie $Q_2'' = Q_6'' + Q_7'' \in \varkappa\,(V'')$. Notînd $Q_2 = \mathrm{co}\,(u\,(Q_2' \times Q_2''))$, un calcul asemănător celui de mai sus va demonstra că $y_2^1 - y_2^2 \in Q_2 \subset W$.

Să notăm $\Delta_5 = \{A_{n-1,j}^1\}_{1 \leqslant j \leqslant n_{n-1}^1}$ și fie $Q_3'', \in \varkappa(V'')$ cu $m_{p_{Q_3''}}(\Delta_5) < \frac{1}{2\lambda}$ și $Q_3 = \mathrm{co}\,(u\,(Q_3' \times Q_3''))$. Atunci

$$p_{Q_3}(y_3^1) \leqslant \sum_{j=1}^{n_{n-1}^1} p_{Q_3}(u\,(a_{n-1,j}^1,\ m\,(A_{n-1,j}^1)) \leqslant \Sigma\, p_{Q_3'}(a_{n-1,j}^1)\, p_{Q_3''}(m(A_{n-1,j}^1)) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\, \Sigma\, p_{Q_3''}(m\,(A_{n-1,j}^1)) \leqslant \lambda\, m_{p_{Q_3''}}(\Delta_5) < \frac{1}{2}.$$

În mod asemănător se arată că $p_{Q_3}(y_3^2) < \frac{1}{2}$, de unde rezultă $p_{Q_3}(y_3^1 - y_3^2) < 1$ deci $y_3^1 - y_3^2\, Q_3 \subset W$.

În total $y^1 - y^2 \in Q_1 + Q_2 + Q_3 \subset V$ și teorema este demonstrată.

PROPOZIŢIA 5. *Presupunînd aplicaţia u convex continuă, dacă f este semiintegrabilă şi cvasiaproape mărginită pe $A \in \Sigma$, atunci pentru orice vecinătate $V \in \hat{\mathfrak{B}}(0)$ există $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$, $\Delta \in \pi(A)$ şi $\lambda > 0$ astfel încît pentru fiecare mulţime $A' \in \Sigma$ cu $A' \in A$ şi $m_{V''}(\Delta_{A'}) < \lambda$ să avem $\int_A f \,\mathrm{d}m \in V$.*

Demonstraţie. Vom presupune F separat. Fie $W_0 \in \mathfrak{B}(0)$ închisă cu $\hat{W}_0 \subset V$ şi $W \in \mathfrak{B}(0)$ cu $W + W \subset W_0$. Există $V' \in \mathfrak{B}'(0)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ echilibrate astfel încît $Q' \in \varkappa(V')$, $Q'' \in \varkappa(V'')$ să implice $\mathrm{co}\,(u\,(Q' \times Q'')) \subset \subset W$. Din proprietatea de cvasiaproape mărginire a aplicaţiei f rezultă că există o mulţime m-neglijabilă $N \in \Sigma_A$ şi un număr $\mu > 0$ astfel încît $Q' = \mu\,\mathrm{co}\,(f(A \setminus N)) \subset V'$. Fie $\Delta = \{A^k\}_{1 \leqslant k \leqslant r} \in \pi(A)$ pentru care $S(f;\Delta)$ să fie mică de ordinul W. Se poate presupune că $N = \bigcup_{k-1}^{n} A_k$ cu $n \leqslant r$. Fie $\lambda = \dfrac{1}{2\mu}$ şi $A' \in \Sigma_A$ cu $m_{V''}(\Delta) < \lambda$. Există $Q'' \in \varkappa(V'')$ cu proprietatea $m_{p_{Q''}}(\Delta_{A'}) < \dfrac{1}{\mu}$. Să notăm $Q = \mathrm{co}\,(u\,(Q' \times Q'')$ şi fie $a \in A^k \setminus A'$. Atunci $y = \sum_{k-1}^{r} u\,(a_k,\, m\,(A^k \cap A')) = \sum_{k=n+1}^{r} u\,(a_k,\, m\,(A^k)) \in S(f\,;\,\Delta_{A'})$ deci $p_Q(y) \leqslant \sum_{k=n+1}^{r} p_Q(u\,(a_k,\, m\,(A^k \cap A')) \leqslant \sum_{k=n+1}^{r} p_{Q'}(a_k)\, p_{Q''}(m\,(A^k \cap A') \leqslant \leqslant \mu\, m_{p_{Q''}}(\Delta_{A'}) \leqslant 1$.

Rezultă $y \in Q \subset C\,W$. Folosind lema 1 deducem că şi $S(f;\Delta_A)$ este mică de ordinul W, deci $S(f;\,\Delta_{A'}) \subset W + W \subset W_0$. Dar W_0 este închisă, deci $\int_{A'} f\,\mathrm{d}m \in \hat{W}_0 \subset V$.

Observaţie. Din raţionamentul de mai sus rezultă că dacă f este convex semiintegrabilă şi cvasiaproape mărginită pe $A \in \Sigma$ (în particular măsurabilă şi cvasiaproape mărginită), atunci pentru orice $V \in \hat{\mathfrak{B}}(0)$ există $Q \in \varkappa(V)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$, $\Delta \in \pi(A)$ şi $\lambda > 0$ astfel încît pentru fiecare mulţime $A' \in \Sigma$ cu $A' \subset A$ şi $m_{V''}(\Delta_{A'}) < \lambda$ să avem $\int_{A'} f\,\mathrm{d}m \in Q$.

COROLAR. *Presupunînd u convex continuă, dacă f este semiintegrabilă şi cvasiaproape mărginită pe $A \in \Sigma$, atunci pentru orice $V \in \hat{\mathfrak{B}}(0)$ există $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ şi $\lambda > 0$ astfel încît din $A' \in \Sigma$, $A' \subset A$ şi $m_{V''}A(') < \lambda$ să rezulte $\int_{A'} f\,\mathrm{d}m \in V$.*

Importanţa mare a proprietăţii din enunţul propoziţiei pentru restul dezvoltării acestei teorii sugerează ideea găsirii unor condiţii în care semiintegrabilitatea să implice în mod automat cvasiaproape mărginirea.

Fie F_1, F_2 două spaţii vectoriale topologice, $\mathfrak{B}_1(0)$, $\mathfrak{B}_2(0)$ filtrele vecinătăţilor originei pentru F_1, F_2 şi $\{f_\iota\}_{\iota \in I}$ o familie de aplicaţii liniare ale spațiului F_1 în F_2. Vom spune că această familie este *omotetic egal continuă* dacă pentru fiecare vecinătate $V_2 \in \mathfrak{B}_2(0)$ există o vecinătate $V_1 \in \mathfrak{B}_1(0)$ astfel încît mulțimile $f_\iota(V_1)$, $(\iota \in I)$, să fie absorbite de V_2. Evident, această condiție este intermediară între condiția de continuitate a fiecărei aplicații f_ι și cea de egal continuitate a familiei. O condiție suficientă (nu și necesară) de egal continuitate omotetică este ca să existe o funcție $\varkappa$ pe I cu valori pozitive astfel încît familia $\{k(\iota) f_\iota\}_{\iota \in I}$ să fie egal continuă. Este foarte important să observăm că dacă F_1 este local mărginit, atunci egal continuitatea omotetică este echivalentă cu condiția ca fiecare aplicație din familie să fie continuă.

Fiind dată o aplicație biliniară și separat continuă $u : F' \times F'' \to F$ și $\dot{y}' \in \dot{F}'$, $\dot{y}'' \in \dot{F}''$, este evident că mărimea $\varphi(u(y', y''))$ nu depinde de alegerea reprezentanților $y' \in \dot{y}'$, $y'' \in \dot{y}''$, de aceea se poate asocia o aplicație $\dot{u} : \dot{F}' \times \dot{F}'' \to \dot{F}$ definită prin $\dot{u}(\dot{y}', \dot{y}'') = \varphi(u(y', y''))$, $(y' \in \dot{y}', y'' \in \dot{y}'')$.

Definiția 3. *Presupunînd spațiile F', F'', F separate, vom spune că o aplicație biliniară $u : F' \times F'' \to F$ au proprietatea* (OCI) *pentru mulțimea $A \in \Sigma$ dacă satisface următoarele două condiții :*

(OCI_1) *Pentru fiecare $A_0 \in \Sigma_A$ pentru care $y''_0 = m(A_0) \neq 0$, aplicația $u_{y''_0}(.) = u(., y''_0)$ este biunivocă (cu alte cuvinte $u(y', y'') = 0$ cel mult dacă $y' = 0$ sau $y'' = 0$ sau $y' \notin M_0 = \{m(A^*) ;\ A^* \in \Sigma_A, m(A^*) \neq 0\}$).*

(OCI_2) *Familia $\{u_{y''}^{-1}\}_{y'' \in M_0}$ este omotetic egal continuă.*

De asemenea vom spune că u are proprietatea (OCI) *pentru mulțimea măsurabilă $E' \subset E$, dacă ea are această proprietate pentru fiecare mulțime din $\Sigma_{E'}$.*

Vom folosi aceeași definiție și în cazul în care nu toate spațiile F', F'', F sînt separate. Totuși, dacă u este separat continuă, vom spune că ea are proprietatea (OCI) pe A (respectiv pe E') și în cazul în care aplicația asociată u are această proprietate.

Folosind o teoremă a lui Banach ([3], cap. I, § 3, 1, teorema 1 și corolarul 3) deducem că, dacă F' și F sînt metrizabile și complete, iar u este biliniară, continuă în raport cu primul argument și satisface condiția (OCI_1) de biunivocitate, atunci pentru îndeplinirea condiției (OCI_2) este suficient ca pentru fiecare $y_0 \in M_0$, mulțimea $u(F', y_0)$ să reprezinte tot spațiul F sau o parte închisă a acestuia. Astfel, clasa mulțimilor ce posedă proprietatea (OCI) este destul de largă. Oricum ea cuprinde aplicațiile $u_1(y', \alpha) = \alpha y'$ folosite la integrarea unei aplicații cu valori într-un spațiu vectorial topologic oarecare în raport cu o măsură scalară, precum și aplicațiile $u_2(\alpha, y'') = \alpha y''$ corespunzătoare integrării unei funcții scalare în raport cu o măsură cu valori într-un spațiu local mărginit.

Lema 5. *Dacă u posedă proprietatea* (OCI) *pentru mulțimea $A \in \Sigma$, atunci orice aplicație $f : A \to \mathfrak{P}(F')$ semiintegrabilă pe A, este cvasi-aproape semimărginită pe A.*

Demonstrație. Ne putem evident mărgini la cazul spațiilor F', F'', F separate. Presupunînd că f nu ar fi cvasiaproape semimărginită, ar exista o vecinătate echilibrată și închisă $V' \in \mathfrak{B}'(0)$ astfel încît pentru orice mulțime m-neglijabilă $A' \subset A$, mulțimea $f(A \setminus A')$ să nu fie absorbită de V'. Fie $W' \in \mathfrak{B}'(0)$ echilibrată și închisă cu $W' + W' \subset V'$. Deoarece familia $\{u^{-1}_{m(A^*)}\}_{A^* \in \Sigma_A,\, m(A^*) \neq 0}$ este omotetic egal continuă, va exista o vecinătate $V \in \mathfrak{B}(0)$ care să fie absorbită de toate mulțimile $u(V', m(A^*))$ cu $A^* \in \Sigma_A$ și $m(A^*) \neq 0$. Vom arăta că nici o mulțime $S(f;\ \Delta)$, $(\Delta \in \pi(A))$ nu este mică de ordinul V, ceea ce va contrazice ipoteza de semiintegrabilitate a aplicației f pe A. Într-adevăr, fie $\Delta = \{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \pi(A)$ arbitrară. Există cel puțin o mulțime $A_{i_0} \in \Delta$ care să nu fie m-neglijabilă și pentru care mulțimea $f(A_{i_0})$ să nu fie absorbită de V. Pentru simplificare vom presupune $i_0 = 1$. Dacă $m(A_1) = 0$, atunci există o submulțime $A_1' \in \Sigma_{A_1}$ cu $m(A_1') \neq = 0$; rezultă $m(A_1 \setminus A_1') = - = -(A_1') \neq 0$ iar V nu absoarbe cel puțin una din mulțimile A_1', $A_1 \setminus A_1'$, de exemplu (pentru a face o alegere) A_1'. Dacă $m(A_1) \neq 0$, vom nota $A_1' = A_1$. Deoarece $u(W', m(A_1'))$ absoarbe V, există un număr $\lambda > 0$ cu $\lambda . u(W', m(A_1')) = u(\lambda W', m(A_1')) \supset V$. Din cauza biunivocității rezultă că pentru orice valoare $y' \in \lambda W'$, avem $u(y', m(A_1')) \notin V$. Fie $\Delta' = \{A_1', A_1 \setminus A_1', A_2, \ldots, A_n\} \in \pi(A)$. Să fixăm după voie valorile $a_i \in f(A_i)$ pentru $i \geqslant 2$, $a_1 = f(A_1 \setminus A_1')$ dacă $A_1 \setminus A_1' \neq \emptyset$ și $a_1 = 0$ în cazul contrar. Fie $p_{V'}$, $p_{W'}$ funcțiile Minkowski corespunzătoare vecinătăților V', W'. Deoarece W' nu absoarbe $f(A_1')$, există un punct $a' \in f(A_1')$ cu $R_{W'}(a') \geqslant \lambda$. Dar nici V' nu absoarbe $f(A_1')$ deci există $a'' \in f(A_1')$ cu $p_{V'}(a'') > p_{W''}(a')$. Să notăm $V_1' = p_{W'}(a')$. V' și $W_1' = p_{W'}(a')\, W'$; evident $W_1' + W_1' \subset V_1'$ și $W_1' \supset \lambda W'$. Dar $a' \in W_1'$ și $a'' \notin V_1'$, de unde rezultă $a' - a'' \notin W_1 \supset \lambda W''$. Fie acum y', $y'' \in S^*(f;\ \Delta') \subset S(f;\ \Delta)$ definite de

$$y' = \sum_{i=2}^{n} u(a_i, m(A_i)) + u(a_1, m(A_1 \setminus A_1')) + u(a', m(A_1'))$$

$$y'' = \sum_{i=2}^{n} u(a_i, m(A_i)) + u(a_1, m(A_1 \setminus A_1')) + u(a'', m(A_1'))$$

Avem $y' - y'' = u(a' - a'', m(A_1')) \notin V$, deci $S^*(f;\ \Delta')$ nu este mică de ordinul V și lema este demonstrată. Deci ea rezultă imediat.

PROPOZIȚIA 6. *Dacă u posedă proprietatea* (OCI) *pentru mulțimea $A \in \Sigma$ iar F' este local convex, atunci orice aplicație $f: A \to \mathfrak{P}(F')$, semiintegrabilă pe A, este cvasiaproape mărginită pe A.*

§ 2. APLICAȚII INTEGRABILE

În acest paragraf F' va fi un spațiu vectorial oricare, iar F', F'' spații vectoriale topologice. Numai în propozițiile 8, 9 precum și în observațiile ce succed teoremei 3 se presupune că și F' este un spațiu vectorial topologic.

DEFINIȚIA 4. *Fie* $E' \subset E$ *o mulțime măsurabilă. Vom spune că o familie* $\mathfrak{K} \subset \Sigma_{E'}$ *este m-densă (sau, mai simplu, densă) în E dacă satisface condițiile* :

(D_1). $A \in \mathfrak{K}$ *și* $A' \in \Sigma_A$ *implică* $A' \in \mathfrak{K}$.

(D_2). $A,\ A' \in \mathfrak{K}$ *implică* $A \cup A' \in \mathfrak{K}$.

(D_3). *Fiind date* $V'' \in \mathfrak{B}''\ (0)$, $A \in \Sigma_{E'}$, $\Delta \in \pi\,(A)$ *și* $\varepsilon > 0$ *există* $A' \in \mathfrak{K}$ *astfel încît* $m_{V''}\ (\Delta_{A \setminus A'}) < \varepsilon$.

O familie $\mathfrak{K} \subset \Sigma_{E'}$, *va fi numită m-pseudodensă (sau pseudodensă) în* E' *dacă este satisfăcută condiția* (D_3).

Dacă $\mathfrak{K}$ satisface (D_1), atunci (D_3) este chivalentă cu :

$(\widetilde{\mathrm{D}}_3)$ *Fiind date* $V'' \subset \mathfrak{B}''\ (0)$, $A \in \Sigma_{E'}$, $\Delta \in \pi\,(A)$ *și* $\varepsilon > 0$, *există* $A' \in \mathfrak{K}$ *astfel încît* $A' \subset A$ *și* $m_{V''}\ (\Delta_{A \setminus A'}) < \varepsilon$.

Dacă $\mathfrak{K}$ satisface atît (D_1) cît și (D_2), atunci condițiile (D_3), $(\widetilde{\mathrm{D}}_3)$ sînt echivalente și cu :

$(\widetilde{\mathrm{D}}_3)$. *Fiind date* $V'' \in \mathfrak{B}''\ (0)$, $A \in \Sigma_{E'}$, $A_0 \in \Sigma_{E'}$ *cu* $A_0 \subset A$, $\Delta \in \pi\,(A)$ *și* $\varepsilon > 0$ *există* $A' \in \mathfrak{K}$ *astfel încît* $A_0 \subset A' \subset A$ *și* $m_{V''}\ (\Delta_{A \setminus A'}) < \varepsilon$.

Dacă F'' este local convex iar m este cu variația finită pe E', atunci condiția (D_3) este chivalentă cu condițiile :

(D_3'). *Fiind date* $V'' \in \mathfrak{B}''\ (0)$, $A \in \Sigma_{E'}$, $\Delta \in \pi\,(A)$ *și* $\varepsilon > 0$ *există* $A' \in \mathfrak{K}$ *astfel încît* $m_{V''}\ (\Delta_{A''}) < \varepsilon$ *pentru orice* $A'' \in \Sigma_{A \setminus A'}$.

(D_3''). *Fiind date* $V'' \in \mathfrak{B}''\ (0)$, $A \in \Sigma_{E'}$, *și* $\varepsilon > 0$, *există* $A' \in \mathfrak{K}$ *astfel încît* $m_{V''}\,(A \setminus A') < \varepsilon$.

Dacă, în plus, este satisfăcută condiția (D_1), atunci condițiile (D_3), $\widetilde{\mathrm{D}}_3)$, $\mathrm{D}_3')$, (D_3'') sînt echivalente și cu condițiile $(\widetilde{\mathrm{D}}_3')$, $(\widetilde{\mathrm{D}}_3'')$ ce se pot obține din (D_3') respectiv (D_3'') după modelul condiției $(\widetilde{\mathrm{D}}_3)$. În sfîrșit, dacă pe lîngă condițiile de mai sus este îndeplinită și condiția (D_2), atunci condițiile precedente sînt echivalente și cu condițiile $(\overline{\mathrm{D}}_3)$, $(\overline{\mathrm{D}}_3')$, $(\overline{\mathrm{D}}_3'')$, ultimele două obținîndu-se din (D_3'), (D_3'') după modelul condiției $(\overline{\mathrm{D}}_3)$; în plus acestea sînt echivalente și cu :

$(\widetilde{\mathrm{D}}_3''')$. *Fiind date* $V'' \in \mathfrak{K}\ (0)$ și $A \in \Sigma_{E'}$ *cu* $m_{V''}\,(A) \neq 0$, *există* $A' \in \mathfrak{K}$ *cu* $m_{V''}\,(A') \neq 0$.

Întra-devăr, este suficient să demonstrăm implicațiile $(\widetilde{\mathrm{D}}_3''') \Rightarrow (\widetilde{\mathrm{D}}_3'')$ și $(\mathrm{D}_3) \Rightarrow (\mathrm{D}_3'')$, restul fiind banale sau imediate. Prima din ele se poate verifica printr-un raționament asemănător celui utilizat la demonstrarea implicațiilor $(M_4) \Rightarrow (M_3) \Rightarrow (\mathrm{M}_2)$ de la propoziția 6 din [3], § 2. Pentru a arăta că din (D_3) rezultă (D_3''), fie $V'' \in \mathfrak{B}''\ (0)$, $A \in \Sigma_{E'}$ și $\varepsilon > 0$. Să alegem $\Delta \in \pi\,(A)$ cu proprietatea că $m_{V''}\,(A) - m_{V''}\ (\Delta_A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Vom găsi, aplicînd (D_3), o mulțime $A' \in \mathfrak{K}$ cu $m_{V''}\ (\Delta_{A \setminus A'}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Folosind lema 4 din [3], § 1, obținem $m_{V''}\ (A \setminus A') \leqslant m_{V''}\,(\Delta_{A \setminus A'}) + m_{V''}\ (A) - m_{V''}\ (\Delta_A) < \varepsilon$.

PROPOZIȚIA 7. *Intersecția unui număr finit de familii dense în* E' *este densă în* E'. *Intersecția unei familii dense cu o familie pseudodensă este pseudodensă.*

Demonstrație. Fie $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subset \Sigma_{E'}$. Este evident că dacă ele satisfac condițiile (D_1), (D_2), atunci și $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$ satisface aceste condiții. Presupunînd acum $\mathfrak{K}_1$ densă și $\mathfrak{K}_2$ pseudodensă, să arătăm că și $\mathfrak{K}$ satisface (D_3). Pentru aceasta fie $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ $A \in \Sigma_{E'}$, $\Delta \in \pi(A)$ și $\varepsilon > 0$. Alegînd $W'' \in \mathfrak{B}''(0)$ cu $W'' + W'' \subset V''$, există $A_2 \in \mathfrak{K}_2$ cu $m_{V''}(\Delta_{A \setminus A_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$. De asemenea putem găsi $A_1 \in \mathfrak{J}_1$ cu $A_1 \subset A_2$ și $m_{W''}(\Delta_{A_2 \setminus A_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dar $A_1 \in \mathfrak{K}_2$ deci $A_1 \in \mathfrak{K}$ și $m_{V''}(\Delta_{A \setminus A_1}) \leqslant m_{W''}(\Delta_{A \setminus A_2}) + m_{W''}(\Delta_{A_2 \setminus A_1}) < \varepsilon$.

Dacă familia $\mathfrak{K}$ este (pseudo) densă în E' iar $E'' \subset E'$ este măsurabilă, atunci urma $\mathfrak{K}_{E''}$ a familiei $\mathfrak{K}$ pe E'' este (pseudo) densă în E''. Dacă $\mathfrak{K}$ satisface (D_1), atunci $\mathfrak{K}_{E''} \subset \mathfrak{K}$. Reciproc, dacă $\mathfrak{K}'$ este densă în E', iar pentru fiecare mulțime $A \in \mathfrak{K}'$ familia $\mathfrak{K}_A$ este densă în A, atunci K este densă în E'.

LEMA 6. *Dacă* $E_i \subset E$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *sînt măsurabile* (*nu neapărat disjuncte*) *iar* $\mathfrak{K}_i$ *sînt familii* (*pseudo*) *dense respectiv în* E_i, *atunci familia* $\bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{K}_n$, *alcătuiră din mulțimile de forma* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *cu* $A_i \in \mathfrak{K}_i$, *este* (*pseudo*) *densă în* $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$.

LEMA 7. *Dacă familia* $\mathfrak{K}$ *este densă în* E' *și* $A \in \mathfrak{K}$, *atunci familia mulțimilor din* $\mathfrak{K}$ *care includ mulțimea* A *este pseudodensă în* E'.

PROPOZIȚIA 8. *Dacă* F' *este semimetrizabil, atunci pentru orice aplicație* $f: E' \to \mathfrak{L}(F')$, *m-măsurabilă pe* E', *familia* $(M_6)_{E'}(f)$ *a mulțimilor din* $\Sigma_{E'}$ *pe care* f *posedă proprietatea* (M_6), *este densă în* E'.

Demonstrație. Fie $\{V'_n\}_{n=1,2,\ldots}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originei în F'. Fiind date $A \in \Sigma_{E'}$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și $\varepsilon > 0$ să formăm mai întîi un șir $V'_i \in \mathfrak{B}''(0)$ cu

$$V''_0 + V''_0 \subset V'', \; V''_{i+1} + V''_{i+1} \subset V''_i \qquad (i = 0,1, \ldots).$$

Vom construi un șir $\{A^n_1\}$ în felul următor: luăm $A^0_1 = \emptyset$ iar, presupunînd construite $A^1_1, \ldots, A^{n-1}_1$ și folosind definiția măsurabilității pentru $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A^i_1$, V'_n, V''_n și $\frac{\varepsilon}{2n}$, vom găsi o partiție $\{A^n_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r_n} \in \pi(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A^i_1$ cu $m_{V''_n}(A^n_1) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ iar pentru $2 \leqslant i \leqslant r_n$ mulțimea co $(F(A^n_i))$ să fie mică de ordinul V'_n. Astfel A^n_1 este construită. Fie $A_1 \leqslant \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n_1$ și $A' = A \setminus A_1$. Evident, f posedă proprietatea (M_6) pe A'. Pe de altă parte, $m_{V''}(A \setminus A') = m_{V''}(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{V''_n}(A^n_1) < \varepsilon$, deci familia $(M_6)_{E'}(f)$ satisface condiția (D''_3) și cu atît mai mult (D_3). Verificarea celorlalte două condiții este imediată.

COROLAR. *Dacă* F' *este semimetrizabil și local convex, iar* f *este m-măsurabilă pe* E', *atunci familia* $(B)_{E'}(f)$ *a mulțimilor din* E' *pe care* f *este mărginită, este densă în* E'.

DEFINIȚIA 5. *Vom spune că o aplicație* $f: \quad E' \to \mathfrak{P}(F')$ *este* (m, u)-*integrabilă* (*sau, mai simplu, integrabilă*) *pe mulțimea măsurabilă* $E' \subset E$, *dacă*

(I_1). *Există o familie* $\mathfrak{K} \subset \Sigma_{E'}$, *densă în* E', *astfel încît* f *să fie semiintegrabilă pe fiecare* $A \in \mathfrak{K}$.

(I_2). *Pentru orice subfamilie* $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$, *densă în* E', *șirul generalizat* $\left\{\int_A f \, \mathrm{d}m\right\}_{A \in \mathfrak{K}'}$ *este convergent.*

(I_3). *Există un punct* $a \in \hat{F}$ *cu proprietatea că pentru orice subfamilie* $\mathfrak{K}^{n} \subset \mathfrak{L}$, *pseudodensă în* E', a *este aderent mulțimii* $\left\{\int_A f \, \mathrm{d}m\right\}_{A \in \mathfrak{K}''}$.

În cazul integrabilității, valoarea a se numește integrala aplicației f pe E' și se notează cu $u\int_{E'} f \, \mathrm{d}m$ sau $\int_{E'} \mathrm{d}m$.

De fapt, pentru orice familie $\mathfrak{K}''$ pseudodensă E', valoarea $a = \int_{E'} f \, \mathrm{d}m$ este aderentă mulțimii $\left\{\int_A f \, \mathrm{d}m\right\}$, unde A parcurge mulțimile familiei $\mathfrak{K}''$ pe care semiintegrala are sens. (Este suficient să observăm că $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{K}''$ este pseudodensă). În afară de aceasta, pentru toate subfamiliile dense $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ din condiția (I_2) limita este punctul a. Presupunînd contrariul, ar exista $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ densă în E', cu $\lim\limits_{A \in \mathfrak{K}} \int_A f \, \mathrm{d}m = a' \neq a$. Fie $V \in \hat{\mathfrak{B}}(0)$, închisă, cu $a - a' \notin V$. Există $A \in \mathfrak{K}'$ astfel încît $\int_{A'} f \, \mathrm{d}m \in a' V$ pentru orice $A' \in \mathfrak{K}'$, $A' \supset A$. Dar familia $\mathfrak{K}''$ a acestor mulțimi A' este pseudodensă (lema 7) iar punctul a nu este aderent mulțimii $\left\{\int_A f \, \mathrm{d}m\right\}_{A \in \mathfrak{K}''}$, ceea ce contrazice (I_3).

Să demonstrăm acum unicitatea valorii integralei. Fie $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ două familii satisfăcînd condițiile (I_1) — (I_3). Deoarece $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$ este densă în E', valoarea $\lim\limits_{A \in \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2} \int_A f \, \mathrm{dm}$ trebuie să fie egală atît cu $\lim\limits_{A \in \mathfrak{K}_1} \int_A f \, \mathrm{d}m$ cît și cu $\lim\limits_{A \in \mathfrak{K}_2} \int_A f \, \mathrm{d}m$, deci aceste două ultime limite sînt egale. În propoziția 11 vom demonstra că nu numai valoarea integralei dar nici măcar integrabilitatea nu este influențată de alegerea familiei $\mathfrak{K}$ din (I_1).

PROPOZIȚIA 9. *Dacă* F'' *este local convex,* m *este cu variație mărginită pe* $A \in \Sigma$ *iar* $f: A \to \mathfrak{P}(F')$ *este semiintegrabilă și cvasiaproape mărginită pe* A (*în particular măsurabilă și cvasiaproape mărginită*), *atunci* f *este integrabilă pe* A.

Demonstrație. Fie $\mathfrak{K} = \Sigma_A$. Evident $\mathfrak{K}$ este densă în A iar f este semiintegrabilă pe fiecare mulțime a sa. Dacă $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}$ este densă în A, ea satisface și condiția (D_3''). Aplicînd propoziția 5 vom găsi $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$, $\Delta \in \pi(A)$ și $\lambda > 0$ astfel încît din $A^\star \in \Sigma_A$ cu $m_{V''}(\Delta_{A^\star}) < \lambda$ să rezulte $\int_{A^*} f\,\mathrm{d}m \in V$. Pe de altă parte, există o mulțime $A' \in \mathfrak{K}'$ cu proprietatea că $m_{V''}(\Delta_{A^\star}) < \lambda$ pentru orice $A^\star \in \Sigma_{A \setminus A^\star}$. De aici rezultă $\int_{A^*} f\,\mathrm{d}m \in \int_A f\,\mathrm{d}m + V$ pentru fiecare $A'' \in \mathfrak{K}$, $A'' \supset A'$, deci condiția (S_2) este satisfăcută. În mod asemănător se verifică și (I_3).

Propoziția 10. *Dacă o aplicație este integrabilă pe o anumită mulțime, atunci ea este integrabilă pe orice submulțime măsurabilă a acesteia.*

Demonstrație. Fie $F'' \subset E' \subset E$ măsurabile și f integrabilă pe E'; să notăm $E''' = E' \setminus E''$. Există o familie $\mathfrak{K}$, densă în E', satisfăcînd condițiile (I_1) — (I_3). Vom găsi că urma $\mathfrak{K}_{E''}$ a acestei familii pe E'' îndeplinește și ea aceleași condiții. (I_1) fiind evident satisfăcută de $\mathfrak{K}_{E''}$, să le verificăm pe celelalte. Pentru aceasta fie $\mathfrak{K}'' \subset \mathfrak{K}_{E''}$ o subfamilie densă în E'', $V \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ arbitrară și $W \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ cu $W - W \subset V$. Familia $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'' \curlyvee \mathfrak{K}_{E'''}$ fiind densă în E' (lema 6), va exista o mulțime $A_0'' \cup A_0''' \in \mathfrak{K}'$, ($A_0'' \in \mathfrak{K}''$, $A_0''' \in \mathfrak{R}_{E'''}$) astfel încît din $A^\star \supset A_0'' \cup A_0'''$ și $A^* \in \mathfrak{K}'$ să rezulte $\int_{A^*} f\,\mathrm{d}\,m - \int_{E'} f\,\mathrm{d}m \in W$. Fie A_1'', $A_2'' \in \mathfrak{L}''$ cu A_1'', $A_2'' \supset A''$. Evident, $A_1'' \cup A_0'''$, $A_2'' \cup A_0''' \in \mathfrak{K}'$ deci $\int_{A_1'' \cup A_0'''} f\,\mathrm{d}m - \int_{E'} f\,\mathrm{d}\,m \in W$ și $\int_{A_2'' \cup A_0'''} f\,\mathrm{d}m - \int_{E'} f\,\mathrm{d}m \in W$ de unde, prin scădere, $\int_{A_1''} f\,\mathrm{d}m - \int_{A_2''} f\,\mathrm{d}m \in W - W \subsetneq V$. Rezultă că șirul $\left\{\int_A f\,\mathrm{d}\,m\right\}_{A \in \mathfrak{K}''}$ este fundamental, deci convergent și condiția (I_2) este astfel îndeplinită. Pentru a verifica şi (I_3), fie $a' = \lim\limits_{A \in \mathfrak{K}_{E'}} \int_A f\,\mathrm{d}\,m$. Inversînd, în raționamentele de mai sus, rolul mulțimilor E' și E'' se poate arăta că șirul $\left\{\int_A f\,\mathrm{d}\,m\right\}_{A \in \mathfrak{K}_{E'''}}$ converge către un punct $a'' \in \hat{F}$. Să observăm că $\int_{E'} f\,\mathrm{d}m = a' + a''$. Există o mulțime $A_0 \in \mathfrak{K}_{E''}$ cu proprietatea că $\int_{A^*} f\,\mathrm{d}\,m \in a'' + W$ pentru orice mulțime $A^* \supset A_0$ din $\mathfrak{K}_{E'''}$. Familia $\mathfrak{K}_1'''$ a mulțimilor din $\mathfrak{K}_{E'''}$ care conțin A_0 este pseudodensă în E''. Fiind dată arbitrar o subfamilie $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_{E''}$, pseudodensă în E'', familia $\mathfrak{K}_1' = \mathfrak{K}_1'' \curlyvee \mathfrak{K}_1'''$ este pseudodensă în E'. Există deci o mulțime $A_2'' \cup A_2''' \in \mathfrak{K}_1'$ ($A_2'' \in \mathfrak{K}_1''$, $A_2''' \in \mathfrak{K}_1'''$) astfel ca $\int_{A_2'' \cup A_2'''} f\,\mathrm{d}m$

$\in a' + a'' + W$. Dar $A_2''' \supset A_2$, deci $\int_{A_2'''} f\,\mathrm{d}\,m \in a'' + W$, prin urmare $\int_{A_2''} f\,\mathrm{d}m \in a' + W - W \subset a' + V$. Astfel a' aparține aderenței mulțimii $\left\{\int_A f\,\mathrm{d}\,m\right\}_{A \in \mathfrak{K}_1''}$, deci condiția ($\mathrm{I}_3$) (și prin ea întreaga propoziție) este demonstrată.

Teorema 2. *Dacă* $f : E' \to \mathfrak{P}(F')$ *este integrabilă pe o mulțime măsurabilă* $E' \subset E$, *atunci pentru orice vecinătate* $V \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ *există o mulțime* $A_0 \in \Sigma_{E'}$ *astfel încît pentru orice mulțime* $A \in \Sigma_{E'}$ *cu* $A \supset A_0$, *să existe o partiție* $\Delta \in \pi(A)$, *o vecinătate* $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ *și un număr* $\lambda > 0$ *astfel încît pentru fiecare mulțime măsurabilă* $E'' \subset E'$ *pentru care* $m_{V''}(\Delta_{E'' \cap A}) < \lambda$ *să aven* $\int_{E''} f\,\mathrm{d}m \in V$.

Demonstrație. Fie $W \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ simetrică și închisă cu $W + W + W \subset V$ și $\mathfrak{K}$ o familie densă în E', satisfăcînd condițiile (I_1) — (I_3). Există o mulțime $A_0 \in \mathfrak{K}$ cu proprietatea că $\int_{A'} f\,\mathrm{d}m \in \int_{E'} f\,\mathrm{d}m + W$ pentru orice $A' \in \mathfrak{K}$ cu $A' \supset A_0$. De aici rezultă $\int_{A'} f\,\mathrm{d}m \in W - W$ pentru fiecare mulțime $A'' \in \mathfrak{K}_{E' \setminus A}$ (în cazul contrar ar rezulta $\int_{A_0 \cup A''} f\,\mathrm{d}\,m \not\subset \not\subset \int_{E'} f\,\mathrm{d}\,m + W$ deși $A_0 \cup A'' \in \mathfrak{K}$ și $A_0 \cup A'' \supset A''$). Din demonstrația propoziției precedente rezultă că, pentru orice mulțime măsurabilă $E'' \subset E'$, familia $\mathfrak{K}_{E''}$ satisface condițiile (I_1) — (I_3) deci ($W - W$ fiind închisă), $\int_{E''} f\,\mathrm{d}m \in W - W$ pentru orice $E'' \subset E' \setminus A_0$ măsurabilă.

Fie $A \supset A_0$, $A \in \Sigma_{E'}$. Vom arăta că există $\Delta \in \pi(A)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și $\lambda > 0$ astfel încît pentru fiecare mulțime $A' \in \Sigma_A$ cu $m_{V''}(\Delta_{A'}) < \lambda$ să avem $\int_{A'} f\,\mathrm{d}m \in W + W$. Presupunînd contrariul, pentru orice $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$, $\Delta \in \pi(A)$ și $\lambda > 0$ ar exista $A_{\lambda, V'', \Delta} \in \Sigma_A$ cu $m_{V''}(\Delta_{A\lambda, V'', \Delta}) < \lambda$ iar $\int_{A_{\lambda, V'', \Delta}} f\,\mathrm{d}m \in W + W$. Să notăm $A'_{\lambda, V'', \Delta} = A \setminus A_{\lambda, V'', \Delta}$. Deoarece f este integrabilă pe $A'_{\lambda, V'', \Delta}$, există $A''_{\lambda, V'', \Delta} \in \mathfrak{K}'_{A'\lambda, V'', A}$ cu $m_{V''}(\Delta'_{A'\lambda, V'', \Delta \setminus A''\lambda, V'', \Delta}) < \lambda$ și $\int_{A''_{\lambda, V'', \Delta}} f\,\mathrm{d}m - \int_{A''_{\lambda, V'', \Delta}} f\mathrm{d}m \in W$. De aici rezultă $m_{V'+V'}(\Delta_{A \setminus A''_{\lambda, V'', \Delta}}) < 2\lambda$ și $\int_{A''_{\lambda, V'', \Delta}} f\,\mathrm{d}m \notin \int_A f\,\mathrm{d}m + W$. Astfel familia $\mathfrak{K} = \{A_{\lambda, V'', \Delta}\}_{\lambda > 0, V'' \in \mathfrak{K}''(0), \Delta \in \pi(A)}$

este pseudodensă în A iar valoarea $\int_A f \, \mathrm{d}\, m$ nu aparține aderenței mulțimii $\left\{ \int_{A^*} f \, \mathrm{d}\, m \right\}_{A^* \in \mathfrak{K}'}$ ceea ce nu se poate. Astfel există Δ, V'' și λ cu proprietatea amintită mai sus, iar restul demonstrației este evident.

COROLARUL 1. *Dacă f este integrabilă pe E', atunci pentru orice $V \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ există $A \in \Sigma_{E'}$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și $\lambda > 0$ astfel încît pentru fiecare mulțime măsurabilă $E'' \subset E'$ pentru care $m_{V''}(E'' \cap A) < \lambda$ să avem $\int_{E'''} f \, \mathrm{d}m \in V$ pentru orice mulțime măsurabilă $E''' \subset E''$.*

COROLARUL 2. *Dacă f este integrabilă pe E', atunci pentru orice $V \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ există $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și $\lambda < 0$ astfel încît pentru orice mulțime măsurabilă $E'' \subset E'$ care are proprietatea că $A' \in \Sigma_{E''}$ implică $m_{V''}(A') < \lambda$, să avem $\int_{E'''} f \, \mathrm{d}m \in V$ pe orice mulțime măsurabilă $E''' \subset E'$.*

Fiind dată o mulțime măsurabilă $E' \subset E$, să notăm prin $\pi(E')$ familia tuturor partițiilor finite ale mulțimii E' în mulțimea măsurabilă. Dacă Δ este o astfel de partiție și $A \in \Sigma_{E'}$, atunci $\Delta_A \in \pi(A)$.

COROLARUL 3. *Dacă f este integrabilă pe E', atunci pentru orice $V \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ există o partiție $\Delta \in \pi(E')$, o vecinătate $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și un număr $\lambda > 0$, astfel încît pentru fiecare mulțime măsurabilă $E'' \subset E'$ cu proprietatea că $m_{V''}(\Delta_A) < \lambda$ pentru fiecare $A \in \Sigma_{E'}$ să avem $\int_{E'''} f \, \mathrm{d}m \in V$ pe orice mulțime măsurabilă $E''' \subset E''$. În particular, $\int_A f \, \mathrm{d}m \in V$ pentru fiecare $A \in \Sigma_{E'}$ pentru care $m_{V''}(\Delta_A) < \lambda$.*

PROPOZIȚIA 11. *Dacă f este integrabilă pe E', atunci orice familie $\mathfrak{K}$, m-densă în E', alcătuită din mulțimi pe care f este semiintegrabilă, satisface condițiile definiției 5. În particular, se poate folosi familia $(S|)_{E'}(f)$ a tuturor acestor mulțimi.*

Demonstrație. Să presupunem că $\mathfrak{K}$ satisface condițiilor $(\mathrm{I}_1)-(\mathrm{I}_3)$ și fie $\mathfrak{K}_1$ o altă familie densă în E', pe mulțimile căreia f să fie semiintegrabilă. Pentru a verifica (I_2) (pentru $\mathfrak{K}_1$), fie $\mathfrak{K}_1' \subset \mathfrak{K}_1$ o subfamilie densă în E' și $V \in \hat{\mathfrak{B}}(0)$ arbitrară. Deoarece $\mathfrak{K}_1' \cap \mathfrak{K}$ este densă în E', rezultă că șirul $\left\{ \int_{A^*} f \, \mathrm{d}m \right\}_{A^* \in \mathfrak{K}_1' \cap \mathfrak{K}}$ converge către $a = \int_{E'} f \, \mathrm{d}m$. Alegînd $W \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ cu $W + W \subset V$, există o mulțime $A_0 \in \mathfrak{K}_1' \cap \mathfrak{K}$ cu proprietatea că $\int_{A^*} f \, \mathrm{d}m \in a + W$, oricare ar fi mulțimea $A^* \in \mathfrak{K}_1' \cap \mathfrak{K}$ cu $A^* \supset A_0$. Să luăm arbitrar $A_1' \in \mathfrak{K}_1'$ cu $A_1' \supset A_0$. Aplicînd teorema 2 vom găsi

$\Delta \in \pi(A)$, $V'' \in \mathfrak{B}''(0)$ și $\lambda > 0$ astfel încît din $A^* \in \Sigma_{A_1'}$ și $m_{V''}(\Delta_{A^*}) < \lambda$ să rezulte $\int_{A^*} f\,\mathrm{d}m \in W$. Din $(\overline{\mathrm{D}}_3)$ rezultă existența unei mulțimi $A \in \mathfrak{K}$ cu $A_0 \subset A \subset A'$, și $m_{V''}(\Delta_{A_1' \setminus A}) < \lambda$. Rezultă $\int_{A_1' \setminus A} f\,\mathrm{d}m \in W$. Dar $A \in \in \mathfrak{K}_1' \cap \mathfrak{K}$, deci $\int_A f\,\mathrm{d}m \in a + W$. În felul acesta $\int_{A,} f\,\mathrm{d}m = \int_A f\,\mathrm{d}m + + \int_{A_1' \setminus A} f\,\mathrm{d}m \in a + W + W \subset a + V$.

Prin urmare șirul $\left\{\int_A f\,\mathrm{d}m\right\}_{A \in \mathfrak{K}_1'}$ converge către a și (I_2) este verificată. În ceea ce privește condiția (I_3) știm deja că ea este satisfăcută pentru orice familie pseudodensă, deci și pentru subfamiliile pseudodense ale familiei $\mathfrak{K}_1$.

Corolar. *Dacă o aplicație este semiintegrabilă și integrabilă pe o mulțime $A \in \Sigma$, atunci valorile integralei și semiintegralei coincid.*

Într-adevăr, să luăm, în definiția 5, $\mathfrak{K} = \Sigma_A$. $\{A\}$ este o „familie” pseudodensă în A deci $a = \int_A f\,\mathrm{d}m$.

Propoziția 12. 1. *Dacă aplicațiile f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sînt integrabile pe E' iar α_i sînt scalari oarecare (din corpul în raport cu care sînt vectoriale spațiile F', F'', F), atunci și $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ este integrabilă pe E'* și avem $\int_{E'} f\,\mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{E'} f_i\,\mathrm{d}m$.

2. *Dacă f este integrabilă pe fiecare din mulțimile măsurabile disjuncte $E_1, \ldots, E_n$, atunci f este integrabilă și pe $E' = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ și $\int_{E'} f\,\mathrm{d}m = = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\,\mathrm{d}m$.*

3. *Dacă două aplicații sînt egale local aproape peste tot pe o mulțime măsurabilă $E' \subset E$ și dacă una din ele este integrabilă pe E', atunci și cealaltă este integrabilă, iar valorile celor două integrale coincid.*

Demonstrație. Fie f_1, f_2 integrabile pe E', $\mathfrak{K}_1$ și $\mathfrak{K}_2$ familii dense în E satisfăcînd condițiile (I_1) — (I_3) pentru f_1 respectiv f_2 și $f = f_1 + f_2$. Se vede imediat că $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$ satisface condițiile (I_1), (I_2) pentru f. Pentru verificarea condiției (I_3), fie $V \in \hat{\mathfrak{B}}(0)$ arbitrară, $W \in \hat{\mathfrak{B}}(0)$ simetrică cu $W + W \subset V$ și $\mathfrak{K}'' \subset \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$ o subfamilie pseudodensă. Dacă A_0^1, A_0^2 sînt mulțimile de tipul mulțimii A_0 din enunțul teoremei 2 pentru f_1 respectiv f_2, fie $A_0 = A_0^1 \cup A_0^2$. Aplicînd această teoremă vom găsi $\Delta_1, \Delta_2 \in \pi(A_0)$, $V_1'', V_2'' \in'' \mathfrak{B}''(0)$ și $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ astfel ca din

$A^* \in \Sigma_{E'}(\Delta_{V_i''}(\Delta^i_{A^*}) < \lambda_i$ să rezulte $\int_{A^*} f_i \, \mathrm{d}m \in W \; (i = 1, 2)$. Notînd $V'' = V_1'' \cap \cap V_2''$, $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ și prin Δ partiția obținută prin suprapunerea partițiilor Δ^1, Δ^2, există o mulțime $A'' \in \mathfrak{K}''$ cu $m_{V''}(\Delta_{A_0 \setminus A''}) < \lambda$. Rezultă $\int_{E' \setminus A''} f_i \, \mathrm{d}m \in W$. Astfel $\int_{A''} f \, \mathrm{d}m = \int_{A''} f_1 \, \mathrm{d}m + \int_{A''} f_2 \, \mathrm{d}m = \int_{E'} f_1 \, \mathrm{d}m + + \int_{E'} f_2 \, \mathrm{d}m - \int_{E' \setminus A''} f_1 \, \mathrm{d}m - \int_{E' \setminus A''} f_2 \, \mathrm{d}m \in \int_{E'} f_1 \, \mathrm{d}m + \int_{E'} f_2 \, \mathrm{d}m + V$ deci valoarea $\int_{E'} f_1 \, \mathrm{d}m + \int_{E'} f_2 \, \mathrm{d}m$ este aderentă mulțimii $\left\{\int_{A'} f \, \mathrm{d}m\right\}_{A \in \mathfrak{K}''}$. Astfel am verifica (I_3) și în plus relația $\int_{E'} f \, \mathrm{d}m = \int_{E'} f_1 \, \mathrm{d}m + \int_{E'} f_2 \, \mathrm{d}m$. Un raționament simplu poate dovedi că dacă o aplicație f este integrabilă, atunci și αf este integrabilă iar $\int_E \alpha f \, \mathrm{d}m = \alpha \int_{E'} = f \, \mathrm{d}m$. În felul acesta prima parte a propoziției este demonstrată. Pentru celelalte două puncte demonstrațiile nu prezintă nici o dificultate.

PROPOZIȚIA 13. *Pentru ca o aplicație f să fie integrabilă pe E' este necesar ca să fie îndeplinite următoarele două condiții :*

(I_1'). *Există o familie $\mathfrak{K} \subset \sum_E$, densă în E', astfel ca f să fie integrabilă pe fiecare mulțime a sa.*

(I_2'). *Șirul generalizat $\left\{\int_A f \, \mathrm{d}m\right\}_{A \in \mathfrak{K}}$ este convergent.*

O altă condiție necesară și suficientă este ca pentru orice familie densă în E' (în particular $\sum_{E'}$) să fie îndeplinite condițiile (I_1'), (I_2').

În plus, integrala este egală cu valoarea limitei din (I_2').

Demonstrație. Să presupunem îndeplinite condițiile (I_1'), (I_2') și să arătăm că f este integrabilă pe E'. Familia $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} \cap (\mathrm{SI})_E\,(f)$ este densă în E', deci satisface condiția (I_1). Fie $\mathfrak{K}' \subset \mathfrak{K}_1$ o subfamilie densă în E' și $V \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ arbitrară. Alegînd $W \in \hat{\dot{\mathfrak{B}}}(0)$ simetrică cu $W + W + W + W \subset V$, există $A \in \mathfrak{K}$ cu proprietatea că din $A^* \supset A$, $A^* \in \mathfrak{K}$ rezultă $\int_{A^*} f \, \mathrm{d}m \in \in \int_{E'} f \, \mathrm{d}m + W$. Deoarece $\mathfrak{K}_A'$ este densă în A iar f este integrabilă pe A, se poate găsi o mulțime $A' \in \mathfrak{K}_A'$ cu proprietatea că $\int_{A^*} f \, \mathrm{d}m \in \int_A f \, \mathrm{d}m + W$ pentru orice mulțime $A^* \in \mathfrak{K}_A'$ cu $A^* \supset A'$. Să luăm arbitrar $A'' \in \mathfrak{K}'$ cu $A'' \supset A$. Deoarece $A'' \cap A \in \mathfrak{K}_A'$ și $A'' \cap A \supset A'$ rezultă $\int_{A'' \cap A} f \, \mathrm{d}m \in \in \int_A f \, \mathrm{d}m + W$. Pe de altă parte, $\int_{A'' \setminus A} f \, \mathrm{d}m \in W + W$ căci, în cazul contrar, am obține $\int_{A \cup A''} f \, \mathrm{d}m = \int_A f \, \mathrm{d}m + \int_{A'' \setminus A} f \, \mathrm{d}m \notin \int_{E'} f \, \mathrm{d}m + W$ deși $A \cup A'' \in \mathfrak{K}$ și $A \cup A'' \supset A$, ceea ce ar contrazice alegerea mulțimii A. În felul acesta

$\int_{A''} f \,\mathrm{d}m = \int_{A'' \cap A} f \,\mathrm{d}m + \int_{A'' \setminus A} f \,\mathrm{d}m \in \int_{A} f \,\mathrm{d}m + W + W + W + \subset$ $\subset \int_{E'} f \,\mathrm{d}m + W + W + W + W \subset \int_{E'} f \,\mathrm{d}m + V$, deci șirul $\left\{\int_{A^*} f \,\mathrm{d}m\right\}_{A^* \in \mathfrak{K}'}$ converge către $\int_{E'} f \,\mathrm{d}m$ și condiția (I_2) este îndeplinită. Luînd acum arbitrar o subfamilie $\mathfrak{K}'' \subset \mathfrak{K}_1$, pseudodensă în E' și folosind mulțimea A și vecinătățile V, W de mai sus, familia $\mathfrak{K}_A$ este pseudodensă în A, deci există o mulțime $A_1 \in \mathfrak{K}''_A$ (adică de forma $A_1 = A_2 \cap A$ cu $A_2 \in \mathfrak{K}''$) cu $\int_{A_1} f \,\mathrm{d}m \in \int_{A} f \,\mathrm{d}m + W$. Dar, la fel ca mai sus, se arată că $\int_{A_2 \setminus A_1} f \,\mathrm{d}m \in W - W$, deci $\int_{A_2} f \,\mathrm{d}m = \int_{A_1} f \,\mathrm{d}m + \int_{A_2 \setminus A} f \,\mathrm{d}m \in \int_{E'} f \,\mathrm{d}m + V$. Astfel valoarea $\int_{E'} f \,\mathrm{d}m$ este aderentă mulțimii $\left\{\int_{A^*}\right\}_{A^* \in \mathfrak{K}''}$ și condiția (I_3) este satisfăcută. Necesitatea condițiilor din enunț va rezulta ca un caz particular al propoziției următoare:

PROPOZIȚIA 14. *Fie* E' *o mulțime măsurabilă și* $\{E_\iota\}_{\iota \in I}$ *o familie de submulțimi măsurabile ale mulțimii* E' *astfel ca*:

1) $\{E_\iota\}_{\iota \in I}$ *este filtrantă pentru relația* „$\subset$"
2) *Familia* $\mathfrak{K} = \bigcup_{\iota \in I} \Sigma_{E_\iota}$ *este densă în* E'.

Atunci, dacă f *este integrabilă pe* E', *există* $\lim_{E_\iota} \int_{E_\iota} f$ *și este egală cu* $\int_{E'} f \,\mathrm{d}m$.

Demonstrație. Fie dată $V \in \hat{\dot{\mathfrak{V}}}(0)$. Să alegem $W \in \hat{\dot{\mathfrak{V}}}(0)$ simetrică cu $W + W \subset V$ și fie $\mathfrak{K}'_1 = \mathfrak{K} \cap (\mathrm{SI})_{E'}(f)$. Deoarece $\mathfrak{K}_1$ este densă în E', există $A \in \mathfrak{K}'$ cu proprietatea că $\int_{A^*} f \,\mathrm{d}m \in \int_{E'} f \,\mathrm{d}m + W$ pentru oricare $A^* \in \mathfrak{K}'$ cu $A^* \supset A$. Există de asemenea un indice ι_0 astfel încît $A \in \Sigma_{E_{\iota_0}}$ și a fortiori $A \in \Sigma_{E_\iota}$ pentru $E_\iota \supset E_{\iota_0}$. Deoarece $\mathfrak{K}'_{E_\iota}$ este densă în E_ι, din cele de mai sus rezultă $\int_{E_2} f \,\mathrm{d}m \in \int_{A} f \,\mathrm{d}m + W$ pentru orice $E_\iota \supset E_{\iota_0}$. Astfel $\int_{E_\iota} f \,\mathrm{d}m \in \int_{E'} f \,\mathrm{d}m + W + W \subset \int_{E'} f \,\mathrm{d}m + V$ pentru $E_\iota \supset E_{\iota_0}$ și propoziția este demonstrată.

TEOREMA 3. *Dacă* f *este integrabilă pe mulțimea* $E' = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *cu* $E_i \subset E$ *măsurabile și disjuncte, atunci familia* $\left\{\int_{E_i} f \,\mathrm{d}m\right\}_{i=1,2,\dots}$ *este sumabilă și* $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f \,\mathrm{d}m = \int_{E'} f \,\mathrm{d}m$.

Demonstrație. Fie $E^n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ și $\mathfrak{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_{E^n}$. În virtutea propoziției precedente va fi suficient să arătăm că $\mathfrak{K}$ este o familie densă în E'. Deoarece condițiile (D_1), (D_2) din definiția 4 sînt evident îndeplinite, să verificăm (D_3). Pentru aceasta să luăm arbitrar $A \in \Sigma_{E'}$, $\Delta \in \pi(A)$, $V'' \in \mathfrak{V}''(0)$ și $\varepsilon > 0$. Notînd $A_i = A \cap E_i$, $A^n = A \cap E^n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ să observăm că $A_i \in \Sigma_{E_i}$ deci $A^n \in \mathfrak{K}$. Din propoziția 4 din [3] rezultă existența unui rang N astfel încît $m_{V''}(\Delta_{A \setminus A^N}) < \varepsilon$. Teorema este astfel demonstrată deoarece $A^N \in \mathfrak{K}$.

Propozițiile 9 și 13 permit o simplificare considerabilă a definiției integrabilității în cazul destul de cuprinzător în care u posedă proprietatea (OCI) pe E', spațiile F', F'' sînt local convexe, iar m este cu variație finită pe E'. În acest caz putem spune de la început că o aplicație este integrabilă pe A dacă (fără a afirma însă ,,și numai dacă'') satisface condițiilor definiției 1 (nu mai este deci necesară introducerea unei noțiuni de semiintegrabilitate). Apoi vom folosi următoarea definiție generală : f este integrabilă pe E' dacă (și numai dacă) este integrabilă (în sensul definiției 1) pe mulțimile unei familii $\mathfrak{K}$ densă în E', și dacă $\lim\limits_{A \in \mathfrak{K}} \int_A f\,\mathrm{d}m$ există. Reamintim că proprietatea (OCI) este satisfăcută în mod automat în cazurile integrării unei aplicații cu valori într-un spațiu vectorial topologic oarecare în raport cu o măsură scalară și al integrării unei funcții scalare în raport cu măsuri cu valori într-un spațiu local mărginit.

Din propozițiile 8 și 13 rezultă că aceeași simplificare se poate face, chiar dacă u nu are proprietatea (OCI), în cazul în care f este măsurabilă, spațiile F', F'' sînt local convexe, m este cu variație finită pe E' iar F' este semimetrizabil (în [14] vom arăta că această ultimă condiție poate fi înlăturată).

Primită la redacție la 21 septembrie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach Space.* Trans Amer. Math. Soc., **38**, 357–378 (1935).
2. N. Bourbaki, *Intégration.* Chap I — VI, Hermann, Paris, 1952, 1956, 1959.
3. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann, Paris, 1955.
4. I. C. Burkill, *The derivatives of functions of intervals.* Fundamenta Math., Warszawa, **5**, 321–327 (1927).
5. A. Deleanu, *Sur l'intégration des fonctions d'ensemble.* Rendiconti del Seminario matematico dela Università di Padova, **27**, 27–36 (1957).
6. N. Dinculeanu, *Mesures vectorielles sur les espaces localement compacts.* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R., **2** **(50)**, 137–163 (1958).
7. N. Dinculeanu, *Teoria măsurii și funcții reale.* Ed. didactică și pedagogică, București, 1964.
8. M. Fréchet, *Sur l'intégrale d'une fonctionelle étendue à un ensemble abstrait.* Bull. Soc. Math. France, **43**, 248–265 (1915).
9. C. T. Ionescu-Tulcea, *Funcții de mulțime și integralele lor.* St. cerc. mat., **5**, 73–114 (1954).
10. A. Kolmogoroff, *Untersuchungen über den Integralbegriff.* Math. Ann., **103**, 654–696 (1930).

11. Miron Nicolescu, *Analiză Matematică*. vol. III, Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
12. R. S. Phillips, *Integration in a convex linear topological space*. Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 114–145 (1940).
13. V. Popescu, *Măsuri cu valori în spaţii vectoriale topologice oarecare*. St. cerc. mat., **17**, *10*, 1517–1530 (1965).
14. V. Popescu, *Integrale slabe în raport cu măsuri cu valori în spaţii vectoriale topologice oarecare*. St. cerc. mat., **18** (1966).
15. G. B. Price, *The Theory of integration*. Trans. Amer. Math. Soc., **47**, 1–50 (1940).
16. C. E. Rickart, *Integration in a convex linear topological space*. Trans. Amer. Math. Soc., **52**, 498–528 (1942).
17. G. Sâmboan, *Vectorial measures*. Révue de Mathématiques pures et appliqueés, Acad. R.P.R., **7**, 383–415 (1962).

ASUPRA MIŞCĂRII LENTE, AXIAL SIMETRICE, A UNUI FLUID VÎSCOS ÎNTR-UN SEMISPAŢIU RACORDAT LA UN CANAL PERPENDICULAR PE FRONTIERA SA

DE

LIVIU I. DINU

Folosind reprezentarea dată de M. Nicolescu [1], se asociază mişcării studiate o condiţie integrală.

Să considerăm sistemul simplificat al lui Stokes [2]:

$$\left\{\begin{aligned} \mu\,\Delta\,\vec{v} &= \operatorname{grad} p \\ \operatorname{div}\,\vec{v} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1}$$

din care se deduce

$$\Delta\,p = 0.$$

Căutînd presiunea sub forma

$$p = \mu\,\Delta\,\Phi,$$

introducem în (1) funcţia biarmonică Φ:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\,(\vec{v} - \operatorname{grad}\Phi) &= 0. \\ \operatorname{div}\,\vec{v} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Să notăm:

$$\vec{\theta}\,(x,\ y,\ z) = \vec{v} - \operatorname{grad}\Phi. \tag{3}$$

Vom rezolva problema armonică pentru $\vec{\theta}$ cu condiţia la limită

$$\vec{\theta}\,|_{z=0} = \vec{f}\,(x,\ y), \tag{4}$$

în care $\vec{f}$ este deocamdată o funcţie necunoscută.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1181–1183, BUCUREŞTI, 1966

Soluția acestei probleme este :

$$\vec{\theta}(x, y, z) = \frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{f}(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}}. \tag{5}$$

Fie

$$\vec{v}_0(x, y) = \lim_{z\to 0} \vec{v}(x, y, z).$$

Atunci :

$$\lim_{z\to 0} \operatorname{grad} \Phi(x, y, z) = \vec{v}_0 - \lim_{z\to 0}\frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{f}(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}}. \tag{6}$$

Putem deci ajunge la următoarea problemă la limită :

$$\Delta\Delta\,\Phi = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{z\to 0} \Phi(x, y, z) = \omega(x, y), \quad \lim_{z\to 0}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \chi(x, y)\cdot \tag{8}$$

pentru care funcțiile ω și χ se exprimă nevectorial prin $\vec{f}$:

$$\begin{aligned}\omega(x, y) = {} & \int u_0\,\mathrm{d}x + v_0\,\mathrm{d}y + \int\left\{\lim_{z\to 0}\frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi - x}{[(\eta - y)^2 + z^2]}\cdot\frac{f_1(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{a^{1/2}(\xi, \eta)}\right\}\mathrm{d}x + \\ & + \int\left\{\lim_{z\to 0}\frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta - y}{[(\xi - x^2) + z^2]}\cdot\frac{f_2(\xi, \eta)}{a^{1/2}(\xi, \eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{9}$$

$$\chi(x, y) = w_0(x, y) - \lim_{z\to 0}\frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_3(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{a^{3/2}(\xi, \eta)}, \tag{10}$$

unde s-a notat prin $a(\xi, \eta)$:

$$a(\xi, \eta) = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2.$$

Se găsește în definitiv :

$$\Phi(x,y,z) = \frac{z^2}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{a^{3/2}} + \frac{3z^3}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega(\xi, \eta)}{a^{5/2}}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta. \tag{11}$$

Soluția (5) nu ține seama de faptul că Φ este biarmonică, și atunci din a doua formulă (2) rezultă :

$$\Delta\,\Phi + \operatorname{div}\frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{f}(\xi, \eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}} = 0. \tag{12}$$

Ecuațiile (11) și (12) dau o condiție integrală pentru $\vec{f}$, care însă se referă la toate cele trei componente ale vectorului. Studiind totuși o mișcare axial-simetrică, în care, din păstrarea simetriei în condițiile la limită, vectorul $\vec{f}$ trebuie să aibă forma

$$\vec{f} = (0,\ 0,\ \lambda)$$

funcţia

$$\lambda = \lambda(r) \quad (r = \text{distanţă la axă})$$

satisface ecuaţia integrală :

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{a^{3/2}(s,t)} - \frac{15z^2}{\pi}\cdot\frac{1}{a^{5/2}(s,t)}\cdot + \frac{15z^4}{\pi}\cdot\frac{1}{a^{7/2}(s,t)}\right]\times\\ (13)\qquad &\times\left[w_0 - \lim_{z\to 0}\frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda(\xi,\eta)}{a^{3/2}(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right] +\\ &+\lim_{z\to 0}\left\{\iint_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{a^{3/2}(s,t)} - \frac{3z^2}{\pi}\cdot\frac{1}{a^{5/2}(s,t)}\right]\lambda(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right\} = 0.\end{aligned}$$

Aplicînd transformata Fourier [3], ecuaţia integrală de mai sus devine :

$$\begin{aligned}&\iint_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{4}{\pi}|t|\frac{K_1\left(|t|\sqrt{(y-t)^2+z^2}\right)}{[(y-t)^2+z^2]^{1/2}} - \frac{10z^2}{\pi}|t|^2\frac{K_2\left(|t|\sqrt{(y-t)^2+z^2}\right)}{[(y-t)^2+z^2]^{3/2}} +\right.\\ (14)\qquad &\left.\frac{3z^4}{4\pi}|t|^3\frac{K_3\left(|t|\sqrt{(y-t)^2+z^2}\right)}{[(y-t)^2+z^2]^{5/2}}\right]\left[w_0 - \lim_{z\to 0}\frac{z}{\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda(\xi,\eta)}{a^{3/2}(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right] +\\ &+\lim_{z\to 0}\iint_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2}{\pi}|t|\frac{K_1\left(|t|\sqrt{(\eta-t)^2+z^2}\right)}{[(\eta-t)^2+z^2]^{1/2}} -\right.\\ &\left.-\frac{2z^2}{\pi}|t|^2\frac{K_2\left(|t|\sqrt{(\eta-t)^2+z^2}\right)}{[(\eta-t)^2+z^2]^{1/2}}\right]\lambda(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0,\end{aligned}$$

unde funcţiile K_j sînt funcţiile Bessel de argument pur imaginar (funcţii Thompson).

Considerarea acestei ecuaţii integrale trebuie făcută cu precauţiile necesare, legate de continuitatea funcţiei necunoscute.

Primită la redacţie la 16 octombrie 1965

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. M. Nicolescu, Analele Acad. R.P.R., **II**, A (1949), Memoriul 15.
2. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* Gauthier Villars — Bucarest, 1959.
3. Rîjik şi Gradstein, *Tabele integrale,* 1955.

ASUPRA UNOR DENSITĂȚI ASOCIATE UNUI SPAȚIU A_3 CU TORSIUNE

DE

I. MATEI

Fiind dat un spațiu cu conexiune afină A_3 cu torsiune, se construiesc două densități D, D_1 cu ajutorul componentelor vectorului de torsiune și conexiunii contractate; se consideră apoi invariantul dat de raportul celor două densități (în ipoteza $D \neq 0$) și se arată că mobilitatea spațiului poate depinde de cel mult 3 parametri, dacă acest invariant nu este constant și de cel mult 6 parametri, dacă este constant, extinzîndu-se astfel unele rezultate stabilite de acad. Gh. Vrănceanu [1] în cazul spațiilor A_2 cu torsiune.

I

Fie dat spațiul cu conexiune afină A_n, avînd coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} și tensorii de torsiune și curbură de componente T^i_{jk}, Γ^i_{jkl}. Prin contractarea acestora obținem [2]

$$(1) \qquad \Gamma_j = \Gamma^i_{ij}, \quad T_j = T^i_{ij}, \quad \Gamma_{jl} = \Gamma^i_{jil}, \quad R_{jl} = \Gamma^i_{ijl} = \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_l}{\partial x^j}.$$

Se pun astfel în evidență formele Pfaff

$$(2) \qquad \mathrm{d}s = T_i \, \mathrm{d}x^i$$

$$(3) \qquad \mathrm{d}\sigma = \Gamma_i \, \mathrm{d}x^i.$$

La o schimbare de variabile

$$(4) \qquad x'^i = x'^i (x^1, x^2, \ldots, x^n),$$

componentele conexiunii contractate și forma Pfaff (3) se transformă după formulele

$$(5) \qquad \Gamma_j = \Gamma'_s \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} - \frac{\partial \ln \Delta}{\partial x^j}, \quad \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma' - \mathrm{d} \ln \Delta,$$

unde Δ este determinantul funcțional al transformării (4).

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1185–1192, BUCUREȘTI, 1966

Deoarece forma Pfaff (2) este invariantă la o schimbare de variabile iar cantităţile

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} \tag{6}$$

sînt coeficienţii covariantului biliniar al acestei forme, deci componentele unui tensor covariant de ordinul doi, rezultă că

$$\omega_{ijk} = T_i \left(\frac{\partial T_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T_k}{\partial x^j} \right) \tag{7}$$

sînt componentele unui tensor covariant de ordinul trei. Cu ajutorul acestui tensor, folosind procedeul bine cunoscut de antisimetrizare [3], putem pune în evidenţă un tensor covariant de ordinul trei strîmb simetric în fiecare pereche de indici

$$\omega\,[i\,j\,k] = \frac{1}{3\,!}\, \delta^{pqr}_{ijk}\, \omega_{pqr}, \tag{8}$$

unde δ^{pqr}_{ijk} este tensorul lui Kronecker, avînd componente diferite de zero numai dacă (pqr), (ijk) sînt permutări ale aceloraşi întregi, acestea fiind egale cu $+1$ sau -1 după cum cele două permutări fac parte din aceeaşi clasă sau din clase diferite.

Ţinînd seama că tensorul ω_{ijk} este strîmb simetric în indicii j, k, putem scrie

$$\omega[i\,j\,k] = \frac{1}{3}\,(\omega_{ijk} + \omega_{jki} + \omega_{kij}). \tag{9}$$

Într-un spaţiu A_3 acest tensor are o singură componentă nenulă, anume

$$\omega\,[1\,2\,3] = \frac{1}{3}\,(\omega_{1\,2\,3} + \omega_{2\,3\,1} + \omega_{3\,1\,2}). \tag{10}$$

La o schimbare de variabile (4), avem

$$\omega_{[1\,2\,3]} = \omega'_{[ijk]}\, \frac{\partial x'^i}{\partial x^1}\, \frac{\partial x'^j}{\partial x^2}\, \frac{\partial x'^k}{\partial x^3} = \omega'_{[1\,2\,3]}\,\Delta\,, \tag{11}$$

prin urmare expresia

$$D = \omega_{1\,2\,3} + \omega_{2\,3\,1} + \omega_{3\,1\,2} = T_1\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) + T_2\left(\frac{\partial T_3}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^3}\right) + T_3\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right) \tag{12}$$

este o densitate, adică se transformă după formula

$$D = D'\,.\,\Delta. \tag{13}$$

În mod asemănător prin antisimetrizarea tensorului $T_i R_{jk}$ se obţine densitatea

$$D_1 = T_1\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^2}\right) + T_2\left(\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^3}\right) + T_3\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^1}\right). \tag{14}$$

Presupunînd $D \neq 0$, spațiul posedă invariantul

$$I_1 = \frac{D_1}{D} \tag{15}$$

și deci avem

TEOREMA 1. *Fiind dat un spațiu cu conexiune afină A_3 cu torsiune, putem asocia acestui spațiu densitățile D, D_1 date de (12) și (14) și în cazul $D \neq 0$ invariantul I_1 dat de (15).*

În continuare vom face o discuție a mobilității spațiului în funcție de invariantul I_1.

II

Să presupunem că invariantul I_1 nu este constant. În acest caz putem lua I_1 drept una din variabile, de exemplu x^1 și transformările de variabile care păstrează această situație sînt

$$x'^1 = x^1,\ x'^2 = x'^2(x^1, x^2, x^3),\ x'^3 = x'^3(x^1, x^2, x^3). \tag{16}$$

Față de o astfel de schimbare de variabile, vectorul de torsiune se transformă după formulele

$$T_1 = T'_1 + T'_2 \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} + T'_3 \frac{\partial x'^3}{\partial x^1},\ T_2 = T'_2 \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} + T'_3 \frac{\partial x'^3}{\partial x^2},\ T_3 = T'_2 \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} + T'_3 \frac{\partial x'^3}{\partial x^3}. \tag{17}$$

De aici rezultă imediat că față de (16), expresia

$$D_2 = \frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2} \tag{18}$$

este o densitate. Avem posibilitățile :

1) $D_2 = 0$. În acest caz pe varietatea $x^1 = \text{const.}$ forma Pfaff (2) este o diferențială totală exactă, deci de forma $\mathrm{d}v$. Ridicînd restricția de a ne afla pe această varietate, rezultă $\mathrm{d}s$ de forma

$$\mathrm{d}s = u\, \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}v, \tag{19}$$

u și v fiind funcții de variabilele x^1, x^2, x^3. Pentru vectorul de torsiune vom avea componente de forma

$$T_1 = u + \frac{\partial v}{\partial x^1},\quad T_2 = \frac{\partial v}{\partial x^2},\quad T_3 = \frac{\partial v}{\partial x^3}. \tag{20}$$

Calculînd densitatea D obținem

$$D = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x^2, x^3)} \tag{21}$$

și deoarece am făcut ipoteza $D \neq 0$, putem lua u, v ca variabile x^2, x^3. Ne reducem astfel la a avea

$$\mathrm{d}s = x^2\, \mathrm{d}\, x^1 + \mathrm{d}\, x^3. \tag{22}$$

Transformările de variabile (16) care păstrează această formă canonică sînt determinate de sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$(23)\qquad x'^2 + \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = x^2, \quad \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = 1$$

din care deducem

$$(24)\qquad x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2 - \Phi'(x^1),\ x'^3 = x^3 + \Phi(x^1),$$

unde Φ este o funcție arbitrară. Grupul de mișcări ale spațiului va fi constituit din transformări de forma (24); rămîne de văzut numărul de parametri de care poate depinde funcția $\Phi(x^1)$. În acest scop vom trece în (24) la transformări infinitezimale

$$(25)\qquad x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2 - \varepsilon\,\varphi'(x^1),\ x'^3 = x^3 + \varepsilon\,\varphi(x^1),$$

unde ε este o cantitate de primul ordin. Se știe [1] că pentru ca

$$(26)\qquad x'^i = x^i + \varepsilon\,\xi^i$$

să poată fi o mișcare a spațiului, ξ^i trebuie să verifice ecuațiile

$$(27)\qquad \pounds\,\Gamma^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j \partial x^k} - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^s}\xi^s + \Gamma^i_{sk}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^s}\right) = 0$$

numite ecuațiile transformărilor infinitezimale ale transformărilor în el însuși ale spațiului. În cazul nostru

$$(28)\qquad \xi_1 = 0,\ \xi^2 = -\,\varphi'(x^1),\ \xi^3 = \varphi(x^1),$$

deci ecuațiile (27) vor conține funcția $\varphi(x^1)$ și derivatele ei de primele trei ordine. Aceste ecuații determină funcția $\varphi(x^1)$ depinzînd de cel mult 3 constante arbitrare. Avem prin urmare

TEOREMA 2. *Un spațiu cu conexiune afină A_3 avînd $I_1 = x^1$, $D_2 = 0$ poate admite un grup de mișcări depinzînd de cel mult 3 parametri.*

2) $D_2 \neq 0$ însă invariantul

$$(29)\qquad I_2 = \frac{D}{D_2}$$

nedepinzînd de variabilele x^2, x^3. În acest caz scriind egalitatea (29) sub formă dezvoltată, obținem

$$(30)\qquad (T_1 - I_2)\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) + T_2\left(\frac{\partial T_3}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^3}\right) + T_3\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right) = 0.$$

Această egalitate arată că ecuația Pfaff

$$(31)\qquad (T_1 - I_2)\,\mathrm{d}x^1 + T_2\,\mathrm{d}x^2 + T_3\,\mathrm{d}x^3 = 0$$

este integrabilă, deci vom avea

$$(32)\qquad (T_1 - I_2)\,\mathrm{d}x^1 + T_2\,\mathrm{d}x^2 + T_3\,\mathrm{d}x^3 = v\,\mathrm{d}u$$

şi apoi

$$(32')\qquad \mathrm{d}s = I_2\,\mathrm{d}x^1 + v\,\mathrm{d}u,$$

unde u şi v sînt funcţii determinate de x^1, x^2, x^3. Vectorul de torsiune va avea în acest caz componente de forma

$$(33)\qquad T_1 = I_2 + v\,\frac{\partial u}{\partial x^1},\quad T_2 = v\,\frac{\partial u}{\partial x^2},\quad T_3 = v\,\frac{\partial u}{\partial x^3}\cdot$$

Calculînd densitatea D obţinem

$$(34)\qquad D = I_2\,\frac{\partial(u, v)}{\partial(x^2, x^3)} \neq 0$$

şi prin urmare putem lua u, v ca variabile x^2, x^3. Forma ds devine

$$(35)\qquad \mathrm{d}s = I_2\,\mathrm{d}x^1 + x^3\,\mathrm{d}x^2$$

şi este păstrată de transformările (16) de variabile de forma

$$(36)\qquad x'^1 = x^1,\quad x'^2 = \Phi(x^2),\quad x'^3 = \frac{x^3}{\Phi'(x^2)}$$

cu Φ funcţie arbitrară. Trecînd la transformări infinitezimale avem

$$(37)\qquad x'^1 = x^1,\quad x'^2 = x^2 + \varepsilon\varphi(x^2),\quad x'^3 = x^3 - \varepsilon x^3\varphi'(x^2).$$

Ecuaţiile (27) determină funcţia $\varphi(x^2)$ depinzînd de cel mult 3 constante arbitrare. Rezultă

TEOREMA 3. *Un spaţiu cu conexiune afină A_3 avînd $I_1 = x^1$ şi I_2 nedepinzînd de variabilele x^2, x^3, poate admite un grup de mişcări depinzînd de cel mult 3 parametri.*

3) $D_2 \neq 0$ dar invariantul I_2 depinzînd de cel puţin una dintre variabilele x^2, x^3. În acest caz putem lua I_2 ca variabilă x^2 şi transformările (16) care păstrează această situaţie sînt

$$(38)\qquad x'^1 = x^1,\quad x'^2 = x^2,\quad x'^3 = x'^3(x^1, x^2, x^3).$$

Faţă de această schimbare de variabile, vectorul de torsiune se transformă după formulele

$$(39)\qquad T_1 = T'_1 + T'_3\,\frac{\partial x'^3}{\partial x^1},\quad T_2 = T'_2 + T'_3\,\frac{\partial x'^3}{\partial x^2},\quad T_3 = T'_3\,\frac{\partial x'^3}{\partial x^3}\cdot$$

Dacă $T_3 = 0$, aceste ecuaţii arată că T_1, T_2 sînt invarianţi şi unul cel puţin dintre aceştia este funcţie de x^3 deoarece în caz contrar am avea $D = 0$. Luînd acesta ca variabilă x^3, ne reducem la grupul identitate.

Dacă $T_3 \neq 0$, trecem în (38) la transformări infinitezimale

$$(40)\qquad x'^1 = x^1,\quad x'^2 = x^2,\quad x'^3 = x^3 + \varepsilon\,u(x^1, x^2, x^3)$$

şi folosim condiţiile necesare impuse de vectorul de torsiune, ca acestea să constituie o mişcare a spaţiului. Aceste condiţii sînt în general pentru (26)

$$(41)\qquad \mathcal{L}\, T_i \equiv \frac{\partial T_i}{\partial x^s}\,\xi^s + T_s\,\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} = 0.$$

În cazul nostru aceste ecuaţii devin

$$(42)\qquad \begin{gathered} \mathcal{L}T_1 \equiv \frac{\partial T_1}{\partial x^3}\,u + T_3\,\frac{\partial u}{\partial x^1} = 0,\quad \mathcal{L}T_2 \equiv \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\,u + T_3\,\frac{\partial u}{\partial x^2} = 0,\\ \mathcal{L}T_3 \equiv \frac{\partial T_3}{\partial x^3}\,u + T_3\,\frac{\partial u}{\partial x^3} = 0. \end{gathered}$$

De aici deducem ecuaţia

$$(43)\qquad \mathrm{d}u + \frac{1}{T_3}\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial T_2}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial T_3}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3\right)u = 0$$

care determină funcţia $u\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$ depinzînd de cel mult o constantă arbitrară. Prin urmare avem

TEOREMA 4. *Un spaţiu cu conexiune afină* A_3 *avînd* $I_1 = x^1$, $I_2 = x^2$, *poate admite un grup de mişcări depinzînd de cel mult un parametru.*

III

Să presupunem acum că invariantul I_1 este constant. Deoarece prin ipoteză avem $D \neq 0$, putem reduce forma Pfaff (2) la forma canonică

$$(44)\qquad \mathrm{d}s = x^2\,\mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^3$$

şi transformările (4) de variabile care păstrează această formă canonică sînt determinate de sistemul

$$(45)\qquad x'^2\,\frac{\partial x'^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = x^2,\quad x'^2\,\frac{\partial x'^1}{\partial x^2} + \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = 0,\quad x'^2\,\frac{\partial x'^1}{\partial x^3} + \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = 1.$$

Căutînd soluţii de forma (26) şi neglijînd termenii de ordin superior în ε, sistemul (45) devine

$$(46)\qquad x^2\,\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} + \xi^2 = 0,\quad x^2\,\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} = 0,\quad x^2\,\frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} = 0$$

şi are soluţia

$$(47)\qquad \xi^1 = \Phi_2,\quad \xi^2 = -\,\Phi_1,\quad \xi^3 = \Phi - x^2\,\Phi_2,$$

unde Φ este funcţie arbitrară de variabilele x^1, x^2 iar Φ_1, Φ_2 sînt derivatele parţiale în raport cu x^1 respectiv x^2. Ecuaţiile (27) conţin în acest caz funcţia Φ şi derivatele ei parţiale de primele trei ordine, putîndu-se normaliza în raport cu derivatele de ordinul trei; ele vor determina deci funcţia $\Phi(x^1, x^2)$ depinzînd de cel mult 6 parametri (numărul funcţiilor Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22}).

Se observă în continuare că avem egalitatea

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} = 0 \tag{48}$$

care arată că, abstracţie făcînd de termeni de ordin superior în ε, determinantul transformării (26) cu vectorul de mişcare ξ^i de componente (47) este $\Delta = 1$ şi deci faţă de această transformare conexiunea contractată Γ_i se comportă ca un vector, prin urmare condiţiile impuse de Γ_i sînt

$$\mathfrak{L}\,\Gamma_i \equiv \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^s}\xi^s + \Gamma_s \frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} = 0. \tag{49}$$

Folosind (47), aceste ecuaţii se scriu

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}\,\Gamma_1 \equiv \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^3}\Phi + \left(\Gamma_3 - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^2}\right)\Phi_1 + \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^3}\right)\Phi_2 - \Gamma_2\Phi_{11} + (\Gamma_1 - x^2\Gamma_3)\Phi_{12} = 0\\
&\mathfrak{L}\,\Gamma_2 \equiv \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^3}\Phi - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^2}\Phi_1 + \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^3}\right)\Phi_2 - \Gamma_2\Phi_{12} + (\Gamma_1 - x^3\Gamma_3)\Phi_{22} = 0\\
&\mathfrak{L}\,\Gamma_3 \equiv \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^3}\Phi - \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^2}\Phi_1 + \left(\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^1} - x^3\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^3}\right)\Phi_2 = 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Pentru ca spaţiul să poată admite grup de mişcări cu 6 parametri, este necesar ca aceste ecuaţii care nu conţin derivate de ordinul trei ale funcţiei Φ, să fie identic satisfăcute în raport cu Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{22}. Se vede imediat că pentru aceasta trebuie să avem

$$\Gamma_1 = C\,x^2, \quad \Gamma_2 = 0, \quad \Gamma_3 = C, \tag{51}$$

unde C este o constantă arbitrară. Pe de altă parte, calculînd invariantul I_1, obţinem

$$C = I_1 \tag{52}$$

şi prin urmare

$$\mathrm{d}\sigma = I_1\,\mathrm{d}s. \tag{53}$$

Din cele de mai sus rezultă

TEOREMA 5. *Un spaţiu cu conexiune afină A_3, avînd invariantul I_1 constant, poate admite un grup de mişcări depinzînd de cel mult 6 parametri în cazul* $d\sigma = I_1\, ds$ *şi de cel mult 5 parametri în cazul* $d\sigma \neq I_1\, ds$.

Primită la redacţie la 10 februarie 1966

Institutul de construcţii
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VRĂNCEANU, *Sur les densités associées à un espace A_2 avec torsion*. Revue de math. pures et appliquèes. **VII** (1962).
2. GH. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială*. vol. I, Bucureşti, 1962.
3. K. YANO, S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*. 1953.

LEGĂTURA DINTRE PROBLEMA VARIAȚIONALĂ DE BAZĂ PENTRU FUNCȚIONALELE PĂTRATICE ȘI PROBLEMA MINIMEI ABATERI DE LA RESURSE MĂRGINITE

DE

ALEXANDRU I. ȘCHIOP

În această Notă se face o legătură între problemele variaţionale pentru funcţionalele pătratice şi unele probleme de programare (de dirijare optimală).

★

Problema minimei abateri de la resurse mărginite se formulează destul de general astfel: Să se determine

$$\min_{f} \|Af + g\|^2 \tag{1}$$

în condiţia $\|f\|^2 \leqslant c$, unde A este un operator liniar continuu pe spaţiul $L_2[O, T]$ (spaţiul funcţiilor de pătrat integrabil), g un element fixat în $L_2[O, T]$.

În [1] pentru rezolvarea problemei se asociază lui (1) următoarea funcţională:

$$J_\lambda(f) = (Af + g, Af + g) + \lambda(f, f) = \|Af + g\|^2 + \lambda\|f\|^2 \text{ cu } \lambda > 0. \tag{2}$$

În cele ce urmează vom da o demonstrație simplă următoarei:

TEOREMĂ. *Există un element unic* f_λ *care realizează minimul funcționalei* $J_\lambda(f)$, *dat de ecuația*

$$R_\lambda f_\lambda = -A^*g \tag{3}$$

unde $R_\lambda = A^*A + \lambda I$ *iar* A^* *este adjunctul lui* A, *iar* I *operatorul identitate.*

Demonstrație. Operatorul $A^*A + \lambda I (\lambda > 0)$ este pozitiv definit (se verifică imediat). Se știe că într-un spațiu Hilbert un operator pozitiv definit admite un invers, deci R_λ^{-1} există.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1193–1195, BUCUREȘTI, 1966

Funcţionala (2) se mai scrie:

$$(3') \quad J_\lambda(f) = (Af, Af) + 2(Af, g) + \lambda(f, f) + (g, g) = (A^*Af, f) - \\ - 2(-A^*g, f) + \lambda(f, f) + (g, g) = \\ = ((A^*A + \lambda I)f, f) - 2(-A^*g, f) + (g, g).$$

Operatorul $A^*A + \lambda I$ fiind pozitiv definit, urmează că minimul funcţionalei (3′) este atins în punctul pentru care

$$(A^*A + \lambda I) f = - A^*g$$

sau

$$(4) \quad f_\lambda = R_\lambda^{-1}(- A^*g) \to [R_\lambda^{-1}(- A^*g)].$$

Într-adevăr, dacă U este un operator pozitiv pe un spaţiu Hilbert H (real), atunci funcţionala $\varphi(u) = (Uu, u) - 2(u, f)$ are minimul atins în punctul care dă soluţia ecuaţiei $Uu = f$ [2].

În continuare să calculăm $\min\limits_{f} J_\lambda(f)$ pe un subspaţiu finit dimensional.

Spaţiul $L_2[O, T]$ este separabil, R_λ este un operator autoadjunct pozitiv-definit.

Ne alegem un şir $\{\varphi_n\}$ din $L_2[O, T]$ astfel ca $\{A\varphi_n]$ să fie dens în $L_2[O, T]$.

Să punem

$$(5) \quad f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k.$$

Atunci constantele a_k le definim astfel ca

$$(6) \quad \| R_\lambda f_n - f_\lambda \|^2 = \min.$$

Condiţia (6) conduce la sistemul liniar

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{n} (R_\lambda \varphi_k, R_\lambda \varphi_m) a_k = (f_\lambda, R_\lambda \varphi_m), \qquad m = 1,2, \ldots, n,$$

care admite soluţia unică.

Dacă a_k sînt constantele determinate din (7), atunci se poate arăta că $R_\lambda f_n \xrightarrow{) \| \|} f_\lambda$ cînd $n \to \infty$ [2].

În [2] se introduce pentru spaţiul Hilbert H, un alt spaţiu H_A în care produsul scalar se defineşte astfel:

$$(8) \quad u, v]_{H_A} = (Au, v),$$

unde A este un operator continuu pozitiv pe H.

Cu aceste observaţii problema noastră se poate rezolva pentru subspaţii finit dimensionale cu metoda lui Rietz.

Adică, să se determine

$$\min_{f}\,(R_\lambda f, f) - 2(-A^* g, f) + (g, g) \tag{9}$$

pe un subspațiu n dimensional definit de $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ din $L_2[O, T]$.

Se pune $f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \varphi_k$ și se calculează $I_\lambda(f_n)$, care la condiția de minim revine la rezolvarea următorului sistem :

$$\sum_{k=1}^{n} (R_\lambda\, \varphi_k, \varphi_m), a_k = (-A^* g, \varphi_m), \qquad m = 1,2, \ldots, n. \tag{10}$$

Sistemul are soluție, căci determinantul necunoscutelor a_k este determinantul lui Gram asociat elementelor $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ în spațiul $L_2[O, T]_{R_\lambda}$ analog cu (8).

Primită la redacție la 3 ianuarie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București.

BIBLIOGRAFIE

1. Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, *Некоторые вопросы математической теории управления*, И. Л., 1962.
2. С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*. Москва, 1952.

ASUPRA CONTINUITĂȚII OPTIMULUI UNUI PROGRAM LINIAR

DE

M. DRAGOMIRESCU şi C. BERGTHALER

În această lucrare se studiază stabilitatea optimului unei probleme de programare liniară la variaţii simultane ale resurselor şi costurilor. Vectorii b, c sînt consideraţi parametri şi regiunea $B \times C$ din spaţiul parametrilor pentru care problema are optim finit (vezi [1]) este împărţită în regiuni disjuncte de optimalitate pentru bazele din matricea A.
Se demonstrează continuitatea optimului pe mulţimea $B \times C$, se dă o condiţie necesară şi suficientă pentru ca optimul să fie o funcţie continuă pe R^{m+n} şi se regăsesc pe o cale mai simplă cîteva rezultate din [2], [3].

În problema de programare stocastică incertă sau programare sub erori se cercetează comportarea optimului problemei de programare liniară (1) la variaţii ale vectorilor b, c şi matricii A. O cale comodă este de a trata problema parametric şi de a împărţi spaţiul parametrilor în regiuni disjuncte de optimalitate pentru bazele din matricea A.

Rezultatele obţinute pînă în prezent se referă în special la cazul cînd unul singur dintre aceşti vectori este variabil. Se cunoaşte de exemplu că optimul problemei (1) este o funcţie convexă în c şi concavă în b şi că este continuă separat în vectorii b, c [2].

Considerăm problema de programare liniară sub forma standard

$$(1) \quad \begin{array}{r} Ax = b \\ x \geqslant 0 \\ \min cx \end{array} \quad \text{şi duala ei} \quad (2) \quad \begin{array}{c} uA \leqslant c \\ \max ub \end{array}$$

unde A este o matrice fixă $m \times n$, iar $b \in R^m$, $c \in R^n$ parametri şi notăm tronsoanele soluţiilor admisibile respectiv

$$K(b) = \{x \in R^n \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}, \quad L(c) = \{u \in R^m \mid uA \leqslant c\}.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1197–1200, BUCUREŞTI, 1966

Fie $B = \{b \in R^m \mid K(b) \neq \emptyset\}$ şi $C = \{c \in R^n \mid L(c) \neq \emptyset\}$. Lema de mai jos stabileşte că B şi C sînt conuri convexe poliedrale închise (vezi [1]). Fie $\widetilde{x}(b, c)$ un program optim de bază pentru problema (1) şi $\omega(b, c)$ valoarea optimului. Din teoremele de dualitate rezultă că problemele duale (1) — (2) admit optim finit $\omega(b, c)$ dacă şi numai dacă $(b, c) \in B \times C$.

LEMA. *B, C sînt mulţimi convexe în R^m respectiv R^n, şi anume conuri poliedrale închise.*

Demonstraţie. Faptul că B, C sînt mulţimi convexe, rezultă imediat.

Fie $b_0 \in B$ şi fie $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_l$ vîrfurile tronsonului $K(b_0)$ şi $B_1, \ldots, B_l$ bazele corespunzătoare.

Notăm

$$M(\overline{x}_h) = \{c \in R^n \mid \widetilde{x}(b, c) = \overline{x}_h\}$$

mulţimea acelor $c \in R^n$ pentru care optimul problemei (1) se realizează în vîrful $\overline{x}_h$. Din algoritmul simplex rezultă că

$$M(\overline{x}_h) = \{c \in R^n \mid c^{B_h} B_h^{-1} A - c \leqslant 0\} \tag{3}$$

şi aceste inegalităţi liniare şi omogene în c definesc un con poliedral închis. Aceste conuri sînt disjuncte în afară de frontieră, căci

$$M(\overline{x}_h) \cap M(\overline{x}_k) \subset \{c \in R^n \mid c\,\overline{x}_h = c\,\overline{x}_k\}$$

deci $\overline{x}_h$ şi $\overline{x}_k$ pot fi simultan optime doar pentru puncte c din hiperplanul $c\overline{x}_h = c\overline{x}_k$. Mulţimea $C(b_0) = \bigcup_{h=1}^{l} M(\overline{x}_h)$ este evident un con poliedral închis, care aparent depinde de b_0. Vom arăta că $C(b_0) = C$ dacă $b_0 \in B$. Va rezulta că $C(b)$ nu depinde de $b \in B$ şi că C este un con poliedral închis. Problema (1) admite optim finit pentru orice $c \in C(b_0)$ şi pe de altă parte pentru orice $c \in C$. Rezultă $C(b_0) = C$. Considerente analoage pentru problema duală arată că şi B este con poliedral închis.

Fie $B_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ submatricile pătrate regulate ale lui A şi fie $\Delta_k \subset R^{m+n}$ mulţimea acelor puncte (b, c) pentru care baza B_k este optimală pentru problema (1).

TEOREMA 1. *Mulţimile $\Delta_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ sînt conuri convexe, poliedrale închise, disjuncte în afară de frontieră şi $\bigcup_{k=1}^{p} \Delta_k = B \times C$.*

Demonstraţie. Din algoritmul simplex rezultă că

$$\Delta_k = \{(b, c) \in R^{m+n} \mid B_k^{-1} b \geqslant 0,\ c^{B_k} B_k^{-1} A - c \leqslant 0\}. \tag{4}$$

Inegalităţile liniare şi omogene în b, c definesc un con poliedral închis, evident convex. Apoi

$$\Delta_k \cap \Delta_l \subset \{(b, c) \mid c^{B_k} B_k^{-1} b = c^{B_l} B_l^{-1} b\} \tag{5}$$

deci două baze B_k, B_l pot fi simultan optimale doar pe o mulțime de măsură nulă din spațiul parametrilor R^{m+n}. De fapt frontiera $\Delta_k \cap \Delta_l$ nu este o hipersuprafață cvadratică, cum ar părea din (5), ci un hiperplan. Facem observația că proiecțiile mulțimilor Δ_k pe R^m sau R^n nu sînt în general disjuncte.

TEOREMA 2. *Optimul problemei de programare liniară,* $\omega(b, c)$, *este o funcție continuă pe domeniul de definiție* $B \times C$.

Demonstrație. Într-adevăr, $\omega(b, c) = c^{B_k} B_k^{-1} b$ pentru $(b, c) \in \Delta_k$, deci este continuă în raport cu ansamblul (b, c) în interiorul oricărei mulțimi Δ_k. Iar pentru $(b, c) \in \bigcap_{i=1}^{r} \Delta_{k_i}$, adică pentru un punct (b, c) pentru care sînt optimale bazele $B_{k_1}, \ldots, B_{k_r}$, avem

$$c^{B_{k_1}} B_{k_1}^{-1} b = \ldots = c^{B_{k_r}} B_{k_r}^{-1} b,$$

deci limitele laterale sînt egale.

Dacă (b, c) aparține frontierei conului $B \times C$, atunci

$$\lim_{\substack{b' \to b \\ c' \to c}} \omega(b', c') = \omega(b, c)$$

dacă și numai dacă $(b', c') \in B \times C$, deoarece optimul este infinit pentru $(b', c') \notin B \times C$.

TEOREMA 3. *O condiție necesară și suficientă pentru ca funcția* $\omega(b, c)$ *să fie continuă pe* R^{m+n} *este să existe* $(b_0, c_0) \in R^{m+n}$ *așa încît* $K(b_0)$ *și* $L(c_0)$ *să fie mărginite și nevide.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $K(b_0)$ este mărginit, problemele (1), (2) au optim finit pentru orice $c \in R^n$, deci $L(c) \neq \varnothing$ pentru orice $c \in R^n$, deci $C = R^n$. Analog din $L(c_0)$ mărginit rezultă $B = R^m$. Deci $\omega(b, c)$ este finită pe R^{m+n} și, conform teoremei 2, continuă. Reciproc, dacă $\omega(b, c)$ este continuă pe R^{m+n}, atunci orice trosoane $K(b)$ și $L(c)$ sînt mărginite: dacă $K(b_0)$ ar fi nemărginit, atunci ar exista vectori c pentru care problema (1) ar avea optim infinit, deci $C \neq R^n$.

COROLAR. *Dacă există un* $b_0 \in R^m$ *pentru care tronsonul programelor admisibile* $K(b_0)$ *este mărginit, atunci* $K(b)$ *este mărginit (eventual vid) pentru orice* $b \in R^m$. *În aceste condiții,* $C = R^n$. *O propoziție analoagă pentru* $L(c)$.

Concluzii. Dacă $(b, c) \in \operatorname{int} B \times C$, optimul problemei este stabil la variații suficient de mici ale costurilor și resurselor. Mai mult, dacă $(b, c) \in \operatorname{int} \Delta_k$ (adică inegalitățile din (5) sînt stricte, deci pentru acest (b, c) problemele (1) — (2) sînt nedegenerate), există variații suficient de mici ale vectorilor (b, c) pentru care baza B_k rămîne optimală. Limitele acestor variații sînt deduse direct în [3].

Primită la redacție la 7 septembrie 1965

Centrul de statistică matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47. București.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Fortet, *Programmes lineaires stochastiques.* Afcalti-Sofro, Groupe de travail: Mathematiques des programmes economiques 5 Juin 1961.
2. M. Courtillot, *Thèses.* Fac. Sci. Univ. Paris, avril 1963.
3. M. Courtillot, *Sur la variation de tous les parametres d'une programme lineaire.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1958.
4. J. P. Brans, *Programmes linéaires stochastiques.* Cahiers du Centre d'Etudes de Recherches Operationelle, Bruxelles, **6** (1964).
5. C. Tintner, C. Milham, J. K. Sengupta, *A Weak Duality Theorem for Stochastic Linear Programming.* Unternehmenforschung, **7** (1963).
6. M. Simonnard, *Programation linéaire.* Dunod, Paris, 1962.

CONSIDERAŢII ASUPRA MIŞCĂRILOR CVASICONICE

DE

ŞERBAN SĂNDULESCU

Într-o serie de lucrări anterioare [1], [2], [3] s-a făcut o extindere a mişcărilor conice şi a fost definită o nouă clasă de scurgeri supersonice denumite mişcări cvasiconice, care reprezintă de fapt scurgerea supersonică în jurul unor sisteme portante (aripi, aripi cu fuselaj) avînd borduri de atac curbe.

În lucrarea de faţă se face o succintă prezentare a unora dintre rezultatele cele mai cunoscute din teoria mişcărilor conice, iar apoi se trece la o analiză mai detaliată a mişcărilor cvasiconice şi se demonstrează unele incompatibilităţi dintre soluţia dată în lucrările [1], [2], [3] şi condiţiile la limită în baza cărora a fost dată soluţia respectivă.

1. GENERALITĂŢI ASUPRA MIŞCĂRILOR CONICE

Mişcările conice au fost introduse de A. Busemann [4] care a stabilit caracteristicile acestor mişcări şi a indicat metodele de utilizat în studiul lor.

H. J. Stewart a studiat cazul aripii delta subţiri (portante) stabilind o serie de rezultate importante care au permis să se determine portanţa acestor aripi [5], iar L. Beschkine de asemenea a studiat unele aspecte privind portanţa aripilor în regim supersonic [6].

În aceeaşi perioadă, P. Germain a întreprins un studiu amplu şi fundamentat al mişcărilor conice şi mişcărilor conice de ordin superior, bazat pe faptul că într-un plan $x_1 =$ ct, perpendicular pe planul aripii, vitezele de perturbaţiile u, v, w satisfac o ecuaţie de tip Laplace, ceea ce a permis să se reducă problema la o problemă de tip Hilbert.

Rezultatele obţinute au fost prezentate în apreciata sa lucrare de doctorat [7].

G. N. Lance s-a ocupat de studiul aripilor delta aşezate într-un curent supersonic neuniform [8], problemă care s-a redus la studiul unor mişcări conice, iar M. Fenain şi D. Valée au studiat aplicaţiile teoriei

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1201–1208, BUCUREŞTI, 1966

mișcărilor cu potențiale omogene la calculul aripilor în regim supersonic [9], [10].

O altă metodă care a polarizat un număr însemnat de studii independente referitoare la mișcările conice, și care s-a dovedit a fi foarte fecundă și generală în același timp, este metoda surselor care permite să se găsească direct potențialul $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ al scurgerii supersonice permanente în jurul unui obstacol aplatisat, care satisface o ecuație cu derivate parțiale de tip hiperbolic și unor condiții la limită date.

În acest sens vom cita lucrările lui E. A. Красильщикова [11], [12], J. C. Eward [13], W. D. Hayses [14], G. N. Ward [15], H. Multhopp [16], H. Lomax, M. A. Heaslet, [17], care sînt bine cunoscute pentru rezultatele obținute.

La noi problema mișcărilor conice a făcut obiectul lucrărilor lui C. Iacob [18]—[20], N. Patraulea [21], E. Murgulescu [22] și a unui colectiv de la Institutul de mecanică aplicată care a elaborat o serie de lucrări dintre care vom cita cîteva [23] — [33] lucrări în care s-a folosit teoria funcțiilor de variabilă complexă ca urmare a faptului că vitezele de perturbație u, v, w, sînt funcții armonice în planul lui Busemann.

2. SUCCINTĂ RECAPITULARE A TEORIEI MIȘCĂRILOR CONICE

Vom expune acum pe scurt principalele rezultate din teoria mișcărilor conice, așa cum au fost stabilite de P. Germain [7] pe baza cărora în urma analizei condițiilor de scurgere în vecinătatea bordurilor de atac și a muchiilor și a singularităților care le corespund în expresiile vitezei axiale de perturbație, s-a stabilit o metodă bazată pe o analogie hidrodinamică [23], [24], [25], [26], [30] aplicabilă la studiul acestor mișcări.

Vom considera deci o aripă unghiulară (cu borduri de atac linii drepte) ca în figura 1, avînd în cazul general o incidență variabilă $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$ după un polinom omogen în x_1 și x_2 și al cărei potențial $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ satisface, în ipoteza perturbațiilor mici, ecuația

$$(1) \qquad -B^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 0, \left(B^2 = M_\infty^2 - 1,\ M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}\right).$$

Dacă viteza verticală pe aripă $w(x_1, x_2)$, respectiv incidența $\alpha(x_1, x_2)$ sînt funcții omogene de ordinul $(n-1)$, atunci în mod necesar $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ va fi o funcție omogenă de ordinul (n) [7].

În planul lui Busemann obținut prin transformarea planului fizic $Oyz\left(y = \frac{x_2}{x_1},\ z = \frac{x_3}{x_1}\right)$ prin intermediul transformării geometrice $Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}$ $(r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2)$, orice funcție $\Phi_{q,g,r}$ $(p + q + r = n$, p fiind ordinul de derivare în raport cu x_1, q în raport cu x_2 și r

în raport cu x_3) omogenă de ordinul zero, este o funcție armonică căreia i se poate asocia funcția $\Phi'_{p,q,r}$ astfel încît funcția

$$F_{p,q,r} = \Phi_{p,q,r} + i\,\Phi'_{p,q,r}, \tag{2}$$

este o funcție analitică.

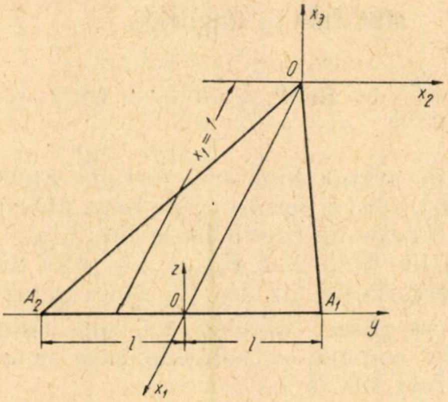


Fig. 1

Derivatele potențialului $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, respectiv funcțiile $F_{p,q,r}$, trebuie să satisfacă condițiile de irotaționalitate, denumite și condiții de compatibilitate.

În planul auxiliar $x = y + i\,z$ obținut prin transformarea conformă a planului lui Busemann,

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2} \tag{3}$$

și care a fost folosit în mod curent în lucrările [23] — [33], condițiile de compatibilitate sînt date de egalitatea tuturor relațiilor

$$(-1)^q x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r \mathrm{d}\,F_{n-q-r,q,r}, \tag{4}$$

în care $0 \leqslant q + r \leqslant n$.

Dacă considerăm acum formula lui Euler pentru funcțiile omogene :

$$n\,!\ \Phi(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^n \Phi(x_1, x_2, x_3), \tag{5}$$

viteza axială de perturbații în planul aripii ($x_3 = 0$, respectiv $z = 0$) este dată de expresia

$$\frac{(n-1)\,!\ u}{x_1^{n-1}} = \mathrm{Re} \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q,q,0}, \tag{6}$$

iar potenţialul mişcării conice [27], [28], [32], valabil tot numai în punctele de pe aripă, este definit de:

$$(7)\qquad \frac{n}{x_1^{n-1}}\,\Phi_n = \mathrm{Re}\, x^n \int \mathcal{U}_{n-1}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^n}\right) + K_1 = \mathrm{Re}\, x \int \mathcal{V}_{n-1}\,\mathrm{d}x + K_2,$$

în care $\mathcal{U}_{n-1}$ şi $\mathcal{V}_{n-1}$ sînt funcţii analitice,

$$(8)\qquad \frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_{n-1},\ \frac{v}{x_1^{n-1}} = \mathrm{Re}\,\mathcal{V}_{n-1}.$$

După cum am arătat mai sus, metoda analogiei hidrodinamice [23], [24], [25], [26], [30] a permis ca pe baza unor consideraţii de ordin hidrodinamic şi în funcţie de condiţiile la limită ale problemei, să se determine singularităţile funcţiilor $F_{n-q,\,q,\,0}$ şi deci din (6) să se deducă viteza axială de perturbaţie iar din (7) potenţialul respectiv.

Soluţiile care se găsesc în acest fel, sînt soluţii exacte în cadrul teoriei liniarizate, şi coincid cu soluţiile care se obţin printr-una din metodele amintite mai sus (§ 1).

În lucrările [1], [2] sînt scrise expresiile vitezelor axiale de perturbaţie şi potenţialele corespunzătoare pentru cîteva cazuri clasice ca, aripa delta subţire cu borduri de atac subsonice ($n = 1, 2$), aripa delta subţire cu incidenţa antisimetrică constantă şi aripa delta de grosime simetrică cu borduri de atac subsonice sau supersonice ($n = 1$), care sînt folosite apoi pentru exemplificarea extinderii acestor soluţii la mişcările cvasiconice (mişcări în jurul aripilor cu borduri de atac curbe).

Noi considerăm că pentru exemplificarea analizei pe care o facem este suficient unul singur dintre acestea, şi anume cazul aripii delta subţiri cu borduri de atac subsonice şi incidenţă constantă ($n = 1$) la care:

— condiţiile la limită sînt:

$w = -\alpha U_\infty = \mathrm{ct}$ pe aripă,

$u = 0$ în afara aripii, în planul median,

$u = v = w = 0$ pe conul Mach;

— viteza axială de perturbaţie

$$(9)\qquad u_0 = \mathrm{Re}\,\mathcal{U}_0 = \mathrm{Re}\,\frac{\alpha U_\infty}{\mathbf{E}(k)}\,\frac{l^2}{\sqrt{l^2 - x^2}};$$

— potenţialul vitezelor de perturbaţie

$$(10)\qquad \frac{\Phi_1}{x_1} = \mathrm{Re}\,\frac{\alpha U_\infty}{\mathbf{E}(k)}\sqrt{l^2 - x^2},$$

unde $\mathbf{E}(k)$ este integrala eliptică completă de speţa a doua de modul $k = \sqrt{1 - B^2 l^2}$.

3. ANALIZA MIŞCĂRILOR CVASICONICE. CONCLUZII

Vom adopta notaţiile din [1], [2], [3], deci semianvergura aripii cu borduri de atac linii drepte este :

$$b = l\,x_1,\quad l = \operatorname{tg}\chi = \mathrm{ct} \tag{11}$$

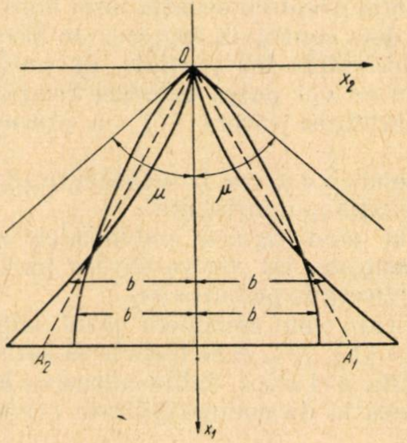


Fig. 2

iar dacă bordurile de atac sînt curbe, atunci l nu mai este constant, deci

$$l = l\,(x_1),\quad b = b\,(x_1). \tag{12}$$

În lucrările [1], [2], [3] se afirmă că dacă, „b variază uşor în jurul unei linii drepte", atunci potenţialele scurgerilor în jurul unor astfel de aripi se obţin imediat din potenţialele mişcărilor conice prin înlocuirea constantei l, (11), cu o funcţie de x_1, $l = l\,(x_1)$, (12), corespunzătoare bordului de atac curb.

Astfel în cazul aripii cu borduri de atac subsonice ($n = 1$) considerată mai sus, potenţialul vitezelor de perturbaţie ar urma să aibă expresia [1], [2] :

$$\Phi_1^* = \frac{\alpha U_\infty}{\mathbf{E}(k)} \operatorname{Re} \sqrt{x_1^2\,l^2 - x_1^2\,x^2} = \frac{\alpha\,U_\infty}{\mathbf{E}(k)} \operatorname{Re} \sqrt{b^2 - x_1^2 x^2}\,. \tag{13}$$

Derivînd această relaţie în raport cu x_1, şi ţinînd seama că însăşi integrala eliptică completă de speţa a doua $\mathbf{E}\,(k)$, acum este variabilă cu x_1 [1], [2], se obţine pentru viteza axială de perturbaţie expresia (fig. 2) :

$$u^* = \operatorname{Re} U^* = \frac{\alpha U_\infty}{\mathbf{E}(k)} \operatorname{Re} \frac{l}{\sqrt{l^2 - x^2}} \left[\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x_1} - \right. \tag{14}$$

$$\left. - \frac{x_1}{\mathbf{E}(k)} \frac{[\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}\,(k)]\,B^2 l}{1 - B^2\,l^2} \cdot \frac{l^2 - x^2}{l} \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x_1} \right].$$

În cazul mişcărilor conice [7], potenţialele (7), vitezele de perturbaţie (6) şi relaţiile de compatibilitate (4), au fost deduse în ipoteza că funcţiile respective sînt funcţii omogene, ipoteză care s-a putut face datorită faptului că atît liniile caracteristice (liniile Mach) cît şi bordurile de atac sau muchiile erau linii drepte.

Funcţiile care se obţin prin înlocuirea în expresia unui potenţial conic, a ecuaţiei bordului drept cu ecuaţia unui bord de atac curb nu mai sînt funcţii omogene, deci contravin ipotezei de bază a mişcărilor conice.

De asemenea, derivatele lor parţiale de ordinul 1 nu vor mai fi funcţii omogene şi deci nu vor putea satisface relaţiile de compatibilitate (irotaţionalitate) la stabilirea cărora [7] s-a presupus că funcţiile respective sînt omogene.

Deci în aceste condiţii nu vor fi satisfăcute nici condiţiile la limită ale problemei, nici ecuaţia potenţialului.

În consecinţă, în mod riguros potenţialele cvasiconice sînt impropriu denumite potenţiale, iar derivatele lor parţiale de ordinul 1 nu au semnificaţia unor viteze de perturbaţie.

Pentru exemplificare vom considera cazul aripii subţiri cu borduri de atac curbe subsonice [1], [2], care trebuie să satisfacă aceleaşi condiţii la limită pe care le satisface şi aripa delta subţire de la care s-a pornit (§2).

Particularizînd relaţia de compatibilitate (4) pentru cazul ($n = 1$), se poate scrie

$$(15)\qquad \mathcal{W} = \int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{ix}\, \mathrm{d}\mathcal{U}, \left(\begin{matrix} \mathcal{U} = u + iu', \\ \mathcal{W} = w + iw' \end{matrix}\right),$$

în care introducînd expresia (14) şi făcînd calculele respective se găseşte pentru viteza verticală pe aripă w^* expresia,

$$(16)\qquad w^* = -\alpha U_\infty \left\{1 + x_1 \left[\frac{1}{l} + \frac{[\mathbf{K}(k) - \mathbf{E}(k)]^2 B^2 l}{[\mathbf{E}(k)]^2 (1 - B^2 l^2)}\right] \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x_1}\right\},$$

care conţine termenul constant $-\alpha U_\infty$ corespunzător plăcii plane, şi o funcţie suplimentară de x_1, care caracterizează însă o aripă cu incidenţă variabilă.

Deci modul de construire a potenţialului cvasiconic face să nu fie respectate condiţiile la limită ale problemei de la care s-a pornit.

Se observă de asemenea că aceste condiţii pot fi satisfăcute numai dacă $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x_1} = 0$, deci $l = \mathrm{ct}$, ceea ce are loc numai în cazul aripilor avînd borduri de atac linii drepte, cum era de altfel de aşteptat.

Soluţia dată în lucrările [1], [2], [3], privind studiul scurgerii supersonice în jurul unor aripi cu borduri de atac curbe, nu satisface nici ecuaţia potenţialului, nici condiţiile la limită ale problemei.

Faţă de soluţia exactă dată prin metoda potenţialelor de simplu şi dublu strat [11] — [15], ea ar putea fi considerată ca o soluţie aproximativă.

În acest caz ar fi însă necesar să se stabilească care sînt limitele erorii ce se pot admite în rezolvarea problemei, cu ce eroare soluţia dată verifică datele problemei, şi dacă această eroare se încadrează în limitele stabilite.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Extension of Conical Motions to quasi — conical motions.* Revue de mécanique appliquée, *3* (1965).
2. E. Carafoli, *Extinderea mişcărilor conice la mişcări cvasiconice.* St. cerc. mec. apl., *4* (1965).
3. D. Mateescu, *Studiul aripilor cu bordurile curbe prevăzute cu un fuselaj de forma oarecare, în regim supersonic.* Comunicată la Conferinţa de Mecanică, Bucureşti, 1965, nepublicată.
4. A. Busemann, *Infinitesimale kegelige Uberschallstronung.* Schriften der deutsch Akad. der Luftfahrtforschung, 1943.
5. H. J. Stewart, *The lift of a Delta Wing at Supersonic Speeds.* Quart of Appl. Math., **4** (1946).
6. L. Beschkine, *Forces aérodynamiques agissant sur les surfaces portantes aux vitesses supersoniques.* Les cahiers d'aérodynamiques, *6*, Janvier-Février 1947.
7. P. Germain, *La théorie générale des mouvements coniques et ses applications à l'aérodynamique supersonique.* O.N.E.R.A., Paris, 1949.
8. G. N. Lance, *The Delta Wing in a non Uniform Supersonic Stream.* Aeronautical Quarterly, London, 1954, 5.1.
9. M. Fenain, *La théorie des écoulements à potentiel homogène et ses applications au calcul des ailes en régime supersonique.* O.N.E.R.A., Paris, 1961.
10. M. Fenain, Denise Vallé, *Application de la théorie des écoulements homogènes à la recherche de l'adaptatione des certaines ailes en régime supersoniques.* O.N.E.R.A. Mémo. Technique, 2 partie, **4**, 1959.
11. E. A. Красильщикова, C. R. Acad. Sc. U.R.S.S., **LVI**, 571; **LVIII**, 543, 761, 989.
12. E.A. Красильщикова, *Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке.* Гостехстройиздат, Москва, 1952.
13. J. C. Eward, *Distribution of Wave Drag and Lift in the vicinity of Wing Tips at Supersonic Speeds.* N.A.C.A. Tch. Note 1382 (1947).
14. W. D. Hayes, *Linearized Supersonic Flow. North American Aviation.* Inc. Report Nr. A.L. 222 (1947).
15. G. N. Ward, *Supersonic Flow past thin Wings.* Quart. Journ. of. Mech and Appl. Math., 1949.
16. H. Multhopp, *A Unified Theory of Supersonic Wing Flow Employing Conical Fields.* R.A.F. Report Nr. Aero 2415, 1951.
17. H. Lomax, M. A. Heaslet, *Generalized Conical Flow Fields in Supersonic Wing Theory.* N.A.C.A. T.N. Nr. 2497, 1951.
18. C. Iacob, *Teoria aripei unghiulare la viteze supersonice.* Analele Acad. R.P.R. Seria Mat.-Fiz. Chim., **3**, 349, 373 (1950).
19. C. Iacob, *Cercetări asupra teoriei mişcărilor conice supersonice.* Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R. Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **6**, *3* (1954).
20. C. Iacob, *Introduction mathématique à la méchanique des fluides.* Gauthiers-Villars, Bucarest, 1959.
21. N. Patraulea, *Mişcarea supersonică în jurul unei aripi care traversează un cerc aproape circular.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe technice şi chimice, **5**, *1—4* (1953).
22. Elena Murgulescu, *Mişcarea supersonică în jurul unei aripi în delta cu fuselaj conic.*Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **6**, *4* (1954).
23. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., **2**, *9/10* (1952).
24. E. Carafoli, M. Ionescu, *Théorie générale de l'aile triangulaire mince ou a épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **2**, *1* (1957).

25. E. Carafoli, M. Ionescu, *Théorie générale de l'aile triangulaire. à distribution de pression donnée.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **3**, *2* (1958).

26. E. Carafoli şi colab., *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autour d'une aile triangulaire à plaque normale.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **2**, *2* (1957).

27. E. Carafoli şi colab., *L'écoulement supersonique homogène d'ordre superieur autour d'une aile cruciforme.* Application au mouvement oscilatoire. Le IXe Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles 1956.

28. E. Carafoli, S. Săndulescu, *Oscillations harmoniques des ailerons de forme génèrale en régime supersonique.* Archiwum Mechaniki Sotosowanej, Varsovia, **6** (1958).

29. E. Carafoli şi colab., *Problèmes Mixtes des ailes triangulaires pourvues d'une plaque normale, en courant supersonique.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., *3* (1958).

30. S. Săndulescu, A. Năstase, *Le problème mixte de l'aile triangulaire en mouvement conique d'ordre supérieur.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **8**, *1* (1963).

31. E. Carafoli, A. Năstase, *Asupra problemei de rezistenţă minimă a aripii de grosime simetrică în curent supersonic.* St. cerc. mec. apl., *1* (1962).

32. E. Carafoli, S. Săndulescu, *The harmonic Motion of Supersonic Tails.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., *4* (1960).

33. E. Carafoli, D. Mateescu, *Scurgerea supersonică în jurul sistemului portant aripă-fuselaj conic.* St. cerc. mec. apl., *2* (1959).

EXTENSIUNILE RIEMANN SIMPLU ARMONICE $\mathcal{A}_2$ ȘI SPAȚIILE LOCAL EUCLIDIENE A_2

DE

C. I. ISPAS

Autorul observă că „orice spațiu A_2 cu conexiunea afină simetrică local euclidian este o extensiune Riemann $\mathcal{A}_2$ simplu armonică", adică un spațiu Riemann pentru care funcția s^{2-n} $(n > 2)$ sau lg s $(n = 2)$ este o soluție a ecuației :

$$\Delta_2 v = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|} \cdot g^{ij} \cdot \frac{\partial v}{\partial x^j}\right) = 0,$$

s fiind distanța geodezică între punctele P fix și Q variabil.

Se determină două clase de extensiuni Riemann simplu armonice $\mathcal{A}_2^*$, $\mathcal{A}_2^{**}$ și se construiesc extensiunile Riemann simplu armonice pentru cîteva spații cu conexiune afină, printre care și spațiul lui Weyl de coordonate (x, y) și coeficienți de conexiune dați de (17).

1. Noțiunea de extensiune Riemann a fost introdusă de geometrii englezi E. M. Patterson [1], [2], [3] și A. G. Walker [3], [4], în studiile lor asupra varietăților riemanniene, apărute în ultima vreme.

Fie A_n un spațiu cu conexiune afină simetrică $\Gamma^i_{(jk)}$ și C_{ij} un tensor dublu contravariant definit în A_n.

O extensiune Riemann a lui A_n este un spațiu Riemann R_{2n} (A_n, C_{ij}) de coordonate x^i, ξ_i, unde $\xi_i = x^{i+n}$ și metrică :

$$ds^2 = g_{ij}(x, \xi)\, dx^i \cdot dx^j + 2 dx^i\, d\xi_i, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

unde

$$g_{ij}(x, \xi) = C_{ij} - 2\Gamma^h_{ij} \cdot \xi_h. \tag{2}$$

Fie R_n un spațiu Riemann și fie s distanța geodezică dintre un punct variabil P de coordonate x^i și un punct fix Q. Spațiul R_n este simplu

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1209–1214, BUCUREȘTI, 1966

armonic dacă pentru toate alegerile lui Q, funcţia s^{2-n} $(n > 2)$ sau $\lg s$ $(n = 2)$ este armonică, adică o soluţie a ecuaţiei :

$$\Delta_2 v = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|} \cdot g^{ij} \frac{\partial v}{\partial x^j}\right) = 0. \tag{3}$$

O extensiune Riemann este simplu armonică, dacă spaţiul Riemann obţinut prin extensiune este simplu armonic.

Se definesc de asemenea extensiuni Riemann ale spaţiilor neriemanniene.

Rostul teoriei extensiunilor Riemann ale spaţiilor cu conexiune afină şi a spaţiilor neriemanniene este, între altele, şi acela de a lega proprietăţile acestor spaţii de ale unor spaţii Riemann cu dimensiunea $2n$, folosind toate avantajele acestei legături.

Acad. Gh. Vrănceanu [5] a pus şi rezolvat problema spaţiilor A_2 local euclidiene ; P. Mocanu [6], T. Postelnicu [7], C. I. Ispas [8] au adus contribuţii în această problemă.

În această lucrare observăm ,,orice spaţiu A_2 cu conexiune afină simetrică local euclidian este o extensiune Riemann $\mathcal{A}_2$ simplu armonică'', în continuare determinăm două clase de extensiuni Riemann simplu armonice $\mathcal{A}_2^*$, $\mathcal{A}_2^{**}$ şi în fine construim extensiunile Riemann simplu armonice pentru cîteva spaţii cu conexiune afină, printre care şi spaţiul lui Weyl de coordonate (x, y) şi coeficienţi de conexiune :

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} \cdot y, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot x \\ &\Gamma_{12}^1 = 0 = \Gamma_{22}^1, \quad \Gamma_{12}^2 = 0 = \Gamma_{11}^2 . \end{aligned} \tag{4}$$

2. Într-o lucrare recentă, acad. Gh. Vrănceanu [10] a stabilit teorema : *condiţiile necesare şi suficiente ca un spaţiu* A_2 *cu conexiune afină simetrică să fie local euclidian sînt :*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + v \cdot \alpha + b \cdot \beta - bu - v^2 = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} + a \cdot \alpha + \beta \cdot u - u^2 - a \cdot v = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} + a \cdot b - u \cdot v = 0 \\ &\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot v - a \cdot b = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Problema determinării spațiilor A_2 cu conexiune afină simetrică local euclidiene este echivalentă cu rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I liniar (5), unde:

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{21} = u = \Gamma^1_{12}; \qquad \Gamma^2_{12} = v = \Gamma^2_{21}, \\ &\Gamma^1_{11} = \alpha,\ \beta = \Gamma^2_{22}; \qquad \Gamma^1_{22} = a,\ b = \Gamma^2_{11}. \end{aligned} \tag{6}$$

În plus: $x^1 = x$, $x^2 = y$.

Sistemul (5) s-a obținut traducînd analitic faptul că toate componentele distincte ale tensorului de curbură R^i_{jkl} $(i, j, k, l, = 1, 2)$ să fie nule, adică:

$$\left.\begin{aligned} R^2_{121} &= 0 \\ R^1_{212} &= 0 \\ R^2_{212} &= 0 \\ R^1_{112} &= 0 \end{aligned}\right., A_2 \tag{7}$$

Soluții ale sistemului (5) au fost date de acad. Gh. Vrănceanu [10], M. N. Ghermănescu [11] și C. I. Ispas [8].

În lucrarea [2] se demonstrează teorema:

Condițiile necesare și suficiente ca un spațiu A_2 cu conexiune afină simetrică să fie o extensiune Riemann $\mathcal{A}_2$ simplu armonică sînt:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} + a\cdot\alpha + \beta\cdot u - u^2 - a\cdot v = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + v\cdot\alpha + \beta\cdot b - b\cdot u - u^2 = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} + a\cdot b - u\cdot v = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + u\cdot v - ab. \end{aligned} \tag{8}$$

Problema determinării extensiunilor Riemann $\mathcal{A}_2$ simplu armonice este echivalentă cu rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I liniar (8), unde notațiile sînt aceleași ca în (6).

Sistemul (8) s-a obținut traducînd analitic condițiile pe care trebuie să le satisfacă tensorul de curbură R^i_{jkl} astfel ca să obținem o extensiune Riemann simplu armonică, condiții care se scriu sub forma:

$$\left.\begin{aligned} R^1_{221} &= 0 \\ R^2_{112} &= 0 \\ R^1_{121} + R^2_{212} &= 0 \end{aligned}\right., \mathcal{A}_2 \tag{9}$$

Este clar că orice soluție a sistemului (5) este și soluție a sistemului (8); așadar orice spațiu A_2 cu conexiune afină simetrică local euclidian este o extensiune Riemann $\mathcal{A}_2$ simplu armonică, adică:

$$A_2 \subset \mathcal{A}_2. \tag{10}$$

3. O primă clasă de extensiuni Riemann simplu armonice $\mathcal{A}_2^*$ o formează spațiile cu conexiune afină A_2 local euclidiene a căror determinare este echivalentă cu rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale (5).

A doua clasă de extensiuni Riemann simplu armonice se obține considerînd soluțiile lui (8) care nu sînt soluții ale lui (5).

Dacă în (8) facem $a = b = 0$, obținem :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} + \beta\cdot u - u^2 = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} - u\cdot v \\ &\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} - u\cdot v = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + u\cdot v. \end{aligned} \tag{11}$$

Eliminînd pe u, α, β din (11), obținem :

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{\partial}{\partial x}\ln v = 2\cdot v - \frac{\partial w}{\partial y}\cdot \tag{12}$$

Soluțiile acestei ecuații ne conduc la determinarea lui $\mathcal{A}_2^{**}$.

În cazul $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$, ecuația (12) admite soluția particulară :

$$v = \frac{1}{2(1 + x + y)}. \tag{13}$$

Rezultă :

$$u = -\frac{1}{1 + x + y}, \quad \alpha = \frac{1}{2(1 + x + y)} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{1}{1 + x + y}.$$

Așadar o familie de soluții $\mathcal{A}_2^{**}$ este dată de :

$$\begin{aligned} &\Gamma_{22}^1 = 0, && \Gamma_{11}^2 = 0, \\ &\Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{1 + x + y}, && \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2(1 + x + y)}, \\ &\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(1 + x + y)} - \frac{\partial w}{\partial x}, && \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{1 + x + y}, \end{aligned} \tag{14}$$

unde $w(x, y)$ este o funcție arbitrară derivabilă.

4. A. *Extensiunea Riemann a lui A_1 local euclidian.* Fie spațiul A_1 local euclidian, pentru care :

$$\Gamma_{(x)} = \frac{1}{x}.$$

Extensiunea Riemann a acestui spaţiu este dată de :

$$ds^2 = \left(-\frac{2}{x}\cdot y + C_{11}\right)dx\,dy + 2dx\,dy.$$

Dacă considerăm cazul $C_{11} = 0$, rezultă :

$$ds^2 = 2\,\frac{x-y}{x}\cdot dx\,dy. \tag{15}$$

Deci spaţiului A_1 local euclidian i s-a ataşat un spaţiu $\mathcal{A}_2$ a cărui metrică este dată de (15).

B. *Extensiunea Riemann a unui spaţiu A_2 local euclidian cu conexiune constantă.* Considerăm cazul unui spaţiu A_2 local euclidian, cu conexiune constantă, ai cărui coeficienţi de conexiune sînt (8) :

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = -1$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{11} = 0, \qquad \Gamma^1_{22} = 1.$$

Considerînd cazul :

$$C_{11} = C_{12} = C_{22} = 0,$$

sîntem conduşi la spaţiul Riemann $\mathcal{A}_4$, cu metrica :

$$ds^2 = 2\cdot z\cdot dx^2 + 4\cdot t\cdot dx\,dy - 2\cdot z\cdot dy^2 + 2dx\,dz + 2dy\,dz$$

sau

$$ds^2 = 2z\,(dx^2 - dy^2) + 2\,(t\cdot dx\,dy + dy\,dt). \tag{16}$$

C. *Extensiunea Riemann a spaţiului lui Weyl de coordonate (x, y) şi coeficienţi de conexiune* :

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \alpha = -\frac{1}{2}\cdot y, && \Gamma^2_{22} = \beta = \frac{1}{2}\cdot x,\\ &\Gamma^1_{12} = u = 0, && \Gamma^2_{12} = v = 0,\\ &\Gamma^1_{22} = a = 0, && \Gamma^2_{11} = b = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Considerînd şi aici cazul $C_{ij} = 0$ şi punînd $x^1 = x$, $x^2 = y$,

$$\xi_1 = z, \qquad \xi_2 = t,$$

obţinem

$$ds^2 = y\cdot z\cdot dx^2 - x\cdot dy^2 + 2\cdot dx\,dz + 2\,dy\,dt, \tag{18}$$

extensiunea Riemann a spaţiului lui Weyl, cu coeficienţi de conexiune (17).

BIBLIOGRAFIE

1. E. M. Patterson, *Anexistance theorem an simply armonic spaces*. J. London Math. Soc., **26** (1951).
2. E. M. Patterson, *Simply harmonic Riemann extensions*. J. London Math. Soc., **27** (1952).
3. E. M. Patterson, A. G. Walker, *Riemann extensions*. Quart. J. Math. Oxford, 1952.
4. A. G. Walker, *Riemann extensions of non-Riemannian*. Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Roma, 1954.
5. Gh. Vrănceanu, *Spaţii cu conexiune afină constantă local euclidiene*. Com. Acad. R.P.R., **1** (1951).
6. P. Mocanu, *Spaţii cu conexiunea afină constantă echivalente în mare cu spaţiul euclidian*. Com. Acad. R.P.R., **2** (1952).
7. T. Postelnicu, *Spaţii A_2 cu conexiune liniară local euclidiene*. Revista Universităţii „C. I. Parhon", Bucureşti, 4—5 (1954).
8. C. I. Ispas, *Despre spaţiile A_2 şi A_3 local euclidiene*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, **II**, *2* (1956).
9. Gh. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*. vol. II, Bucureşti, 1951.
10. Gh. Vrănceanu, *Spaţii A_2 local euclidiene*. Com. Acad. R.P.R., **IV**, *7—8* (1954).
11. M. Ghermănescu, *Asupra integrării unui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale*. Com. Acad. R.P.R., **V**, *12* (1955).

CONSTRUCȚIA FIBRĂRILOR UNIVERSALE PESTE POLIEDRE OARECARE

DE

GHEORGHE LUSZTIG

În lucrare se extinde construcția fibrării universale peste poliedre numărabile dată de Milnor la cazul poliedrelor oarecare, folosind topologii Kelley.

1. În această lucrare se extinde construcția fibrării universale peste poliedre numărabile dată de Milnor în [1] la cazul poliedrelor oarecare. În acest scop, se dovedește util ca în locul categoriei spațiilor topologice să lucrăm în categoria spațiilor Kelley [2]. Aceasta permite ca produsul direct (în categoria spațiilor Kelley) a două poliedre cu topologie slabă să aibă încă topologia slabă (ceea ce în cazul categoriei spațiilor topologice are loc numai pentru poliedre numărabile). Menționăm că în cazul numărabil se regăsește construcția lui Milnor.

Pe de altă parte, se arată că spațiul fibrat universal și grupul structural nu sînt numai CW-complexe, ci chiar realizarea geometrică a unor complexe semisimpliciale. În cazul cînd unele demonstrații vor fi analoage cu cele din [1], nu vom intra în detalii.

2. Un spațiu Kelley este un spațiu topologic separat X în care o mulțime este închisă dacă și numai dacă taie orice compact din X după un compact. În particular, realizarea geometrică a unui complex semisimplicial e un spațiu Kelley. Categoria spațiilor Kelley este subcategoria plină a categoriei spațiilor topologice ale cărei obiecte sînt spații Kelley. Fiind dat un spațiu topologic separat X, lui i se poate asocia în mod natural spațiul Kelley X^* care are aceeași mulțime subiacentă cu X, iar mulțimile închise ale lui X^* sînt acele mulțimi care taie orice compact din X după un compact (observăm că topologia lui X^* e mai fină decît cea a lui X). Se vede ușor că dacă A e un spațiu Kelley, iar X e un spațiu separat, orice aplicație continuă $A \to X$ se poate descompune în $A \to X^* \to X$, unde $X^* \to X$ este bijecția canonică.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1215–1219, BUCUREȘTI, 1966

LEMA 1. *Produsul direct în categoria spațiilor Kelley al lui X cu Y este* $(X \times Y)^*_{\mathrm{Top}}$

Demonstrație. Fie A un spațiu Kelley și $f : A \to X$, $g : A \to Y$ două aplicații continue. Aplicația $f \times g : A \to X \times Y$ se poate descompune în $A \xrightarrow{(f\times g)^*} (X\times Y)^* \to X \times Y$. Observăm că $\mathrm{pr}_x(f\times g)^* = f$ și $\mathrm{pr}_y(f\times g)^* = g$. Unicitatea lui $(f \times g)^*$ rezultă din unicitatea lui $f \times g$ și din faptul că $(X\times Y)^* \to X\times Y$ e o bijecție.

În cele ce urmează vom nota prin abuz $(X\times Y)^* = X\times Y$.

LEMA 2. *Dacă X este un spațiu Kelley iar Y un subspațiu închis sau deschis al lui X, atunci Y este un spațiu Kelley.*

Demonstrație. Să presupunem că Y este închis în X și fie $F \subset Y$ o mulțime cu proprietatea că pentru orice compact $K \subset Y$, $F \cap K$ este compact. Fie $K_1 \subset X$ un compact arbitrar în X. Avem $F \cap K_1 = F \cap (Y \cap K_1) =$ compact, deci F este închisă în X, deci și în Y. Rezultă că Y e spațiu Kelley.

Să presupunem acum că Y este deschis în X și fie $F \subset Y$ astfel că pentru orice compact $K \subset Y$, $F \cap K$ este compact. Să arătăm că pentru orice compact $K_1 \subset X$, $F_1 \cap K_1$ este compact, unde $F_1 = F \cup (X - Y)$. Dacă $K_1 \subset Y$, avem $F_1 \cap K_1 = F \cap K_1 =$ compact; dacă $K_1 \subset X - Y$, avem $F_1 \cap K = K =$ compact. În fine, fie K_1 astfel ca $K_1 \cap Y \neq \emptyset$, $K_1 \cap (X - Y) \neq \emptyset$. Să notăm $K_1' = K_1 \cap (X - Y)$ și $K_1'' = K_1 \cap Y$. Este clar că K_1' e compact iar K_1'' local compact (deoarece Y e deschis) deci K_1'' e spațiu Kelley. Deoarece F taie orice compact din K_1'' după un compact, $F \cap K_1''$ va fi închis în K_1''. Rezultă că $K_1'' - (F \cap K_1'')$ este deschis în K_1'' care la rîndul său e deschis în K_1. Deci $K_1'' - (F \cap K_1'')$ e deschis în K_1, de unde rezultă că $K_1 - (K_1'' - (F \cap K_1'')) = (K_1 - K_1'') \cup \cup (K_1 \cap F \cap K_1'') = K_1' \cup (F \cap K_1'') = F_1 \cap K_1$ este închis, deci compact în K_1. Deoarece K_1 a fost ales arbitrar, rezultă că F_1 e închisă în X și deci $F = F_1 \cap Y$ este închisă în Y, adică Y este spațiu Kelley.

3. Fie X un poliedru simplicial conex cu topologia slabă (el e un spațiu Kelley). Notăm cu E_n mulțimea șirurilor $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de puncte din X cu proprietatea că x_0 e un vîrf fixat al lui X și că oricare două puncte consecutive din șir aparțin aceluiași simplex al lui X. Dacă E_n se consideră cu topologia indusă de X^{n+1}, el va fi un spațiu Kelley. Fie E suma topologică a spațiilor E_n, $n \geqslant 1$. În E considerăm relația de echivalență generată de relațiile

$$(x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_i, \widehat{x_{i+1}}, \ldots, x_n)$$

dacă $x_i = x_{i+1}$ sau $x_i = x_{i+2}$ și fie $\widetilde{E}$ spațiul cît al lui E prin această relație de echivalență (*a priori* $\widetilde{E}$ nu este spațiu Kelley). Notăm clasa lui $(x_0, \ldots, x_n)$ în $\widetilde{E}$ prin $[x_0, \ldots, x_n]$ și definim proiecția $p : \widetilde{E} \to X$ prin $p[x_0, \ldots, x_n] = x_n$. Se vede ușor că p este corect definită și continuă. Să notăm $\widetilde{G} = p^{-1}(x_0)$. Observăm că $\widetilde{G}$ operează la stînga în $\widetilde{E}$ după formula

$$[x_0, \ldots, x_{n-1}, x_0]\cdot[x_0, \ldots, x_m] = [x_0, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_0, \ldots, x_m].$$

În particular, $\widetilde{G}$ este un grup cu această înmulţire, avînd elementul neutru $[x_0, x_0]$ şi în care $[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0]^{-1} = [x_0, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$. Pentru fiecare vîrf $x_i \in X$ notăm cu V_i steaua sa deschisă (V_i este un subspaţiu Kelley al lui X) şi fie $[x_0, \ldots, x_i]$ un element din $\widetilde{E}$ a cărui proiecţie este x_i (existenţa acestui element rezultă din faptul că X e conex).

Definim aplicaţia $\varphi_i : V_i \times \widetilde{G} \to p^{-1}(V_i)$ prin formula $\varphi_i(x, \widetilde{g}) = = \widetilde{g} \cdot [x_0, \ldots, x_i, x]$. Se constată uşor că sistemul $(\widetilde{E}, p, X, \widetilde{G}, \varphi_i)$ e o fibrare principală (abstracţie făcînd de topologii).

Să numim element nedegenerat un element al lui E care nu e echivalent cu elemente de lungime mai mică. Este clar că orice element din E e echivalent cu un element nedegenerat unic. Dacă presupunem că X este un poliedru ordonat, E_n este un subcomplex al lui X^{n+1}, deci E este un poliedru (ordonat).

Lema 3. *Pentru orice simplex s din E există un simplex unic $\psi(s)$ şi o aplicaţie simplicială unică u_s a lui s pe $\psi(s)$ care duce orice punct din s într-un punct echivalent cu el şi pentru care orice punct interior lui $\psi(s)$ este nedegenerat. În plus, aplicaţia u_s păstrează ordinea vîrfurilor.*

Demonstraţie. Fie X un punct interior lui s şi $\psi(x)$ punctul unic nedegenerat echivalent cu x. $\psi(x)$ este interior unui simplex unic $\psi(s)$, iar de la s la $\psi(s)$ există o aplicaţie simplicială unică care duce x în $\psi(x)$. Această aplicaţie satisface condiţiile cerute.

4. Fie Y un complex semisimplicial; se ştie că Y este limita inductivă a unei diagrame de simplexe tip: $Y = \varinjlim D$, $D = (s_i, \alpha_{ij})$. Să considerăm diagrama de simplexe tip $D' = (s_i', \alpha_{ij}')$, unde $\{s_i'\} = \{s_i\}$ iar $\{\alpha_{ij}'\} \supset \{\alpha_{ij}\}$ şi fie $Y' = \varinjlim D'$. Este clar că Y' este un complex cît al lui Y. Trecînd la realizări geometrice, avem diagramele $|D| = = (|s_i|, |\alpha_{ij}|)$, $|D'| = (|s_i'|, |\alpha_{ij}'|)$. Din faptul că functorul realizare geometrică comută cu limita inductivă, rezultă $|Y| = \varinjlim |D|$, $|Y'| = = \varinjlim |D'|$. Este clar că $|Y'|$ este spaţiul cît al lui $|Y|$ obţinut prin identificările date de $\{|\alpha_{ij}'|\} - \{|\alpha_{ij}|\}$.

În cazul cînd $Y = E$ iar $\{|\alpha_{ij}'|\} - \{|\alpha_{ij}|\}$ sînt aplicaţiile u_s din lema 3, obţinem

Propoziţia 4. *$\widetilde{E}$ este realizarea geometrică a complexului semisimplicial obţinut din E prin identificarea simplexelor s şi $\psi(s)$. $\widetilde{G}$ este realizarea geometrică a unui subcomplex al lui $\widetilde{E}$.*

În particular, $\widetilde{E}$ şi $\widetilde{G}$ sînt spaţii Kelley.

Corolar. *Acţiunea $\widetilde{G} \times \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ este continuă.*

Demonstraţie. Folosind faptul că $\widetilde{G}$ şi $\widetilde{E}$ sînt spaţii Kelley, e suficient să verificăm continuitatea pe celule, unde ea este imediată.

În particular, $\widetilde{G}$ este un grup în categoria spațiilor Kelley, φ_i sînt omeomorfisme și avem

TEOREMA 5. *Sistemul* $(\widetilde{E}, p, X, \widetilde{G}, \varphi_i)$ *este o fibrare principală în categoria spațiilor Kelley.*

Acest sistem se numește fibrare universală peste X.

TEOREMA 6. $\widetilde{E}$ *este contractibil.*

Demonstrație. Fie D_n mulțimea elementelor degenerate din E_n. Este clar că E_n este contractibil la $(x_0, x_0, \ldots, x_0)$, contracția făcîndu-se liniar pe porțiuni. Restricția contracției lui E_n la D_n este o contracție a lui D_n, de unde rezultă că D_n este retractă de deformație strictă a lui E_n. Dacă notăm cu $\widetilde{E}_n$ imaginea lui E_n în $\widetilde{E}$ rezultă că E_{n-1} este retractă de deformația strictă a lui $\widetilde{E}_n$. De aici și din faptul că $\widetilde{E}_1$ este contractibil, rezultă din aproape în aproape că toți $\widetilde{E}_n$ sînt contractibili. Deoarece $\widetilde{E}$ este reuniunea șirului crescător de subcomplexe contractibile $\widetilde{E}_n$, el însuși va fi contractibil.

5. Vom arăta acum în ce sens sistemul $(\widetilde{E}, p, X, \widetilde{G}, \varphi_1)$ este o fibrare universală.

Fie (E_1, q, X, G_1, ψ_i) o fibrare principală oarecare în categoria spațiilor topologice peste X. Vom numi *conexiune poligonală* în această fibrare o funcție ω care asociază la fiecare pereche $(x, y) \in U \bigcup\limits_{s \in X} s \times s$ (x și y sînt în același simplex) o aplicație $\omega_{x.y} : q^{-1}(y) \to q^{-1}(x)$ cu proprietățile următoare :

1) ω este o funcție continuă de trei argumente : x, y și $u \in q^{-1}(y)$. Continuitatea în raport cu (x, y) se consideră în sensul topologiei Kelley U^*.

2) $\omega_{x,x} = \mathrm{Id}\, q^{-1}(x)$

3) $\omega_{y,x} = \omega_{x,y}^{-1}$

4) ω este invariantă la acțiunea lui G_1 în sensul următor : fie $(x, y) \in U$, $x \in V_i$, $y \in V_j$, $\psi_{ix} : G_1 \to q^{-1}(x)$ definită de $\psi_{ix}(g_1) = \psi_i(x, g_1)$, $\psi_{iy} : G_1 \to q^{-1}(y)$ definită de $\psi_{jy}(g_1) = \psi_j(y, g_1)$. Cerem ca aplicația $\psi_{ix}^{-1}\, \omega_{xy}\, \psi_{jy} : G_1 \to G_1$ să coincidă cu translația $g_1 \to g_1 \cdot g_{ij}(x, y)$.

5) $g_{ij} : (V_i \times V_j) \cap U \to G_1$ este continuă.

LEMA 7. *Pentru fibrarea* (E_1, q, X, G_1, ψ_i) *există o conexiune poligonală* (pentru demonstrație vezi [1]).

Acum putem demonstra

TEOREMA 8. *Orice fibrare principală în categoria spațiilor topologice peste* X *de grup structural* G_1 *este indusă de un omomorfism continuu* $h : \widetilde{G} \to G_1$, *unde* $\widetilde{G}$ *este grupul structural al fibrării universale* $\widetilde{E} \to X$.

Demonstrație. Fie (E_1, q, X, G_1, ψ_i) o fibrare principală peste X și ω conexiunea poligonală a cărei existență e asigurată de lema 7. Fie $e_0 \in q^{-1}(x_0)$ elementul unitate al lui G_1.

Definim $h : \widetilde{E} \to E_1$ prin $h([x_0, \ldots, x_n]) = \omega_{x_n, x_{n-1}} \circ \ldots \circ \omega_{x_2, x_1} \circ \circ\, \omega_{x_1, x_0}(e_0)$.

Condițiile 2) și 3) din definiția lui ω ne asigură că h este corect definit. Condiția 1) asigură continuitatea lui h iar din 4) rezultă că restricția lui h la $\widetilde{G}$ este un omomorfism $\widetilde{G} \to G_1$. Se verifică ușor că fibrarea considerată este indusă de h și astfel teorema este demonstrată.

Primită la redacție la 17 decembrie 1965

Facultatea de matematică și mecanică
a Universității din București

BIBLIOGRAFIE

1. J. Milnor, *Construction of universal bundles*. Ann. Math., **63** (1956).
2. M. Zisman, P. Gabriel, *Séminaire homotopique*. Strassbourg, 1963/64.

COMEMORAREA LUI S. STOILOW

Institutul de matematică al Academiei Republicii Socialiste România a consacrat ședința sa de comunicări științifice de luni 11 aprilie 1966 comemorării a 5 ani de la moartea marelui matematician român, S. Stoilow.

Academicianul Miron Nicolescu, Președintele Academiei Republicii Socialiste România și Directorul Institutului de matematică, a deschis ședința evocînd figura luminoasă a savantului de renume internațional și a omului de inaltă omenie care a fost S. Stoilow.

Academician G. Vrănceanu a înfățișat activitatea de organizator al matematicii românești desfășurată de S. Stoilow, timp de peste 40 de ani.

Cabiria Andreian-Cazacu și Corneliu Constantinescu au ținut comunicări științifice care au ilustrat marea influență a operei matematice a lui S. Stoilow asupra cercetărilor și rezultatelor din matematica modernă.

Dăm mai jos alocuțiunea acad. G. Vrănceanu ținută la această ședință solemnă.

SIMION STOILOW,
ORGANIZATOR AL MATEMATICII ROMÂNEȘTI

Astăzi cînd se împlinesc cinci ani de la moartea lui Simion Stoilow, unul din cei mai mari matematicieni ai noștri, socot util să încerc să vorbesc despre contribuția pe care el a adus-o la organizarea vieții matematice din țara noastră.

Încep prin a spune că, după studii strălucite în străinătate, S. Stoilow funcționează în învățămîntul superior încă din 1919 în calitate de conferențiar la București și Iași și apoi profesor la Cernăuți și București, timp de peste 40 de ani. Primele semne ale calităților sale de organizator se văd în cei peste 15 ani petrecuți în Cernăuți, cînd reușește, începînd de unul singur, să adune în jurul său matematicieni tineri pe atunci, printre care se numără Octav Mayer, Miron Nicolescu, G. Vrănceanu, Florin Vasilescu, Tiberiu Popoviciu, G. Călugăreanu și Dan Hulubei.

Cînd în 1938 este numit profesor la București, S. Stoilow era deja cunoscut în lumea universitară ca un mare matematician, specialist în unul din domeniile cele mai moderne ale matematicii și în același timp un mare democrat, care se opunea metodelor dictatoriale care își găseau înscăunare în viața politică din acea vreme din țara noastră.

De aceea, cînd în 1944 un grup de matematicieni și alți universitari au hotărît aici, în localul Facultății de Științe, la 4 aprilie 1944, să întocmească un memoriu, prin care se cerea ieșirea țării noastre din războiul ce-l ducea atunci alături de Germania hitleristă, S. Stoilow a fost considerat ca cel mai autentic reprezentant al universitarilor, achitîndu-se de această sarcină cu o perseverență admirabilă, contribuind ca nimeni altul la strîngerea de semnături.

După 23 August 1944, S. Stoilow funcționează ca decan al Facultății de Științe și apoi ca rector al Universității din București și are un rol important în noua organizare a învățămîntului nostru universitar. Contribuie de asemenea la reorganizarea Academiei și la înființarea Institutului de matematică, în care calitate contribuie la organizarea vieții noastre matematice. Printre faptele importante care arată cum Simion Stoilow concepea activitatea matematică din țara noastră, ca o contribuție la patrimoniul mondial al matematicii, voi spune cîteva cuvinte despre Congresul al IV-lea al matematicienilor români, organizat în mai 1956. Ideea organizării congresului aparține ea însăși lui Simion Stoilow. Cu ajutorul conducerii de Stat din aceea vreme, reușita congresului a fost deplină. Au fost invitați în țara noastră circa 100 de matematicieni străini, care au participat activ la lucrările Congresului.

Bogata producție matematică de după 23 August 1944 a intrat în circuitul internațional cu o putere pe care o resimțim și astăzi.

Nu voi mai vorbi despre alte fapte, care să arate cum Simion Stoilow a contribuit la organizarea matematicii din țara noastră. Voi spune doar că el a reușit acest lucru prin calități care rar se întîlnesc la același om : calități științifice excepționale, obiectivitate deplină, un calm imperturbabil și un interes pentru problemele organizatorice.

Se poate spune, cu drept cuvînt, că actuala organizare a Institutului de matematică, a Secției de științe matematice a Academiei, a revistelor matematice, a relațiilor cu străinătatea, sînt în mare parte opera lui Simion Stoilow, operă care asociată lucrărilor sale matematice îl așază printre marile figuri ale științei românești.

RECENZII

PETRU L. IVĂNESCU, *Pseudo-Boolean Programming and Applications* (*Programarea pseudobooleeană și aplicații*) (Abstract of Doctor's Thesis). Lecture Notes in Mathematics No. 9. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg — New York, 1965; 50 pp.

În 1957, G. B. Dantzig a arătat că multe probleme de cercetare operațională pot fi tratate în mod unitar ca probleme de programare matematică în variabile bivalente. R. Fortet a fost primul cercetător care, în 1959, a arătat posibilitatea rezolvării programelor bivalente cu metode booleene; au urmat apoi lucrările lui P. Camion și K. Maghout.

În teza sa de doctorat, autorul prezintă o metodă generală de rezolvare a problemelor de programare matematică bivalentă, și dă unele aplicații la programarea întreagă (liniară sau neliniară), la teoria grafurilor, la teoria fluxurilor în rețele, la teoria algebrică a mecanismelor automate și în alte probleme.

Cartea este împărțită în 10 capitole.

În primul capitol autorul amintește unele proprietăți ale algebrei booleene cu două elemente și ale corpului de imaginare ale lui Galois $GF(2)$ și introduce noțiunea de funcție pseudobooleană: prin acest termen se înțelege o funcție cu variabile bivalente (0, 1) și cu valori întregi.

Capitolul doi descrie un algoritm, dat în 1963 de către autor în colaborare cu I. Rosenberg (Brno, Cehoslovacia) și cu recenzentul acestei lucrări, pentru minimizarea funcțiilor pseudobooleene. În linii mari, acest algoritm poate fi descris după cum urmează.

Fie $F = F_1(x_1, \ldots, x_n)$ funcția pseudobooleană de minimizat; ea poate fi scrisă în forma $F_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 g_1(x_2, \ldots, x_n) + h_1(x_1, \ldots, x_n)$. Fie

$$\varphi_1(x_2, \ldots, x_n) \begin{cases} 1, \text{ dacă } g_1(x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \\ 0, \text{ dacă } g_1(x_2, \ldots, x_n) < 0; \end{cases}$$

înlocuind pe x_1 prin $\varphi_1(x_2, \ldots, x_n)$, obținem o nouă funcție $F_1(\varphi_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) = F_2(x_2, \ldots, x_n)$. Aplicăm aceleași operații lui $F_2(x_2, \ldots, x_n)$ și x_2, obținînd astfel o nouă funcție $F_3(x_3, \ldots, x_n)$ etc. După un număr de p pași ($p \leqslant n$) se obține o constantă F_{p+1} care este valoarea minimă a funcției inițiale $F(x_1, \ldots, x_n)$. Mai mult, se arată că funcțiile $\varphi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n)$ ne permit să obținem imediat toate punctele $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ în care funcția $F(x_1, \ldots, x_n)$ își atinge minimul.

În capitolul trei, autorul arată că unele metode de rezolvare a ecuațiilor booleene pot fi extinse la cazul sistemelor de ecuații și inecuații pseudobooleene (adică ecuații și inecuații exprimate cu ajutorul unor funcții pseudobooleene).

Capitolul patru este consacrat problemei optimizării unei funcții pseudobooleene ale cărei valori sînt supuse unor constrîngeri exprimate prin ecuații sau inecuații pseudobooleene.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1223–1227, BUCUREȘTI, 1966

Prin introducerea soluţiei parametrice a constrîngerilor în funcţia obiectiv, această problemă este redusă la cazul fără constrîngeri. În cazul în care constrîngerile sînt de forma $f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, funcţiile $f_k(x_1, \ldots, x_n)$ fiind nenegative, reducerea la cazul fără constrîngeri se poate face cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange.

În capitolul cinci se arată că orice problemă de programare polinomială întreagă se poate reduce la una de programare pseudobooleană, dacă se folosesc scrierile binare ale variabilelor întregi. De asemenea, se tratează cazul în care variabilele sînt supuse unor condiţii logice.

Ultimele cinci capitole prezintă diverse aplicaţii ale programării pseudobooleene, obţinute de autor singur sau în colaborare cu I. Rosenberg sau cu recenzentul.

Capitolul şase arată că următoarele probleme din teoria grafurilor pot fi rezolvate prin programare pseudobooleană : determinarea numărului cromatic, determinarea numerelor de stabilitate internă şi externă (terminologia este a lui C. Berge), determinarea nucleelor etc.

Capitolul şapte se ocupă de aplicaţii la teoria fluxurilor în reţele şi este legat de cercetările lui L. R. Ford şi D. R. Fulkerson, D. Gale şi A. J. Hoffman.

În capitolul opt se arată că un anume pas nerezolvat în metoda lui Egerváry pentru rezolvarea problemei transporturilor, se poate efectua prin programare pseudobooleană.

Capitolul nouă prezintă o aplicaţie la problema obţinerii formelor disjunctive minimale ale unei funcţii booleene.

Capitolul zece se ocupă de aplicaţii la descompunerea minimală a mulţimilor parţial ordonate în lanţuri : antilanţuri maximale, formula lui Dantzig şi Hoffman, tăieturi şi reuniuni.

Unele probleme ce erau în studiu la data redactării lucrării, sînt enunţate pe scurt în Apendix.

Bibliografia conţine 115 titluri.

Observaţiile recenzentului. 1. Unele din problemele menţionate în Apendix sînt acum rezolvate. În particular, autorul şi recenzentul au reuşit să îmbunătăţească rezultatele din capitolele trei şi patru.

2. Cu excepţia teoremei privind multiplicatorii lui Lagrange, toate rezultatele din această carte rămîn valabile pentru funcţii cu variabile 0, 1 şi cu valori *reale*.

S. Rudeanu

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, *Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor*. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1966, 198 p., 6,75 lei.

Este ştiut faptul că pe lîngă metodele analizei matematice clasice, atît în fizică, cît şi în tehnică se utilizează şi metode mai noi, cu justificare în teoria distribuţiilor, teorie creată în special în scopul de a da o bază teoretică riguroasă unor procedee acceptate de tehnicieni, procedee insuficient fundamentate.

Pe lîngă expunerea unor noţiuni generale din teoria distribuţiilor, în carte se prezintă mai în amănunţit unele aplicaţii ale acestei teorii, aplicaţii care să intereseze fizicienii, tehnicienii sau chiar matematicienii.

În înfăţişarea exemplelor relative la aplicaţii se folosesc numai unele noţiuni din bazele teoriei distribuţiilor. Acestea sînt date evitîndu-se bineînţeles prezentarea întregei teorii, astfel reuşindu-se să se urmeze calea cea mai simplă în obţinerea unei durabile expuneri logice şi să se contribuie neîndoios la soluţionarea unor probleme legate de fundamentarea, dar şi de aplicarea, în diferite ramuri, a acestei teorii.

Volumul este împărţit în şapte capitole.

În cel dintîi capitol se introduc cîteva noţiuni de analiză funcţională, folosite în definiţia distribuţiilor. Se definesc, în general, distribuţiile cu valori într-un spaţiu vectorial înzestrat cu o relaţie de convergenţă şi se consideră în special distribuţiile numerice sau cu valori într-un spaţiu Banach sau Hilbert.

De asemenea se introduc cîteva consideraţii mai speciale relative la spaţiile de funcţii de pătrat sumabile şi integrale în raport cu o măsură cu valori într-un spaţiu Hilbert şi se extind spaţiilor hilbertiene de distribuţii noţiunea de nucleu reproduizant introdus de N. Aronszajn. Distribuţiile reproduizante au fost regăsite de G. Marinescu cu prilejul reprezentărilor proceselor stocastice generalizate în Nota : *Distributions reproduisantes et représentations des processus stochastiques généralisés* publicată în Revue Roumaine de mathématique pures et appliquées, tom. **9**, 577—581 (1964).

În cel de-al doilea capitol se studiază unele operaţii cu distribuţiile şi anume :

a) Operaţia de înmulţire a distribuţiilor prin funcţii care vor extinde operaţia de înmulţire a doua funcţii.

b) Operaţia de derivare care constituie o extensie naturală a operaţiei de derivare a funcţiilor.

c) Integrarea (nedefinită) a distribuţiilor introdusă ca operaţie inversă derivării.

d) Convoluţia, care constituie o operaţie bine situată în teoria distribuţiilor şi a cărei exprimare în cazul a două funcţii sumabile f şi g este următoarea :

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Se defineşte atît convoluţia unei distribuţii operatoriale cu o distribuţie vectorială, cît şi convoluţia unei distribuţii vectoriale cu o distribuţie scalară.

e) Compunerea cu familii compozabile de distribuţii, noţiune introdusă de R. Cristescu în lucrarea : *Familles composables de distributions et systèmes physiques linéaires*, apărută în Revue Roumaine de mathématique pures et appliquées, tom. 9, p. 703—714 (1964).

În încheierea capitolului se dă transformarea Fourier a unei distribuţii.

În cel de-al treilea capitol se studiază ecuaţiile diferenţiale de forma

$$T' = AT + S$$

în care $A = (a_{ij})$ este o matrice constituită din funcţii cu valori complexe, indefinit derivabile, T este un vector necunoscut cu componente distribuţii (cu valori într-un spaţiu Banach) iar S este un vector dat cu componente distribuţii.

Această teorie se extinde şi pentru ecuaţii în care matricea A nu este formată din funcţii indefinit derivabile.

În continuare se studiază ecuaţiile diferenţiale liniare cu impulsuri, problemă care a făcut obiectul tezei de dizertaţie a lui D. Wexler, luîndu-se în particular ecuaţia :

$$X' = A(t)\, X + \sum_{t} \Lambda_k\, \delta(t - t_k)$$

(unde $A(t)$ este o matrice pătrată cu n linii, constituită din funcţii care admit derivate continue pînă la ordinul m inclusiv, iar X este un vector cu componente (scalare) distribuţii de cel mult ordinul m) căreia i se găsesc soluţii distribuţii periodice.

În cel de-al doilea paragraf se studiază ecuaţia :

$$T' = AT + S$$

în cazul particular în care A este constant, pentru ca în cel din urmă paragraf să se rezolve o ecuaţie integrală de convoluţie într-un spaţiu de distribuţii cu suport mărginit la stînga. Se consideră ecuaţia integrală de tip Volterra

$$f(t) + \int_0^t k(s - t) f(s) \, ds = g(t), \qquad (t \geqslant 0)$$

(cu nucleul k funcţie măsurabilă şi mărginită pe orice interval finit, iar g funcţie local sumabilă) care se poate scrie sub forma

$$h * f = g$$

în cazul cînd $f(t)$ şi $g(t)$ se prelungesc prin valoarea zero pentru $t < 0$ şi dacă se pune $h = \delta + k$.

Capitolul patru cuprinde unele exemple de mărimi fizice exprimate prin distribuţii, dîndu-se succint aplicaţii relative la circuitele electrice şi la difracţia luminii la infinit. Autorii nu caută să pătrundă mai adînc în expunerea aplicaţiilor pe care le oferă multiplele probleme ale difracţiei la infinit, precum şi alte probleme ale opticii, lucru care ar duce la păşirea cadrului cărţii de faţă, ci în intenţia lor este de a sesiza posibilităţile folosirii distribuţiilor în acest domeniu.

În cel de-al cincilea capitol se aplică distribuţiile atît la formularea cît şi la rezolvarea efectivă a problemelor clasice de fizică matematică.

În primul paragraf, pornind de la ecuaţia de forma

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) x = f$$

(unde P este un polinom în n variabile iar f o distribuţie oarecare), se defineşte ca fiind soluţia fundamentală a acestei ecuaţii, orice soluţie a ecuaţiei :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) x = \delta$$

în care $\delta = \delta_0$ este distribuţia lui Dirac în n dimensiuni.

Cu ajutorul acestei soluţii fundamentale se găseşte potenţialul de dublu strat şi respectiv de simplu strat cu care se pot rezolva problemele Drichlet şi Neuman. De asemenea se rezolvă problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii şi ecuaţia coardei vibrante.

Se arată că în cazul ecuaţiei căldurii

$$(*) \qquad \frac{\partial u_t}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_t}{\partial \xi^2}$$

o soluţie fundamentală a problemei Cauchy este funcţia :

$$e_t(\xi) = e(t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right), \qquad (t > 0).$$

Soluţia ecuaţiei căldurii (*), cu condiţia iniţială $u_0 = \mu$, este

$$u_t = \mu^* \cdot e_t .$$

Dacă $\mu(\xi)$ este o funcţie sumabilă cu suport compact, atunci soluţia este

$$\mu(t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - \eta)^2}{4t}\right) \mu(\eta)\, d\eta,$$

unde $u(\xi, t)$ reprezintă temperatura punctului ξ la momentul t, iar $\mu(\xi)$ temperatura iniţială (pentru $t = 0$).

În cel de-al doilea paragraf se arată cum prin aplicarea transformării Fourier în raport cu o parte din variabile se pot rezolva ecuaţiile cu derivate parţiale. Se ilustrează prin cîteva exemple calea efectivă de rezolvare.

În ultimul paragraf se arată că, în cazul unor anumite probleme, este indicat să se folosească seriile trigonometrice (ale distribuţiilor).

În cel de-al şaselea capitol se introduc procesele stocastice generalizate, procese care intervin în unele probleme ridicate de tehnică.

După ce se definesc variabilele aleatoare, funcţiile de repartiţie, densitatea de repartiţie şi funcţiile caracteristice, se trece la procesele stocastice generalizate şi procesele staţionare.

În sfîrşit, în cel de-al şaptelea capitol se descrie în termeni de distribuţii sistemele fizice liniare şi se dă o teorie a predicţiei pentru procesele stocastice generalizate.

Materialul prezentat este clar, putînd fi uşor urmărit de cel interesat în lectura cărţii şi deci în aprofundarea problemelor tratate.

P. Mocanu

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugaţi să înainteze articolele, notele şi recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuş, pe hîrtie de calc. Tabelele şi ilustraţiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planşe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea aceloraşi date în text, tabele şi grafice. Explicaţia figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor din text. Numele autorilor va fi precedat de iniţială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanţelor internaţionale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conţinutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondenţa privind manuscrisele, schimbul de publicaţii etc. se va trimite pe adresa Comitetului de redacţie, str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

1966 SEP 16

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 7,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 52 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. II, 1966, 669 p., 38 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOÏLOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 8, P. 1089—1228, BUCUREŞTI, 1966

I. P. „Informaţia" – c. 3539

43831

Lei 12.—

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

9

TOMUL 18

1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACŢIE

Acad. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
Acad. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
Acad. GH. MIHOC;
Acad. G. VRĂNCEANU;
Acad. CAIUS IACOB;
Acad. TIBERIU POPOVICIU;
Acad. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAŞ — secretar de redacţie.

În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, Bucureşti, Căsuţa poştală 134—135 sau la reprezentanţii săi din străinătate.

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice altă corespondenţă, se trimit la Comitetul de redacţie al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, Bucureşti.

TOM. 18, Nr. 9
1966

STUDII ŞI CERCETĂRI
MATEMATICE

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

SUMAR

Pag.

L. LIVOVSCHI, Utilizarea contactelor speciale pentru asigurarea funcţionării corecte 1231

ION MUNTEAN, Asupra teoriei codurilor grupale şi aplicaţiile lor la sinteza multipolilor cu contacte şi relee 1247

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Cercetări asupra seriilor trigonometrice. V. Sumabilitatea seriei Fourier asociată unei funcţii neintregrabile 1259

MARIUS I. STOKA, Asupra funcţiei de repartiţie a unei repartiţii multinomiale 1281

VASILE I. ISTRĂŢESCU, Asupra unor clase de operatori regularizabili II 1287

DIONIS LICA, Despre o nouă generalizare a metodei lui Newton pentru rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare 1293

ELENA UNGUREANU, Mişcări ale fluidelor în medii poroase neomogene 1305

RODICA CHIRILĂ SOCOLESCU, Mişcarea supersonică în jurul unui con eliptic prevăzut cu aripi laterale 1311

IULIAN POPOVICI, Derivate generalizate în teoria formală a omologiei 1327

ANCA CREANGĂ-SÂMBOAN, Asupra dispersiei produsului de variabile aleatoare independente. 1339

H. COHN, Asupra unei teoreme a lui U. Grenander 1347

N. N. TEODORESCU şi GH. N. RIZESCU, Asupra unei teoreme privind tensorul de curbură 1351

ANA DUCARU-DRAGA, Asupra mişcării compresibile subsonice în jurul unor profile obţinute prin transformări conforme de un tip particular 1357

CORNELIU ZIDĂROIU, Asupra unui model de transport în mai multe etape 1365

LIVIU SOFONEA, Asupra concepţiei cuantice-relativiste a fotonului 1371

ILIE PETRE IAMBOR, Teorema de separare a lui Jordan (Aspecte metodologice) 1405

CRONICĂ ŞTIINŢIFICĂ 1411

ST. CERC. MAT., TOM 18, Nr. 9, P. 1229–1416, BUCUREŞTI, 1966

UTILIZAREA CONTACTELOR SPECIALE PENTRU ASIGURAREA FUNCȚIONĂRII CORECTE

DE

L. LIVOVSCHI

Se studiază unele procedee de evitare a hazardului în automatele finite cu relee prin utilizarea de butoane și relee cu contacte speciale și ordinare.

1. INTRODUCERE

Se știe că în unele automate finite pot avea loc evoluții necorecte, adică evoluții care nu respectă programul automatului întocmit în presupunerea că elementele lui au funcționare ideală. Evitarea funcționării necorecte se poate face pe două căi. Mai întîi se poate efectua sinteza automatului în presupunerea că releele au funcționare reală. Pe această linie de cercetări se înscriu lucrările din ultimii ani ale lui Gr. C. Moisil [5]. O altă cale de rezolvare a problemei constă în căutarea de procedee de asigurare a funcționării corecte bazate pe analiza automatelor construite în presupunerea că butoanele și releele lor funcționează ideal. Pe această linie de cercetări se înscriu lucrările lui D. A. Huffman [1], S. H. Unger [1], Gh. Ioanin ¹) cît și lucrarea de față.

Unele dintre fenomenele de funcționare necorectă au fost numite de A. D. Huffman hazard-uri. Deoarece fenomenele de hazard sînt însoțite de întreruperea sau închiderea nedorită a circuitelor releelor, ele se mai numesc fenomene de discontinuitate sau simplu discontinuități. Amintim în continuare în ce constau diferite fenomene de hazard. Se numește *hazard dinamic* fenomenul care constă în schimbarea de cîteva ori a conductibilității circuitului de alimentare al unui releu atunci cînd se comandă alimentarea sau întreruperea alimentării releului considerat. Hazardul dinamic poate fi evitat dacă schemele circuitelor de alimentare sînt de tipul serie-paralel. Într-adevăr, în asemenea circuite, în presupunerea funcționării ideale, nu apar dipoli de forma x^0x^1f a căror prezență provoacă hazardul dinamic.

Tot hazard dinamic se numește și fenomenul de oscilație a unor contacte atunci cînd ele se închid. Această formă de hazard poate fi evitată prin alegerea potrivită a parametrilor sistemului mecanic al releului.

---

¹) *Contribuții la studiul schemelor funcționînd cu contacte reale.* Comunicare făcută la Simpozionul de la Moscova, 1957.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1231–1245, BUCUREȘTI, 1966

Se numeşte *hazard static* fenomenul care constă în schimbarea conductibilităţii circuitului de alimentare al unui releu în timpul comutării unor contacte din acest circuit.

În cazul hazardului static valorile iniţiale şi finale ale conductibilităţii sînt aceleaşi, spre deosebire de cazul hazardului dinamic cînd ele sînt distincte.

Hazardul static poate fi evitat dacă se construiesc circuitele după procedeul indicat de D. A. Huffman, bazat pe utilizarea *grupurilor de închidere şi deschidere*.

Se numeşte *hazard esenţial* fenomenul care constă în închiderea sau deschiderea prematură sau cu întîrziere a unor contacte astfel încît datorită acestui lucru, releele automatului nu sînt acţionate şi eliberate în succesiunea necesară.

Analiza şi unele procedee de eliminare a hazardului esenţial au fost date de S. H. Unger [1].

În afară de fenomenele de hazard amintite mai sus, într-un automat mai pot avea loc cazuri de funcţionare necorectă atunci cînd sînt posibile mai multe evoluţii ale lui, datorită întîrzierilor diferite ale releelor sau întreruperii premature a alimentării lor. Asemenea evoluţii necorecte se numesc de obicei *evoluţii critice*. Ele pot avea loc atît în automatele autonome, cît şi în automatele în mai mulţi timpi. Una dintre cauzele evoluţiilor critice o constituie nesatisfacerea c.t.b.f. [2]).

În cele ce urmează presupunem că este satisfăcută c.t.b.f. şi că ciruitele releelor sînt de tipul serie-paralel. Presupunem de asemenea că nu are loc fenomenul de oscilaţie al contactelor atunci cînd ele se închid.

În ceea ce priveşte descrierea funcţionării automatului amintim că dacă se notează cu K, Z, W variabilele care descriu stările comenzilor, stările intermediare şi stările execuţiilor, atunci aplicaţiile

$$(1)\qquad \begin{aligned} K_N \times Z_N &\rightarrow Z_{N+1}, \\ K_N \times Z_N &\rightarrow W_N, \end{aligned}$$

sînt funcţiile de lucru ale automatului [6]. Aplicaţiile (1) pot fi reprezentate sub formă de graf al automatului [4]. Arcele acestui graf sînt notate în origine cu valorile lui Z_N iar în extremitate cu valorile lui K_N, Z_{N+1}, W_N. Fiecare arc poate fi interpretat ca element al produsului $K_N \times Z_N$, unde Z_N se citeşte în originea arcului iar K_N în extremitatea lui. Dacă pentru aceleaşi valori succesive ale lui K_N corespund aceleaşi valori ale lui Z_N, se obţine un arc ale cărui origine şi extremitate coincid.

Menţionăm în încheiere că în exemplele analizate mai jos la construirea circuitelor am aplicat procedeul lui D. A Huffman pentru eliminarea hazardului static.

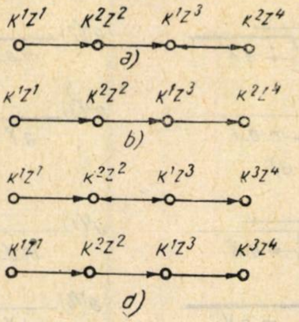
2. ANALIZA UNOR FENOMENE DE HAZARD

Expunem mai jos unele observaţii asupra fenomenelor de hazard care se pot deduce din analiza funcţionării unor automate simple. După cum a arătat S. H. Unger, hazardul esenţial poate avea loc dacă în graful automatului apar şiruri de arce de forma din figurile 1 a) şi b).

---

[2]) Condiţia tehnică de bună funcţionare.

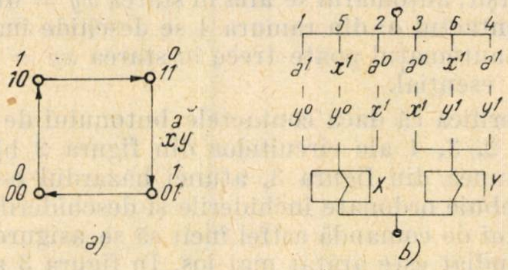
În asemenea cazuri în timpul schimbării $K^1 \rightarrow K^2$ a comenzilor se pot realiza condiții în care automatul poate trece în starea internă Z^3 prin intermediul stării interne Z^2 astfel încît în momentul cînd schimbarea comenzii s-a încheiat, automatul se află în starea internă Z^3 sau Z^4 în locul strării interne Z^2. Pentru identificarea unui hazard esențial este suficient să se verifice dacă în graful automatului există șiruri de arce de forma din figurile 1 a) și b).



K^1Z^1 K^2Z^2 K^1Z^3 K^2Z^4
a)
K^1Z^1 K^2Z^2 K^1Z^3 K^2Z^4
b)
K^1Z^1 K^2Z^2 K^1Z^3 K^3Z^4
K^1Z^1 K^2Z^2 K^1Z^3 K^3Z^4
d)

Fig. 1

În cazul cînd în graful automatului există șiruri de arce de forma din figurile 1 c) și d), fenomenul de hazard esențial nu apare, dar în timpul schimbării $K^1 \rightarrow K^2$ a comenzilor se pot realiza condiții în care în locul șirului de stări interne programat $Z^1 \rightarrow Z^2$, se realizează o altă evoluție, de exemplu șirul $Z^1 \rightarrow Z^2 \rightarrow Z^3 \rightarrow Z^4$, unde stările Z^2 și Z^3 din mijlocul șirului au o durată scurtă. Posibilitatea unor asemenea evoluții se poate recunoaște dacă se analizează circuitele automatelor construite cu ajutorul grafurilor din figurile 1 c) și d) [3].



1
10
0
11
a
xy
0
00
1
01
a)
1 5 2 3 6 4
a^1 x^1 a^0 a^0 x^1 a^1
y^0 y^0 x^1 x^1 y^1 y^1
X
Y
b)

Fig. 2

În cele ce urmează considerăm și aceste evoluții ca intrînd în sfera noțiunii de hazard esențial. Recunoașterea hazardului esențial în evoluțiile din figura 1 se reduce în aceste condiții la verificarea faptului că pentru prima schimbare $K^1 \rightarrow K^2$ a comenzilor se poate realiza starea Z^3.

Fie acum binecunoscutul contor în baza doi avînd graful și circuitele din figura 2 a) și 2 b) în care hazardul static este eliminat.

În graful din figura 2a) apar patru șiruri de arce de forma din figura 1. Rezultă că hazardul esențial poate avea loc în patru moduri diferite.

Într-adevăr, dacă automatul este în starea $xy = 00$ şi se dă comanda $a = 1$ şi dacă contactul a^1 din ramura 1 (fig. 2 b) se închide înainte de a se desface contactul a^0 din ramura 3, automatul poate trece în starea $xy = 11$, adică poate avea loc hazard esenţial.

Dacă automatul este în starea $xy = 10$ şi se dă comanda $a = 0$ şi dacă contactul a^0 din ramura 3 se închide înaintea contactului a^0 din ramura 2, atunci automatul poate trece în starea $xy = 01$, adică poate avea loc hazard esenţial.

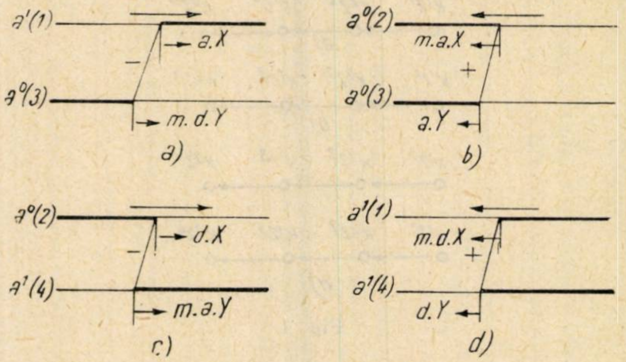


Fig. 3

Dacă automatul este în starea $xy = 11$ şi se dă comanda $a = 1$ şi dacă contactul a^0 din ramura 2 se deschide înainte de a se închide contactul a^1 din ramura 4, automatul trece în starea $xy = 00$, adică poate avea loc hazard esenţial.

Dacă, în sfîrşit, automatul se află în starea $xy = 01$ şi se dă comanda $a = 0$ şi dacă contactul a^1 din ramura 4 se deschide înaintea contactului a^1 din ramura 1, automatul poate trece în starea $xy = 10$ aşa încît poate avec loc hazard esenţial.

Se poate verifica că dacă contactele butonului de comandă din cele patru ramuri 1, 2, 3, 4 ale circuitelor din figura 2 b) se deschid şi se închid în succesiunea din figura 3, atunci hazardul esenţial nu are loc. Modul în care trebuie ordonate închiderile şi deschiderile celor patru contacte ale butonului de comandă astfel încît să se asigure evoluţia corectă a automatului studiat este arătat mai jos. În figura 3 am utilizat următoarele prescurtări : *a* acţionarea releului, *d* dezacţionarea releului, *m.a.* menţinerea acţionării releului, *m.d.* menţinerea dezacţionării releului.

Fie acum automatul autonom avînd graful din figura 4 a) şi circuitele din figura 4 b). Să presupunem că starea $xy = 10$ s-a realizat. Atunci, dacă contactele releului Y sînt ordinare, starea $xy = 11$ poate să nu se realizeze. Dimpotrivă, dacă aceste contacte sînt speciale (fig. 5 a), atunci starea $xy = 11$ se realizează. Să presupunem acum că starea $xy = 11$ s-a realizat. Dacă releul Y are o întîrziere la eliberare mai mare decît a lui X şi dacă contactele lui X sînt ordinare, după starea $xy = 11$ poate să urmeze starea $xy = 10$ în loc de $xy = 01$. Dacă însă releul X este echipat cu contacte speciale (fig. 5 b), atunci se realizează şirul de stări $xy = 11{,}01$. În sfîrşit, să presupunem că starea $xy = 01$ s-a realizat.

Atunci se realizează şi starea $xy = 00$, deoarece în starea $xy = 01$ ambele relee sînt nealimentate şi deci revin în starea de repaus. După starea $xy = 00$ urmează sigur starea $xy = 10$. Succesiunea stării contactelor poate fi urmărită pe fig. 5 c). Mai observăm că în circuitele automatului nu apar contactele x^0 şi y^1. Aceste contacte se folosesc numai pentru culegerea de informaţie asupra stării automatului.

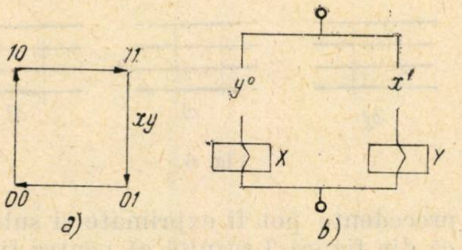


Fig. 4

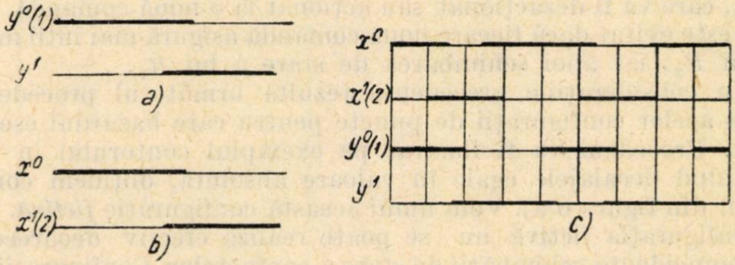


Fig. 5

3. ALEGEREA CONFIGURAŢIEI CONTACTELOR

Rezultatele analizei exemplelor de la punctul 2 sînt valabile şi în cazul general. Într-adevăr, independent de complexitatea automatului se observă că evoluţiile care pot da naştere la hazard esenţial au una din formele de la punctul 2 şi ele pot fi evitate în modul arătat.

Se pune acum întrebarea : dacă este întotdeauna posibilă organizarea succesiunii necesare a închiderii şi deschiderii contactelor unui buton de comandă ?

Vom observa mai întîi că din condiţiile de absenţă a hazardului esenţial rezultă o anumită clasificare a decalajelor dintre poziţiile contactelor în care se schimbă conductibilitatea lor. Pentru aceasta să convenim să numim *puncte* poziţiile butonului în care se schimbă conductibilităţile contactelor. Cu ajutorul perechilor de puncte care intervin într-o condiţie de absenţă a hazardului esenţial se pot construi nişte *vectori* după regula : un vector are originea în punctul definit de contactul care comandă schimbarea de stare actuală, iar extremitatea în punctul definit de contactul care comandă schimbarea de stare ulterioară. Un vector defineşte un *decalaj pozitiv* dacă proiecţia lui pe o axă orientată în sensul în care creşte coordonata care defineşte poziţia butonului este pozitivă. În caz contrar decalajul este *negativ*. Pe figura 3 sînt reprezentați vectorii și sînt notate decalajele pentru exemplul studiat mai sus. Constatăm de asemenea că fiecare vector are proiecție negativă pe axa care indică sensul în care variază pentru fiecare comandă coordonata care descrie poziția butonului. Rezultă atunci că pentru un șir de comenzi ale aceluiași buton, decalajele pozitive și negative alternează.

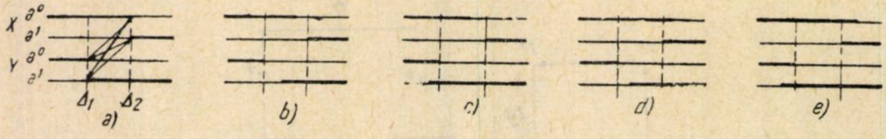


Fig. 6

Observațiile precedente pot fi exprimate și sub altă formă. Pentru aceasta remarcăm că din figura 3 rezultă că pentru fiecare nouă comandă are loc acționarea (alimentarea) sau dezacționarea (întreruperea alimentării) unui releu R_1 și menținerea acționării sau dezacționării unui alt releu R_2, care va fi dezacționat sau acționat la o nouă comandă. Hazardul esențial este evitat dacă fiecare nouă comandă asigură mai întîi menținerea stării lui R_2, iar apoi schimbarea de stare a lui R_1.

Din considerațiile precedente rezultă următorul procedeu de deducere a acelor configurații de puncte pentru care hazardul esențial este eliminat. Procedeul va fi ilustrat pe exemplul contorului în baza doi. Presupunînd decalajele egale în valoare absolută, obținem configurația punctelor din figura 6 a). Vom numi această configurație *fictivă*.

Configurația fictivă nu se poate realiza efectiv deoarece ea presupune coincidența schimbării de stare a contactelor. Configurațiile *efective* se obțin deplasînd punctele aparținînd liniilor îngroșate (contact închis) care acoperă intervalul definit de dreptele Δ_1 și Δ_2 spre interiorul și exteriorul intervalului, astfel încît deplasările spre interiorul intervalului să nu depășească jumătatea acestui interval. Se vede ușor că în acest caz semnele decalajelor nu se schimbă. Pentru exemplul studiat configurațiile posibile sînt arătate pe figurile 6 b), c), d), e). Configurației din figura 6 e) îi corespunde schema din figura 2 b). Configurațiilor din figurile 6 b), c), d) le corespund scheme care se obțin din schema din figura 2 b) eliminînd respectiv ramurile *5* și *6*, *6*, *5*. Mai observăm că dacă sub comenzi succesive date cu un același buton, un automat are o funcționare ciclică, atunci numărul de comenzi este par și poligonul vectorilor este închis. În caz contrar acest poligon este deschis.

În ceea ce privește automatele autonome, funcționarea lor corectă poate fi asigurată în felul următor. Fie c_i^α cu $\alpha = 0$ sau 1 și $i = 1, \ldots, n_c$, contactele unui releu care apar în circuitele unui automat autonom.

Dacă pentru fiecare contact c_i^α se construiește și contactul $\overline{c_i^\alpha}$ astfel încît contactele c_i^α și $\overline{c_i^\alpha}$ să formeze cîte o pereche de contacte speciale, atunci se pot construi dipolii avînd ca formule structurale stările automatului. Cu ajutorul acestor dipoli se pot construi circuite de recunoaștere a stărilor automatului. Menționăm că în acest caz intervalele în care dipolii corespunzători stărilor succesive au conductibilitate nenulă, au intersecție nevidă (v. fig. 5 c).

Dacă contactele c_i^α și c_i^α formează o pereche de contacte ordinare, atunci intersecția intervalelor de mai sus este vidă și nu este sigur că toate stările automatului se realizează (adică dacă se poate asigura conductibilitatea diferită de zero a dipolilor avînd ca formele structurale stările automatului).

Fie, în sfîrșit, automatele în mai mulți timpi. În asemenea automate în afară de stări stabile pot exista cicluri de stări nestabile. În afară de aceasta trecerea dintr-o stare stabilă sau un ciclu de stări nestabile în altă stare stabilă sau ciclu de stări nestabile poate avea loc direct (în doi timpi) sau în mai mulți timpi. Așadar o nouă comandă provoacă în general o evoluție autonomă constînd dintr-un șir de stări nestabile care se încheie cu o stare stabilă sau un ciclu de stări nestabile.

Fie acum $X_1, X_2, \ldots, X_n$ releele care intervin într-o evoluție autonomă. Ordinea în care intervin releele se presupune cunoscută. Presupunem de asemenea că au fost luate măsurile ca hazardul esențial să fie eliminat și ca evoluțiile autonome să fie corecte. În aceste condiții succesiunea în care intervin releele X_i în evoluția autonomă studiată rămîne aceeași, independent de ordinea în care se închid sau se deschid contactele butonului A, care comandă această evoluție autonomă. Într-adevăr, să presupunem că releul X_1 intervine primul în evoluția studiată. Independent de starea contactelor butonului A din circuitele celorlalte relee, releul X_1 nu-și va putea schimba starea decît după ce un contact al lui A din circuitele lui X_1 își va schimba conductibilitatea. Fie acum o stare internă S_i oarecare din evoluția autonomă studiată și X_j releul care urmează să schimbe de stare. Dacă în circuitele lui X_j nu apar contactele butonului A, atunci el va schimba de stare după ce starea S_i a automatului s-a realizat. Dacă în circuitele releului X_j apar contactele butonului A, atunci are loc alternativa : or starea următoare a lui X_j nu depinde de starea butonului A și atunci releul X_j schimbă de stare după ce s-a realizat starea S_i a automatului, or starea următoare a lui X_j depinde de starea butonului A și atunci releul X_j schimbă de stare numai după ce s-a închis sau s-a deschis un contact al butonului A și s-a realizat starea S_i.

În ambele cazuri succesiunea stărilor evoluției autonome studiate nu se schimbă. Poate avea loc doar o întîrziere a realizării unora dintre stări.

Considerăm acum cîteva exemple de automate în mai mulți timpi în care evoluțiile autonome se încheie de fiecare dată cu o stare stabilă. Cazul cînd ele s-ar încheia cu un ciclu se tratează în mod asemănător.

Se presupune că pentru două schimbări succesive ale comenzilor, automatele studiate trebuie să evolueze în conformitate cu grafurile din figura 7. Vom zice că poate avea loc fenomenul de hazard esențial dacă pentru schimbarea $K^1 \to K^2$ a comenzilor automatul execută o evoluție autonomă care cuprinde stări din cele două evoluții autonome succesive care apar în figura 7.

Pe figura 7 sînt notate cu arce punctate unele dintre evoluțiile necorecte care pot avea loc în timpul schimbării $K^1 \to K^2$ a comenzilor. În nodurile acestor arce comanda K are valoarea $K^{\frac{1}{2}}$ corespunzătoare stării intermediare a butonului care intervine în schimbarea $K^1 \to K^2$ a lui K. Stările releelor care nu participă în evoluțiile studiate nu sînt

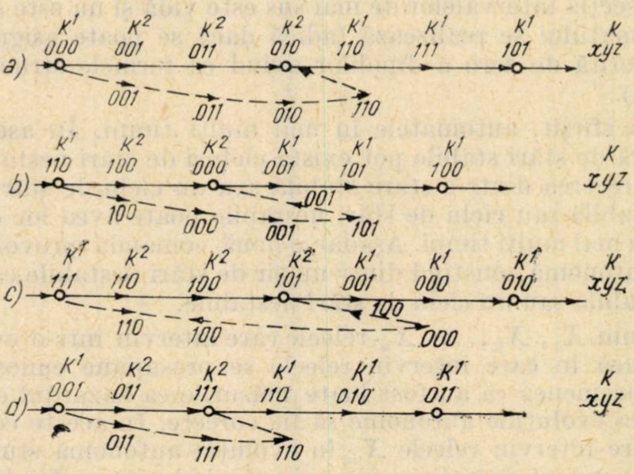

a)
K1 000
K2 001
K2 011
K2 010
K1 110
K1 111
K1 101
K xyz
001
011
010
110
b)
K1 110
K2 100
K2 000
K1 001
K1 101
K1 100
K xyz
100
000
001
001
101
c)
K1 111
K2 110
K2 100
K2 101
K1 001
K1 000
K1 010
K xyz
110
100
100
000
d)
K1 001
K2 011
K2 111
K1 110
K1 010
K1 011
K xyz
011
111
110

Fig. 7

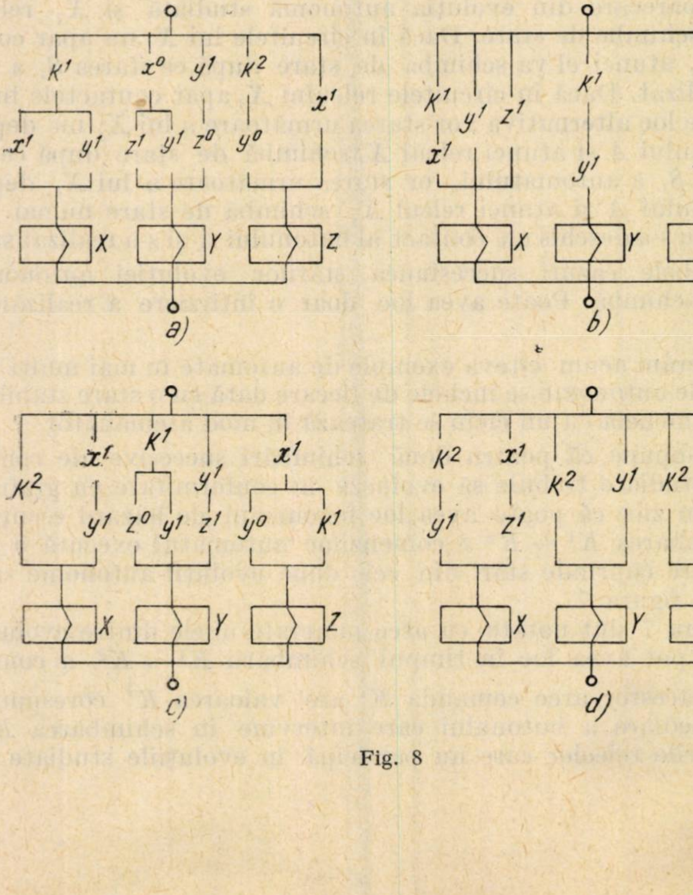

K1
x0
y1
K2
x1
x1
y1
z1
y1
z0
y0
X
Y
Z
a)
K1
y1
z1
x1
y1
K1
x0
X
Y
Z
b)
x1
K1
x1
K2
y1
y1
z0
y1
z1
y0
K1
X
Y
Z
c)
K2
x1
K2
y1
K2
x0
y1
z1
X
Y
Z
d)

Fig. 8

specificate pe figura 7. Pe figurile 8 a), b) c), d) sînt arătate părțile din circuite referitoare la evoluțiile din figura 7.

Analiza schemelor din figurile 8 a), b), c), d) arată că dacă contactele comenzilor din circuitele releelor care schimbă primele de stare (atunci cînd se dau comenzile K^2 și K^1) se închid și se deschid în conformitate

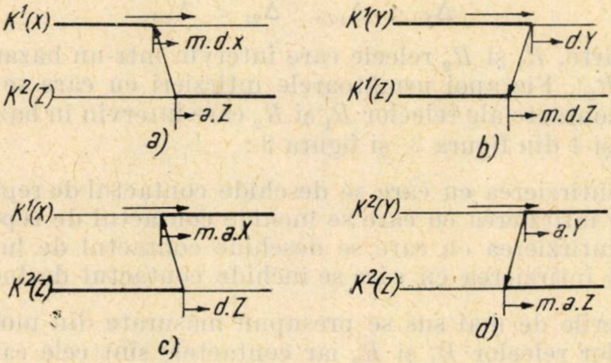


Fig. 9

cu diagramele din figurile 9 a), b), c), d) hazardul esențial este eliminat.

După cum se vede, condițiile ilustrate pe figura 4 și figura 9 sînt analoage.

Menționăm că dacă nu sînt luate măsurile necesare pentru evitarea funcționării necorecte în evoluțiile autonome din figura 7, atunci în cadrul hazardului esențial se pot realiza și alte evoluții decît cele arătate pe figura 7. Aceste evoluții pot fi evitate dacă sînt satisfăcute condițiile din figura 9 și dacă se asigură funcționarea corectă pentru fiecare evoluție autonomă în parte.

Amintim în încheiere încă o categorie de evoluții necorecte care pot avea loc în automatele în mai mulți timpi, atunci cînd o nouă comandă provoacă o evoluție autonomă care începe cu eliberarea unor relee. Dacă butonul care intervine în această comandă are contacte ordinare și automatul este de tip Mealy, recunoașterea stărilor lui nu va fi posibilă în intervalul de timp cît durează schimbarea comenzii.

4. UTILIZAREA CONTACTELOR ORDINARE

În cazul automatelor în care se utilizează relee de curenți tari, reglajul contactelor este greu de realizat și chiar de nedorit din cauză că uzura contactelor crește și cu timpul ele se dereglează. De aceea sînt preferabile automatele a căror butoane și relee sînt echipate cu contacte ordinare.

Din examinarea primelor condiții din figura 3 și figura 9, deducem că în evoluțiile respective contactele ordinare sînt chiar necesare. În ceea ce privește condițiile 2 și 4 observăm că în cazul cînd contactele de același tip ale butonului de comandă se închid sau se deschid simultan, hazardul esențial nu are loc. Deoarece simultaneitatea închiderii sau deschiderii unor contacte nu poate fi realizată, să vedem în ce măsură nerealizarea ei afectează funcţionarea corectă. Fie Δ_{1d} şi Δ_{1i} intervalele de timp în care se deschid şi se închid contactele de repaus şi Δ_{2d} şi Δ_{2i} intervalele în care se deschid şi se închid contactele de lucru ale unui buton A.

Datorită faptului că spre sfîrşitul cursei unui buton armătura are de obicei o viteză mai mare decît la începutul cursei, avem :

$$(2)\qquad \Delta_{1i} < \Delta_{1d}, \quad \Delta_{2i} < \Delta_{2d}.$$

Fie, mai departe, R_1 şi R_2 releele care intervin într-un hazard esenţial (în ordinea R_1, R_2). Fie apoi următoarele întîrzieri cu care se deschid şi se închid acele contacte ale releelor R_1 şi R_2 care intervin în hazardul esenţial în cazurile 2 şi 4 din figura 3 şi figura 9 :

Δ_1 (0) întîrzierea cu care se deschide contactul de repaus al lui R_1 ;
Δ_1 (1,0) întîrzierea cu care se închide contactul de repaus al lui R_1 ;
Δ_2 (1) întîrzierea cu care se deschide contactul de lucru al lui R_2 ;
Δ_2 (0,1) întîrzierea cu care se închide contactul de lucru al lui R_2.

Toate întîrzierile de mai sus se presupun măsurate din momentul închiderii circuitelor releelor R_1 şi R_2 iar contactele sînt cele care intervin în evoluţiile studiate. Din analiza cazurilor specificate mai sus rezultă că hazardul esenţial este evitat dacă

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\left.\begin{matrix}\Delta_{1i}\\ \Delta_{2i}\end{matrix}\right\} \leqslant \Delta_1(0) + \Delta_2(1),\\ &\left.\begin{matrix}\Delta_{1d}\\ \Delta_{2d}\end{matrix}\right\} \leqslant \Delta_1(1,0) + \Delta_2(0,1).\end{aligned}$$

Ţinînd seama că de obicei

$$(4)\qquad \Delta_1(0) < \Delta_1(1,0), \quad \Delta_2(1) < \Delta_2(0,1),$$

din (2), (3) şi (4) deducem că proprietăţile mecanice ale reeleelor facilitează satisfacerea condiţiilor (3).

În ceea ce priveşte cazurile 3 din figurile 3 şi 9 se poate arăta că dacă se utilizează contacte ordinare, întîrzierile releelor R_1 şi R_2 trebuie să satisfacă condiţii mai restrictive decît (3). Fie pentru aceasta :

Δ_1 (1) întîrzierea cu care se deschide contactul de lucru al lui R_1 care intervine în hazardul esenţial;

Δ_0 intervalul de timp în care nu sînt închise contactele butonului de comandă.

Dacă este satisfăcută condiţia

$$(5)\qquad \Delta_0 \leqslant \Delta_1(1) + \Delta_2(1),$$

hazardul esenţial din cazul 3 (fig. 3 şi 9) nu are loc. Deoarece Δ_0 are de obicei valori mari, condiţia (5) este mai greu de satisfăcut decît condiţiile (3).

Menţionăm că în discuţia anterioară am neglijat masa armăturii. Dacă se ţine seamă şi de acest factor, se obţin condiţii mai restrictive decît (3) şi (5).

Condiţiile (3) se pot satisface mai uşor dacă butonul de comandă acţionează un releu auxiliar, ale cărui contacte se folosesc în locul contactelor butonului. Presupunînd condiţiile (3) satisfăcute, rămîne de asigurat evoluţia corectă în cazurile 3 din figura 3 şi figura 9.

În lucrarea [3] am arătat că asigurarea funcţionării corecte în aceste cazuri se poate realiza cu ajutorul unui *releu suplimentar*. Modul în care intervine acest releu este arătat pe figura 10 (care trebuie comparată cu figura 3 c). Dezacţionarea releului X nu mai este comandată de contactul a^0, ci de contactul s^0 al releului suplimentar S.

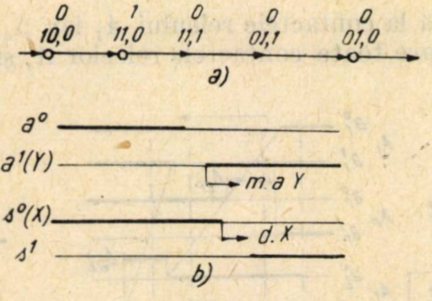


Fig. 10

În mod asemănător se poate asigura funcţionarea corectă în cazul evoluţiilor autonome şi anume a stării 11 din figura 11 a), care, după cum am văzut la punctul 1 poate să nu se realizeze. Modul în care intervine releul suplimentar S este arătat pe figurile 11 şi 12. Dacă întîrzierile la eliberare ale releelor X şi Y nu diferă prea mult, atunci pentru automatul din figura 4 a) stările se succed ca pe figura 12.

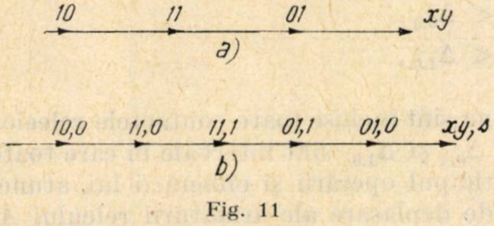


Fig. 11

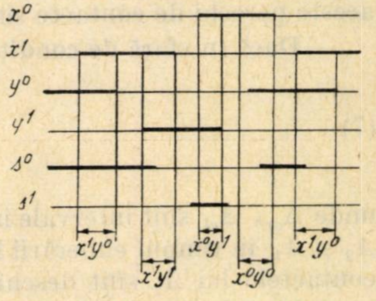


Fig. 12

Tot cu ajutorul unui releu suplimentar se poate asigura funcţionarea corectă în evoluţiile autonome ale unui automat în mai mulţi timpi care încep cu eliberarea unor relee.

Menţionăm că în lucrarea [3] sînt indicate diferite procedee de asigurare, pentru care are loc funcţionarea corectă într-un sens mai larg şi anume al asigurării realizării unor anumite stări ale automatelor.

Atunci cînd condiţiile (3) nu sînt satisfăcute, funcţionarea corectă în cazurile 2 şi 4 din figura 3 şi figura 9 se poate asigura dacă în locul contactelor butonului de comandă se folosesc contactele unui *releu auxiliar* rapid A_1, comandat de butonul A. În cazul cînd releul A_1 nu este suficient de rapid, succesiunea necesară a închiderii și deschiderii contactelor poate fi asigurată dacă se construiește un automat cu comandă directă în care releul A_1 comandă două relee A_r și A_l montate în conformitate cu figura 13 a) și a căror întîrzieri de schimbare a stării contactelor (v. fig. 13 b) satisfac condițiile

$$(6) \qquad \Delta_{ar} > \Delta_{1i}, \ \Delta_{al} > \Delta_{2i},$$

unde Δ_{1i} și Δ_{2i} se referă la contactele releului A_1 iar Δ_{ar} și Δ_{al} reprezintă intervale de timp în care toate contactele releelor A_r și A_l sînt deschise.

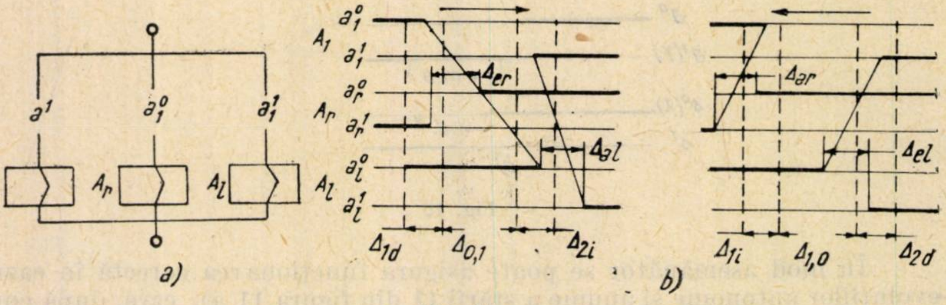


Fig. 13

Din figura 13 b) rezultă că pentru ambele sensuri de deplasare ale armăturii releului A_1 există perechi de contacte ale releelor A_1, A_r și A_1, A_l care satisfac condițiile 2 și 4 din figurile 3 și 9. Pe figura 13 b) aceste perechi de contacte sînt unite prin arce.

Dacă în afară de condițiile (6) mai sînt satisfăcute condițiile :

$$(7) \qquad \begin{aligned} \Delta_{er} &< \Delta_{0.1}, \\ \Delta_{el} &< \Delta_{1.0}, \end{aligned}$$

unde Δ_{er}, Δ_{el} sînt intervale în care nu sînt închise toate contactele releelor A_2 și A_l în timpul eliberării lor iar $\Delta_{0.1}$ și $\Delta_{1.0}$ sînt intervale în care toate contactele lui A_1 sînt deschise în timpul operării și eliberării lui, atunci se vede că pentru ambele sensuri de deplasare ale armăturii releului A_1 există perechi de contacte ale releelor A_r și A_l care satisfac condițiile din cazurile 3 ale figurilor 3 și 9.

După cum se vede ușor, condițiile (6) și (7) sînt contradictorii. Întradevăr, din (6) rezultă că releele A_r și A_l trebuie să fie lente, pe cînd din (7) rezultă că ele trebuie să fie rapide. Deducem de aici că utilizarea schemei din figura 13 a) pentru evitarea hazardului în toate cazurile din figura 3 sau figura 9 prezintă dificultăți.

În exemplele care urmează considerăm numai soluțiile în care se utilizează contactele speciale. Pe baza celor expuse mai înainte se pot construi și soluții în care se utilizează numai contacte ordinare.

5. EXEMPLE

1. Drept prim exemplu considerăm automatul avînd graful din figura 14 și circuitele din figura 15, unde ramura 6 evită hazardul static. În graful automatului apare șirul de arce 1→2→3→4 care arată că este posibil hazardul esențial și anume pentru evoluțiile 1→2→3 și 2→3→4 care sînt de forma din figurile 3 d) și 3 a). Pe figura 16 sînt arătate configurațiile fictive și două configurații efective ale pozițiilor în care contactele schimbă de stare. În cazul primei configurații, ramura *6* din figura 15 poate lipsi. Din figura 16 a) mai rezultă că în ramurile *3* și *4* din figura 15 contactele a^1 pot fi confundate (deoarece condiția de evitare a hazardului esențial se referă numai la contactul a^2 din ramura *4*).

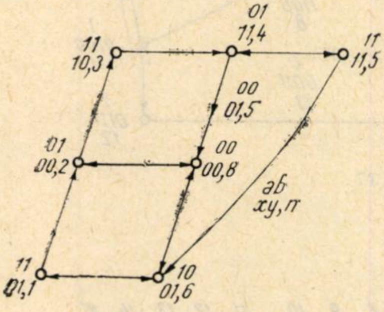


Fig. 14

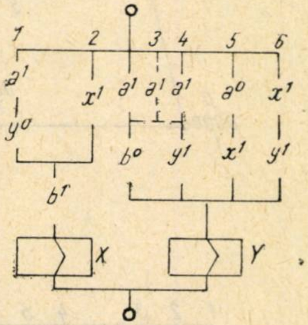


Fig. 15

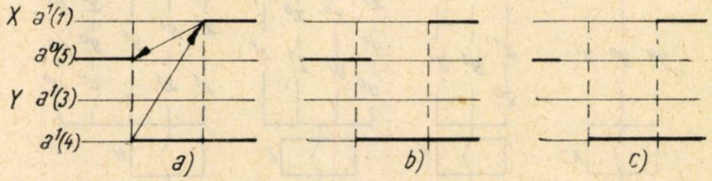


Fig. 16

2. Fie acum un automat avînd graful din figura 17 și circuitele din figura 18. Ramurile *2*, *5* și *10* evită hazardul static. Din examinarea grafului din figura 17 deducem că pentru evitarea hazardului esențial este necesară compararea următoarelor perechi de evoluții :

1.	1→2	2→8↔9
2.	1→2→3	3→7→8↔9
3.	1→2→3→4	4→6→9↔8
4.	1→2→3→4→5	5→9↔8
5.	2→8	8→11→10→12
6.	5→9	9→10→12
7.	3→7→8	8→11→10→12
8.	4→6→9	9→10→12
9.	8→11→10→12	12→13→14→1
10.	9→10→12	12→13→14→1
11.	12→13→14→1	1→2→3→4→5

←

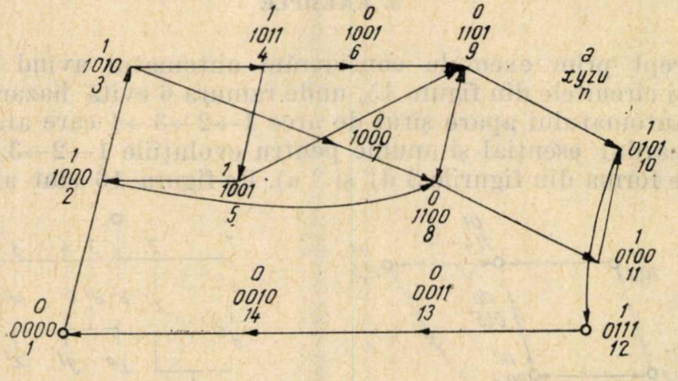

a
xyzu
n
1 1010 3
1 1011 4
0 1001 6
0 1101 9
0 1000 7
1 1000 2
1 1001 5
0 1100 8
1 0101 10
1 0100 11
0 0010 14
0 0011 13
0 0000 1
1 0111 12

Fig. 17

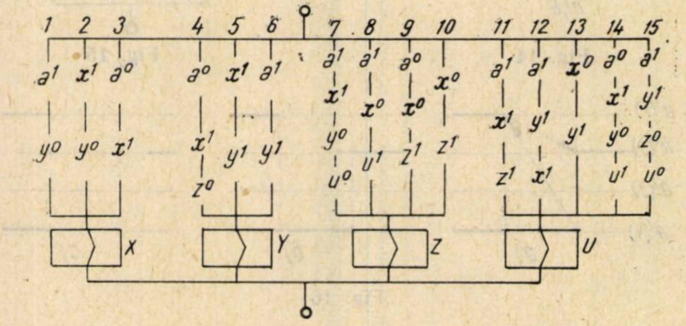

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
a¹ x¹ a⁰ a⁰ x¹ a¹ a¹ a¹ a⁰ x⁰ a¹ a¹ x⁰ a⁰ a¹
y⁰ y⁰ x¹ x¹ y¹ y¹ x¹ x⁰ x⁰ z¹ x¹ y¹ y¹ x¹ y¹
z⁰ y⁰ u¹ z¹ z¹ x¹ y⁰ z⁰
u⁰ u¹ u⁰
X
Y
Z
U

Fig. 18

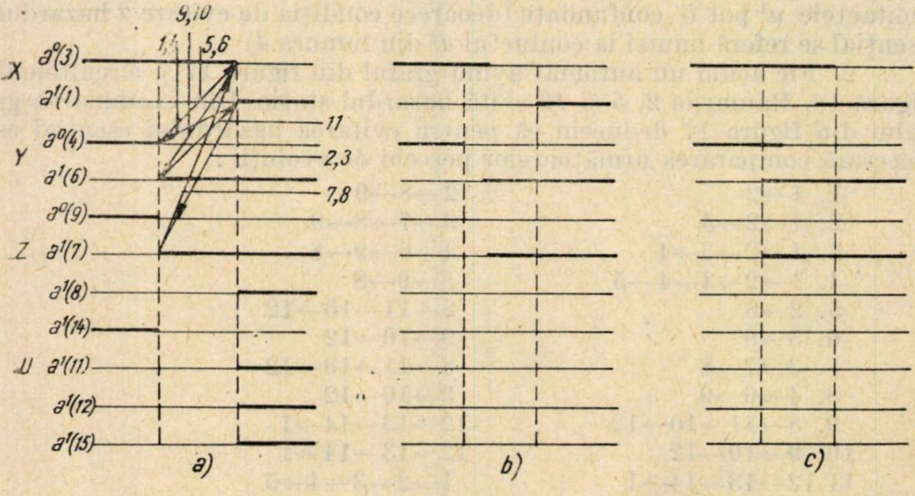

9,10
1,4
5,6
11
2,3
7,8
X
Y
Z
U
a⁰(3)
a¹(1)
a⁰(4)
a¹(6)
a⁰(9)
a¹(7)
a¹(8)
a¹(14)
a¹(11)
a¹(12)
a¹(15)
a)
b)
c)

Fig. 19

În figura 19 a) este arătată configurația fictivă a contactelor. Vectorii sînt notați cu perechile de evoluții pe baza cărora s-au dedus orientările lor. După cum se vede, condițiile deduse nu afectează toate contactele butonului de comandă și anume contactele din ramurile *8*, *7*, *11*, *12*, *14*, *15* ale circuitelor se pot închide și deschide în mod arbitrar. Rezultă de aici că pentru ramurile *7* și *8* se poate utiliza un același contact a^1, iar pentru ramurile *11*, *12*, *15* tot un același contact a^1.

Două configurații efective ale contactelor sînt arătate pe figurile 19 b) și d). În cazul figurii 19 c) ramurile *2*, *5*, *10* ale circuitelor pot fi eliminate.

În cazul figurii 19 b) poate fi eliminată ramura *9*. Contactele care pot schimba de stare la orice moment nu sînt reprezentate pe figurile 19 b) și c).

6. ÎNCHEIERE

Procedeele de asigurare a funcționării corecte expuse în lucrarea de față au avantajul că pentru aplicarea lor se utilizează aparatul matematic simplu al algebrei booleene. Recunoașterea locului unde trebuie introduse contactele speciale se face ușor urmărind graful automatului și circuitele lui construite în presupunerea funcționării ideale. În cazul cînd se acceptă realizarea pentru scurtă durată a unor alte stări interne ale automatului decît cele care trebuie să urmeze după o comandă dată, analiza funcționării necorecte se poate încheia în momentul cînd s-a ajuns la unul din șirurile de arce de forma din figurile 1 c) și d). În caz contrar trebuie analizate și aceste din urmă șiruri.

În ceea ce privește releele suplimentare, modul în care ele intervin se poate urmări de asemenea pe graful automatului. Releele auxiliare se introduc în conformitate cu figura 13 a).

Primită la redacție la 3 martie 1966

Institutul de petrol,
gaze și geologie București

BIBLIOGRAFIE

1. S. A. Caldwell, *Switching circuits and logical design.* John Willey and Son New York, 1958.
2. Mariana Coroi-Nedelcu, *Nesimultaneități în funcționarea în mai mulți timpi a schemelor fără contacte.* St. cerc. mat., **17**, *5* (1965).
3. Leon Livovschi, *Asigurarea funcționării corecte a automatelor cu relee prin asignări speciale.* St. cerc. mat., **18**, *2* (1966).
4. Л. Львовский, *Использование графов в задачах синтеза конечных автоматов.* Авт. и Телем., **XXVI**, *5* (1965).
5. Gr. C. Moisil, *Funcționarea reală a schemelor cu contacte și relee.* vol. I, Ed. Academiei R.P.R., București, 1965.
6. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Ed. tehnică, București, 1959.
7. P. Naslin, *Microanalysis of sequential sqitching circuits. Propagation and changeoveor hazards.* Process Control and Automat., **8**, *12* (1961).

ASUPRA TEORIEI CODURILOR GRUPALE ŞI APLICAŢIILE LOR LA SINTEZA MULTIPOLILOR CU CONTACTE ŞI RELEE

DE

ION MUNTEAN

În această lucrare se aprofundează studiul legăturii între codurile grupale şi funcţiile booleene pusă în evidenţă în [3], şi se dă un algoritm pentru transformarea codurilor generate de funcţiile booleene în coduri grupale.

Rezultatele obţinute se folosesc la sinteza multipolilor cu contacte şi relee.

I

1.1. Fie K un cod grupal cu matricea de cod

$$K = (\alpha_{ij}) \quad \begin{array}{l} i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, 2^m - 1 \\ j = 1,\ 2, \ldots, l \end{array}$$

în care notăm cu α_i liniile şi cu β_j coloanele.

Liniile codului K pot fi ordonate astfel încît

$$\alpha_{2^s+t} = \alpha_{2^s} \oplus \alpha_t \tag{1}$$

pentru orice $0 \leqslant s \leqslant m-1$, $0 \leqslant t < 2^s$, unde „$\oplus$" este suma modulo 2 a l-punctelor formate de liniile codului K;

$$\alpha_i \oplus \alpha_k = \alpha_t \Rightarrow \alpha_{i,j} + \alpha_{k,j} = \alpha_{t,j} \pmod 2 \quad \begin{array}{l} i, k = 0, 1, 2, \ldots, 2^m - 1, \\ j = 1,\ 2, \ldots, l \end{array} \tag{2}$$

Liniile codului K pot fi scrise sub una din formele:

$$\alpha_i = (\alpha_{i1},\ \alpha_{i2}, \ldots,\ \alpha_{il}) \tag{3}$$

$$\alpha_i = \prod_{j=1}^{l} \beta_j^{\alpha_{ij}}, \text{ unde } \beta_j^{\alpha_{ij}} = \begin{cases} \theta \text{ dacă } \alpha_{ij} = 0 \\ \beta_j \text{ dacă } \alpha_{ij} = 1. \end{cases} \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18. NR. 9, P. 1247–1257, BUCUREŞTI, 1966

Prin θ am notat elementul nul, cu proprietatea $\theta\beta = \beta\theta = \beta$.

1.2. Pentru forma (4) de scriere a liniilor α_i vom introduce operația

$$\alpha_i \oplus \alpha_k = \prod_{j=1}^{l} \beta_j^{\alpha_{ij}\oplus\alpha_{kj}} \tag{5}$$

Dacă β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, sînt variabile booleene, atunci (4) este un produs de variabile booleene, și ținînd seama de faptul că între (3) și (4) se poate stabili o corespondență biunivocă, care păstrează operația (5), se obține rezultatul:

Lema 1. *Mulțimea A_l a produselor de l variabile booleene, poate fi organizată ca grup, cu operația „$\oplus$”, izomorf cu grupul B_l generat de l-punctele*

$$\alpha_{2^{i-1}} = (\alpha_{2^{i-1}.1}, \alpha_{2^{i-1}.2}, \ldots, \alpha_{2^{i-1}.l}) \tag{6}$$

$$\alpha_{2^{i-1}.k} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i \neq k \\ 1 \text{ dacă } i = k \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, l$$

Demonstrație. Avînd în vedere (3) și (4), fiecărui l-punct îi putem pune în corespondență, biunivoc, un produs de variabile booleene. Apoi, ținînd seama de (5) și de faptul că l-punctele (6) generează un grup B_l, se obține lema 1.

Observație. Grupul A_l este un spațiu l-dimensional peste corpul $z/2$, format din 0 și 1, în care înmulțirea cu scalari este dată de relația:

$$\lambda\alpha_i = \prod_{j=1}^{l} \beta_j^{\lambda\alpha_{ij}} \tag{7}$$

ceea ce rezultă din faptul că B_l este însuși spațiu vectorial peste corpul $z/2$.

1.3. Definiția 1. Elementele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ se zice că sînt liniar independente dacă egalitatea:

$$\lambda_1 \alpha_1 \oplus \lambda_2 \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_k \alpha_k = \mathop{\Xi}_{i=1}^{K} \lambda_i \alpha_i = \theta, \tag{8}$$

unde

$$\lambda_i \alpha_i = \begin{cases} \alpha_i \text{ pentru } \lambda_i = 1 \\ \theta \text{ pentru } \lambda_i = 0 \end{cases}$$

are loc numai dacă toți $\lambda_i = 0$, și sînt liniar dependente în caz contrar.

Avînd în vedere lema 1, calculele se pot face fie în spațiul A_l, fie în spațiul B_l.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ un sistem maximal de implicanți primi liniar independenți ai unei funcții booleene F și să construim un cod grupal K, generat de acest sistem de implicanți primi.

Definiția 2. Numim cod K generat de o funcție booleană F, codul generat de mulțimea implicanților primi ai funcției F.

Evident, pentru construcția codului generat de funcția booleană F este suficient un sistem maximal de implicanți primi ai lui F.

1.4. Fie funcţia booleană F_p, obţinută din F prin înmulţire cu variabila booleană p

$$F_p = \bigcup_{i=1}^{r} \alpha_i p \tag{9}$$

şi să construim codul K_p, generat de funcţia F_p.

DEFINIŢIA 3. Spunem că funcţiei F i se asociază un cod grupal K_p dacă toate liniile codului K_p care conţin 1 în coloana p sînt sau implicanţi primi ai funcţiei F_p sau se absorb în astfel de implicanţi primi.

Observaţie. Dacă D_F este un dipol fără repetiţie a cărui funcţie de lucru este F şi dacă între poli conectăm variabila p, atunci α_{ip} sînt cicluri simple ale acestui dipol.

În [3] am arătat că funcţiilor de lucru ale dipolilor fără repetiţie, scrise ca reuniune a tuturor implicanţilor lor primi, le corespund coduri grupale şi că mulţimea liniilor codului K_p corespunde mulţimii ciclurilor simple ale multipolului obţinut din dipolul D_F prin conectarea între poli a laturii p. De asemenea am arătat exemple de funcţii care se realizează prin scheme cu repetiţie cărora le corespund coduri grupale.

Presupunem că funcţiei booleene F i se asociază un cod grupal K_p şi să notăm cu K_p^* codul generat de funcţia F^*, duala lui F, unde $F^* = \overline{F(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_l)}$.

LEMA 2. *Dacă funcţiei booleene F i se asociază un cod grupal K_p şi dacă β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$ sînt coloanele codului K_p iar $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{kl})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ sînt liniile codului K_p^*, atunci avem relaţiile:*

$$\mathop{\Xi}_{j=1}^{l} \gamma_{kj} \beta_j = \theta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1 \tag{10}$$

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm egalitatea (10) pentru o bază a codului K_p^*.

Presupunem că există un produs

$$\prod_{k=1}^{s} \beta_{j_k}^{\alpha_{i \cdot j_k}} = \beta_{j_1} \beta_{j_2} \ldots \beta_{j_s}, \qquad s \leqslant l \tag{11}$$

astfel încît

$$\mathop{\Xi}_{k=1}^{s} \beta_{j_k} = \theta \tag{12}$$

şi că există un indice, fie de exemplu s, astfel încît $\beta_{j_s} = p$.

Dar atunci produsul

$$\prod_{k=1}^{s-1} \beta_{j_k}^{\alpha_{i \cdot j_k}} = \beta_{j_1} \beta_{j_2} \ldots \beta_{j_{s-1}} \tag{13}$$

este un implicant al lui F^*. Într-adevăr, codul K_p fiind codul grupal asociat lui F, coloana p are 1 în toate liniile care sînt implicanţi ai lui F şi 0 în restul de linii. Ţinînd seama de acest lucru şi de relaţia (12), rezultă că fiecare linie α_i care este implicant a lui F conţine 1 într-una măcar dintre coloanele $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{s-1}}$. Adică fiecare implicant al lui F conţine cel puțin una dintre variabilele $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{s-1}}$ și deci se obțin implicațiile :

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\beta_{j_1} = \beta_{j_2} = \ldots = \beta_{j_{s-1}} = 0, \ F = 0 \\ &\beta_{j_1} = \beta_{j_2} = \ldots = \beta_{j_{s-1}} = 1, \ F^* = 1 \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că (13) este implicant al lui F^* și că există relația (10).

Invers, fie γ un implicant prim al funcției F^*. Să arătăm că verifică relația (12) respectiv (10).

În caz contrar există cel puțin o linie a codului K_p, fie α_i, care are 1 în coloana p și conține un număr par de 1 în coloanele $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \ldots, \beta_{j_{s-1}}$. Fie $\beta'_{j_1}, \beta'_{j_2}, \ldots, \beta'_{j_{2r}}$ coloanele respective în care linia α_i are 1. Deoarece γ este un implicant prim al lui F^*, înlăturarea oricăreia dintre variabilele β_j din (13) conduce la anularea implicației (14), ceea ce arată că în codul K_p există, pentru fiecare β_j din γ, o linie α_i, care conține 1 în coloana p și care are 0 în toate coloanele din γ diferite de β_j și 1 în coloana β_j. Fie $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_{2r}}$ liniile care conțin 1 în coloanele $\beta'_{j_1}, \beta'_{j_2}, \ldots, \beta'_{j_{2r}}$ și 0 în restul de coloane ale lui γ.

Atunci

$$\alpha_{i_1} \oplus \alpha_{i_2} \oplus \ldots \oplus \alpha_{i_{2r}} \oplus \alpha_i$$

nu conține 1 în nici una dintre coloanele cuprinse în γ deși are 1 în coloana p și este un implicant prim al lui F sau se include într-un astfel de implicant prim, ceea ce contrazice implicațiile (14). Deci γ verifică relația (12) respectiv (10).

Întrucît γ a fost ales arbitrar, rezultă că orice implicant prim al lui F^* verifică relația (10). Apoi, deoarece orice linie a codului K_p^* este o combinație liniară de implicanți primi ai lui F^*, se obține relația (10), ceea ce demonstrează lema.

1.5. Ținînd seama de lema 2 și de definiția 3 se obține :

TEOREMA 1. *Dacă unei funcții booleene F i se asociază un cod grupal K_p, atunci funcției duale F^* i se asociază de asemenea un cod grupal K_p^*.*

Demonstrație. Din lema 2 rezultă că orice linie a codului K_p^* verifică relația (10) și deoarece s-a arătat că orice produs care verifică relația (10) și conține variabila p este un implicant al lui F^*, rezultă că orice linie a codului K_p^* ,care conține 1 în coloana p, este un implicant prim al lui F^* sau se include într-un astfel de implicant prim, ceea ce, avînd în vedere definiția 3, demonstrează teorema.

Inversînd rolurile funcțiilor F și F^* se obține următoarea lemă duală lemei 2.

LEMA 3. *Dacă funcției booleene F^* i se asociază un cod grupal K_p^* și dacă β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, sînt coloanele codului K_p^* iar $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{il})$ $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m-1$, sînt liniile codului K_p generat de F, atunci există relațiile*

$$(15)\qquad \mathop{\Xi}_{j=1}^{l} \alpha_{ij}\, \beta_j = \theta, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m-1$$

Or, întrucît dacă uneia măcar dintre funcțiile F sau F^* i se asociază un cod grupal, atunci și celeilalte i se asociază un cod grupal, rezultă că relațiile (10) și (15) au loc în același timp.

1.6. Definiție. Numim coduri duale, codurile grupale K_p și K_p^* asociate funcțiilor booleene duale F și F^*.

Lema 4. *Dacă K_p și K_p^* sînt coduri duale, între liniile acestora există relațiile*

$$\underset{j=1}{\overset{l}{\Xi}} \alpha_{ij}\gamma_{kj} = \theta \qquad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n-1 \end{array} \tag{16}$$

Demonstrație. Relațiile (16) se obțin imediat din (10) sau (15). Într-adevăr, relațiile (10) și (15) sînt relații vectoriale, iar (16) reprezintă tocmai componentele vectorilor respectivi.

1.7. Teorema 2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un cod grupal K să admită un cod dual K^* este dată de condiția ca ecuațiile (15) să aibă soluție, unde $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{il})$ sînt liniile codului K iar $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sînt variabile booleene asociate coloanelor codului K. Găsirea liniilor codului K^* se reduce la rezolvarea unui sistem de $m-1$ ecuații cu l necunoscute.*

Demonstrație. Condiția este necesară, după cum rezultă din lema 3 și din definiția codurilor duale.

Să demonstrăm suficiența condiției. Presupunem că ecuațiile (15) admit soluție și fie $(\beta_1^k, \beta_2^k, \ldots, \beta_l^k)$ una dintre soluții pe care s-o notăm $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{kl})$, unde $\gamma_{kl} = 1$ dacă $\beta_j^k = 1$ și $\gamma_{kj} = 0$ dacă $\beta_j^k = 0$. Apoi înlocuind γ_k în (15), obținem (16) și deci dacă γ_k și γ_r sînt două soluții ale lui (15), avem și

$$\gamma_k \oplus \gamma_r = \underset{j=1}{\overset{l}{\Xi}} \alpha_{ij}(\gamma_{kj} \oplus \gamma_{rj}) = \theta, \tag{17}$$

adică $\gamma_k \oplus \gamma_r$ este de asemenea o soluție, ceea ce demonstrează prima parte a teoremei.

Partea a doua a teoremei rezultă din faptul că codul K este grupal și că este generat de $m-1$ dintre liniile sale.

Sîntem acum în măsură să dăm definiția codurilor duale independente de funcțiile booleene care le generează.

1.8. Definiția 5. Spunem că două coduri grupale sînt duale dacă între liniile lor există relațiile (16).

Fie K un cod grupal și $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ variabile booleene asociate coloanelor lui K. Să notăm cu F_β funcția booleană obținută ca sumă a produselor de forma (4) corespunzătoare liniilor codului K în care în coloana β se află 1, după ce s-a înlăturat β din aceste produse. Funcția F_β poate fi interpretată ca funcția de lucru a unui dipol D_β, variabila β jucînd rolul variabilei p din aliniatele precedente.

Dacă scriem liniile codului K sub forma (4), atunci suma liniilor lui K se poate scrie sub forma

$$F = \sum_{j=1}^{l} \beta_j F_{\beta_j} \tag{18}$$

unde F_{β_j} este, pentru fiecare j, funcția de lucru a unui dipol D_{β_j} ai cărui poli sînt nodurile la care este conectat β_j.

DEFINIȚIA 6. Dacă F_{β_j}, $j = 1, 2, \ldots, l$, sînt funcțiile de lucru ale l subdipoli ai unui multipol dat, atunci funcția F definită de relația (18) o vom numi funcția de lucru a multipolului respectiv.

Observație. Implicațiile $F=1$ și $F=0$, în cazul multipolilor, nu mai are semnificația din cazul dipolilor, întrucît nu mai au sens noțiunile „multipolul conduce" sau „multipolul nu conduce". Astfel, implicația $F = 1$ arată că cel puțin un subdipol al multipolului conduce, iar $F = 0$ arată că nici măcar un subdipol al multipolului nu conduce.

De asemenea, operația de dualitate în cazul multipolilor se face deosebit de cazul dipolilor.

DEFINIȚIA 7. Dacă F este funcția de lucru a unui multipol căruia i se asociază un cod grupal K, atunci duala F^* a lui F este dată de suma liniilor codului K^*, dualul lui K.

TEOREMA 3. *Dacă funcția de lucru F a unui multipol căruia i se asociază un cod grupal este dată de relația* (*18*), *atunci F^*, duala lui F, este dată de relația* :

$$F^* = \sum_{j=1}^{l} \beta_j F^*_{\beta_j} \tag{19}$$

Demonstrație. Fie F_{β_j} funcția de lucru a dipolului D_{β_j} și K_{β_j} codul grupal asociat lui F_{β_j}. Codul grupal K_{β_j} este inclus în K sau este egal cu acesta. Dar atunci, avînd în vedere teorema 1, codul $K^*_{\beta_j}$, dualul lui K_{β_j}, este grupal și este generat de β_j, $F^*_{\beta_j}$ și deci este inclus în codul K^*.

Apoi, deoarece β_j, $j = 1, 2, \ldots, l$, parcurge întreaga mulțime de variabile a lui F, codurile K_{β_j} vor conține toate liniile codului K și deci codurile $K^*_{\beta_j}$ vor conține toate liniile codului K^*, adică funcția F^* dată de relația (19) generează codul K^*, ceea ce demonstrează teorema.

II

2.1. În capitolul precedent ne-am ocupat de problema asocierii de coduri grupale funcțiilor de lucru a multipolilor.

Se poate verifica cu ușurință că nu orice funcție de lucru admite un cod grupal.

În acest capitol vom da un algoritm pentru transformarea codurilor generate de funcțiile de lucru în coduri grupale.

2.2. Fie V_l spațiul vectorial l-dimensional peste corpul $z/2$ generat de vectorii $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{l-1}$.

Punînd în corespondență biunivocă vectorului 2^k, l-punctul $(0, 0, \ldots, \underbrace{0, 1,}_{k+1} 0, \ldots, 0)$ din corpul B_l, care are toate coordonatele nule în afară de cea de ordin $k + 1$, se stabilește un izomorfism între spațiul V_l și B_l. Apoi, ținînd seama de teorema 1, izomorfismul se extinde la spațiul A_l al produselor de l variabile booleene.

Fie α_{2^i}, $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, linii ale unui cod K astfel încît cele m linii să constituie o bază care generează pe K.

DEFINIŢIA 8. Numim rang al coloanei β_j în codul grupal K generat de liniile α_{2^i}, numărul dat de expresia :

$$\nu_j = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_{2^i,j}\, 2^{m-i-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l \tag{21}$$

Similar vom introduce, pentru codurile duale K^*, rangurile :

$$\mu_j = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{2^k,j}\, 2^{n-k-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, l \tag{22}$$

Introducînd în relaţiile (10) şi (15) rangurile ν_j respectiv μ_j, în locul variabilelor β_j, şi ţinînd seama de (16), obţinem relaţiile :

$$\mathop{\Xi}_{j=1}^{l} \gamma_{kj}\, \nu_j = \theta, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n-1 \tag{23}$$

$$\mathop{\Xi}_{j=1}^{l} \alpha_{ij}\, \mu_j = \theta, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 2^m-1. \tag{24}$$

Observaţie. Rangurile ν_j şi μ_j puteau fi aflate prin însumare la întreaga mulţime de linii ale codurilor K şi K^*, nu numai la cîte o bază a acestor coduri, dar în acest caz s-ar fi obţinut ranguri prea mari. În orice caz, relaţiile (23) şi (24) ar fi existat şi în acest caz.

Din teorema 2 şi din corespondenţa între relaţiile (10) şi (15) cu (23) respectiv (24) se obţine :

TEOREMA 4. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca două coduri K şi K^* pentru care se definesc rangurile coloanelor conform lui* (*21*) *şi* (*22*) *să fie duale este dată de îndeplinirea uneia oricare dintre relaţiile* (*23*) *şi* (*24*).

2.3. Sîntem în măsură acum să dăm un algoritm pentru transformarea codurilor generate de funcţiile de lucru în coduri grupale, astfel :

1. Se scriu F şi F^* ca reuniuni a tuturor implicanţilor lor primi şi apoi se calculează rangurile ν_j şi μ_j ale variabilelor, dînd în mod arbitrar implicanţilor primi ai lui F şi F^* ponderile $1, 2, 2^2, \ldots, 2^k, \ldots$ şi aplicînd relaţiile (21) şi (22).

Observaţie. Variabilele x şi $\overline{x}$ se consideră diferite şi li se asociază coloane diferite în codurile grupale asociate.

2. Se calculează expresiile :

$$\mathop{\Xi}_{j=1}^{l} \gamma_{kj}\, \nu_j = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2^n-1 \tag{25}$$

$$\mathop{\Xi}_{j=1}^{l} \alpha_{ij}\, \mu_j = q_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^m-1. \tag{26}$$

Dacă funcţiile F şi F^* li se asociază coduri grupale, atunci $p_k = \theta$, $q_i = \theta$, oricare ar fi k şi i. Dacă măcar un $p_k \neq 0$ şi un $q_i \neq 0$, atunci se introduc variabile suplimentare în modul următor :

Presupunem că am calculat (26). Se consideră toţi $q_i \neq 0$ şi aceştia se renumerotează primind indici de forma $l+1$, $l+2, \ldots l+s$, astfel încît toţi q_i egali între ei să primească acelaşi indice. Fie q_{l+1}, $q_{l+2}, \ldots,$

$\ldots, q_{l+s}$ diferiți între ei. Se asociază lui q_{l+r} o variabilă y_r care va apare în toți implicanții funcției F pentru care $q_i = q_{l+r}$. Apoi dacă

$$q_{l+r} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{2k,\, l+r}\, 2^{n-k-1},$$

y_r va apare în toți implicanții funcției F^* pentru care $\gamma_{2k,\, l+r} = 1$.

Dacă F și F^* depind de variabilele $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ prin adăugarea variabilelor $y_1, y_2, \ldots, y_s$ în modul arătat mai sus, aceste funcții se vor transforma în niște funcții Φ și Φ^* care depind de $l + s$ variabile :

$$\Phi\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l;\ y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

$$\Phi^*\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l;\ y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

pe care le vom numi funcțiile extinse ale lui F respectiv F^*.

Funcția Φ conține reuniunea implicanților primi ai lui F completați cu $y_1, y_2, \ldots, y_s$ ca mai sus, la care se adaugă combinațiile liniare ale acestor implicanți ; analog se obține Φ^* din F^*.

Pentru anume valori particulare ale necunoscutelor $y_1, y_2, \ldots, y_s$ în funcție de necunoscutele $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ unele dintre aceste valori putînd fi constantele 0 și 1, funcțiile Φ și Φ^* se reduc la F respectiv F^*.

Teorema 5. *Necunoscutele* $y_1, y_2, \ldots, y_s$ *se determină în funcție de necunoscutele* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ *rezolvînd ecuațiile* :

$$\Phi\overline{F} + \overline{\Phi}F = 0 \tag{27}$$

$$\Phi^*\overline{F}^* + \overline{\Phi}^* F^* = 0 \tag{28}$$

unde prin „—„ am notat operația de negație a funcțiilor $\overline{F} = \overline{F(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)}$.

Demonstrație. Egalitățile

$$\Phi = F, \tag{29}$$

$$\Phi^* = F^*, \tag{30}$$

ținînd seama de cele arătate în [1], Cap. X, § 9, sînt echivalente cu (27) respectiv (28).

Observație. Ecuațiile (27) și (28) sînt de aceeași formă și anume dacă notăm cu $\varphi\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ partea stîngă a ecuației (27) și cu $\psi\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l; y_1, y_2, \ldots, y_s)$ partea stîngă a ecuației (28), între φ și ψ există relația

$$\varphi\,(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l;\ y_1, y_2, \ldots, y_s) = \psi\,(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_l;\ \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_s) \tag{31}$$

și deci orice soluție a ecuației (28) se obține dintr-o soluție a ecuației (27) în care schimbăm variabilele β_j și y_r prin $\overline{\beta}_j$ respectiv $\overline{y}_r$.

Evident, pentru aflarea necunoscutelor $y_1, y_2, \ldots, y_s$ este suficient să rezolvăm una oricare dintre ecuațiile (27) sau (28). În scopul introducerii unui număr minim de variabile suplimentare, vom înlătura din funcțiile extinse toate variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_s$ egale cu constante, egalîndu-le cu 0 respectiv cu 1, după caz.

Observație. Problema rezolvării ecuațiilor (27) și (28) se va trata într-o lucrare viitoare.

2.4. Fie Φ funcţia extinsă a funcţiei F, după înlăturarea variabilelor suplimentare egale cu constante. Pornind de la această funcţie se va construi un multipol M_{Φ}, folosind algoritmul dat în [3], pe care-l vom descrie, aici, pe scurt :

1. Se alege un implicant prim α_i, de lungime minimă, pe care să-l notăm α_1 şi se ataşază fiecărei variabile din α_1 rangul 1.

Convenim să scriem nodurile multipolilor sub forma :

$$\frac{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)}{(\beta_{\mu_1}, \beta_{\mu_2}, \ldots, \beta_{\mu_r})} \tag{32}$$

unde la numitor sînt scrise în ordine arbitrară variabilele conectate la nodul respectiv, iar la numărător rangurile respective.

Atunci lui α_1 i se asociază un multipol în care în fiecare nod apar două variabile, rangul fiecăreia fiind 1, deci un ciclu.

2. Dacă notăm cu S_k multipolul obţinut în pasul k al procesului de iteraţie, implicantul prim α_{2k-1}, folosit în acest pas, va trebui să îndeplinească următoarele condiţii :

i) Fiecare nod conţine cel mult două variabile din α_{2k-1} şi în general din oricare implicant prim al lui Φ.

ii) Fiecare variabilă din α_{2k-1} apare în două şi numai în două noduri ale lui S_k.

Nodurile multipolului S_{k-1} le împărţim în 3 clase, C_1, C_2, C_3, referitoare la α_{2k-1}, astfel : în clasa C_1 includem nodurile din S_{k-1}, care nu conţin nici o variabilă din α_{2k-1}, în clasa C_2 includem nodurile lui S_{k-1} care conţin două variabile din α_{2k-1} şi în clasa C_3 nodurile care conţin o singură variabilă din α_{2k-1}.

Dacă μ^{k-1} este rangul variabilei β_{μ} în multipolul S_{k-1}, calculăm rangul μ^k al variabilei β_{μ} în multipolul S_k, folosind, relaţia [3] :

$$\mu^k = 2\mu^{k-1} + \alpha_{2k-1,\,\mu}. \tag{33}$$

Evident, în fiecare pas al iteraţiei trebuie să fie indeplinită relaţia (24). Se verifică uşor că în clasele C_1 şi C_2 această relaţie se păstrează după transformarea (33) a rangurilor, deoarece în clasa C_1 rangurile se dublează, iar în clasa C_2 rangurile se dublează şi apoi la un număr par dintre acestea se adaugă 1. În nodurile din clasa C_3, după dublarea rangurilor, se adaugă 1 la unul singur dintre ranguri. Pentru restabilirea relaţiei (24) în nodurile din clasa C_3, în pasul k al iteraţiei, se adaugă cîte o variabilă nouă din α_{2k-1}, cu ponderea 1.

Se poate demonstra uşor că variabilele care au ranguri egale sînt conectate, fiecare în parte, la cel puţin un nod binar, înţelegînd prin noduri binare, nodurile care conţin numai două variabile.

3. Dacă într-un pas oarecare k al iteraţiei apare 1 în mai multe noduri decît de două ori, numărul variabilelor noi cuprinse în α_{2k-1}, prin permutări corespunzătoare ale variabilelor care apar în noduri binare, se poate înlătura acest inconvenient. Dacă acest lucru nu se întîmplă, funcţia Φ se realizează prin scheme cu repetiţie.

Se caută variabilele care se repetă, printre variabilele lui α_{2k-1}, care apar de două ori în nodurile ce conţin 1, sau se adaugă variabile noi în α_{2k-1}.

Înlocuind apoi în α_{2k-1} variabilele care se repetă cu litere noi, se reduce numărul de noduri în care apare 1 la numărul dorit.

Procesul încetează cînd fiecare variabilă apare în cel puțin un S_k și cînd adăugarea de noi implicanți ai lui Φ nu mai conduce la apariția lui 1. Acest lucru se întîmplă în urma folosirii unui sistem maximal de implicanți primi liniar independenți ai lui Φ.

În multipolul S_k obținut în ultimul pas al iterației se înlocuiesc variabilele suplimentare cu variabilele inițiale corespunzătoare, sau se înlocuiesc unele variabile cu constante, dacă e cazul, și se obține multipolul M_Φ căutat, în general nu în mod unic.

Exemplu :

$$F = ac + bd + axd$$

$$F^* = ab + cd + ad + bxc.$$

Asociem implicanților primi ai lui F^* ponderi : $pab \Leftrightarrow 1$, $pcd \Leftrightarrow 2$, $pad \Leftrightarrow 4$, $pbxc \Leftrightarrow 8$ și calculăm rangurile variabilelor : $\mu_a = 5$, $\mu_b = 9$, $\mu_c = 10$, $\mu_d = 6$, $\mu_x = 8$, $\mu_p = 15$.

Înlocuind rangurile găsite în relațiile (24), obținem succesiv :

$$acp \Rightarrow \mu_a \oplus \mu_c \oplus \mu_p = 5 \oplus 10 \oplus 15 = \Phi$$

$$bpd \Rightarrow \mu_b \oplus \mu_d \oplus \mu_p = 9 \oplus 6 \oplus 15 = \theta$$

$$axdp \Rightarrow \mu_a \oplus \mu_x \oplus \mu_d \oplus_p \mu = 5 \oplus 8 \oplus 6 \oplus 15 = 4 = \alpha$$

și funcția extinsă a lui F va fi :

$$\Phi = ac + b\bar{a} + ax\alpha d + bx\alpha c.$$

Apoi din egalitatea

$$\Phi = F \text{ sau } \overline{\Phi}F + \Phi\overline{F} = 0$$

ținînd seama că :

$$\overline{\Phi} = \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d}\bar{x} + \bar{a}\bar{d}\bar{\alpha} + \bar{b}\bar{c}\bar{a} + \bar{b}\bar{c}\bar{\alpha}$$

și

$$F = \bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{x}\bar{c}$$

se obține mai departe :

$$(\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d}\bar{x} + \bar{a}\bar{d}\bar{\alpha} + \bar{b}\bar{c}\bar{x} + \bar{b}\bar{c}\bar{\alpha})\,(ac + bd + axd) +$$

$$+ \,(ac + bd + ax\alpha d + bx\alpha c)\,(\bar{a}\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{x}\bar{c}) =$$

$$= a\bar{b}\bar{c}dx\bar{\alpha} + \bar{a}bc\bar{d}x\alpha = 0$$

sau simplificînd cu x se obține :

$$a\bar{b}\bar{c}d\bar{\alpha} + \bar{a}bc\bar{d}\alpha = 0$$

Deoarece

$$a\overline{b}\overline{c}d \cdot \overline{a}bc\overline{d} = 0,$$

ecuația precedentă are soluție și ne dă pe α de forma :

$$\alpha = \overline{\overline{a}bc\overline{d}} + a\overline{b}\overline{c}d = a + \overline{b} + \overline{c} + d$$

obținîndu-se patru soluții la care corespund schemele din figurile 1—4.

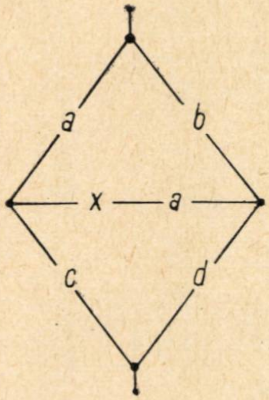


Fig. 1

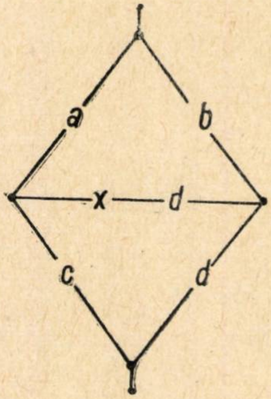


Fig. 2

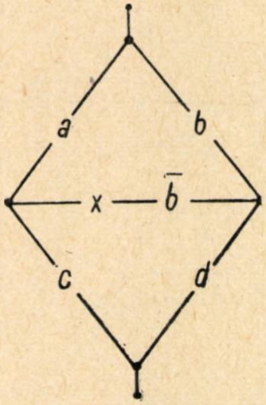


Fig. 3

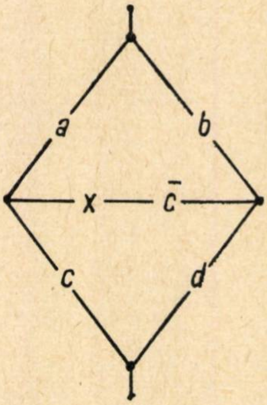


Fig. 4

Primită la redacție la 1 martie 1966

Comitetul de Stat al Planificării

BIBLIOGRAFIE

1. GARRETT BIRKHOFF, *Lattice theory*. New York, 1948.
2. ION MUNTEAN, *Contribuții la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte și relee* (I). St. cerc. mat., **15**, *4* (1964).
3. ION MUNTEAN, *Contribuții la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte și relee* (II). St. cerc. mat., **18**, *1* (1966).

CERCETĂRI ASUPRA SERIILOR TRIGONOMETRICE. V. SUMABILITATEA SERIEI FOURIER ASOCIATĂ UNEI FUNCŢII NEINTEGRABILE

DE

MARCEL N. ROŞCULEŢ

Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime de măsură nulă, astfel ca funcţia $x^{\lambda} f(x)$, $\lambda = 1, 2$, să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Se asociază funcţiei f o serie trigonometrică. Se arată că seria asociată este (c, λ) sumabilă către funcţia f a. p.t. Se stabileşte ordinul de creştere al sumelor parţiale.

1. Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă astfel ca funcţia

$$xf(x),\ x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Dacă punem [2][1])

$$\sin xf(x) \simeq \sin x \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + \right.$$

$$\left. + b_n \sin nx + \ldots\right) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots$$

$$+ \ldots \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots$$

unde

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \cos kx \, \mathrm{d}x,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \sin kx \, \mathrm{d}x, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

---

[1]) pag. 12.

obţinem sistemul infinit de ecuaţii liniare în a_i, b_i,

$$\alpha_0 = b_1,\ 2\alpha_1 = b_2,\ 2\alpha_2 = b_3 - b_1, \ldots, 2\alpha_m = b_{m+1} - b_{m-1}, \ldots$$

$$2\beta_1 = a_0 - a_2,\ 2\beta_2 = a_1 - a_3, \ldots, 2\beta_m = a_{m-1} - a_{m+1}, \ldots$$

cu soluţia

$$a_{2m} = a_0 - 2\,(\beta_1 + \beta_3 + \ldots + \beta_{2m-1}),\ a_{2m+1} = a_1 - 2\,(\beta_2 + \beta_4 + \ldots + \beta_{2m})$$

$$b_{2m} = 2\,(\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2m-1}),\ b_{2m+1} = 2\left(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2m}\right)$$

a_0 şi a_1 rămînînd arbitrare. Coeficienţii a_k, b_k au următoarea formă integrală

$$a_{2m} = a_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(\cos 2mt - 1)\,\mathrm{d}t$$

$$(1.1)\qquad a_{2m+1} = a_1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(\cos\,(2m+1)\,t - \cos t)\,\mathrm{d}t,\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,\mathrm{d}t,\quad m = 0, 1, \ldots$$

Următoarele două sisteme de funcţii

$$\varphi_n(x),\ \psi_n(x),\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

definite pe $[-\pi, \pi]$ de

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &\varphi_{4m+1}(x) = \sin\,(m+1)\,x,\ \varphi_{4m+2}(x) = \sin\,(m+2)\,x,\\ &\varphi_{4m+3}(x) = \cos\,(2m+2)\,x - 1,\ \varphi_{4m+4}(x) = \cos\,(2m+3)\,x - \cos x,\end{aligned}$$

şi

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &\psi_{4m+1}(x) = \sin\,(m+1)\,x,\ \psi_{4m+2}(x) = \sin\,(m+2)\,x\\ &\psi_{4m+3}(x) = \cos\,(2m+2)\,x,\ \psi_{4m+4}(x) = \cos\,(2m+3)\,x,\ m = 0, 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

au proprietăţile

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_r(t)\,\varphi_s(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & r = s,\\ 0, & r \neq s.\end{cases}$$

TEOREMA 1.1. *Sistemul* $\varphi_n(x)$ *de funcţii definit de* (1.2), *ce intervine în formulele* (1.1) *şi sistemul* $\psi_n(x)$ *de funcţii definit de* (1.3) *sînt biortogonale.*

2. Să considerăm acum seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots$$

cu coeficienţii determinaţi de formulele (1.1) şi unde a_0, a_1 sînt parametri arbitrari. Să calculăm sumele

$$\sigma_m(x) = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{m-1}}{m},$$

avem

$$s_{2m}(x) = a_0\left(\frac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \ldots + \cos 2mx\right) +$$

$$+ a_1(\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2m-1)x) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[(\cos 2t - 1)\cos 2x + (\cos 4t - 1)\cos 4x + \ldots$$

$$\ldots + (\cos 2mt - 1)\cos 2mx] f(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[(\cos 3t - \cos t)\cos 3x + (\cos 5t - \cos t)\cos 5x + \ldots$$

$$\ldots + (\cos(2m-1)t - \cos t)\cos(2m-1)x] f(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin x \sin t + \sin 2x \sin 2t + \ldots$$

$$\ldots + \sin 2mx \sin 2mt]\, f(t)dt$$

sau:

$$s_{2m}(x) = a_0\frac{\sin(2m+1)x}{2\sin x} + a_1\frac{\sin 2mx}{2\sin x} + A_{2m}(x)$$

cu $A_{2m}(x)$ dat de

$$A_{2m}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(2m+1)(t-x)}{\sin(t-x)} + \frac{\sin 2m(t-x)}{\sin(t-x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} - \cos t\,\frac{\sin 2mx}{\sin x}\right] f(t)\,dt.$$

În mod analog obținem

$$s_{2m+1}(x) = a_0\frac{\sin(2m+1)x}{2\sin x} + a_1\frac{\sin(2m+2)x}{2\sin x} + A_{2m+1}(x)$$

cu

$$A_{2m+1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(2m+1)(t-x)}{\sin(t-x)} + \frac{\sin(2m+2)(t-x)}{\sin(t-x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} - \cos t\,\frac{\sin(2m+2)x}{\sin x}\right] f(t)\,dt.$$

Să formăm suma

$$\sigma_{2p}(x) = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{2p-1}}{2p};$$

avem

$$(2.1)\qquad 2p\cdot\sigma_{2p}(x)=\frac{a_0}{2\sin x}\,[2\sin x+2\sin 3x+\ldots+2\sin(2p-1)\,x]+$$

$$+\frac{a_1}{2\sin x}\,[2\sin 2x+2\sin 4x+\ldots+2\sin(2p-2)\,x+$$

$$+\sin 2px]+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A^*_{2p}(x,\,t),\ f(t)\,\mathrm{d}t$$

cu $A^*_{2p}\,(x,\,t)$ dat de

$$A^*_{2p}(x,\,t)=\frac{1}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\left[\sin\frac{t-x}{2}+\sin 3\,\frac{t-x}{2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sin\,(4p-3)\,\frac{t-x}{2}+\sin\,(4p-1)\,\frac{t-x}{2}\right]-$$

$$-\frac{1}{\sin x}\,[2\sin x+2\sin 3\,x+\ldots+2\sin\,(2p-1)\,x]-$$

$$-\frac{\cos t}{\sin x}\,[2\sin 2x+2\sin 4x+\ldots+2\sin\,(2p-2)\,x+$$

$$+\sin 2px]=\left(\frac{\sin p\,(t-x)}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right)^2-2\left(\frac{\sin px}{\sin x}\right)^2-$$

$$-\,2\,\cos t\,\cos x\left(\frac{\sin px}{\sin x}\right)^2.$$

Avem și

$$2\sin x+\ldots+2\sin\,(2p-1)\,x=2\,\frac{\sin^2 px}{\sin x}$$

$$2\sin 2x+2\sin 4x+\ldots+2\sin\,(2p-2)\,x+$$

$$+\sin\,2px=2\,\frac{\cos\,x\sin^2 px}{\sin x}.$$

Să arătăm că

$$\lim_{p\to\infty}\ \sigma_{2p}\,(x)=f\,(x),$$

unde $x\neq 0$, $x\in(-\pi,\,\pi)$, este un punct de continuitate al lui f, iar $t^{\alpha}\,f\,(t)$, $\alpha<2$, este mărginită în vecinătatea originii. Deoarece

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{\sin^2 px}{\sin x}=0\,;\quad\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\cos\,x\,\frac{\sin^2 px}{\sin x}=0,$$

din (2.1) deducem că trebuie să arătăm numai

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{4\pi p} \int_{-\pi}^{\pi} A_p^*(x,\, t) f(t)\, \mathrm{d}t = f(x).$$

Pentru $\delta > 0$ şi ales astfel încît $x - \delta \neq 0$, $x + \delta \neq 0$, $x - \delta > -\pi$, $x + \delta < \pi$, putem scrie

$$\sigma_{2p}(x) = \frac{1}{4\pi p}\left[\int_{-\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\pi} + \int_{x-\delta}^{x+\delta}\right], \tag{2.2}$$

însă funcţia

$$\left[\left(\frac{\sin p(t-x)}{\sin\dfrac{t-x}{2}}\right)^2 - (2 + \cos t\, \cos x)\left(\frac{\sin px}{\sin x}\right)^2\right] f(t) = \varphi(x,\, t) f\,(t)$$

este integrabilă pe $[-\pi,\, \pi]$, iar în vecinătatea punctului $t = 0$ putem scrie

$$\varphi(x,\, t) = \sin pt \frac{2\cos px}{\sin^2\dfrac{t-x}{2}} + \frac{\sin^2 pt \cos px}{\sin^2\dfrac{t-x}{2}} +$$

$$+ \frac{\sin^2 x \sin^2 px \cos^2 pt - (2 + \cos t \cos x) \sin^2 px \sin^2\dfrac{t-x}{2}}{\sin^2 x \sin^2\dfrac{t-x}{2}} =$$

$$= \varphi_1(x,\, t) + \varphi_2(x,\, t) + \varphi_3(x,\, t)$$

Să presupunem acum că $x + \delta < 0$; în această situaţie integrala $\int_{-\pi}^{x-\delta}$ este mărginită, deoarece integrantul este mărginit în $[-\pi,\, x-\delta]$ pentru orice p. Integrala

$$\int_{x+\delta}^{\pi} \varphi(t) f(t)\, \mathrm{d}t \tag{2.3}$$

admite o majorantă de forma $M\, p^{\alpha-1}$; în adevăr, se poate scrie ca o sumă de integrale de forma

$$\int_0^{\gamma} \sin pt \frac{f(t)}{\sin^2\dfrac{t-x}{2}}\, \mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\gamma} \sin^2 pt \frac{f(t)}{\sin^2\dfrac{t-x}{2}}\, \mathrm{d}t \tag{2.4}$$

şi

$$\int_0^{\gamma} t f(t)\, \mathrm{d}t\,. \tag{2.5}$$

Avem succesiv

$$\left|\int_0^{\gamma}\frac{\sin pt}{t^{\alpha}}\,t^{\alpha}\,\frac{f(t)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{\sin pt}{t^{\alpha}}\,t^{\alpha}\,\frac{f(t)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,\mathrm{d}t\right| +$$

$$+\int_{\frac{1}{p}}^{\gamma}\frac{\sin pt}{t^{\alpha}}\,t^{\alpha}\,\frac{f(t)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,\mathrm{d}t\,\Bigg| = I_1 + I_2$$

însă

$$I_1 \leqslant M'\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{\sin pt}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant M'p^{\alpha-1}\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{pt}{(pt)^{\alpha}}\,\mathrm{d}\,(pt) \leqslant M^{*}p^{\alpha-1},$$

$$I_2 \leqslant M''\int_{\frac{1}{p}}^{\gamma}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} = M''\,[t^{1-\alpha}]_{\frac{1}{p}}^{\gamma} \leqslant M^{**}p^{\alpha-1}$$

Am arătat astfel că (2.3) admite o majorantă de forma $Mp^{\alpha-1}$. Integrala

$$\int_{x+\delta}^{\pi}\varphi_1(x, t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

este de acest tip. Integralele

$$\int_{x+\delta}^{\pi}\varphi_2(x, t)\,f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_{x+\delta}^{\pi}\varphi_3(x, t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

sînt de tipul (2.4) şi (2.5). Integrala (2.4) admite o majorantă de aceeaşi formă $Mp^{\alpha-1}$, iar integrala (2.5) este mărginită deoarece $tf(t)$ este integrabilă.

În adevăr, pentru (2.4) putem scrie

$$\left|\int_0^{\gamma}\frac{\sin^2 pt}{t^{\alpha}}\,t^{\alpha}\,\frac{f(t)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{\sin^2 pt}{t^{\alpha}}\,t^{\alpha}\,\frac{f(t)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,\mathrm{d}t\right| +$$

$$+\left|\int_0^{\gamma}\frac{\sin^2 pt}{t^{\alpha}}\,t^{\alpha}\,\frac{f(t)}{\sin^2\frac{t-x}{2}}\,\mathrm{d}t\right| = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$$

însă

$$\mathcal{J}_1 \leqslant M'\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{\sin^2 pt}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant M'\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{p^2t^2}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \leqslant M^{*}p^{\alpha-1},$$

$$\mathcal{J}_2 \leqslant M''\int_{\frac{1}{p}}^{\gamma}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \leqslant M^{**}p^{\alpha-1}.$$

În I_1 şi $\mathcal{I}_1$ am pus $|\sin pt| \leqslant |pt|$, iar în I_2 şi $\mathcal{I}_2$ am folosit inegalitatea $|\sin pt| \leqslant 1$. Din toate afirmaţiile de mai sus rezultă că

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{4\pi p}\left[\int_{-\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\pi}\right] = 0.$$

Ne mai rămîne să arătăm că

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{4\pi p}\int_{x-\delta}^{x+\delta} A_p^*(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t = f(x)$$

pentru orice δ şi x care îndeplinesc condiţiile enunţate. Deoarece f este continuă pe $[x-\delta,\ x+\delta]$, avem şi

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{4\pi p}\int_{x-\delta}^{x+\delta} (2 + \cos t \cos x)\left(\frac{\sin px}{\sin x}\right)^2 f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

încît ne mai rămîne, în definitiv, să demonstrăm că

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{4\pi p}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\frac{\sin p\,(t-x)}{\sin \dfrac{t-x}{2}}\right)^2 f(t)\, \mathrm{d}t = f(x).$$

Fie $\psi(t)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ astfel

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi,\ x-\delta) \cup (x+\delta,\ \pi] \\ f(t), & t \in [x-\delta,\ x+\delta] \end{cases}$$

$\psi(t)$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, continuă în punctul x şi conform unui rezultat cunoscut, sumele $\sigma_p(x, t)$ ale funcţiei ψ sînt convergente pentru $p \to \infty$ către $\psi(x)$, prin urmare

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{4\pi p}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \left(\frac{\sin p\,(t-x)}{\sin \dfrac{t-x}{2}}\right)^2 \psi(t)\, \mathrm{d}t = \psi(x)$$

însă $\psi(t) = f(t)$, $t \in [x-\delta,\ x+\delta]$, deci $\psi(x) = f(x)$. Rezultatele prezentate mai sus sînt adevărate şi dacă x este un punct de discontinuitate de prima speţă, iar valoarea $f(x)$ este dată de

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Acelaşi rezultat se obţine dacă în loc de $\sigma_{2p}(x)$ luăm $\sigma_{2p+1}(x)$. Am demonstrat următoarea:

TEOREMA 2. 1. *Fie $f(x)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulţime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă astfel ca funcţia*

$$xf(x),\quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

a) *Seria Fourier ataşată funcţiei $f(x)$ este de forma*

$$f(x) \sim S_0(x) + \lambda S_1(x) + \mu S_2(x),$$

unde $S_0(x)$ *este seria trigonometrică*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

cu coeficienţii definiţi de

$$a_{2m} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2\,mt - 1)\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_{2m+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos (2\,m + 1)\,t - \cos t\,]\, f(t)\,\mathrm{d}t,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} f(t) \sin mt\ \ \mathrm{d}t, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

$S_1(x)$ *şi* $S_2(x)$ *sînt două serii trigonometrice, independente de* $f(x)$, *anume*

$$S_1(x) = \frac{1}{2} + \cos 2\,x + \cos 4\,x + \ldots + \cos 2\,mx + \ldots$$

$$S_2(x) = \cos x + \cos 3\,x + \ldots . + \cos\ (2\,m + 1)\,x + \ldots$$

λ, μ *fiind două numere arbitrare.*

b) *În orice punct* $x \in (-\pi, \pi) - \{0\}$ *de continuitate al lui* $f(x)$ *seria*

$$S_0(x) + \lambda\, S_1(x) + \mu\, S_2(x), \qquad (\alpha)$$

ataşată funcţiei $f(x)$, *este sumabilă* $(C,\ 1)$ *către valoarea* $f(x)$, *iar în punctele de discontinuitate de prima speţă, seria* (α) *este sumabilă* $(C,\ 1)$ *către valoarea*

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}\ .$$

3. Să considerăm sumele $s_{2m}(x)$ calculate anterior :

$$s_{2m}(x) = a_0\,\frac{\sin (2\,m + 1)\,x}{2 \sin x} + a_1\,\frac{\sin 2\,mx}{2 \sin x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_{2m}(x, t)\, f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

cu

$$A_{2m}(x, t) = \frac{\sin (2\,m + 1)\,(t - x)}{\sin (t - x)} + \frac{\sin 2\,m\,(t - x)}{\sin (t - x)} - \frac{\sin (2\,m + 1)\,x}{\sin x} - \cos t\,\frac{\sin 2\,mx}{\sin x}$$

sau

$$A_{2m}(x, t) = \frac{\sin \left(\dfrac{4\,m + 1}{2}\right)(t - x)}{\sin \dfrac{t - x}{2}} - \frac{\sin (2\,m + 1)\,x}{\sin x} - \cos t\,\frac{\sin 2\,mx}{\sin x}\ .$$

Într-un punct de continuitate $x \neq 0$ al lui $f(x)$ putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\dfrac{4m+1}{2}\right)(t-x)}{\sin\dfrac{t-x}{2}} f(x)\, \mathrm{d}t;$$

să formăm diferența

$$s_{2m}(x) - f(x) = B(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_{2m}(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\dfrac{4m+1}{2}\right)(t-x)}{\sin\dfrac{t-x}{2}} f(x)\, \mathrm{d}x,$$

unde $B(x)$ rezultă din (3.1). Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și $\delta > 0$, astfel încît pentru orice $t \in [x-\delta, x+\delta]$, $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Pentru $m > \dfrac{1}{\delta}$ putem scrie

$$s_{2m}(x) - f(x) = B(x) + \frac{1}{2\pi}[C(x) - D(x)] \tag{3.2}$$

cu $C(x)$ dat de

$$C(x) = \int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} A_{2m}(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t + \int_{x+\frac{1}{m}}^{x+\delta} A_{2m}(x,t) f(t) \mathrm{d}t + \int_{x-\delta}^{x-\frac{1}{m}} A_{2m}(x,t) f(t) \mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{-\pi}^{x-\delta} A_{2m}(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t + \int_{x+\delta}^{\pi} A_{2m}(x, t) f(t)\, \mathrm{d}t = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5;$$

$D(x)$ este dat de o sumă de integrale analoge: $I'_1 + I'_2 + I'_3 + I'_4 + I'_5$. Luăm pe $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încît $[x-\delta, x+\delta] \subset [-\pi, 0)$ sau $(0, \pi]$ după cum $x < 0$ sau $x > 0$. Putem scrie

$$I_1 - I'_1 = \int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} \frac{\sin\dfrac{4m+1}{2}(t-x)}{\sin\dfrac{t-x}{2}} (f(t) - f(x))\, \mathrm{d}t - \tag{3.3}$$

$$-\int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} \frac{\sin(2m+1)x + \cos t \sin 2mx}{\sin x} f(t)\, \mathrm{d}t;$$

să observăm că integrala

$$\left.\int_{x-\frac{1}{m}}^{x+\frac{1}{m}} \frac{\sin \frac{4m+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon \cdot \frac{4m+1}{m}\pi$$

în timp ce cealaltă integrală, în virtutea continuității lui $f(t)$ în intervalul $[x-\delta, x+\delta]$, este mărginită pentru orice m.

În continuare avem

$$I_1 - I_2' = \int_{x+\frac{1}{m}}^{x+\delta} \frac{\sin \frac{4m+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t - \tag{3.4}$$

$$-\int_{x+\frac{1}{m}}^{x+\delta} \frac{\sin(2m+1)\,x + \cos t \sin 2mx}{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t;$$

neegalitatea următoare

$$\left| \int_{x+\frac{1}{m}}^{x+\delta} \frac{\sin \frac{4m+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} (f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon\pi\,(\ln\delta + \ln m)$$

este imediată; ultima integrală din (3.4) este mărginită pentru orice m.

Să presupunem că $x+\delta < 0$; în această situație integrala I_4 este finită pentru orice m; cît privește pe I_5, putem scrie

$$I_5 = \int_{x+\delta}^{\pi} \frac{\sin \frac{4m+1}{2} t \cos \frac{4m+1}{2} x}{\sin \frac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t - \tag{3.5}$$

$$-\int_{x+\delta}^{\pi} \frac{\sin \frac{t}{2} \cos \frac{x}{2} (\sin(2m+1)\,x + \cos t \sin 2mx)}{\sin x \sin \frac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t -$$

$$-\int_{x+\delta}^{\pi} \frac{\sin x \sin \frac{4m+1}{2} x \cos \frac{4m+1}{2} t + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{t}{2} (\sin(2m+1)x + \cos t \sin 2mx)}{\sin x \sin \frac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

prima integrală este de forma (2.3), deci admite majorantă de forma $Mp^{\alpha-1}$; integrala a doua este mărginită; a treia integrală are integrantul mărginit iar în origine este de forma

$$\lambda(x)\, p^2\, t^2 f(t),$$

deci admite o majorantă de aceeași formă $M^* p^{\alpha-1}$.

Toate celelalte integrale care intervin în diferența (3.2) sînt mărginite. Am demonstrat următoarea teoremă

TEOREMA 3.1. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă astfel ca funcția*

$$xf(x),\ x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ iar $x^{\alpha} f(x)$, $\alpha < 2$, să fie mărginită într-o vecinătate a originii.

Într-un punct de continuitate $x \neq 0$ al funcției f, sumele parțiale $s_m(x)$ ale seriei Fourier asociată funcției neintegrabile f (teorema 2.1) *au proprietatea*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{s_m(x)}{\varphi(m)\, m^{\alpha-1}} = 0$$

pentru orice funcție φ astfel încît $\varphi(m) \to \infty$ cînd $m \to \infty$.

Din demonstrație mai rezultă că

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{s_m(x) - f(x)}{m^{\alpha-1}} = F_1(x) + \frac{a_0 + a_1}{2\sin x}$$

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \frac{s_m(x) - f(x)}{m^{\alpha-1}} = F_2(x) - \frac{a_0 + a_1}{2\sin x},$$

punctele F_1 și F_2 fiind definite pentru orice $x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$. Cazul $\alpha = 1$ nu rezultă din teorema 3.1. Demonstrația expusă ne permite însă să enunțăm

TEOREMA 3.2. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă astfel ca funcția $xf(x)$ să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ și mărginită într-o vecinătate a originii. Într-un punct de continuitate $x \neq 0$ al funcției f, sumele parțiale $s_m(x)$ ale seriei Fourier asociată funcției neintegrabile f au proprietatea*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{s_m(x)}{\ln m} = 0.$$

Această teoremă este cunoscută numai pentru funcțiile integrabile L^p, $p \geqslant 1$ [1] 1).

4. Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, astfel ca funcția

$$x^2 f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

---

1) pag. 161.

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$. Să punem [2] [1]

$$(1-\cos x) f(x) \simeq (1-\cos x)\left(\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + a_n \cos n x + b_n \sin n x + \ldots\right) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x + \ldots$$

a_k, b_k fiind nedeterminaţi iar α_k, β_k daţi de:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1-\cos t) \cos kt \, dt$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1-\cos t) \sin kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Obţinem sistemul infinit de ecuaţii liniare în a_i, b_i:

$$a_0 - a_1 = \alpha_0, \quad a_0 - a_2 + 2a_1 = 2\alpha_1, \ldots, \quad 2a_p - a_{p-1} - a_{p+1} = 2\alpha_p, \ldots$$

$$2b_1 - b_2 = 2\beta_1, \quad 2b_2 - b_1 - b_3 = 2\beta_2, \ldots, \quad 2b_p - b_{p-1} - b_{p+1} = 2\beta_p, \ldots$$

cu soluţia

$$a_p = a_0 - 2\left(\alpha_{p-1} + 2\,\alpha_{p-2} + \ldots + (p-1)\,\alpha_1 + \frac{1}{2}\, p\,\alpha_0\right),$$

$$b_p = p b_1 - 2\left(\beta_{p-1} + 2\,\beta_{p-2} + \ldots + (p-1)\,\beta_1\right),$$

unde

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1-\cos t) \cos kt \, dt,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(1-\cos t) \sin kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

a_0 şi b_1 rămînînd arbitrari. Coeficienţii a_κ, b_k au următoarea formă integrală

$$\text{(4.1)} \quad \begin{aligned} a_p &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos pt - 1) f(t) \, dt + a_0 \\ b_p &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin pt - p \sin t) f(t) \, dt + p b_1, \quad p = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Următoarele două sisteme de funcţii

$$\varphi_n(x), \quad \psi_n(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

definite pe $[-\pi, \pi]$ astfel

(4.2) $\varphi_{2m-1}(x) = \sin(m+1)x - (m+1)\sin x, \quad \varphi_{2m}(x) = \cos(m+1)x - 1$

(4.3) $\psi_{2m-1}(x) = \sin(m+1)x, \quad \psi_{2m}(x) = \cos(m+1)x, \qquad m = 1, 2, \ldots$

---

[1] pag. 4

au proprietatea

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_r(t)\,\psi_s(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}1, & r=s,\\ 0, & r\neq s.\end{cases}$$

TEOREMA 4.1. *Sistemele de funcţii* $\varphi_n(x)$ *şi* $\psi_n(x)$, *definite de* (4.2) *şi* (4.3) *respectiv, sînt biortogonale.*

5. Să considerăm acum seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\dots+a_n\cos n x+b_n\sin n x+\dots$$

cu coeficienţii determinaţi de formulele (4.1) şi unde a_0, b_1 sînt parametri arbitrari. Să calculăm sumele

$$\frac{m(m+1)}{2}\sigma_m(x)=ms_0+(m-1)s_1+\dots+s_{m-1}=\tau_0+\tau_1+\dots+\tau_{m-1}$$

cu $\tau_k=s_0+s_1+\dots+s_k$.

Avem

$$s_p=a_0\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{px}{2}\cos(p-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)+$$

$$+\frac{b_1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left(\sin(p-1)x-2(p-1)\cos\frac{2p-1}{2}x\right)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A_p(x,t)\,\mathrm{d}t$$

cu

$$A_p(x,t)=\frac{\sin p\frac{x-t}{2}\cos(p-1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{\sin p\frac{x}{2}\cos(p-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-$$

$$-\frac{\sin t}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left[\sin(p-1)x-2(p-1)\cos\frac{2p-1}{2}x\right].$$

În continuare

$$\tau_p(x,t)=\frac{a_0}{2}\left(-1+\frac{\sin^2 p\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)+(p-1)\frac{b_1}{4}\frac{\sin px}{\sin^3\frac{x}{2}}+$$

$$+\frac{b_1}{4\sin^4\frac{x}{2}}\sin\frac{p}{2}x\sin\frac{p-1}{2}x\left(1-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A_p^*(x,t)\,\mathrm{d}t$$

cu

$$A_p^*(x, t) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 \frac{p}{2}(x-t)}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 \frac{p}{2} x}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{p-1}{4} \sin t \frac{\sin px}{\sin^3 \frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{\sin t}{4}\frac{\sin \frac{p}{2} x \sin \frac{p-1}{2} x}{\sin^3 \frac{x}{3}} - \frac{\sin t}{4}\frac{\sin \frac{px}{2} \sin \frac{p-1}{2} x}{\sin^4 \frac{x}{2}};$$

calculînd sumele $\sigma_m(x, t)$ obţinem

$$\frac{m(m+1)}{2}\sigma_m(x, t) = B_m(x, t) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_m^{**}(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

cu

$$B_m(x, t) = \frac{ma_0}{2}\left(-1 + \frac{1}{2\sin^2 \frac{x}{2}}\right) - \frac{a_0}{4}\frac{1}{\sin^3 \frac{x}{3}} \sin \frac{mx}{2} \cos \frac{m-1}{2} x +$$

$$+ \frac{b_1}{8}\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}\left(\frac{\sin mx}{2\sin \frac{x}{2}} - (m-1)\cos \frac{2m-1}{2} x - \cos \frac{3x}{2}\right) +$$

$$+ \frac{b_1}{8}\frac{1}{\sin^4 \frac{x}{2}}\left(1 - \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}}\right)\left(m \cos \frac{x}{2} - \frac{\sin (m-1) x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right)$$

şi

$$A_m^{**}(x, t) = \frac{m}{4}\frac{1}{\sin^2 \frac{x-t}{2}} - \frac{\sin m \frac{x-t}{2} \cos (m-1)\frac{x-t}{2}}{4 \sin^3 \frac{x-t}{2}} -$$

$$- \frac{m}{4}\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin \frac{mx}{2} \cos (m-1)\frac{x}{2}}{4 \sin^3 \frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{\sin t}{8 \sin^3 \frac{x}{2}}\left(m \cos \frac{x}{2} - \frac{\sin (m-1) x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right) -$$

$$- \frac{\sin t}{8 \sin^4 \frac{x}{2}}\left(\frac{\sin mx}{2 \sin \frac{x}{2}} - \cos \frac{3x}{2} - (m-2)\cos \frac{2m-1}{2} x\right) -$$

$$- \frac{\sin t}{8 \sin^5 \frac{x}{2}}\left(m \cos \frac{x}{2} - \frac{\sin (m-1) x}{2 \sin \frac{x}{2}}\right).$$

Ne propunem să arătăm că

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = f(x)$$

într-un punct $x \neq 0$ de continuitate al lui $f(x)$.

a) Se observă că avem

$$\lim_{m\to\infty} 2\,\frac{B_m(x, t)}{m(m+1)} = 0$$

deci ne mai rămîne să arătăm că

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2}{\pi\, m(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} A_m^{**}(x, t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = f(x).$$

b) Putem scrie pe $A_m^{**}(x, t)$ astfel:

$$\cos\frac{mx}{2}\,\sin\frac{m-1}{2}\,x\,\frac{\sin m\,\frac{t}{2}\,\sin\frac{m-1}{2}\,t}{4\sin^3\frac{x-t}{2}} + \frac{C(x, t)}{\sin^3\frac{t-x}{2}},$$

$C(x, t)$ fiind în vecinătatea originii $t = 0$ o sumă de expresii de forma

(4.1) $$mt^2\,\lambda_1(x, t), \quad mt^3\,\lambda_2(x, t), \quad mt^4\,\lambda_3(x, t),$$

(4.2) $$t^2\,\lambda_1^*(x, t), \quad t^3\,\lambda_2^*(x, t), \quad t^4\,\lambda_3^*(x, t).$$

c) Pentru $\delta > 0$ și astfel ales încît $x - \delta \neq 0$, $x + \delta \neq 0$, $x - \delta > -\pi$, $x + \delta < \pi$, avem

(4.3) $$\sigma_m(x) = \frac{2}{m(m+1)\,\pi}\left[\int_{-\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\pi} + \int_{x-\delta}^{x+\delta}\right]$$

și să presupunem că $x + \delta < 0$; în această situație integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{x-\delta}$$

este mărginită deoarece $\frac{1}{m}\,A_m^{**}(x, t)$ este mărginită iar $f(x)$ este integrabilă pe intervalul $[-\pi, x-\delta]$.

d) Integrala

$$\int_{x+\delta}^{\pi} A^{**}(x, t)\, f(t)$$

este o sumă de integrale

(4.4) $$\mathcal{J}_1 = \int_0^{\gamma} \frac{\sin m\frac{t}{2}\,\sin\frac{m-1}{2}\,t}{4\sin^3\frac{t-x}{2}}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

şi

$$\mathcal{I}_\mu = \int_0^\gamma \mu(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t,$$

unde $\mu(x, t)$ este una din funcţiile ce intervin în (4.1) sau (4.2). Integrala (4.4) se poate scrie

$$|\mathcal{I}_1| \leqslant \left| \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\sin m \dfrac{t}{2} \sin \dfrac{m-1}{2} t}{4 \sin^3 \dfrac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \right| + $$

$$+ \left| \int_{\frac{1}{m}}^{\gamma} \frac{\sin m \dfrac{t}{2} \cdot \sin \dfrac{m-1}{2} t}{4 \sin^3 \dfrac{t-x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \left| \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\sin m \dfrac{t}{2} \sin \dfrac{m-1}{2} t}{t}\,\mathrm{d}t \right| +$$

$$+ M_2 \left| \int_{\frac{1}{m}}^{\gamma} \frac{\sin m \dfrac{t}{2} \sin \dfrac{m-1}{2} t}{t}\,\mathrm{d}t \right| \leqslant M^* m^{\alpha-1};$$

integralele $\mathcal{I}_\mu$ admit majorante de aceeaşi formă.

Am arătat astfel că

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m(m+1)} \left[\int_{-\pi}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{\pi} \right] = 0,$$

ne rămîne să mai arătăm că

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2}{\pi m(m+1)} \int_{x-\delta}^{x+\delta} A^{**}(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(x),$$

pentru orice δ şi x care îndeplinesc condiţiile enunţate.

e) Luăm pe $\delta > 0$ suficient de mic astfel încît $f(x)$ să fie continuă pe $[x-\delta, x+\delta]$. Fie $\psi(t)$ o funcţie definită pe $[-\pi, \pi]$ astfel:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, x-\delta) \cup (x+\delta, \pi], \\ f(t), & x \in [x-\delta, x+\delta], \end{cases}$$

$\psi(t)$ este integrabilă pe $[-\pi, \pi]$, continuă în punctul x şi conform unui rezultat cunoscut, sumele $\sigma_m(x)$ ale funcţiei ψ, anume

$$\frac{1}{2\pi m(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{m}{\sin^2 \dfrac{x-t}{2}} - \frac{\sin m \dfrac{x-t}{2} \cos (m-1) \dfrac{x-t}{2}}{\sin^3 \dfrac{x-t}{2}} \right] \psi(t)\,\mathrm{d}t$$

sînt convergente către $\psi(x)$ cînd $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi m(m+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{m \sin \frac{x-t}{2} - \sin m \frac{x-t}{2} \cos(m-1)\frac{x-t}{2}}{\sin^3 \frac{x-t}{2}} \psi(t)\, \mathrm{d}t = \psi(x)$$

însă $\psi(t) = f(t)$, $t \in [x-\delta,\ x+\delta]$, deci $\psi(x) = f(x)$. Rezultatul obținut este adevărat și într-un punct de discontinuitate de prima speță, unde valoarea $f(x)$ este dată de

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Am demonstrat următoarea:

TEOREMA 5.1. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$* în *afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, astfel ca funcția*

$$x^2 f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$.

a) *Seria Fourier atașată funcției $f(x)$ este de forma*

$$f(x) \sim S_0(x) + \lambda S_1(x) + \mu S_2(x)$$

unde $S_0(x)$ este seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

cu coeficienți dați de

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt - 1) f(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mt - m \sin t) f(t)\, \mathrm{d}t, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$S_1(x)$ și $S_2(x)$ sînt două serii trigonometrice, independente de $f(x)$, anume

$$S_1(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos px + \ldots$$

$$S_2(x) = \sin x + 2 \sin 2x + \ldots + p \sin px + \ldots$$

λ, μ fiind două numere arbitrare.

b) *În orice punct $x \in (-\pi, \pi) - \{0\}$ de continuitate al lui $f(x)$, seria*

$$(\alpha) \qquad S_0(x) + \lambda S_1(x) + \mu S_2(x)$$

este sumabilă $(C, 2)$ către valoarea $f(x)$, iar în punctele de discontinuitate de prima speță, seria (α) este sumabilă $(C, 2)$ către valoarea

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

6. Să considerăm sumele $s_p(x)$, calculate la aliniatul precendent

$$s_p(x) = B_p(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_p(x,\, t) f(t)\, dt$$

cu

$$B_p(x) = a_0\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{px}{2}\cos(p-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) +$$

$$+ \frac{b_1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left(\sin(p-1)\,x - 2(p-1)\cos\frac{2p-1}{2}\,x\right)$$

$$A_p(x,t) = \frac{\sin\frac{2p-1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}} - \frac{\sin\frac{2p-1}{2}\,x}{\sin\frac{x}{2}} -$$

$$- \frac{\sin t}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(\sin(p-1)\,x - 2(p-1)\cos\frac{2p-1}{2}\,x\right),$$

x fiind un punct de continuitate al lui $f(x)$. Folosim egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\frac{2p-1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}} f(x)\, dt$$

și facem diferența

$$s_p(x) - f(x) = B_p(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A_p(x,t) f(t)\, dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\frac{2p-1}{2}(t-x)}{\sin\frac{x-t}{2}} f(x)\, dt.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și $\delta > 0$ astfel încît pentru orice $t \in [x - \delta$ $x + \delta]$, $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Pentru $p > \frac{1}{\delta}$ putem scrie

$$s_p(x) - f(x) = B_p(x) + \frac{1}{2\pi}[C(x) - D(x)]$$

cu $C(x)$ dat de

$$C(x)=\int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}} A_p(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} A_p(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x-\delta}^{x-\frac{1}{p}} A_p(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t+$$

$$+\int_{-\pi}^{x-\delta} A_p(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{x+\delta}^{\pi} A_p(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t=I_1+\ldots+I_5;$$

$D(x)$ este dat de o sumă de integrale analoge $I_1'+\ldots+I_5'$.

Să presupunem $x<0$. Luăm pe $\delta>0$ suficient de mic astfel încît $[x-\delta,\ x+\delta]\subset[-\pi,0)$. Putem scrie

$$(6.1)\qquad I_1-I_1'=\int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}}\frac{\sin\frac{2p-1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}(f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t-$$

$$-\int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2p-1}{2}x+\sin t\left(\sin(p-1)x-2(p-1)\cos\frac{2p-1}{2}x\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot$$

$$\cdot f(t)\,\mathrm{d}t;$$

avem neegalitatea

$$\left|\int_{x-\frac{1}{p}}^{x+\frac{1}{p}}\frac{\sin\frac{2p-1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}(f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon\frac{2p-1}{p}\pi$$

cealaltă integrală din (6.1) este mărginită pentru orice p deoarece f este continuă pe intervalul $[x-\delta,\ x+\delta]$.

În continuare avem

$$(6.2)\qquad I_2-I_2'=\int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta}\frac{\sin\frac{2p-1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}(f(t)-f(x))\,\mathrm{d}t-$$

$$-\int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{2p-1}{2}x+\sin t\left(\sin(p-1)x-2(p-1)\cos\frac{2p-1}{2}x\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot$$

$$\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

iar neegalitatea

$$\left|\int_{x+\frac{1}{p}}^{x+\delta} \frac{\sin\frac{2p-1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,(f(t)-f(x))\,dt\right| \leqslant \varepsilon\,(\ln\delta+\ln p)\,\pi$$

se obține imediat; a doua integrală din (6.2) este mărginită pentru orice p. Deoarece am presupus $x+\delta<0$, integrala I_4 este mărginită pentru orice p. Celelalte integrale I_3, I'_3, I'_4 și I'_5 sînt de asemenea mărginite pentru orice p. Cît privește pe I_5, luînd pe $A_p(x, t)$ sub forma de la aliniatul 5, anume

$$A_p(x,t)=\frac{\sin p\frac{x-t}{2}\cos(p-1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}-\frac{\sin p\frac{x}{2}\cos(p-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\tag{6.3}$$
$$-\frac{\sin t}{4\sin^2\frac{x}{2}}\left(\sin(p-1)\,x-2\,(p-1)\cos\frac{2p-1}{2}\,x\right)$$

și dacă scriem primul termen din (6.3) sub forma

$$\frac{\sin p\frac{t}{2}\sin\frac{p-1}{2}t}{\sin\frac{t-x}{2}}\cos\frac{px}{2}\sin\frac{p-1}{2}x+$$
$$+\frac{\sin p\frac{x}{2}\cos p\frac{t}{2}\cos\frac{p-1}{2}\cos\frac{p-1}{2}t}{\sin\frac{x-t}{2}}-$$
$$-\frac{\sin p\frac{t}{2}\cos\frac{px}{2}\cos\frac{p-1}{2}x\cos\frac{p-1}{2}t}{\sin\frac{x-t}{2}}+$$
$$+\frac{\sin\frac{p-1}{2}t\sin\frac{p-1}{2}x\sin\frac{px}{2}\cos\frac{pt}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}},$$

obținem imediat că integralele ce intervin în I_5 admit majorante de forma

$$M\,p^{\alpha-1}$$

dacă $x^{\alpha} f(x)$ este mărginită într-o vecinătate a originii pentru $\alpha < 3$. Am demonstrat următoarea

TEOREMA 6.1. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, astfel ca funcția*

$$x^2 f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ iar $x^{\alpha} f(x)$, $\alpha < 3$, să fie mărginită într-o vecinătate a originii. Într-un punct de continuitate $x \neq 0$ al funcției f, sumele parțiale $s_p(x)$ ale seriei Fourier asociată funcției neintegrabile f (teorema 4.1), au proprietatea

$$\lim_{p\to\infty} \frac{s_p(x)}{\varphi(p)\, p^{\alpha-1}} = 0$$

pentru orice funcție φ astfel încît $\varphi(p) \to \infty$ cînd $p \to \infty$.

Dacă considerăm sumele $\tau_m(x)$ date de

$$\tau_m(x) = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{m-1}}{m},$$

în același mod se demonstrează :

TEOREMA 6.2. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi]$ în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă, astfel ca funcția*

$$x^2 f(x), \quad x \in [-\pi, \pi] - \mathfrak{M}$$

să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ iar $x^{\alpha} f(x)$, $\alpha < 3$, să fie mărginită într-o vecinătate a originii. Într-un punct de continuitate $x \neq 0$ sumele $\tau_m(x)$ ale seriei Fourier asociată funcției neintegrabile f (teorema 4.1) *au proprietatea*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\tau_m(x)}{\varphi(m)\, m^{\alpha-2}} = 0$$

pentru orice funcție φ astfel încît $\varphi(m) \to \infty$ cînd $m \to \infty$.

Cînd $\alpha = 2$, obținem rezultatul următor, care nu rezultă din teorema 6.2 :

TEOREMA 6.3. *Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[-\pi, \pi)$, în afară de o mulțime $\mathfrak{M}$ de măsură nulă astfel ca funcția $x^2 f(x)$ să fie integrabilă pe $[-\pi, \pi]$ și mărginită într-o vecinătate a originii.*

Într-un punct de continuitate $x \neq 0$ al funcției f, sumele $\tau_m(x)$ ale seriei Fourier asociată funcției neintegrabile f au proprietatea

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\tau_m(x)}{\ln m} = 0.$$

Primită la redacție la 7 octombrie 1965

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, vol. II. Cambridge University-Press, 1959.
2. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Cercetări asupra seriilor trigonometrice IV. Asupra seriei Fourier asociata unei funcții neintegrabile.* Revue Roum. de math. pures et appl., **XI** (1966).

ASUPRA FUNCŢIEI DE REPARTIŢIE A UNEI REPARTIŢII MULTINOMIALE

DE

MARIUS I. STOKA

În această lucrare se dă o altă formă funcţiei de repartiţie a unei repartiţii multinomiale, formă mai convenabilă pentru o serie de aplicaţii.

Funcţia de repartiţie a unei repartiţii multinomiale este

$$W_{h_1 h_2 \ldots h_m}(p_1, p_2, \ldots, p_m) =$$

$$= \sum_{\alpha_1=0}^{h_1} \cdots \sum_{\alpha_m=0}^{h_m} \frac{n\,!}{\alpha_1\,!\ldots\alpha_m\,!\,\alpha_{m+1}\,!} p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m} p_{m+1}^{\alpha_{m+1}},$$

unde

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + \alpha_{m+1} = n, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_{m+1} = 1, \quad h_j < n, \quad 0 \leqslant p_j \leqslant 1.$$

În cele ce urmează vom da o altă formă funcţiei $W_{h_1 h_2 \ldots h_m}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Să considerăm întîi cazul în care $m = 1$, deci cazul unei repartiţii binomiale. În acest caz funcţia de repartiţie este

$$W_h(p) = \sum_{\alpha=0}^{h} \frac{n\,!}{\alpha\,!\,(n-\alpha)\,!} p^{\alpha}(1-p)^{n-\alpha}. \tag{1}$$

Calculînd derivata acestei funcţii obţinem

$$\frac{\mathrm{d}W_h}{\mathrm{d}p} = \sum_{\alpha=1}^{h} \frac{n\,!}{(\alpha-1)\,!\,(n-\alpha)\,!} p^{\alpha-1}(1-p)^{n-\alpha} -$$

$$- \sum_{\alpha=0}^{h} \frac{n\,!}{\alpha\,!\,(n-\alpha-1)\,!} p^{\alpha}(1-p)^{n-\alpha-1}.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1281–1285, BUCUREŞTI, 1966

Dar

$$\sum_{\alpha=1}^{h} \frac{n\,!}{(\alpha-1)\,!\,(n-\alpha)\,!}\, p^{\alpha-1}(1-p)^{n-\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{h-1} \frac{n}{\alpha\,!\,(n-\alpha-1)\,!}\, p^{\alpha}(1-p)^{n-\alpha-1},$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}W_h}{\mathrm{d}p} = -\frac{n\,!}{h\,!\,(n-h-1)\,!}\, p^{h}(1-p)^{n-h-1}.$$

De aici rezultă

$$W_h(p) = -\frac{n\,!}{h\,!\,(n-h-1)\,!}\int_0^p x^h(1-x)^{n-h-1}\,\mathrm{d}x + c.$$

Din (1) deducem $W_h(0) = 1$, deci $c = 1$, adică

$$W_h(p) = 1 - \frac{n\,!}{h\,!\,(n-h-1)\,!}\int_0^p x^h(1-x)^{n-h-1}\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Să ne ocupăm acum de cazul $m = 2$, deci de funcția de repartiție

$$W_{h_1h_2}(p_1, p_2) =$$

$$= \sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2} \frac{n\,!}{\alpha_1!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2)\,!}\, p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2}\quad. \tag{3}$$

Avem

$$\frac{\partial^2 W_{h_1h_2}}{\partial p_1\partial p_2} =$$

$$= \sum_{\alpha_1=1}^{h_1}\sum_{\alpha_2=1}^{h_2} \frac{n\,!}{(\alpha_1-1)\,!\,(\alpha_2-1)\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2)\,!}\, p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2} -$$

$$-\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=1}^{h_2} \frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,(\alpha_2-1)\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-1)\,!}\, p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2-1}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-1} -$$

$$-\sum_{\alpha_1=1}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2} \frac{n\,!}{(\alpha_1-1)\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-1)\,!}\, p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-1} +$$

$$+\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2} \frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-2)\,!}\, p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-2}.$$

Dar

$$\sum_{\alpha_1=1}^{h_1}\sum_{\alpha_2=1}^{h_2}\frac{n\,!}{(\alpha_1-1)\,!\,(\alpha_2-1)\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2)\,!}\,p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2}=$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{h_1-1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2-1}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-2}=$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-2}-$$

$$-\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,h_2\,!\,(n-\alpha_1-h_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{h_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-h_2-2}-$$

$$-\sum_{\alpha_2=0}^{h_2}\frac{n\,!}{h_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-h_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{h_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-h_1-\alpha_2-2}+$$

$$+\frac{n\,!}{h_1\,!\,h_2\,!\,(n-h_1-h_2-2)\,!}\,p_1^{h_1}p_2^{h_2}(1-p_1-p_2)^{n-h_1-h_2-2}\,;$$

$$\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=1}^{h_2}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,(\alpha_2-1)\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-1)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2-1}(1-p_1-p_2)^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2-1}=$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2-1}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-2}=$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-2}-$$

$$-\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,h_2\,!\,(n-\alpha_1-h_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{h_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-h_2-2}\,;$$

$$\sum_{\alpha_1=1}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2}\frac{n\,!}{(\alpha_1-1)\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-1)\,!}\,p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-1}=$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{h_1-1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-2}=$$

$$=\sum_{\alpha_1=0}^{h_1}\sum_{\alpha_2=0}^{h_2}\frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-\alpha_1-\alpha_2-2}-$$

$$-\sum_{\alpha_2=0}^{h_2}\frac{n\,!}{h_1\,!\,\alpha_2\,!\,(n-h_1-\alpha_2-2)\,!}\,p_1^{h_1}p_2^{\alpha_2}(1-p_1-p_2)^{n-h_1-\alpha_2-2}.$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, rezultă

$$\frac{\partial^2 W_{h_1h_2}}{\partial p_1\partial p_2}=\frac{n\,!}{h_1\,!\,h_2\,!\,(n-h_1-h_2-2)\,!}\,p_1^{h_1}p_2^{h_2}(1-p_1-p_2)^{n-h_1-h_2-2}.$$

De aici deducem

$$W_{h_1h_2}(p_1, p_2) =$$

$$= \frac{n\,!}{h_1\,!\,h_2\,!\,(n-h_1-h_2-2)\,!}\int_0^{p_1}\int_0^{p_2} x_1^{h_1} x_2^{h_2}(1-x_1-x_2)^{n-h_1-h_2-2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 +$$

$$+ f_1(p_1) + f_2(p_2) + C. \tag{4}$$

Din (3) rezultă

$$W_{h_1h_2}(0, 0) = 1,$$

$$W_{h_1h_2}(0, p_2) = \sum_{\alpha_2=0}^{h_2} \frac{n\,!}{\alpha_2\,!\,(n-\alpha_2)\,!}\, p_2^{\alpha_2}(1-p_2)^{n-\alpha_2}, \tag{5}$$

$$W_{h_1h_2}(p_1, 0) = \sum_{\alpha_1=0}^{h_1} \frac{n\,!}{\alpha_1\,!\,(n-\alpha)\,!}\, p_1^{\alpha_1}(1-p_1)^{n-\alpha_1}.$$

Notînd cu $I_{h_1h_2}(p_1, p_2)$ integrala din membrul doi al egalității (4), avem

$$I_{h_1h_2}(0, 0) = I_{h_1h_2}(0, p_2) = I_{h_1h_2}(p_1, 0) = 0. \tag{6}$$

Cu aceste valori, din (4) rezultă

$$C = 1 - f_1(0) - f_2(0),$$

deci

$$W_{h_1h_2}(p_1, p_2) = I_{h_1h_2}(p_1, p_2) + 1 + f_1(p_1) - f_1(0) + f_2(p_2) - f_2(0). \tag{7}$$

Din (5) și (6) deducem

$$f_1(p_1) - f_1(0) = \sum_{\alpha_1=0}^{h_1} \frac{n\,!}{\alpha_1!\,(n-\alpha_1)\,!}\, p_1^{\alpha_1}(1-p_1)^{n-\alpha_1} - 1,$$

$$f_2(p_2) - f_2(0) = \sum_{\alpha_2=0}^{h_2} \frac{n\,!}{\alpha_2\,!\,(n-\alpha_2)\,!}\, p_2^{\alpha_2}(1-p_2)^{n-\alpha_2} - 1,$$

sau, ținînd seama de formula (2),

$$f_1(p_1) - f_1(0) = -\frac{n\,!}{h_1\,!\,(n-h_1-1)\,!}\int_0^{p_1} x^{h_1}(1-x)^{n-h_1-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$f_2(p_2) - f_2(0) = -\frac{n\,!}{h\,!\,(n-h_2-1)\,!}\int_0^{p_2} x^{h_2}(1-x)^{n-h_2-1}\,\mathrm{d}x.$$

Înlocuind aceste valori în (7) rezultă

$$W_{h_1h_2}(p_1, p_2) = 1 - \frac{n\,!}{h_1\,!\,(n-h_1-1)\,!}\int_0^{p_1} x^{h_1}(1-x)^{n-h_1-1}\,\mathrm{d}x -$$

$$- \frac{n\,!}{h_2\,!\,(n-h_2-1)\,!}\int_0^{p_2} x^{h_2}(1-x)^{n-h_2-1}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \frac{n\,!}{h_1\,!\,h_2\,!\,(n-h_1-h_2-2)\,!}\int_0^{p_1}\int_0^{p_2} x_1^{h_1} x_2^{h_2}(1-x_1-x_2)^{n-h_1-h_2-2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

În mod analog se demonstrează formula

$$W_{h_1 h_2 \ldots h_m}(p_1, p_2, \ldots, p_m) = 1 -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{n\,!}{h_i\,!\,(n-h_i-1)\,!} \int_0^{p_i} x^{h_i}(1-x)^{n-h_i-1}\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \sum_{i_1<i_2}^{1.\ m} \frac{n\,!}{h_{i_1}\,!\,h_{i_2}\,!\,(n-h_{i_1}-h_{i_2}-2)\,!}$$

$$\int_0^{p_{i_1}} \int_0^{p_{i_2}} x_1^{h_{i_1}} x_2^{h_{i_2}} (1-x_1-x_2)^{n-h_{i_1}-h_{i_2}-2}\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 - \ldots +$$

$$+ (-1)^{\mu} \sum_{i_1<\ldots<i_\mu}^{1,\ m} \frac{n\,!}{h_{i_1}\,!\ldots h_{i_\mu}\,!\,(n-h_{i_1}-\ldots-h_{i_\mu}-\mu)\,!} \times$$

$$\times \int_0^{p_{i_1}} \ldots \int_0^{p_{i_\mu}} x_1^{h_{i_1}} \ldots x_\mu^{h_{i_\mu}} (1-x_1-\ldots-x_\mu)^{n-h_{i_1}-\ldots-h_{i_\mu}-\mu}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_\mu + \ldots +$$

$$+ (1)^m \frac{n\,!}{h_1\,!\ldots h_m\,!\,(n-h_1-\ldots-h_m-m)\,!} \times$$

$$\times \int_0^{p_1} \int_0^{p_m} x_1^{h_1} \ldots x_m^{h_m} (1-x_1-\ldots-x_m)^{n-h_1-\ldots-h_m-m}\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_m.$$

Primită la redacție la 27 ianuarie 1966

Centrul de Statistică Matematică
al Academiei Republicii Socialiste
România, Str. M. Eminescu nr. 47,
București

BIBLIOGRAFIE

1. O. Onicescu, Gh. Mihoc, *Lecții de statistică matematică*, București, 1957.

ASUPRA UNOR CLASE DE OPERATORI REGULARIZABILI (II)

DE

VASILE I. ISTRĂŢESCU

În această lucrare se extinde clasa operatorilor regularizabili prin introducerea unei clase mai vaste şi anume aceea pentru care există un operator B astfel încît

$$BA = I + T,$$

unde T este un operator cvasicompact (adică există C compact astfel încît $\|T-C\| < 1$). Se dau unele teoreme referitoare la această clasă de operatori, care generalizează pe cele de la operatori regularizabili. Se consideră apoi şi clasa de operatori pentru care operatorul T de mai sus are proprietatea că

$$\frac{1}{2i}(T-T^*)$$

este un operator compact. (Această clasă, evident, se consideră pe spaţii Hilbert).

1. Una din clasele importante de operatori definiţi pe un spaţiu Banach $\mathfrak{X}$ este aceea a operatorilor care admit un regularizator [6]. Aceasta înseamnă că există un operator B mărginit astfel ca

$$BA = I + T, \tag{1}$$

unde T este un operator complet continuu, I operatorul identic şi A este presupus închis.

Un operator A cu proprietatea de mai sus îl vom numi regularizabil.

Problema care se pune este de a vedea dacă există o clasă mai vastă de operatori astfel încît proprietăţile esenţiale ale operatorilor cu proprietatea (1) să se păstreze.

În cele ce urmează introducem tocmai o astfel de clasă. Introducerea ei a fost sugerată de [7], [1], [6], [3], [4].

ST. CERC. MAT., TOM. 18 NR. 9, P. 1287–1292, BUCUREŞTI, 1966

2. Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu Banach. Dăm mai întîi următoarea :

Definiţia 2.1. [7] Un operator T se va numi cvasicompact dacă există un operator compact C astfel ca

$$\|T - C\| < 1.$$

Este evident că orice operator T compact este cvasicompact.

Clasa de operatori care generalizează pe cea a operatorilor regularizabili este introdusă prin :

Definiţia 2.2. Un operator mărginit A este cvasiregularizabil, dacă există un operator B (regularizatorul lui A) mărginit astfel ca

$$BA = I + T,$$

unde T este cvasicompact iar I este operatorul identitate.

Definiţia 2.3. [6]. Operatorul A admite o regularizare echivalentă, dacă există un regularizator B astfel ca ecuaţia

$$Au = f$$

şi

$$BAu = Bf$$

să fie echivalente pentru orice element $f \in X$

Teorema 2.1. *Dacă operatorul A admite o regularizare echivalentă, atunci*

$$\dim N(A) = \dim (f, Af = 0) < \infty,$$

unde $(f, Af = 0)$ este spaţiul generat de elementele f pentru care $Af = 0$.

Demonstraţie. Dacă B este operatorul de regularizare, atunci

$$BAu = (I + T)\, u = 0$$

şi dacă C este operatorul compact cu proprietatea că

$$\|T - C\| < 1,$$

putem scrie

$$[I + (T - C)]\, u + Cu = 0$$

care se mai scrie sub forma

$$u + Gu = 0,$$

unde G este un operator compact şi deci nu poate avea decît un număr finit de elemente astfel ca

$$u + Gu = 0$$

şi teorema este demonstrată.

Pentru teorema următoare vom presupune că spaţiul X este spaţiu Hilbert.

Teorema 2.2. *Operatorul închis A este normal rezolvabil dacă admite o regularizare echivalentă.*

Demonstraţie. În virtutea teoremei lui Hausdorff este suficient să demonstrăm că mulţimea $A(X)$ este închisă.

Să luăm $f \in A(X)$. În acest caz există $\varphi_0 \in X$ astfel încît $A\varphi_0 = f$. Cum presupunem că A admite o regularizare echivalentă, rezultă că dacă $\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ este o bază pentru spațiul $N(A) = (f,\ Af = 0)$, atunci soluția generală a ecuației $A\varphi = f$ este

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{1}^{n} \alpha_j \varphi_j .$$

Mulțimea elementelor este convexă și închisă. Conform unei teoreme cunoscute [5, t. 10.C], există în această mulțime un element de normă minimă, pe care-l notăm cu $\widetilde{\varphi}$. Să demonstrăm că

$$\|\widetilde{\varphi}\| \leqslant M \|\varphi\|,$$

unde M este o constantă, independentă de f. Să presupunem că acest lucru nu este adevărat. Rezultă că există un șir astfel ca

$$\|\widetilde{\varphi}\| > n \|f_n\|, \qquad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Dacă B este regularizatorul lui A, atunci

$$BA\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi} + T\widetilde{\varphi} = Bf,$$

unde T este un operator cvasicompact.

Rezultă astfel că

$$\widetilde{\varphi}_n + T\widetilde{\varphi}_n = Bf_n, \qquad n = 1, 2, 3 \dots$$

și deci

$$\frac{\widetilde{\varphi}_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|} + T\frac{\widetilde{\varphi}_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|} = B\frac{f_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|}$$

și cum

$$\frac{f_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|} \to 0$$

deducem că

$$\chi_n + T\chi_n \to 0, \qquad \chi_n = \frac{\widetilde{\varphi}_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|}$$

cu $\|\chi_n\| = 1$. Cum T este cvasicompact, deducem

$$\chi_n + (T - C)\chi_n + C\chi_n = g_n$$

și deci

$$\chi_n + D\chi_n = g'_n \qquad g'_n \to 0,$$

unde D este compact. Rezultă că șirul $\{\chi_n\}$ admite un subșir convergent $\chi_{n_k} \to -\chi_0$. De aici deducem că

$$A_{\chi_{n_k}} = \frac{f_{n_k}}{\|\widetilde{\varphi}_{n_k}\|} \to 0$$

şi deci, cum A este închis $\chi_0 \in D(A)$ şi $A\chi_0 = 0$. Deci $A(\chi_{n_k} - \chi_0) = \frac{f_{n_k}}{\|\widetilde{\varphi}_{n_k}\|}$ de unde

$$\|\chi_{n_k} - \chi_0\| \geqslant 1$$

ceea ce nu se poate şi afirmaţia este demonstrată.

Cu ajutorul relaţiei de mai sus, putem demonstra că mulţimea $A(X)$ este închisă. În adevăr, dacă $f_n \to f$ şi $f_n \in A(\mathfrak{X})$, atunci există elemente cu norma minimă astfel ca

$$A\varphi_n = f_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cum A admite o regularizare echivalentă, vom avea

$$A\widetilde{\varphi}_n = f_n, \qquad Bf_n = \widetilde{\varphi}_n + T\widetilde{\varphi}_n.$$

Din faptul că $\{f_n\}$ este un şir mărginit, rezultă că $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ este un şir mărginit. Exact ca mai sus, deducem că $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ admite un subşir convergent, $\widetilde{\varphi}_{n_k} \to \varphi_0$. Cum A este închis, rezultă $\varphi_0 \in \mathfrak{D}(A)$ şi $A\varphi_0 = f$ şi teorema este demonstrată.

3. Fie $\mathfrak{X}$ un spaţiu Hilbert. Un operator T se va numi de clasă Λ_C dacă operatorul

$$\frac{1}{2i}(T - T^*)$$

este complet continuu.

DEFINIŢIA 3.1. Un operator A se va numi Λ_C-regularizabil dacă există un operator B astfel ca

$$BA = I + T,$$

unde T este un operator de clasă Λ_C.

DEFINIŢIA 3.2. Operatorul A admite o Λ_C-regularizare echivalentă dacă este Λ_C-regularizabil şi ecuaţia

$$Au = f$$

este echivalentă cu $BAu = Bf$ pentru orice element $f \in X$.

TEOREMA 3.1. *Dacă operatorul T admite o Λ_C-regularizare echivalentă, atunci*

$$\dim N(A) < \infty$$

unde $N(A) = \{f,\ Af = 0\}$.

Demonstraţie. Vom avea

$$BAu = (I + T)\,u = 0$$

şi deci

$$u + Bu + i\,Cu = 0$$

de unde

$$u = -\,i(I + B)^{-1}\,Cu$$

şi afirmaţia rezultă imediat, ţinînd seama că C este compact.

Teorema 3.2. *Dacă operatorul T este închis și admite o Λ_C-regularizare echivalentă, atunci el este normal rezolvabil.*

Demonstrație. Vom proceda ca și în cazul teoremei 2.2. Construim elementele $\widetilde{\varphi}$ ca și în demonstrația teoremei 2.2. Să arătăm că există o constantă M independentă de f astfel ca

$$\|\widetilde{\varphi}\| \leqslant M \|f\|.$$

Presupunem că nu este așa. Rezultă că există un șir $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ astfel încît

$$\|\widetilde{\varphi}_n\| > n \|f_n\|, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Deducem că

$$BA\, \widetilde{\varphi}_n = \widetilde{\varphi}_n + T\, \widetilde{\varphi}_n = B\, f_n$$

și deci

$$\frac{\widetilde{\varphi}_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|} + T\, \frac{\widetilde{\varphi}_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|} = B\, \frac{f_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|}$$

sau

$$\chi_n + T\chi_n = g_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

unde

$$\chi_n = \frac{\widetilde{\varphi}_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|}, \qquad g_n = \frac{f_n}{\|\widetilde{\varphi}_n\|}.$$

Cum operatorul T este de clasă Λ_C, deducem

$$\chi_n + B\chi_n + iC\,\chi_n = g_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

și deci

$$\chi_n + i(I + B)^{-1}\, C\chi_n = (I + B)^{-1}\, g_n$$

de unde deducem că $\{\chi_n\}$ admite un subșir convergent,

(*) $$\chi_{n_k} \to \chi_0$$

Vom avea deci

$$\chi_0 + T\chi_0 = 0$$

sau

$$BA\,\chi_0 = 0$$

și deci

$$A\,\chi_0 = 0.$$

Deducem că

$$\left\| \frac{\widetilde{\varphi}_{n_k}}{\|\widetilde{\varphi}_{n_k}\|} - \chi_0 \right\| \geqslant 1$$

sau

$$\|\chi_{n_k} - \chi_0\| \geqslant 1$$

ceea ce nu se poate în virtutea relaţiei (*).

Demonstraţia se continuă ca şi la teorema 2.2.

4. Fie λ_0 un număr complex astfel încît dacă A este un operator iar B cvasiregularizatorul său,

$$(**) \qquad \|(I - \lambda_0^{-1} B)^{-1}\| \leqslant 1$$

Spaţiul X poate fi presupus şi spaţiu Banach.

Are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 4.1. *Dacă A admite o cvasiregularizare echivalentă şi*

$$(A - \lambda_0^{-1} I)\, g_n = f_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

unde $\{f_n\}$ este un şir convergent, iar $\{g_n\}$ mărginit, atunci $\{g_n\}$ admite un subşir convergent.

Demonstraţie. Putem scrie

$$(I - \lambda_0^{-1} B)\, g_n + (T - S)\, g_n + S g_n = B f_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

unde T este cvasicompact iar S compact. Această relaţie se mai poate scrie şi astfel

$$g_n + G g_n = G_1 f_n - S G_n' g_n,$$

unde G are proprietatea că $\|G\| < 1$, iar G, G' mărginiţi.

Cum S este compact, afirmaţia este demonstrată.

TEOREMA 4.2. *Dacă operatorul A satisface condiţiile din teorema 4.1, atunci spaţiul*

$$X_0 = (A - \lambda_0^{-1} I)\, X$$

este închis.

Demonstraţia acestei teoreme se face ca şi demonstraţia teoremelor 2.2 şi 3.2.

Observaţie. Teorema 4.1 indică modul de a folosi proprietatea operatorilor A de a admite o cvasiregularizare echivalentă pentru studiul proprietăţilor legate de modelul triunghiular al unui operator [1], [2].

Primită la redacţie la 22 martie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România.
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. N. Aronszajn, K. T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators.* Ann. Math. **60** (1954).
2. M. S. Brodski-M-Livsitz, U.M.N., **XIII**, *1*, 78 (1958).
3. V. Istrăţescu, *Asupra operatorilor cvasicompacţi* (*I*, *II*). St. Cerc. mat., **18** (1966).
4. V. Istrăţescu, *Asupra operatorilor regularizabili* (*I*). St. cerc. mat., **18** (1966).
5. L. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis.* Van Nostrand, 1953.
6. С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные уравнения.* Физматгиз, Москва, 1962.
7. O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu Tulcea, *Calculul probabilităţilor.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956.

DESPRE O NOUĂ GENERALIZARE A METODEI LUI NEWTON PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE NELINIARE

DE

DIONIS LICA
(Chișinău)

Lucrarea tratează problema convergenții unui procedeu iterativ de rezolvare a unor ecuații funcționale neliniare (vezi ecuația (6) din lucrare), care generalizează metoda lui Newton.

1. Metoda clasică a lui Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}, \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

pentru rezolvarea ecuației $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x)$ fiind o funcție de variabilă reală sau complexă, a fost generalizată de L. V. Kantorovici [8] pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare

$$P(x) = 0, \tag{2}$$

definite în spațiul Banach X în felul următor

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n), \qquad (n = 0, 1, \ldots,), \tag{3}$$

unde $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ reprezintă inversa derivatei lui Fréchet [14], [16] care este o operație liniară pentru elementul fixat x_n.

Calcularea inverselor Γ_n reprezintă dificultăți mari, iar de multe ori nici nu pot fi calculate exact.

M. Altman [2], [1] a dat o altă generalizare a metodei lui Newton pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale $F(x) = 0$, definite în spațiul Banach X în felul următor :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)\, y_n}\, y_n, \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1293–1304, BUCUREȘTI, 1966

unde $F'(x_n)$ este derivata Fréchet a funcţionalei $F(x)$, iar şirul de elemente $\{y_n\}$, $y_n \in X$, satisface următoarei condiţii

$$|F'(x_n)\,y_n| = \|F'(x_n)\|, \ \|y_n\| = 1, \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{A}$$

Metoda (4) este mai avantajoasă, fiindcă permite rezolvarea ecuaţiilor funcţionale în condiţii mai largi, fără a presupune existenţa inversei derivatei lui Fréchet. Procedeul iterativ (4) se foloseşte la rezolvarea ecuaţiilor funcţionale $F(x) = 0$, însă ţinînd seama de faptul că orice ecuaţie operaţională (2) poate fi redusă la o ecuaţie funcţională $F(x) = 0$ echivalentă, punînd, de exemplu, $F(x) = \|P(x)\|$, se poate aplica şi la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale (2).

2. Fie dată ecuaţia funcţională

$$F(x) = 0, \tag{5}$$

unde $F(x)$ este o funcţională neliniară definită în domeniul $S(x_0, \tau)$ complet şi convex din spaţiul Banach X. Se mai presupune că funcţionala $F(x)$ este continuă şi admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 2.

Considerăm metoda de iteraţie

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{F(x)}{F'(x_n)\,y_n}\, y_n, \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{6}$$

unde α_n sînt numere reale din intervalul $(0, 2)$, iar $F'(x_n)$ are sensul de mai sus. Această metodă reprezintă o extindere a procedeului lui L. Chivistic [9]

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \Gamma_n P(x_n)$$

aplicat la rezolvarea ecuaţiei operaţionale (2).

La aplicarea procedeului (6) se alege înprealabil aproximativ iniţială $x_0 \in S \subset X$ şi apoi elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in X$ se calculează succesiv prin formula (6).

Dacă $\alpha_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, atunci din (6) se capătă cunoscuta metodă a lui Newton-Altman [2], iar cînd $0 < \alpha_n = \alpha < 1$ — generalizarea procedeului lui D. A. Grave [5].

La studiul convergenţei metodei (4), M. Altman [2], [1] a demonstrat cîteva teoreme, care (unite la un loc) pot fi formulate astfel:

TEOREMA A. *Presupunem că pentru aproximaţia iniţială* x_0 *sînt îndeplinite următoarele condiţii :*

1°. *Pentru derivata Fréchet* $F'(x_0)$ *există delimitarea*

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0 < +\infty$$

şi este satisfăcută condiţia (A).

2° *Are loc inegalitatea*

$$\frac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|} \leqslant \eta_0 < +\infty.$$

3°. *Derivata Fréchet de ordinul 2 este uniform continuă în domeniul* $S(x_0, \tau) = \{x : \| x - x_0 \| \leqslant \tau\}$, $\tau = \varphi(h_0)\,\eta_0 = \dfrac{1 - \sqrt{1-2h_0}}{h_0}\,\eta_0$

$$\| F''(x) \| \leqslant M.$$

4°. $h_0 = B_0 M \eta_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

În aceste condiții, pentru ecuația (5) *există în sfera* $S(x_0, \tau)$ *o soluție* x^*, *care este limita aproximațiilor* x_n. *Rapiditatea convergenții este caracterizată prin delimitarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} (2h_0)^{2^n-1} \eta_0. \tag{7}$$

În cele ce urmează vom extinde această teoremă pentru cazul cînd α_n este orice număr real din semiintervalul [0, 1], iar $\inf_n f\ \alpha_n = \alpha > 0$ (mai departe vom studia cazul cînd $0 < \alpha_n < 2$).

3. Vom studia convergența procedeului (6).

TEOREMA 1. *Presupunem că pentru* x_0 *sînt îndeplinite condițiile* 1°–4° *ale teoremei A și fie că* $0 < \alpha_n \leqslant 1$, $\alpha = \inf\limits_n \alpha_n > 0$; *atunci ecuația* (5) *admite o soluție* $x^* \in S(x_0\ \tau)$ *către care tind aproximațiile succesive date prin procedeul* (6). *Rapiditatea convergenței se exprimă prin evaluarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \varphi(h_0)\,\eta_0\, q^n, \tag{8}$$

unde

$$q = \frac{1 - \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 h_0}{1 - \alpha h_0}.$$

Demonstrație. Se arată că trecînd de la x_0 la x_{n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$, condițiile 1°—4° rămîn valabile.

1) Folosindu-ne de inegalitatea

$$\| F'(x_{n+1}) \| \geqslant \| F'(x_n) \| \left(1 - \frac{\| F'(x_n) - F'(x_{n+1}) \|}{\| F'(x_n) \|}\right)$$

și de formula generalizată a lui Lagrange, rezultă că

$$\| F'(x_{n+1}) \| \geqslant \| F'(x_n) \| (1 - B_n M \| x_{n+1} - x_n \|) \geqslant \| F'(x_n) \| (1 - \alpha_n h_n),$$

de unde

$$\frac{1}{\| F'(x_{n+1}) \|} \leqslant \frac{B_n}{1 - \alpha_n h_n} = B_{n+1}. \tag{9}$$

2) Pornind de la formula generalizată a lui Taylor şi folosind procedeul (6), în condiţiile teoremei se ajunge uşor la

$$|F(x_{n+1})| \leqslant (1-\alpha_n)\,|F(x_n)| + \frac{1}{2}\alpha_n^2 M\eta_n^2,$$

de unde

$$\frac{|F(x_{n+1})|}{\|F'(x_{n+1})\|} \leqslant \frac{B_n}{1-\alpha_n h_n}\left\{(1-\alpha_n)\,|F(x_n)| + \frac{1}{2}\alpha_n^2 M\,\eta_n^2\right\} \leqslant \tag{10}$$

$$\leqslant \frac{1-\alpha_n+\frac{1}{2}\alpha_n^2 h_n}{1-\alpha_n h_n}\,\eta_n = \eta_{n+1}.$$

3) Pentru toţi $x \in S(x_{n+1}, \tau_{n+1})$, unde $\tau_{n+1} = \varphi(h_{n+1})\eta_{n+1}$, are loc inegalitatea $\|F''(x)\| \leqslant M$, fiindcă $S(x_{n+1}, \tau_{n+1}) \subset S(x_0, \tau)$.

4) $h_{n+1} = B_{n+1} M\eta_{n+1} \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2}$,

iar

$$h_{n+1} = \frac{1-\alpha_n+\frac{1}{2}\alpha_n^2 h_n}{(1-\alpha_n h_n)^2}\,h_n. \tag{11}$$

Folosind formulele de recurenţă (11) şi (10), se arată uşor că are loc identitatea

$$\varphi(h_{n+1})\eta_{n+1} = \varphi(h_n)\,\eta_n - \alpha_n\,\eta_n. \tag{12}$$

Cu ajutorul formulelor (6), (10) şi (12) obţinem

$$\begin{aligned}\|x_{n+p}-x_n\| &\leqslant \|x_{n+p}-x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}\| + \dots + \\ &+ \|x_{n+1}-x_n\| \leqslant \alpha_n\,\eta_n + \alpha_{n+1}\,\eta_{n+1} + \dots + \\ &+ \alpha_{n+p-1}\,\eta_{n+p-1} < \varphi(h_n)\eta_n.\end{aligned} \tag{13}$$

Din inegalitatea (10) căpătăm

$$\eta_{n+1} \leqslant q\,\eta_n \leqslant q^{n+1}\eta_0. \tag{14}$$

Ţinînd seama de faptul că X este un spaţiu complet, pe baza relaţiilor (13) şi (14) şi a faptului că $1 \leqslant \varphi(h) \leqslant 2$ $\left(\text{dacă } 0 \leqslant h \leqslant \frac{1}{2}\right)$ şi $q<1$, rezultă că există limita

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dacă în relaţia (13) facem $p \to \infty$, atunci se obţine

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \varphi(h_0)\eta_0 q^n.$$

Rămîne să mai arătăm că x^* satisface ecuaţia funcţională (5). În adevăr, din relaţiile $\frac{1}{\alpha_n} \leqslant \frac{1}{\alpha} < +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| F'(x_n) \| < +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_{n+1} - x_n \| = 0$, trecînd la limită în identitatea

$$F(x_n) + \frac{1}{\alpha_n} F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

se capătă că x^* este o soluţie a ecuaţiei (5).

4. Să presupunem ca mai înainte că au loc condiţiile teoremei 1 şi constantele α_n sînt alese aşa încît pentru toţi $n = 0, 1, \ldots,$

$$1 - \alpha_n + \frac{1}{2} \alpha_n^2 h_n \leqslant \gamma h_n, \tag{15}$$

unde γ este un număr real, care va fi precizat mai jos. Atunci din (10) şi (11) reiese

$$\eta_{n+1} \leqslant \frac{h_n}{1 - \alpha_n h_n} \eta_n \tag{16}$$

$$h_{n+1} \leqslant \frac{h_n^2}{(1 - \alpha_n h_n)^2}. \tag{17}$$

Din ultima inegalitate căpătăm

$$\gamma h_k \leqslant \frac{(\gamma h_0)^{2^k}}{(1 - \alpha_{k-1} h_{k-1})^{2^1} (1 - \alpha_{k-2} h_{k-2})^{2^2} \ldots (1 - \alpha_0 h_0)^{2^k}}. \tag{18}$$

Cu ajutorul relaţiei (10) (care rămîne valabilă) se poate verifica uşor că

$$\begin{aligned} \varphi(h_n) &\leqslant (1 - \alpha_{n-1} h_{n-1}) \varphi^2(h_{n-1}) \leqslant \\ &\leqslant (1 - \alpha_{n-1} h_{n-1})(1 - \alpha_{n-2} h_{n-2})^{2^1} \ldots (1 - \alpha_0 h_0)^{2^{n-1}} \varphi^{2^n}(h_0). \end{aligned} \tag{19}$$

Din relaţiile (16), (19) şi (18) avem

$$\begin{aligned} | x^* - x_n \| &\leqslant \varphi(h_n) \eta_n \leqslant \varphi(h_n) \frac{\eta_0 \cdot \gamma h_{n-1} \cdot \gamma h_{n-2} \cdot \ldots \gamma h_0}{(1 - \alpha_{n-1} h_{n-1})(1 - \alpha_{n-2} h_{n-2}) \ldots (1 - \alpha_0 h_0)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varphi^2(h_0)}{\varphi(h_n)} (1 - \alpha_{n-1} h_{n-1})(1 - \alpha_{n-2,n-2}) \ldots (1 - \alpha_0 h_0) [\gamma \varphi^2(h_0) h_0]^{2^n - 1} \end{aligned} \tag{20}$$

Convergenţa este asigurată dacă în formula obţinută, avem $\gamma \varphi^2(h_0) h_0 \leqslant 1$. În loc de inegalitatea (20) ne putem folosi pentru $h_k \leqslant h_{k-1}$ şi $\alpha_k \leqslant 1$ de

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \varphi(h_0) \eta_0 (1 - h_0)^n \left[\frac{\gamma \varphi(h_0) h_0}{1 - h_0} \right]^{2^n - 1}, \tag{21}$$

care are loc întotdeauna cînd $\gamma \varphi(h_0) h_0 \leqslant 1 - h_0$.

Uşor ne putem convinge că condiţiile (15) şi $\alpha_n \leqslant 1$ sînt echivalente cu condiţiile

$$(22) \qquad 1 \geqslant \alpha_n \geqslant \frac{1-\sqrt{1-2h_n(1-\gamma h_n)}}{h_n} \text{ şi } \gamma \geqslant \frac{1}{2}.$$

Deci am demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 2. *Presupunem că sînt îndeplinite condiţiile teoremei A şi numerele reale* α_n *sînt alese în aşa fel încît condiţiile (22) sînt îndeplinite, iar* γ *satisface inegalităţii*

$$(23) \qquad \frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{1-h_0}{\varphi(h_0)\,h_0},$$

atunci eroarea aproximaţiilor metodei (6) poate fi delimitată prin formula (21) (mai exact prin (20) cu condiţia $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant [\varphi^2(h_0)\,h_0]^{-1}$ *în loc de (23)).*

Observaţia 1. Dacă $\alpha_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, atunci din (10) şi (11) avem $\gamma = \frac{1}{2}$ şi deci căpătăm rezultatele lui M. Altman [2]

$$\eta_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{h_n}{1-h_n}\,\eta_n$$

$$h_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{h_n^2}{(1-h_n)^2}.$$

5. Să studiem acum cazul cînd $0 < \alpha_n < 2$ iar $\alpha = \inf\limits_n \alpha_n > 0$ şi $1 < \beta = \sup\limits_n \alpha_n < 2$ (pentru $\beta \leqslant 1$ avem cazul de mai sus).

Teorema 3. *Presupunem că pentru aproximaţia iniţială* x_0 *sînt îndeplinite următoarele condiţii:*

1°. *Pentru derivata Fréchet* $F'(x_0)$ *există delimitarea*

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0 < +\infty$$

şi este satisfăcută condiţia (A);

2°. *Are loc inegalitatea*

$$\frac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|} \leqslant \eta_0 < +\infty;$$

3°. *Pentru toţi* $x \in S(x_0, \tau)$, *unde* $\tau = \frac{\beta\eta_0}{1-q}$ *şi*

$$q = \max\left\{\frac{|1-\alpha| + \frac{1}{2}\alpha^2 h_0}{1-\alpha h_0}, \frac{\beta - 1 + \frac{1}{2}\beta^2 h_0}{1-\beta h_0}\right\},$$

are loc $\|F''(x)\| \leqslant M$;

4°. *Au loc inegalitățile*

$$|1-\alpha| + \frac{1}{2}\alpha^2 h_0 \leqslant (1-\alpha h_0)^2$$

$$\beta - 1 + \frac{1}{2}\beta^2 h_0 \leqslant (1-\beta h_0)^2,\ \beta_0 h_0 < 1,$$

unde $h_0 = \beta_0 M \eta_0$.

Atunci ecuația funcțională (5) admite o soluție $x^* \in S\ (x_0,\ \tau)$ *la care tind aproximațiile succesive calculate cu ajutorul procedeului (6). Rapiditatea convergenții se exprimă prin evaluarea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{\beta\eta_0}{1-q}q^n. \tag{24}$$

Demonstrație. Ca și la teorema 1, ne putem convinge ușor că: 1) există o constantă B_{n+1} astfel încît

$$\frac{1}{\|F'(x_{n+1})\|} \leqslant B_{n+1} = \frac{B_n}{1-\alpha_n h_n};$$

2) există η_{n+1} astfel încît

$$\frac{|F(x_{n+1})|}{\|F'(x_{n+1})\|} \leqslant \eta_{n+1} = \frac{|1-\alpha_n| + \frac{1}{2}\alpha_n^2 h_n}{1-\alpha_n h_n}\eta_n \leqslant q_n\eta_n;$$

3) pentru toți $x \in S\ (x_{n+1},\ \tau_{n+1})$ $\|F''(x)\| \leqslant M$, fiindcă $S\ (x_{n+1},\ \tau_{n+1}) \subset \subset S\ (x_0,\ \tau)$, unde

$$\tau_{n+1} = \frac{\beta\eta_{n+1}}{1-q_{n+1}} \text{ și } q_{n+1} = \max\left\{\frac{|1-\alpha| + \frac{1}{2}\alpha^2 h_{n+1}}{1-\alpha h_{n+1}},\ \frac{\beta - 1 + \frac{1}{2}\beta^2 h_{n+1}}{1-\beta h_{n+1}}\right\} \leqslant q;$$

4) are loc inegalitatea din condiția 4° dacă h_0 este înlocuit cu h_{n+1}:

$$h_{n+1} = B_{n+1}M\eta_{n+1} = \frac{|1-\alpha_n| + \frac{1}{2}\alpha_n^2 h_n}{(1-\alpha_n h_n)^2}h_n \leqslant h_n.$$

Deci condițiile 1°—4° rămîn valabile pentru toți x_{n+1}. În sfîrșit, căpătăm

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \alpha_n\eta_n + \alpha_{n+1}\eta_{n+1} + \dots \leqslant$$

$$\leqslant \beta_n\eta_n(1 + q^1 + q^2 + \dots) = \frac{\beta\eta_n}{1-q} \leqslant \frac{\beta\eta_0}{1-q}q^n.$$

Ca și în teorema 1, se arată că x^* este soluția ecuației (5).

Observația 2. Se poate demonstra această teoremă și în cazul cînd $\alpha_n \in (0,\ 2)$.

6. Acum vom studia un caz mai general

$$x_{n+1} = x_n - G_n\left(F(x_n), F'(x_n), \ldots, F^{(k)}(x_n); y_n\right) \frac{F(x_n)}{F'(x_n) y_n} y_n, \tag{25}$$

unde $F'(x_n), F''(x_n), \ldots, F^{(k)}(x_n)$ reprezintă derivatele Fréchet de ordinul 1, 2, ..., k calculate pentru elementul $x_n \in S(x_0,\ \tau) \subset X$. Dacă se alege $G_n = \alpha_n$, unde $\alpha_n \in (0,\ 2)$, atunci se capătă (6).

Fie

$$\|1 - G_n\| \leqslant e_n,\quad \|G_n\| \leqslant \alpha_n, \tag{26}$$

iar e_n satisface condiției

$$e_n \leqslant e < 1. \tag{27}$$

Folosind formula lui Taylor

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F''(x)(x - x_n)\,\mathrm{d}x$$

și identitatea

$$F(x_n) = F'(x_n) y_n \frac{F(x_n)}{F'(x_n) y_n}$$

căpătăm

$$F(x_{n+1}) = (1 - G_n) F'(x_n) y_n \frac{F(x_n)}{F'(x_n) y_n} + \frac{1}{2} G_n^2 F''(x_n) y_n^2,$$

de unde

$$\frac{|F(x_{n+1})|}{\|F'(x_{n+1})\|} \leqslant \frac{\eta_n}{1 - \alpha_n h_n}\left(e_n + \frac{1}{2}\alpha_n^2 h_n\right) = q_n \eta_n = \eta_{n+1}. \tag{28}$$

Folosind (28) și metoda demonstrațiilor teoremelor precedente, căpătăm următoarele teoreme :

TEOREMA 4. *Dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :*

1) *pentru derivata Fréchet $F'(x_0)$ avem*

$$\frac{1}{\|F'(x_0)\|} \leqslant B_0$$

și mai este satisfăcută condiția (A);

2) $$\frac{|F(x_0)|}{\|F'(x_0)\|} \leqslant \eta_0;$$

3) *există derivata de tip Fréchet de ordinul 2 și*

$$\|F''(x)\| \leqslant M$$

pentru orice $x \in S(x_0, \tau)$, $\tau = \dfrac{b\eta_0}{1 - q}$;

4) *are loc inegalitatea*

$$e + \frac{1}{2} b^2 h_0 \leqslant (1 - bh_0)^2,$$

unde

$$bh_0 = bB_0 M \eta_0 < 1, \quad b = \sup_n \alpha_n < 2, \quad q = \frac{e + \frac{1}{2} b^2 h_0}{1 - bh_0}.$$

atunci ecuația (5) *admite o soluție* $x^* \in S(x_0, \tau)$ *către care tind aproximațiile succesive date prin procedeul* (25). *Rapiditatea convergenței se exprimă prin evaluarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{b\eta_0}{1 - q} q^n.$$

TEOREMA 5. *Dacă sînt satisfăcute următoarele condiții* :

1) *pentru derivata Fréchet* $F'(x_0)$ *avem*

$$\frac{1}{\| F'(x_0) \|} \leqslant B_0$$

și este îndeplinită condiția (*A*) ;

2) $$\frac{| F(x_0) |}{\| F'(x_0) \|} \leqslant \eta_0 ;$$

3) *pentru toți* $x \in S(x_0, \tau)$, $\tau = \dfrac{b\eta_0}{1 - (1 - bh_0) l_0}$

$$\| F''(x) \| \leqslant M ;$$

4) G_n *se alege în așa fel încît*

$$e_n + \frac{1}{2} \alpha_n^2 h_n \leqslant \gamma h_n ,$$

iar γ *satisface condiției*

$$\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{(1 - bh_0)^2}{h_0}$$

și

$$bh_0 = bB_0 M \eta_0 < 1, \quad h_n = \frac{e_{n-1} + \frac{1}{2} \alpha_{n-1}^2 h_{n-1}}{(1 - \alpha_{n-1} h_{n-1})^2} h_{n-1},$$

atunci ecuația (5) *admite o soluție* $x^* \in S(x_0, \tau)$ *către care tind aproximațiile succesive date prin procedeul* (25). *Rapiditatea convergenței se exprimă prin evaluarea*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{b\eta_0 (1 - bh_0)^n}{1 - (1 - bh_0) l_0^{2n}} l_0^{2^n - 1},$$

unde

$$l_0 = \frac{\gamma h_0}{(1 - bh_0)^2}, \qquad (b = \sup_n \alpha_n).$$

Observația 3. Pentru metoda lui Newton-Altman [2] putem alege $e_n = 0$, $\alpha_n = 1$, $b = 1$ și $\gamma = \frac{1}{2}$.

Observația 4. Teoremele stabilite pînă acum în cadrul acestei lucrări constituie extinderi ale teoremelor din [9] și generalizări ale teoremelor referitoare la metoda lui Newton-Altman [2].

Observația 5. Dacă în formula (25) se alege

$$G_n \equiv 1 + \frac{1}{2} \frac{F''(x_n)\, y_n^2 F(x_n)}{[F'(x_n)\, y_n]^2},$$

atunci se capătă metoda lui Cebișev [7], iar dacă

$$G_n \equiv \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2} \dfrac{F''(x_n) y_n^2 F(x_n)}{[F'(x_n) y_n]^2}},$$

atunci se capătă metoda iperbolelor tangente [8], [9]; pentru

$$G_n \equiv \frac{1 - \dfrac{F''(x_n)\, y_n^2 F(x_n)}{2[F'(x_n)\, y_n]^2}}{1 - \dfrac{F''(x_n)\, y_n^2 F(x_n)}{[F'(x_n) y_n]^2} + \dfrac{F'''(x_n) y_n^3 F^2(x_n)}{6[F'(x_n) y_n]^3}}$$

se capătă procedeul studiat în [11].

În astfel de cazuri procedeul (25) are convergența de ordinul k.

7. În cele ce urmează vom da cîteva aplicații. Este interesant de studiat cazul particular cînd X este un spațiu Hilbert, deoarece aici condiția (A) este întotdeauna satisfăcută.

Fie deci $X = H$ un spațiu Hilbert real. Considerăm ecuația operațională

$$P(x) = 0,$$

unde $P(x)$ este o operație neliniară definită în domeniul S cu valori în H.

Introducem notațiile

$$F(x) = \| P(x) \|^{\tau}, \qquad Q(x_n) = P'^{*}(x_n)\, P(x_n),$$

unde τ este un oarecare număr real $\left(\frac{1}{2} < \tau < +\infty\right)$, iar $P'^{*}(x_n)$ este operatorul adjunct al operatorului $P'(x_n)$ ($P'(x_n)$ — derivata Fréchet a operației $P(x)$ pentru elementul x_n). Astfel avem

$$F'(x_n)\Delta x = \tau \| P(x_n) \|^{\tau - 2} (Q(x_n), \Delta x).$$

Dacă se alege

$$y_n = \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|}, \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

atunci condiția (A) este îndeplinită. În adevăr,

$$F'(x_n)y_n = \tau\|P(x_n)\|^{\tau-2}\left(Q(x_n), \frac{Q(x_n)}{\|Q(x_n)\|}\right) =$$

$$= \tau\|P(x_n)\|^{\tau-2}\|Q(x_n)\| = \|F'(x_n)\|.$$

Formula (6) în cazul de față se prezintă astfel

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{\|P(x_n)\|^2}{\tau\|Q(x_n)\|^2} Q(x_n).$$

8. În p. 10 a fost presupus că operatorul $P(x)$ este din spațiul Hilbert H. Aceasta însă nu e esențial, fiindcă operatorul $P(x)$ poate fi studiat în orice spații Banach, dacă norma e diferențiabilă.

Să presupunem acum că operatorul $P(x)$ este definit pe spațiul X cu valori în $L^p(a, b)$.

În lucrarea sa [13], S. Mazur a arătat că norma în spațiul $L^p(p > 1)$ e diferențiabilă în orice punct $x \neq 0$, și că diferențiala lui $\|x\|^p$ este

$$\delta\|x\|^p(h) = p\int_a^b \operatorname{sgn} x(t)\,|x(t)|^{p-1}h(t)\,\mathrm{d}t. \tag{29}$$

Ulterior P. Szeptychi [15] a arătat că norma în $L^p(p > 2)$ e diferențiabilă de două ori și că

$$\delta^2\|x\|^p(h, k) = p(p-1)\int_a^b |x(t)|^{p-2}h(t)\,k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vom studia acum funcționala

$$F(x) = \|P(x)\|^p. \tag{30}$$

Folosind formulele (29) și (30) vom găsi $F'(x)$. Avem

$$F'(x)h = p\int_a^b \operatorname{sgn} P(x(t))\,|P(x(t))|^{p-1}P'(x(t))\,h(t)\,\mathrm{d}t. \tag{31}$$

Procedeul iterativ (6) în cazul de față va fi

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{\|P(x_n(t))\|^p}{p\int_a^b \operatorname{sgn} P(x_n(t))\,|P(x_n(t))|^{p-1}P'(x_n(t))\,y_n(t)}\,y_n(t).$$

Dacă se alege

$$y_n(t) = \operatorname{sgn} g(x_n(t))\,|g(x_n(t))|^{1/(1-p)},$$

unde

$$g(x(t)) = P'^{*}(x(t)) \operatorname{sgn} P(x(t)) \,|\, P(x(t)) \,|^{p-1}$$

($P'^{*}(x)$ fiind operatorul adjunct al lui $P'(x)$), atunci are loc condiţia (A).

Primită la redacţie la 15 februarie 1966

Institutul de matematică şi centrul de calcul
al Academiei R.S.S. Moldoveneşti

BIBLIOGRAFIE

1. M. Altman, *On the approximate solution of non-linear functional equations*. Bull. Acad. Polon. Sci. cl. III, **V**, *5*, 457–460 (1957).
2. M. Altman, *Concerning approximate solutions of non-linear functional equations*. Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III, **V**, *5*, 461–465 (1957).
3. M. Altman, *An iterative method of solving functional equations*. Bull. Acad. Polon. Sci., **IX**, *2*, 57–62 (1961).
4. M. Altman, *On the approximate solution of operator equations in L. spaces*. Bull. Acad. Polon. Sci. cl. III, **V**, *12*, 1099–1103 (1957).
5. Д. А. Граве, Журнал математ. и-та АН УССР, **2**, *3* (1936).
6. B. Janko, *Asupra metodei generalizate a lui Cebişev* (I). St. cerc. mat. (Cluj), **XIII**, *1*, 83–91 (1962).
7. B. Janko, *Asupra metodei generalizate a iperbolelor tangente*, St. cerc. mat. (Cluj), **XIII**, *2*, 301–308 (1962).
8. Л. В. Канторович, *О методе Ньютона*. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, XXVIII, 104—144 (1949).
9. Л. А. Кивистик, *Об одном обобщении метода Ньютона*, Изв. АН Эст. ССР, IX, 4, 301—312 (1960).
10. Д. К. Лика, *Один итерационный процесс для нелинейных функциональных уравнений*. Сб. Исследования по алгебре и математическому анализу, Кишинев, 134—139, 1965.
11. Д. К. Лика, *Об итерационных методах высшего порядка*. Тезисы докл. второй научно-технич. республ. конф. ,,Применен. матем. методов и выч. техн. в народном хоз. Молдавии'', Кишинев, 13—16, 1965.
12. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Москва, 1951.
13. S. Mazur, *Über schwache Konvergenz in der Röumen* (*L*). Studia Math., 4, 128–133 (1933).
14. M. Nicolescu, *Analiză matematică*. vol. II, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
15. P. Szeptycki, *A remark on the method of M. Altman of solving non-linear equations in L-space*, Bull. Acad. Polon. Sci., cl. III, **V**, *12*, 1109–1112 (1957).
16. М. М. Вайнберг, *Бариационные методы исследования нелинейных операторов*. Москва, 1956.

MIŞCĂRI ALE FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE NEOMOGENE

DE

ELENA UNGUREANU

Problema considerată în lucrarea de faţă este aceea a determinării presiunii unui fluid în mişcare staţionară tridimensională într-un mediu poros ce ocupă un semispaţiu $z > 0$ mărginit de un plan impermeabil. Mediul poros este neomogen, cu coeficientul de filtraţie dat de (1), iar mişcarea se datoreşte unui izvor de debit constant Q ce se află pe planul impermeabil.

1. Studiul mişcării fluidelor în mediile poroase în care coeficientul de filtraţie k variază puţin de la un punct la altul se face presupunînd mediul omogen. Cînd k variază însă suficient ca mişcarea reală să nu mai poată fi descrisă în mod satisfăcător de rezultatele obţinute prin considerarea mediului ca fiind omogen, este necesar să se renunţe la această ipoteză. Problema însă din punct de vedere matematic devenind prea complicată, în literatură s-a studiat un caz mai simplu, acela al aşa-numitelor medii armonic-neomogene în care este satisfăcută relaţia $\Delta \sqrt{k} = 0$ (de ex. [1] — [3]). Au fost abordate şi probleme relative la mişcări cînd se admit alte legi de variaţie a coeficientului de filtraţie [3] — [5]. În lucrarea de faţă ne propunem studiul unei mişcări tridimensionale staţionare în care $k = (a+bz)^s$, unde a, b, s sînt nişte constante, iar z o coordonată a mişcării şi în care este valabilă legea lui Darcy.

2. Să presupunem că mişcarea are loc în semispaţiul $z > 0$, cu planul $z = 0$ impermeabil. Într-un punct al acestui plan, în care vom alege originea axelor de coordonate, se găseşte un izvor de debit constant Q. Mediul poros este neomogen şi are următoarele valori pentru coeficientul de filtraţie :

$$k = \begin{cases} k_1 = \text{const. pentru } 0 < z < l, \\ k_2 = (a + bz)^s \text{ pentru } l < z < L, \\ k_3 = \text{const. pentru } z > L \end{cases} \tag{1}$$

unde a, b, s sînt constante.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1305—1309, BUCUREŞTI, 1966

Pentru determinarea acestei mişcări axial-simetrice va trebui să găsim presiunile p_1, p_2, p_3 în cele trei domenii. Deci va trebui să rezolvăm următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_i}{\partial r}\right)+\frac{1}{k_i}\frac{\partial}{\partial z}\left(k_i\frac{\partial p_i}{\partial z}\right)=0, \qquad (i=1,2,3), \tag{2}$$

unde $r=\sqrt{x^2+y^2}$, cu condiţiile la limită

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \tag{3}$$

$$\left.p_1\right|_{z=l}=\left.p_2\right|_{z=l}, \quad k_1\left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=l}=k_2\left.\frac{\partial p_2}{\partial z}\right|_{z=l}, \tag{4}$$

$$\left.p_2\right|_{z=L}=\left.p_3\right|_{z=L}, \quad k_2\left.\frac{\partial p_2}{\partial z}\right|_{z=L}=k_3\left.\frac{\partial p_3}{\partial z}\right|_{z=L} \tag{5}$$

şi avînd presiunea egală cu $p_0=$ const. la mari distanţe de izvor.

Pentru $i=1$, 3, presiunile sînt de forma

$$p_1=p_0-\frac{Q}{2\pi k_1}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}+\frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{A_1(\alpha)}{2}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}+\frac{B_1(\alpha)}{2}\,\mathrm{e}^{\alpha z}\right]J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha, \tag{6}$$

$$p_3=p_0+\frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty A_3(\alpha)\,\mathrm{e}^{-\alpha z}J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{7}$$

Din condiţia (3) găsim $A_1=B_1$ şi atunci (6) se mai poate scrie

$$p_1=p_0-\frac{Q}{2\pi k_1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha z}J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha+\frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty A_1(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha z\,J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{6'}$$

Operînd schimbarea de variabilă $u=z+\dfrac{a}{b}$, ecuaţia (2) pentru $i=2$ se scrie

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right)+\frac{1}{u^s}\frac{\partial}{\partial u}\left(u^s\frac{\partial p_2}{\partial u}\right)=0. \tag{8}$$

Vom aplica asupra lui p_2 transformarea lui Hankel

$$P(u,\alpha)=\int_0^\infty p_2(r,u)\,r\,J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}r, \tag{9}$$

$$p_2(r,u)=\int_0^\infty P(u,\alpha)\,\alpha\,J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha \tag{9'}$$

şi ecuaţia (8) se transcrie

$$\frac{1}{u^s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u^s\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u}\right)-\alpha^2 P=0$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}u^2}+\frac{s}{u}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u}-\alpha^2P=0.$$

Vom face acum schimbarea de funcţie şi variabilă

$$P(u,\alpha)u^{\frac{s-1}{2}}=Z(t),\quad \alpha u=t$$

şi obţinem următoarea ecuaţie Bessel

$$Z''+\frac{1}{t}Z'-\left(1+\frac{(s-1)^2}{4}\frac{1}{t^2}\right)Z=0$$

avînd ca soluţii $I_{\frac{s-1}{2}}(t)$ şi $K_{\frac{s-1}{2}}(t)$.

Revenind la funcţia p_2, vom obţine

$$p_2=p_0+\frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \alpha u^{\frac{1-s}{2}}\left[A_2(\alpha)I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha u)+B_2(\alpha)K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha u)\right]J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{10}$$

În continuare, pentru simplificarea scrisului, vom face notaţiile $l'=l+\frac{a}{b}$, $L'=L+\frac{a}{b}$.

Condiţiile (4) se vor scrie

$$-\frac{1}{k_1}\mathrm{e}^{-\alpha l}+A_1\operatorname{ch}\alpha l=\alpha l'^{\frac{1-s}{2}}\left[A_2I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')+B_2K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')\right],$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha l}+k_1A_1\operatorname{sh}\alpha l=b^sl'^s\left\{\frac{1-s}{2}l'^{-\frac{1+s}{2}}\left[A_2I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B_2K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')\right]+\alpha l'^{\frac{1-s}{2}}\left[A_2I'_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')+B_2K'_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')\right]\right\}$$

şi folosind relaţii cunoscute pentru funcţiile Bessel, obţinem

$$A_2=l'^{\frac{s+1}{2}}\left[\frac{1}{b^sl'^s}(\mathrm{e}^{-\alpha l}+A_1k_1\operatorname{sh}\alpha l)K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')-\frac{1}{k_1}(-\mathrm{e}^{-\alpha l}+\right.$$
$$\left.+A_1k_1\operatorname{ch}\alpha l)K_{\frac{s+1}{2}}(\alpha l')\right], \tag{11}$$
$$B_2=l'^{\frac{s+1}{2}}\left[\frac{1}{b^sl'^s}(\mathrm{e}^{-\alpha l}+A_1k_1\operatorname{sh}\alpha l)I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l')+\frac{1}{k_1}(-\mathrm{e}^{-\alpha l}+\right.$$
$$\left.+A_1k_1\operatorname{ch}\alpha l)I_{\frac{s+1}{2}}(\alpha l')\right].$$

Condițiile (5) ne vor da relațiile

$$\alpha L'^{\frac{1+s}{2}}\left[A_2 I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') + B_2 K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L')\right] = A_3 \mathrm{e}^{-\alpha L},$$

$$(12)\qquad b^s L'^s \left\{\frac{1-s}{2} L'^{-\frac{1+s}{2}}\left[A_2 I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') + B_2 K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L')\right] + \right.$$

$$\left. +\alpha L'^{\frac{1-s}{2}}\left[A_2 I'_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') + B_2 K'_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L')\right]\right\} = -k_3 A_3 \mathrm{e}^{-\alpha L}.$$

Din (11) și (12) vom găsi

$$A_1 = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha l}}{k_1 N}\{b^s l'^s [k_3 M_1 - b^s L'^s M_2] + k_1 [k_3 M_3 - b^s L'^s M_4]\},$$

$$A_2 = \frac{1}{\alpha N} l'^{\frac{s-1}{2}}\left[k_3 K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') - b^s L'^s K_{\frac{s+1}{2}}(\alpha L')\right],$$

$$(13)$$

$$B_2 = -\frac{1}{\alpha N} l'^{\frac{s-1}{2}}\left[k_3 I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') + b^s L'^s I_{\frac{s+1}{2}}(\alpha L')\right],$$

$$A_3 = -\frac{1}{\alpha N} b^s L'^{\frac{s-1}{2}} l'^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{e}^{\alpha L},$$

unde

$$N = b^s l'^s \operatorname{ch} \alpha l\, [k_3 M_1 - b^s L'^s M_2] - k_1 \operatorname{sh} \alpha l\, [k_3 M_3 - b^s L'^s M_4],$$

$$M_1 = I_{\frac{s+1}{2}}(\alpha l') K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') + I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') K_{\frac{s+1}{2}}(\alpha l'),$$

$$(14)\qquad M_2 = I_{\frac{s+1}{2}}(\alpha l') K_{\frac{s+1}{2}}(\alpha L') - I_{\frac{s+1}{2}}(\alpha L') K_{\frac{s+1}{2}}(\alpha l'),$$

$$M_3 = I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l') K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') - I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha L') K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l'),$$

$$M_4 = I_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l') K_{\frac{s+1}{2}}(\alpha L') + I_{\frac{s+1}{2}}(\alpha L') K_{\frac{s-1}{2}}(\alpha l').$$

Presiunile în cele trei domenii ale mediului sînt deci date de (6′), (7) și (10), avînd în vedere (14) și (15),

3. Ca un caz particular să considerăm $l = L$, cînd mediul poros este format numai din două straturi cu coeficienții de filtrație k_1 și k_3 constanți. Obținem atunci

$$A_1 = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha l}}{k_1}\,\frac{k_3 - k_1}{k_3 \operatorname{ch}\alpha l + k_1 \operatorname{sh}\alpha l},\quad A_3 = -\frac{\mathrm{e}^{\alpha l}}{k_3 \operatorname{ch}\alpha l + k_1 \operatorname{sh}\alpha l},$$

şi deci

$$p_1 = p_0 - \frac{Q}{2\pi\, k_1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\mathrm{d}\alpha +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi k_1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha l}(k_3 - k_1)}{k_3 \operatorname{ch}\alpha l + k_1 \operatorname{sh}\alpha l} \operatorname{ch}\alpha z \; J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha, \; 0 < z < l,$$

$$p_3 = p_0 - \frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\alpha L}}{k_3 \operatorname{ch}\alpha l + k_1 \operatorname{sh}\alpha l}\, \mathrm{e}^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha, \; z > l,$$

ceea ce coincide cu soluţia dată în [1]. Pentru $z = l$ vom avea

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_0 - \frac{Q}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{k_3 \operatorname{ch}\alpha l + k_1 \operatorname{sh}\alpha l} J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha.$$

Dacă în plus vom considera $k_1 = k_3$, vom obţine

$$p_1 = p_3 = p_0 - \frac{Q}{2\pi k_1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha z} J_0(\alpha r)\,\mathrm{d}\alpha = p_0 - \frac{Q}{2\pi k_1}\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

care corespunde mişcării fluidelor într-un mediu poros omogen ce ocupă un semispaţiu, în prezenţa unui izvor plasat în origine.

Primită la redacţie la
16 octombrie 1965

Institutul de matematică al
Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti.

BIBLIOGRAFIE

1. St. I. Gheorghiţă, *Capitole din teoria mişcărilor în medii poroase*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
2. Ф. М. Мухаметзянов, *Определение функции давления в неоднородном эллиптическом пласте*, Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, Механика и машиностроение ,171 (1961).
3. Г. В. Голубев, *К определению функции давления в неоднородных по проницаемости пластах.* Труды по теории фильтрации и гидродинамике нефтяного пласта. Издательство Казанского Университета, 1961.
4. Ф. М. Мухаметзянов, *О решении некоторых задач установившейся фильтрации жидкости в неоднородном пласте*. Нефть и газ, 7, 43 (1962).
5. E. Ungureanu, *Asupra unei mişcări tridimensionale în medii poroase neomogene.* Com. Acad. R.P.R., **XIII**, *8*, 683 (1963).

MIŞCAREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL UNUI CON ELIPTIC PREVĂZUT CU ARIPI LATERALE

DE

RODICA CHIRILĂ SOCOLESCU

În lucrarea de faţă se studiază mişcarea supersonică în jurul unui con eliptic, de deschidere mică, prevăzut cu două aripi laterale simetrice, situate în întregime în interiorul conului lui Mach al vîrfului.

Se determină vitezele de perturbaţie în cazul unei incidenţe nule, apoi se determină corecţiile datorate unei incidenţe $j \neq 0$, cu ajutorul metodei lui Paul Germain [1], aşa cum a fost ea dezvoltată în [2].

În ultima parte a lucrării se calculează presiunile elementare pe obstacol, rezultanta generală şi momentul rezultant al acestor presiuni.

Prin particularizarea rezultatelor găsite, pentru cazul cercului, se obţin rezultatele cunoscute [3].

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Să considerăm mişcarea supersonică a unui fluid compresibil de viteză w_∞ paralelă cu axa Oz, în prezenţa unui con cu vîrful în originea axelor de coordonate, de deschidere foarte mică.

În acest caz mişcarea supersonică a fluidului, pentru numere Mach M_∞, destul de mici, poate fi studiată în aproximaţie liniară.

După teoria generală a mişcărilor conice, pentru determinarea vitezelor de perturbaţie $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ e suficient să cunoaştem $u(x, y, 1)$, $v(x, y, 1)$ $w(x, y, 1)$, deci vitezele de perturbaţie în planul $z = 1$.

Trecerea la planul (ζ) a lui Busemann, este dată de transformarea

$$\zeta = \xi + i\,\eta = \frac{\beta\,(x + iy)}{1 + \sqrt{1 - \beta^2\,(x^2 + y^2)}} \tag{1}$$

unde

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}.$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1311,1325, BUCUREŞTI, 1966

Prin transformarea (1), $u(x, y, 1)$, $v(x, y, 1)$, $w(x, y, 1)$ devin funcții armonice de ζ. Ele sînt date de :

$$
(2)\qquad \begin{cases} u + iu' = U(\zeta) = -\dfrac{\beta}{2}\displaystyle\int \dfrac{\zeta^2+1}{\zeta}\,\dfrac{\mathrm{d}W(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta, \\[2ex] v + iv' = V(\zeta) = \dfrac{i\beta}{2}\displaystyle\int \dfrac{\zeta^2-1}{\zeta}\,\dfrac{\mathrm{d}W(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta, \\[2ex] w + i\,w' = W(\zeta), \end{cases}
$$

unde s-a notat prin u', v', w' conjugatele armonice ale funcțiilor u, v, respectiv w.

Deoarece am considerat conul de deschidere foarte mică, în transformarea (1) putem neglija pe x^2 și y^2 în prezența unității și atunci trecerea la planul (ζ) putem să o considerăm dată de :

$$
(1')\qquad \zeta = \xi + i\eta = \frac{\beta}{2}(x + iy).
$$

Fie (C) intersecția conului cu planul $z = 1$. Fie (C') imaginea prin transformarea (1) a curbei (C).

Condițiile la limită pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile u, v, w, pe curba (C') și pe cercul $|\zeta| = 1$, sînt :

$$
(3)\qquad \operatorname{Re}\{\, i(u - iv)\,\mathrm{d}\zeta\} = \frac{2}{\beta}\, w_\infty \operatorname{Im}\{\bar{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\} \quad \text{pe } (C')
$$

$$
(4)\qquad u = v = w = 0 \qquad\qquad \text{pe } |\zeta| = 1.
$$

Cercul $|\zeta| = 1$ este imaginea prin transformarea (1) a intersecției conului lui Mach cu planul $z = 1$.

În aceste ipoteze, analizînd ordinul de mărime al termenilor ce intervin în relațiile (2), Paul Germain [1], [2], a propus o metodă de aproximație care conduce, în vecinătatea curbei (C'), la următoarele expresii pentru $U(\zeta)$, $V(\zeta)$, $W(\zeta)$:

$$
(5)\qquad \begin{aligned} U(\zeta) &= H(\zeta) - k_1\zeta, \\ V(\zeta) &= i\,H(\zeta) + i\,k_1\,\zeta, \\ W(\zeta) &= \zeta\,H(\zeta) - \int_\infty^\zeta \left[H(\zeta) - \frac{k_1}{\zeta}\right]\mathrm{d}\zeta - k_1(1 + \log\zeta) - 2\bar{k}_2\,\zeta. \end{aligned}
$$

Aici $H(\zeta)$ este o funcție olomorfă în exteriorul lui (C'), care are la infinit dezvoltarea

$$
(6)\qquad H(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\zeta^n}
$$

cu k_1 un număr real. Ea urmează să fie determinată prin condiția la limită dată mai jos.

Dacă introducem relaţiile (5) în condiţia la limită (3), rezultă pentru determinarea funcţiei $H(\zeta)$ problema lui Hilbert :

$$\operatorname{Re}\{ iH(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\} = -\frac{2}{\beta} w_\infty \operatorname{Im}\{\bar\zeta\,\mathrm{d}\zeta\}. \tag{7}$$

Prin reprezentarea conformă a exteriorului lui (C') pe exteriorul unui cerc Γ dintr-un plan $Z = X + iY$, determinarea funcţiei $H(\zeta)$ revine la rezolvarea unei probleme Dirichlet exterioară pentru funcţia

$$G(z) = H(\zeta)\cdot Z\cdot\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}Z} \tag{8}$$

olomorfă în exteriorul lui Γ, reală la infinit şi care satisface condiţia la limită :

$$\operatorname{Re}\{G\ Z\} = \frac{2}{\beta} w_\infty \operatorname{Re}\left\{\bar\zeta\, Z\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}Z}\right\}. \tag{9}$$

pe cercul Γ.

În cazul în care dăm obstacolului conic o incidenţă χ, conturul (C') suferă o translaţie $j = -\frac{2}{\beta}\chi$, şi soluţiei iniţiale $H(\zeta)$, pe care o vom nota acum cu $H_1(\zeta)$, i se va adăuga un termen corectiv şi atunci vom avea :

$$H(\zeta) = H_1(\zeta) + \frac{2i\chi}{\beta} w_\infty \left[-1 + \left(1 + \frac{r^2}{Z^2}\right)\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\right]. \tag{10}$$

2. DETERMINAREA VITEZELOR DE PERTURBAŢIE ÎN CAZUL CONULUI DE INCIDENŢĂ NULĂ

Să considerăm în planul mişcării un con eliptic, de deschidere foarte mică, cu vîrful în originea axelor de coordonate, prevăzut cu aripi laterale simetrice (fig. 1).

Curba (C) are ecuaţia dată de :

$$\mathrm{S}:\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\mathrm{S}_1:\quad y = 0 \qquad a < x < x_1$$

$$\mathrm{S}_2:\quad y = 0 \qquad -x_1 < x < -a.$$

În figura 2 este trasată curba (C) şi cercul $|z| = \frac{1}{\beta}$ obţinut prin intersecţia conului lui Mach cu planul $z = 1$.

Axa Oz face cu generatoarele conului-obstacol, unghiuri cel mult egale cu λ, unde

$$\lambda \simeq \sin\lambda = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Se știe că prin prezența aripilor laterale se introduce condiția $v = 0$ pe S_1 și S_2. Această condiție, după cum se arată în teoria generală [2], este îndeplinită de către expresiile vitezelor perturbatoare ale mișcării fluidului, calculate numai în prezența conului S, adică în cazul cînd nu avem aripi laterale.

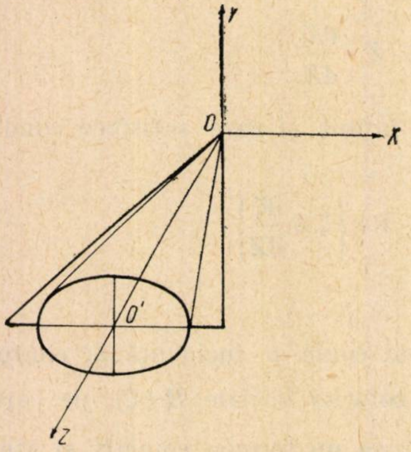


Fig. 1

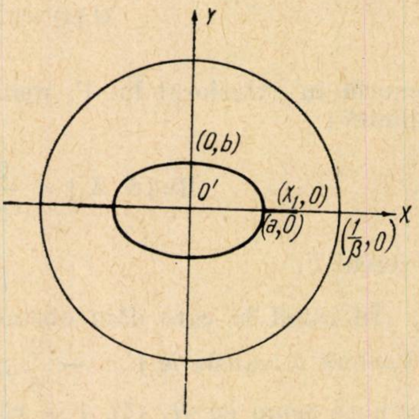


Fig. 2

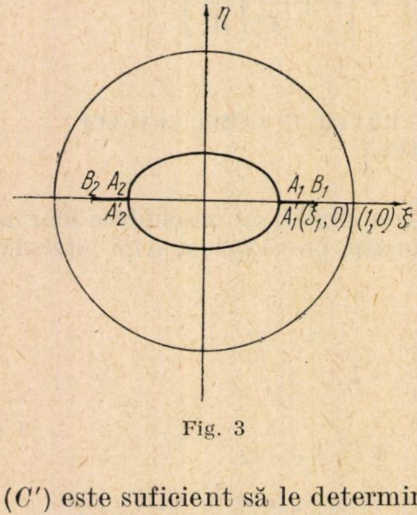


Fig. 3

Prin transformarea (1′) trecem de la planul (z) la planul (ζ), iar curba (C') astfel obținută este formată dintr-o elipsă de semiaxe $a' = \frac{\beta}{2}\,a$ și $b' = \frac{\beta}{2}\,b$ și două segmente simetrice (fig. 3) a căror extremități au abscisele $\xi_1 = \frac{\beta}{2} x_1$ și respectiv $-\xi_1$.

Pentru determinarea vitezelor $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, $w(\xi, \eta)$ pentru curba (C') este suficient să le determinăm doar pentru elipsa S'.

Pentru aceasta vom trece la cercul din planul (Z) prin reprezentarea

$$\zeta = \frac{a'+b'}{2}Z + \frac{a'-b'}{2}\,\frac{1}{Z}. \tag{11}$$

Din condiţia la limită (9) se găseşte :

$$G(Z) = \frac{2}{\beta} w_\infty a' b' + i k, \tag{12}$$

unde k este o constantă reală ce urmează să fie determinată.

Ţinînd seama de relaţia (8), găsim

$$H(\zeta) = \frac{2}{\beta} (w_\infty a' b' + i k) \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - c'^2}}, \tag{13}$$

unde vom lua la infinit, pentru radicalul $\sqrt{1 - \frac{c'^2}{\zeta^2}}$, determinaţia $+1$.

Dacă dezvoltăm pe $H(\zeta)$ în vecinătatea punctului de la infinit şi impunem condiţia ca reziduul corespunzător să fie real, găsim $k = 0$.

Relaţia (13) devine astfel :

$$H(\zeta) = \frac{2}{\beta} \frac{w_\infty a' b'}{\sqrt{\zeta^2 - c'^2}}. \tag{13'}$$

La mari distanţe $H(\zeta)$ este atunci de forma :

$$H(\zeta) = \frac{2}{\beta} w_\infty a' b' \frac{1}{\zeta} - c'^2 w_\infty a' b' \frac{1}{\zeta^2} + \ldots \tag{14}$$

Vitezele de perturbaţie se calculează din relaţiile (5) în care înlocuim expresiile (13′) şi (14).

Astfel vom obţine :

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= \frac{2}{\beta} w_\infty a' b' \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - c'^2}} - \zeta \right) \\ V(\zeta) &= \frac{2i}{\beta} w_\infty a' b' \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - c'^2}} + \zeta \right) \\ W(\zeta) &= -\frac{4}{\beta^2} w_\infty a' b' \left[\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - c'^2}}{\sqrt{\zeta^2 - c'^2}} - \log \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - c'^2}}{2} \right], \end{aligned} \tag{15}$$

unde am ţinut seama că :

$$\frac{1}{2} \lim_{\zeta \to \infty} \left[\log \frac{\zeta^2 (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - c'^2})}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - c'^2}} \right] = \log \frac{c'}{2}.$$

Dacă în formulele (15) considerăm $a' = b' = \rho$, deci dacă considerăm cazul cercului, vom obţine :

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= -\frac{2}{\beta} w_\infty \rho^2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \\ V(\zeta) &= \frac{2i}{\beta} w_\infty \rho^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \\ W(\zeta) &= \frac{4}{\beta^2} w_\infty \rho^2 \log \rho. \end{aligned} \tag{16}$$

Se va remarca, că prin înlocuirea lui ρ^2 prin $\dfrac{\rho^2}{1-\rho^2}$ s-ar obține expresiile exacte cunoscute [1], [2], care convin conului circular, fără nici o simplificare. În cazul actual, ρ fiind mic, se poate face deci înlocuirea $\dfrac{\rho^2}{1-\rho^2} \simeq \rho^2$, ceea ce ne dă o verificare directă, pe acest exemplu, a metodei de aproximație utilizată.

Această aproximație este deci o consecință a metodei lui Paul Germain.

3. DETERMINAREA CORECȚIILOR DE INCIDENȚĂ

În continuare vom căuta să determinăm vitezele de perturbație în cazul în care dăm conului o incidență $j = -\dfrac{2}{\beta}\chi$.

Trecerea de la planul (ζ) la cercul din planul (*Z*) (fig. 4) se va realiza prin transformarea

$$Z + \frac{r^2}{Z} = \zeta + \frac{b'(a'+b')}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - c'^2}} \tag{24}$$

unde r, raza cercului Γ, are valoarea

$$2r = \xi_1 + \frac{b'(a'+b')}{\xi_1 + \sqrt{\xi_1^2 - c'^2}}, \tag{25}$$

determinația radicalului fiind aceea care la infinit ia valoarea $+1$.

După cum se vede, în figură, punctelor B_1 și B_2 de abscisă ξ_1 și respectiv $-\xi_1$ din planul (ζ), le corespund punctele de coordonate $Z = r$ și respectiv $Z = -r$.

Punctelor A_1 și A_1' de afixe $\zeta = a'$ considerate ca aparținînd marginii superioare și respectiv inferioare a segmentului simetric $A_1' B_1'$ din planul (ζ), le corespund punctele de coordonate $Z = re^{i\varphi_0}$ și respectiv $Z = re^{i\varphi_0}$, unde

$$\cos\varphi_0 = \frac{a'+b'}{2r}.$$

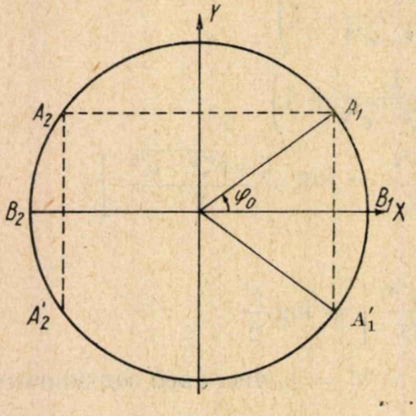


Fig. 4

Pentru a calcula vitezele de perturbație în relațiile (5), vom înlocui pe $H(\zeta)$ cu valoarea sa obținută din (10).

Din relația (24) obținem :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = 1 + \frac{r^2 - \dfrac{b'(a'+b')}{2}}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^3}(\ldots) \tag{26}$$

în vecinătatea punctului de la infinit şi din (5), ţinînd seama de (10) şi (26), găsim :

$$U(\zeta) = U_1(\zeta) + H_2(\zeta)$$

$$V(\zeta) = V_1(\zeta) + i\, H_2(\zeta)$$

$$W(\zeta) = W_1(\zeta) - \frac{4i\chi}{\beta^2} w_\infty \left[4r^2 - b'(a' + b') + 1\right] \zeta - \tag{27}$$

$$- \frac{2}{\beta} \zeta H_2(\zeta) + \frac{4i\chi}{\beta^2} w_\infty \left(Z - \frac{r^2}{Z}\right).$$

În aceste relaţii Z se înlocuieşte cu valoarea sa în funcţie de ζ din relaţia (24).

În relaţiile (27) am notat cu $U_1(\zeta)$, $V_1(\zeta)$, $W_1(\zeta)$ vitezele obţinute pentru $j = 0$, deci date de relaţiile (21), iar cu $H_2(\zeta)$ expresia :

$$H_2(\zeta) = \frac{2i\chi}{\beta} w_\infty \left[-1 + \left(1 + \frac{r^2}{Z^2}\right) \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\zeta}\right]. \tag{28}$$

4. DETERMINAREA PRESIUNII PE PROFIL

Calcularea rezultantei generale a presiunilor pe curba (C') necesită calcularea presiunii pe elipsă şi pe cele două segmente simetrice cu ajutorul relaţiei simplificate

$$p = p_\infty - \rho_\infty w_\infty \cdot w - \frac{1}{2} \rho_\infty (u^2 + v^2). \tag{29}$$

Pentru aceasta trebuie calculate expresiile lui u, v, w, cînd ζ parcurge elipsa şi apoi segmentele simetrice.

Pe elipsă avem

$$\zeta = a' \cos\theta + ib' \sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \tag{30}$$

iar în planul (Z),

$$Z = re^{i\varphi}, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \pi - \varphi_0; \quad -\pi - \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant -\varphi_0.$$

între φ şi θ există relaţia :

$$2r \cos\varphi = (a' + b') \cos\theta. \tag{31}$$

Înlocuind (30) în (21) şi (28), obţinem :

$$\operatorname{Re}\{U_1(\theta)\} = -\frac{2}{\beta} w_\infty a' b' \left(a' - \frac{b'}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta}\right)\cos\theta$$

$$\operatorname{Re}\{V_1(\theta)\} = -\frac{2}{\beta} w_\infty a' b' \left(b' - \frac{a'}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta}\right)\sin\theta$$

$$\operatorname{Re}\{W_1(\theta)\} = \frac{4}{\beta^2} w_\infty a' b' \left(1 + \log\frac{a'+b'}{2} - \frac{a' b'}{b'\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta}\right)$$

$$\operatorname{Re}\{H_2(\theta)\} = \frac{2\chi}{\beta} w_\infty \operatorname{ctg}\varphi \frac{a'(a'+b')\sin^2\theta}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta}$$

$$\operatorname{Re}\{iH_2(\theta)\} = \frac{2\chi}{\beta} w_\infty \left[1 - \operatorname{ctg}\varphi \frac{b'(a'+b')\sin\theta\cos\theta}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta}\right]$$

$$\operatorname{Re}\{(a'\cos\theta + i' b'\sin\theta) H_2(\theta)\} = \frac{2\chi}{\beta} w_\infty \left[b'\sin\theta + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ctg}\varphi \frac{c'^2(a'+b')\sin^2\theta\cos\theta}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta}\right]$$

Din aceste relaţii şi din expresia presiunii (29), dacă neglijăm termenii ce conţin pe χ^2, găsim :

$$p = p_e + \frac{4}{\beta^2}\rho_\infty w_\infty^2 \chi \left[b'\sin\theta(2a'b' + b'^2 - 4r^2) + 2r\sin\varphi - \right.$$

$$\left. - \frac{a'^2 b'\sin\theta}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta} \operatorname{ctg}\varphi \frac{c'^2(1+a'b')(a'+b')\sin^2\theta\cos\theta}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta}\right] \tag{32}$$

unde

$$p_e = p_\infty - \frac{2}{\beta^2}\rho_\infty w_\infty^2 a'b' \left[2 - \frac{a'b'(1+2a'b')}{b'^2\cos^2\theta + a'^2\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left. + 2\log\frac{a'+b'}{2} + a'b'(b'^2\sin^2\theta + a'^2\cos^2\theta)\right]. \tag{33}$$

Relaţia (33) a fost obţinută prin înlocuirea în relaţia (29) lui u, v, w cu u_1, v_1, w_1 respectiv, deci reprezintă expresia presiunii pe elipsă în cazul incidenţei nule.

Pentru a calcula presiunea pe segmentele simetrice, este suficient, din motive de simetrie, să calculăm componentele vitezei u, v, w doar pentru unul din segmente, fie el A_1B_1. Pe acest segment avem $a' \leqslant \xi \leqslant \xi_1$ şi în planul (Z), $Z = re^{i\varphi}$ cu $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$. Legătura între ξ şi φ este dată de relaţia

$$2r\cos\varphi = \xi + \frac{b'(a'+b')}{\xi + \sqrt{\xi^2 - c'^2}}. \tag{34}$$

În acest caz, din (28), găsim:

$$\operatorname{Re}\{H_2(\xi)\} = \frac{2\chi}{\beta} w_\infty \operatorname{ctg} \varphi \left[1 - \frac{b'(a'+b')}{\xi + \sqrt{\xi^2 - c'^2})\sqrt{\xi^2 - c'^2}}\right].$$

$$\operatorname{Re}\{i H_2(\xi)\} = \frac{2\chi}{\beta} w_\infty .$$

Astfel pentru $u(\xi, 0)$, $v(\xi, 0)$, $w(\xi, 0)$, obţinem expresiile:

$$u(\xi, 0) = -\frac{2}{\beta} w_\infty \left\{a' b' \left(\xi - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - c'^2}}\right) - \chi \operatorname{ctg} \varphi \left[1 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{b'(a'+b')}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - c'^2})\sqrt{\xi^2 - c'^2}}\right]$$

$$(35) \qquad v(\xi, 0) = \frac{2\chi}{\beta} w_\infty$$

$$w(\xi, 0) = -\frac{4}{\beta^2} w_\infty \left\{a'b' \left[\frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - c'^2}}{\sqrt{\xi^2 - c'^2}} - \log \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - c'^2}}{2}\right] + \right.$$

$$+ 2 r \sin \varphi + \chi \operatorname{ctg} \varphi \left[1 - \frac{b'(a'+b')}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - c'^2})\sqrt{\xi'^2 - c'^2}}\right].$$

Din expresia obţinută pentru $v(\xi, 0)$ se vede că:

$$v = - w_\infty j,$$

deci soluţia găsită satisface condiţia la limită cunoscută pentru aripa plană cu incidenţă.

Dacă înlocuim relaţiile (35) în relaţia (29), vom găsi expresia presiunii p_1, pe segmentul $A_1 B_1$.

Dacă în expresia lui p_1 înlocuim pe φ cu $-\varphi$, vom găsi presiunea pe segmentul $A_1' B_1$. Din motive de simetrie pe segmentele $A_2 B_2$ şi $A_2' B_2$ vom obţine valori egale cu p_1 şi respectiv cu p_2.

Efectuînd toate calculele vom obţine:

$$(36) \quad p_1 - p_2 = \frac{16 r \chi}{\beta^2} \rho_\infty w_\infty^2 \sin^2 \varphi +$$

$$+ \frac{8\chi}{\beta^2} \rho_\infty w_\infty^2 \left[1 - \frac{b'(a'+b')}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - c'^2})\sqrt{\xi^2 - c'^2}}\right]\left[\xi(1 + a'b') - \frac{a'b'}{\sqrt{\xi^2 - c'^2}}\right] \operatorname{ctg} \varphi.$$

6. DETERMINAREA REZULTANTEI GENERALE A PRESIUNILOR PE PROFIL

Rezultanta presiunilor ce acţionează asupra obstacolului va fi dată de:

$$(37) \qquad \vec{R} = \int_\Sigma p \, \vec{n}_i \, d\sigma,$$

unde Σ este suprafaţa totală a obstacolului şi $\vec{n}_i$ este versorul normalei interioare.

Pe S' vom avea :

$$\vec{n}_i \, \mathrm{d}\sigma = -z\left(b' \cos\theta\,\vec{i} + a' \sin\theta\,\vec{j} - \frac{2}{\beta}a'b'\,\vec{k}\right)\frac{2}{\beta}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta \tag{38}$$

iar pe S_1 şi S_2 vom lua $\vec{n}$ dirijat spre segmentul pozitiv al ordonatei.

Din motive de simetrie rezultanta generală a presiunii pe S_1' va fi egală cu aceea obţinută pe S_2' şi atunci vom avea :

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + 2\,\vec{R}_1,$$

unde am notat cu $\vec{R}_0$ contribuţia elipsei S', iar cu $\vec{R}_1$ ceea ce obţinem din presiunea care acţionează pe S_1' sau pe S_2'.

Expresia lui $\vec{R}_0$ va fi dată de :

$$\vec{R}_0 = -\frac{z_0^2}{\beta}\int_0^{2\pi} p\left(b' \cos\theta\,\vec{i} + a' \sin\theta\,\vec{j} - \frac{2}{\beta}a'b'\,\vec{k}\right)\mathrm{d}\theta, \tag{39}$$

unde p este dată de relaţia (32), iar $z = z_0$ este planul la care am limitat conul eliptic.

Pentru $\vec{R}_1$ obţinem expresia :

$$\vec{R}_1 = -\vec{n}\,\frac{z_0^2}{\beta}\int_{a'}^{\xi_1}(p_1 - p_2)\,\mathrm{d}\xi, \tag{40}$$

unde $(p_1 - p_2)$ este dată de relaţia (36), iar

$$\vec{n} = \vec{j}\cdot\cos\left(\frac{2}{\beta}\chi\right) - \vec{k}\cdot\sin\left(\frac{2}{\beta}\chi\right)\cdot$$

Pentru a afla expresia lui $\vec{R}_0$, introducem relaţiile (32), (33) şi (38) în (39) şi ţinînd seama de relaţiile :

$$\int_0^{2\pi} p \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} p \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{4\pi}{\beta^2}\rho_\infty w_\infty^2\,\chi\left[4r^2 - 2a'b' - b'^2 + \frac{2a'}{a' + b'}\right] \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} p\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left\{p_\infty - \frac{4}{\beta^2}\rho_\infty w_\infty^2\, a'b'\left[\frac{1}{2} + \log\frac{a'+b'}{2} - \right.\right.\\ \left.\left. - \frac{a'b'}{4}(a'^2+b'^2-4)\right]\right\} + \frac{32\,r}{\beta^2}\chi\,\rho_\infty w_\infty E\,(k),\end{aligned}$$

unde $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin\varphi}\, d\varphi$ cu $0 < k = \frac{a'+b'}{2r} < 1$, găsim

$$\vec{R}_0 = -\frac{z_0^2}{\beta}\left[a'\vec{j}\int_0^{2\pi} p \sin\theta\, d\theta - \frac{2}{\beta} a'b'\vec{k}\int_0^{2\pi} p\, d\theta\right]. \tag{42}$$

Pentru calculul lui $\vec{R}_1$ înlocuim relația (36) în relația (40) și dacă notăm :

$$I_1 = \int_{a'}^{\xi_1}\left[1 - \frac{b'(a'+b')}{(\xi+\sqrt{\xi^2-c'^2})\sqrt{\xi^2-c'^2}}\right]\xi \operatorname{ctg}\varphi\, d\xi$$

$$I_2 = 2r\int_{a'}^{\xi_1} \sin\varphi\, d\xi \tag{43}$$

$$I_3 = \int_{a'}^{\xi_1}\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{\xi^2-c'^2}}\right)\left[1 - \frac{b'(a'+b')}{(\xi+\sqrt{\xi^2-c'^2})\sqrt{\xi^2-c'^2}}\right]\operatorname{ctg}\varphi\, d\xi$$

vom avea atunci :

$$\vec{R}_1 = -\frac{8 z_0^2}{\beta^3}\rho_\infty w_\infty \chi \vec{n}(I_1 + I_2 + a'b' I_3). \tag{44}$$

Pentru calculul celor trei expresii (43), folosim relația (34) ce ne dă legătura între ξ și φ și rezolvînd integralele care apar, găsim :

$$I_1 = \frac{2r^2 a'}{a'+b'} \arcsin\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2} + a'r\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2} + \\ + \frac{\pi b'}{4}\cdot\frac{4r^2-(a'+b')^2}{a'+b'} \tag{45}$$

$$I_2 = I_1 - 2a'r\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2} \tag{46}$$

$$I_3 = I_1 - 2r(a'+b')\int_0^{\varphi_0}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{2r\,b'\cos\varphi + a'\sqrt{4r^2\cos^2\varphi-(a'+b')^2}}. \tag{47}$$

Calculînd și integralele din expresia lui I_3, găsim

$$I_3 = I_1 + \frac{b'}{a'-b'}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2r}{a'+b'}\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2}\right) - \\ - \frac{a'(a'+b')}{\sqrt{a'^2(a'+b')^2-4r^2c'^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2ra'\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2}}{\sqrt{a'^2(a'+b')^2-4r^2c'^2}}\right)\right] - \\ - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a'}{a'-b'}\left[1 - \frac{b'(a'+b')}{\sqrt{a'^2(a'+b')^2-4r^2c'^2}}\right], \tag{47'}$$

Se observă că dacă particularizăm expresiile lui I_1 şi I_2 pentru cazul cercului, deci pentru $a' = b' = \rho$, se obţin rezultatele cunoscute din [3].

Pentru a obţine şi expresia lui I_3 în cazul cercului, nu vom putea face înlocuirea directă în (47′), deoarece căpătăm nedeterminarea $\frac{0}{0}$.

Calcularea lui I_3 se poate face sau din (47), sau în relaţia (47′) în care vom încerca o dezvoltare în serii după puterile lui $(a'-b')$.

Dacă dezvoltăm astfel pe $\frac{2r}{a'+b'}\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2}$ şi apoi pe $\operatorname{arctg}\left[\frac{2r}{a'+b'}\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2}\right]$ vom putea scrie:

$$\operatorname{arctg}\left[\frac{2r}{a'+b'}\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2}\right] = \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\rho}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}\right) - $$

$$- (a'-b')\frac{\rho^2}{2b'^2 r\sqrt{1-\frac{b'^2}{r^2}}} + \mathrm{O}[(a'+b')^2] + \ldots$$

Prin acelaşi procedeu vom obţine:

$$\frac{a'(a'+b')}{\sqrt{a'^2(a'+b')^2-4r^2c'^2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2ra'\sqrt{1-\left(\frac{a'+b'}{2r}\right)^2}}{\sqrt{a'^2(a'+b')^2-4r^2c'^2}}\right] =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\rho}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}\right) + (a'-b')\left[\frac{r^2}{b'^3}\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\rho}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho^2(2r^2-3b'^2)}{2b'^4 r^2\sqrt{1-\frac{b'^2}{r^2}}}\right] + \mathrm{O}[(a'-b')^2] + \ldots$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, găsim pentru I_3 aceeaşi expresie ca în [3]:

$$I_3 = I_1 - \frac{r^2}{\rho^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\rho}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}\right) - \frac{r}{\rho}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}} + \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{\rho^2}\left(1-\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Înlocuind expresiile lui I_1, I_2, I_3 astfel obţinute în (44), obţinem pentru $\vec{R}_1$ rezultatul cunoscut din [3].

7. DETERMINAREA MOMENTULUI REZULTANT AL PRESIUNILOR PE PROFIL

Se ştie că momentul rezultant al presiunilor pe un obstacol se poate calcula prin relaţia:

$$\vec{M}_0 = \int_{\Sigma} \vec{r} \times p\vec{n}\, d\sigma,$$

unde Σ este suprafaţa totală a obstacolului.

Ca şi în cazul rezultantei, vom considera conul cu baza în planul $z = z_0$.

Vom calcula, folosindu-ne de relaţia (XIX, 105), dată în [2], pag. 1180, momentele rezultante, în raport cu vîrful conului, ale presiunilor ce acţionează pe elipsă, pe segmentul A_1B_1 şi segmentul A_2B_2 pe care le vom nota cu $\vec{M}$, $\vec{M}_1$, şi respectiv $\vec{M}_2$.

Momentul total va fi dat de :

$$\vec{M}_0 = \vec{M} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \tag{48}$$

Găsim

$$\vec{M} = \frac{z_0^3}{3}\int_0^{2\pi} p\,[a'(1+b'^2)\sin\theta\,\vec{i} - b'(1+a'^2)\cos\theta\,\vec{j} - c'^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{k}]\,\mathrm{d}\theta \tag{49}$$

cu p dat de relaţiile (32) şi (33).

Pentru $\vec{M}_1$ şi $\vec{M}_2$ găsim relaţiile

$$\vec{M}_1 = \frac{z_0^3}{3}\int_{a'}^{\xi_1}(p_1-p_2)(-\vec{i}+\xi\,\vec{k})\,\mathrm{d}\xi \tag{50}$$

$$\vec{M}_2 = \frac{z_0^3}{3}\int_{-a'}^{\xi_1}(p_1-p_2)(\vec{i}+\xi\,\vec{k})\,\mathrm{d}\xi \tag{51}$$

unde $(p_1 - p_2)$ este dat de relaţia (36).

Se vede uşor că

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{2z_0^3}{3}\vec{k}\int_{a'}^{\xi_1}(p_1-p_2)\,\xi\,\mathrm{d}\xi. \tag{52}$$

Dacă ţinem seama că :

$$\int_0^{2\pi} p\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$$

găsim cu ajutorul relaţiilor (41) :

$$\vec{M} = -\frac{4\pi z_0^3}{3\beta^2}\vec{i}\,\rho_\infty w_\infty^2\chi\,a'(1+b'^2)\left[4r^2 - 2a'b' - b'^2 + \frac{2a'}{a'+b'}\right]. \tag{53}$$

Să notăm cu

$$J_h = \int_{a'}^{\xi_1}\xi\frac{\mathrm{d}I_h}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi,\quad (h = 1,\ 2,\ 3), \tag{54}$$

unde I_h sînt date de relaţiile (43).

Cu ajutorul relaţiei (53) găsim :

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{32\,z_0^3}{3\beta^2}\vec{k}\,\rho_\infty w_\infty^2\chi\,(J_1 + J_2 + a'b'J_3). \tag{55}$$

În relațiile (54), calculînd integralele ce intervin pentru fiecare h în parte, obținem :

$$J_1 = \frac{2r}{3k^2}\left[a'(k^2+2) + 2\,b'^2(k^2-1)\right]\sqrt{1-k^2} + \tag{56}$$

$$+ \frac{2a'\,b'}{3}\left[(2-k^2)\,E\,(k') + k^2\,K\,(k')\right]$$

$$J_2 = \frac{r\,(1-k^2)}{k^2}\left[\pi\,a'\,b' + \frac{2}{3}(a'^2+b'^2)\sqrt{1-k^2}\right] + \tag{57}$$

$$+ 2a'\,b'\,r\left[E\,(k') - K\,(k')\right]$$

$$J_3 = J_1 - 2r\int_0^{\varphi} \frac{a'\cos\varphi + b'\sqrt{\cos^2\varphi - k^2}}{b'\cos\varphi + a'\sqrt{\cos^2\varphi - k^2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \tag{58}$$

unde am notat cu $k = \dfrac{a'+b'}{2r}$, iar cu $K\,(k')$ și $E\,(k')$ integralele eliptice de prima și respectiv a doua speță :

$$K\,(k') = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$E\,(k') = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Calculînd integralele ce intervin în (58), J_3 se poate scrie :

$$J_3 = J_1 + \frac{2r\,a'\,b'}{c'^3}\left[2rc'\sqrt{1-k^2} + \right. \tag{58'}$$

$$\left. + \frac{k^2\,(c'^2 - 2ra'^2)}{\sqrt{a'^2\,k^2 - c'^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{c'\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{a'^2k^2 - c'^2}}\right] - \frac{a'^2+b'^2}{c'^4}\left[c'^2\,E\,(k') + \right.$$

$$\left. + k^2\,(a'^2\sqrt{1-k^2} - c'^2)\,K\,(k')\right] -$$

$$\frac{a'^2\,b'^2\,k^2\,(a'^2+b'^2)}{c'^4\,(a'^2\,k^2 - c'^2)}\,\Pi\left(\frac{\pi}{2},\,\frac{c'^2\,(1-k^2)}{a'^2\,k^2 - c'^2},\,k'\right)$$

unde

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},\,n,\,k'\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k'^2\sin\,\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi$$

este integrala eliptică de speța a treia.

În cazul particular $a' = b' = \rho$, deci $k = \frac{\rho}{r}$, vom găsi:

$$J_1 = \frac{2r\rho^2}{3k^2}[(k^2+2)+2(k^2-1)]\sqrt{1-k^2}+\frac{2\rho^2}{3}[(2-k^2)E(k')+k^2K(k')],$$

$$J_2 = \frac{r\rho^2(1-k^2)}{k^2}\left[\pi+\frac{4}{3}\sqrt{1-k^2}\right]+2\rho^2 r\,[E(k')-K(k')],$$

$$J_3 = J_1 - 2r\sqrt{1-k^2}.$$

Primită la redacţie la 19 februarie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Paul Germain, *Thèses*, Paris, 1948 (O.N.E.R.A. 1949), cap. II.
2. Caius Iacob, *Introduction mathematique à la mec. des fluides*. Ed. Acad. R.P.R.—Gauthier-Villars, Bucarest, 1959.
3. Elena Murgulescu, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe mat. şi fizice, **6**, *4*, 741—753 (1954).

DERIVATE GENERALIZATE ÎN TEORIA FORMALĂ A OMOLOGIEI

DE

IULIAN POPOVICI

Se dă o construcție unitară a unui șir de operatori de derivare generalizată [1], [5] definiți pe categoria complexelor simpliciale ; primul termen al acestui șir este operatorul clasic de derivare din teoria formală a omologiei. Operatorii introduși sînt studiați cu ajutorul teoriei axiomatice a omologiei [2] prin analogie cu studiul efectuat de Spanier [6] în cazul grupurilor lui Mayer [4]. Analogia se extinde de asemenea asupra rezultatelor obținute și, pentru a putea fi explicată, am înglobat un paragraf consacrat unor proprietăți generale ale derivărilor de diverse ordine.

1. ELEMENTE DE TEORIE GENERALĂ

O pereche (X, d) formată dintr-un grup abelian X și un operator al său d se numește *grup cu* $(p-1)$*-derivare* (p întreg > 1), dacă $d^p = 0$. Grupurile cu derivare [7] corespund cazului $p = 2$.

Nucleul $Z^q(X)$ $(q = 1, \ldots, p-1)$ al operatorului d^q se numește *grupul q-ciclilor* asociat perechii (X, d), iar imaginea $B^q(X)$ a lui X prin d^{p-q} se numește *grupul q-frontierelor*. Avem evident : $B^q(X) \subset Z^q(X)$. Grupul cît $H^q(X) = Z^q(X)/B^q(X)$ se numește *grupul de q-omologie* al perechii (X, d).

Vom nota cu (X, Y) o pereche formată dintr-un grup abelian X cu $(p-1)$-derivare d și un subgrup $Y \subset X$ admis de $d[d(Y) \subset Y]$. Fie $\mathfrak{D}_p$ categoria ale cărei obiecte sînt perechile (X, Y) [orice grup X cu $(p-1)$-derivare va fi identificat cu perechea $(X, 0)$]. Convenim să notăm cu același simbol d operatorii perechilor $(X, Y) \in \mathfrak{D}_p$, avînd grijă să specificăm (de fiecare dată cînd există posibilitatea unor confuzii) perechea în care operează d. Un morfism $f : (X, Y) \to (X', Y')$ din categoria $\mathfrak{D}_p$ este prin definiție un omomorfism $f : X \to X'$ $[f(Y) \subset Y']$ care comută cu d. Diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X, Y) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d^q"'] & (X', Y') \arrow[d, "d^q"'] \\
(X, Y) \arrow[r, "f"] & (X', Y')
\end{tikzcd}$$

$(q = 1, \ldots, p-1)$ este deci comutativă.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1327–1337, BUCUREȘTI, 1966

Fiind dată o pereche $(X, Y) \in \mathfrak{D}_p$, grupul cît X/Y poate fi dotat cu 0 $(p-1)$-derivare punînd : $\mathrm{d}\,(x + Y) = \mathrm{d}x + Y\ (x \in X)$. Incluziunea $i : Y \to X$ şi omomorfismul canonic $j : X \to X/Y$ sînt morfisme în sensul definiţiei anterioare.

Vom asocia fiecărei perechi $(X, Y) \in \mathfrak{D}_p$ grupurile $B^q(X, Y) = B^q(X/Y)$, $Z^q(X, Y) = Z^q(X/Y)$ şi $H^q(X, Y) = H^q(X/Y)$, numite respectiv grupurile q-frontierelor, grupurile q-ciclilor şi grupurile de q-omologie (relativă ale perechii (X, Y). Fie $\overline{Z}^q(X, Y)$ imaginea inversă prin d^q a grupului Y şi $\overline{B}^q(X, Y)$ subgrupul lui X generat de $B^q(X)$ şi de Y :

$$\overline{B}^q(X, Y) = B^q(X) \cup Y.$$

Cum $\overline{B}^q(X, Y) \subset \overline{Z}^q(X, Y)$, putem considera grupurile cît $\overline{H}^q(X, Y) = \overline{Z}^q(X, Y)/\overline{B}^q(X, Y)$. Observăm că se pot construi în mod natural izomorfismele $\overline{Z}^q(X, Y)/Y \approx Z^q(X, Y)$ şi $\overline{B}^q(X, Y)/Y \approx B^q(X, Y)$; acestea induc un izomorfism $h :\ H^q(X, Y) \to \overline{H}^q(X, Y)$.

Orice morfism $f :\ (X, Y) \to (X', Y')$ duce grupurile $\overline{Z}^q(X, Y)$, $\overline{B}^q(X, Y)$ în $\overline{Z}^q(X', Y')$ respectiv $B^q(X', Y')$; atunci f defineşte un omomorfism $\bar{f} : \overline{H}^q(X, Y) \to \overline{H}^q(X', Y')$. Morfismului f i se asociază deci în mod natural omomorfismul $f_* = h^{-1}\bar{f}h :\ H^q(X, Y) \to H^q(X', Y')$.

În acelaşi mod, operatorul d^q induce un omomorfism $\bar{\delta} : \overline{H}^q(X, Y) \to H^{p-q}(Y)$. Omomorfismul $\delta = \bar{\delta}\, h$ se numeşte *operatorul frontieră* al perechii $(X, Y) \in \mathfrak{D}_p$.

PROPOZIŢIA 1.1. *Aplicaţia* $f \to f_*$ *are următoarele trei proprietăţi* :

a) *dacă* $f :\ (X, Y) \to (X, Y)$ *este morfismul identic al perechii* $(X, Y) \in \mathfrak{D}_p$, *atunci* f_* *este omomorfismul identic* :

b) *fiind date morfismele* $f : (X, Y) \to (X', Y')$ *şi* $g : (X', Y') \to (X'', Y'')$, *atunci* $(gf)_* = g_*\, f_*$;

c) *diagrama*

$$\begin{tikzcd} H^q(X, Y) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\delta"'] & H^q(X', Y') \arrow[d, "\delta"'] \\ H^{p-q}(Y) \arrow[r, "(f/Y)_*"] & H^{p-q}(Y') \end{tikzcd} \tag{1}$$

este comutativă.

Demonstraţia propoziţiei 1.1 este imediată.

PROPOZIŢIA 1.2. *Diagrama*

$$\begin{tikzcd} H^q(Y) \arrow[r, "i_*"] & H^q(X) \arrow[r, "j_*"] & H^q(X, Y) \arrow[d, "\delta"'] \\ H^{p-q}(X, Y) \arrow[u, "\delta"'] & H^{p-q}(X) \arrow[l, "j_*"'] & H^{p-q}(Y) \arrow[l, "i_*"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

este exactă pentru orice pereche $(X, Y) \in \mathfrak{D}_p$.

Demonstraţie. Observăm mai întîi că diagrama (2) rămîne invariantă la schimbarea lui q cu $p-q$. Atunci, va fi suficient să verificăm proprietatea de exactitate a următoarelor şiruri :

$$H^q(Y) \xrightarrow{i_*} H^q(X) \xrightarrow{hj_*} \overline{H}^q(X, Y), \tag{2a}$$

$$H^q(X) \xrightarrow{hj_*} \overline{H}^q(X, Y) \xrightarrow{\bar{\delta}} H^{p-q}(Y), \tag{2b}$$

$$\overline{H}^{p-q}(X, Y) \xrightarrow{\bar{\delta}} H^q(Y) \xrightarrow{i_*} H^q(X). \tag{2c}$$

Calculul nucleelor și imaginilor omomorfismelor din (2 a, b, c) dă respectiv:

$$\mathrm{Im}\, i_* = \mathrm{Ker}\,(hj_*) = \{x + B^q(X) :\ x \in Z^q(Y)\},$$
$$\mathrm{Im}\ (hj_*) = \mathrm{Ker}\ \bar{\delta} = \{x + \bar{B}^q(X, Y) : x \in Z^q(X)\},$$
$$\mathrm{Im}\ \bar{\delta} = \mathrm{Ker}\ i_* = \{x + B^q(Y) : x \in B^q(X) \cap Y\},$$

ceea ce demonstrează propoziția 1.2.

Fie $(X, X_1), (X, X_2) \in \mathfrak{D}_p$; atunci perechile $(X_1, X_1 \cap X_2)$ și $(X_1 \cup X_2, X_2)$ se găsesc de asemenea în $\mathfrak{D}_p$, iar incluziunea

$$i : (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2) \tag{3}$$

este un morfism din $\mathfrak{D}_p$.

Propoziția 1.3. *Omomorfismul i_* indus de incluziunea* (3) *este izomorfism.*

Demonstrație: Fie $x \in \bar{B}^q(X_1 \cup X_2, X_2)$ cu q fix; atunci,

$$x = d^{p-q}\, x_1 + x_2 \ (x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2). \tag{4}$$

Dacă presupunem că x se găsește și în $\bar{Z}^q(X_1, X_1 \cap X_2)$, avem în plus $x \in X_1$. Ținînd seama de (4), rezultă că x_2 se găsește de asemenea în X_1. Prin urmare $x \in \bar{B}^q(X_1, X_1 \cap X_2)$, ceea ce arată că i_* este monomorfism, avînd nucleul nul.

Fie acum $x \in \bar{Z}^q(X_1 \cup X_2, X_2)$. Avem:

$$x = x_1 + x_2\, (x_1 \in X_1;\ x_2, d^q\, x_1 \in X_2) \tag{4'}$$

și deci $x - x_1 \in \bar{B}^q(X_1 \cup X_2, X_2)$, $x_1 \in \bar{Z}^q(X_1, X_1 \cap X_2)$. Prin urmare $\bar{i}\,(x_1 + \bar{B}^q(X_1, X_1 \cap X_2)) = x + \bar{B}^q(X_1 \cup X_2, X_2)$ și deci i_* este epimorfism. Cu aceasta, propoziția 1.3 este demonstrată.

Morfismele $f, g : (X, Y) \to (X', Y')$ sînt prin definiție *omotope*, dacă există un sistem de omomorfisme $D_s : (X, Y) \to (X', Y')$ $(s = 0, \ldots, p-1)$ astfel ca:

$$g - f = \sum_{s=0}^{p-1} d^{p-s-1}\, D_s\, d^s. \tag{5}$$

Omomorfismul $d^{p-s-1}\, D_s\, d^s$(s—fix) duce fiecare element $x \in \bar{Z}^q(X, Y)$ într-un element din $B^q(X)$ sau din Y, după cum $s < q$ sau $s \geqslant q$; atunci $(g - f)\, x \in \bar{B}^q(X, Y)$. Rezultă

Propoziția 1.4. *Dacă morfismele $f, g : (X, Y) \to (X', Y')$ sînt omotope, atunci $f_* = g_*$.*

Vom utiliza o definiție a complexelor de lanțuri [5] compatibilă cu noțiunea de derivată generalizată. Pentru un indice p fixat, un *complex de lanțuri K* este format dintr-un grup cu $(p-1)$-derivare $X(K) \in \mathfrak{D}_p$ și o descompunere în sumă directă în raport cu grupul întregilor Z

$$X(K) = \sum_{n \in Z} C_n(K),$$

astfel că $d(C_n(K)) \subset C_{n-1}(K)$. Elementele lui $C_n(K)$ se numesc *lanțuri de dimensiune n ale lui K*. Un sistem de subgrupuri $C'_n \subset C_n(K)$ $(n \in Z)$

formează un complex de lanţuri L în raport cu operatorul de derivare generalizată din K, dacă şi numai dacă perechea $(X(K), Y) \in \mathfrak{D}_p$ cu $Y = \sum_n C'_n$; spunem că L este un *subcomplex* al lui $K(L \subset K)$.

Fie $\mathcal{C}_p \subset \mathfrak{D}_p$ categoria perechilor (K, L) de complexe de lanţuri cu $L \subset K$. Un morfism $f : (K, L) \to (K', L')$ din categoria $\mathcal{C}_p$ este prin definiţie un morfism din $\mathfrak{D}_p$ pentru care $f(C_n(K)) \subset C_n(K')$ şi $f(C_n(L)) \subset C_n(L')$. În cazul categoriei $\mathcal{C}_p$, noţiunea de omotopie trebuie completată cu precizarea că omomorfismele D_s sînt morfisme omogene de grad $p-1$ în raport cu structura de categorie graduată indusă de Z pe $\mathcal{C}_p$. Morfismele $f : (K, L) \to (K', L')$ definite anterior sînt de grad zero în raport cu aceeaşi structură.

Fie K/L complexul de lanţuri definit în mod natural de grupul cu $(p-1)$-derivare $X(K)/X(L)$. Lanţurile lui K/L se mai numesc şi lanţuri ale perechii (K, L), iar grupurile $C_n\ (K/L)$ se notează cu $C_n\ (K, L)$. Aplicaţiile :

$$L \xrightarrow{i} K \xrightarrow{j} K/L$$

(incluziunea şi omomorfismul canonic) sînt morfisme ale lui $\mathcal{C}_p$.

Vom asocia fiecărei perechi $(K, L) \in \mathcal{C}_p$ grupurile de q-omologie $H^q(K, L) = H^q(X(K), X(L))$. În acelaşi mod se introduc grupurile $Z^q(K, L)$, $\overline{Z}^q(K, L)$, $B^q(K, L)$, $\overline{B}^q(K, L)$ şi $\overline{H}^q(K, L)$. Grupurile q-ciclilor şi ale q-frontierelor de dimensiune $n \in Z$ sînt prin definiţie :

$$Z^q_n(K, L) = Z^q(K, L) \cap C_n(K, L)\,; \; B^q_n(K, L) = B^q(K, L) \cap C_n(K,L),$$

iar grupurile cît

$$H^q_n(K, L) = Z^q_n(K, L)/B^q_n(K, L)$$

se numesc grupurile de q-omologie (de dimensiune n) ale perechii (K, L). Notînd :

$$\overline{Z}^q_n(K, L) = \overline{Z}^q(K, L) \cap C_n(K)\,; \; \overline{B}^q_n(K, L) = \overline{B}^q(K, L) \cap C_n(K),$$

avem :

$$Z^q_n(K, L) \approx \overline{Z}^q_n(K, L)/C_n(L)\,; \; B^q_n(K, L) \approx \overline{B}^q_n(K, L)/C_n(L),$$

şi deci

$$H^q_n(K, L) \approx \overline{H}^q_n(K, L) = \overline{Z}^q_n(K, L)/\,\overline{B}^q_n(K, L).$$

M fiind un complex de lanţuri arbitrar, se pot stabili următoarele descompuneri în sume directe :

$$Z^q(M) = \sum_n Z^q_n(M)\,; \; B^q(M) = \sum_n B^q_n(M).$$

Atunci, luînd [pentru o pereche $(K, L) \in \mathcal{C}_p$] complexul $M = K/L$ rezultă imediat

PROPOZIŢIA 1.5. *Are loc următorul izomorfism* :

$$H^q(K, L) \approx \sum_n H^q_n(K, L).$$

Fie acum $f : (K,L,) \to (K', L')$ un morfism al categoriei $\mathcal{C}_p$. Observăm că f duce grupurile $\overline{Z}^q_n(K, L)$, $\overline{B}^q_n(K, L)$ în $\overline{Z}^q_n(K', L')$ respectiv $\overline{B}^q_n(K', L')$. Atunci f induce în mod natural un omomorfism $H^q_n(K, L) \to H^q_n(K', L')$ care poate fi identificat (în virtutea propoziției 1.5) cu omomorfismul f_* asociat lui f considerat ca morfism în $\mathcal{D}_p$. În același mod, restricția operatorului frontieră la $\mathcal{C}_p$ se poate exprima ca un omomorfism $\delta : H^q_n(K, L) \to H^{p-q}_{n-q}(L)$.

Pe baza considerațiilor de mai sus, propozițiile 1.1—1.4 pot fi reformulate în cazul complexelor de lanțuri cu anumite precizări care decurg din structura de categorie graduată a lui $\mathcal{C}_p$. Astfel, diagrama comutativă (1) poate fi scrisă sub forma :

(1′)
$$\begin{tikzcd}
H^q_n(K, L) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\delta"'] & H^q_n(K', L') \arrow[d, "\delta"'] \\
H^{p-q}_{n-q}(L) \arrow[r, "(f/L)_*"] & H^{p-q}_{n-q}(L'),
\end{tikzcd}$$

iar diagrama exactă (2) se înlocuiește cu un șir exact a cărui verigă generatoare este următoarea :

(2′)
$$\begin{aligned} \ldots \longleftarrow H^q_{n-p}(L) \xleftarrow{\delta} H^{p-q}_{n-q}(K, L) \xleftarrow{j_*} H^{p-q}_{n-q}(K) \xleftarrow{i_*} H^{p-q}_{n-q}(L) \xleftarrow{\delta} \\ \xleftarrow{\delta} H^q_n(K, L) \xleftarrow{j_*} H^q_n(K) \xleftarrow{i_*} H^q_n(L) \longleftarrow \ldots \end{aligned}$$

Observăm că întregii n corespunzători diverselor verigi ale unui șir definit de (2′) aparțin aceleiași clase de resturi în raport cu p. Atunci, fiecărei perechi de întregi (q, r) cu $0 < q < p$; $0 \leqslant r < p$ i se poate asocia șirul exact (2′) pentru care $n \equiv r \mod p$; fie $\sum (q, r)$ acest șir. Două șiruri $\sum (q, r)$, $\sum (q', r')$ coincid dacă și numai dacă

(6)
$$q = q', \; r = r'$$

sau

(6′)
$$q + q' = p, \; r' \equiv r - q \mod p.$$

Din (6′) rezultă că $r' < q'$ dacă și numai dacă $r \geqslant q$. Numind *p-admisibilă* o pereche de întregi (q, r) pentru care $0 < q < p$; $q \leqslant r < p$, considerațiile anterioare conduc la

PROPOZIȚIA 1.6. *Mulțimea șirurilor exacte* (2′) *asociate unei perechi* $(K, L) \in \mathcal{C}_p$ *poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea perechilor* p-*admisibile.*

În paragraful următor, propozițiile 1.1—1.4 vor fi utilizate sub forma lor proprie categoriei $\mathcal{C}_p$. Vom considera de asemenea (ca în teoria clasică a omologiei) complexe de lanțuri K cu $C_n(K) = 0$ pentru $n < 0$. În acest caz avem :

$$Z^q_n(K) = C_n(K) \text{ dacă } n < q,$$

$$H^q_n(K) = 0 \text{ dacă } n < 0.$$

2. TEORIA SIMPLICIALĂ

Fie p un număr prim şi G_p suma directă a $p-1$ grupuri izomorfe cu grupul întregilor Z.

Vom organiza grupul G_p ca un inel comutativ. Fie, pentru aceasta, I_p inelul generat în corpul complex C de o rădăcină ω de ordinul p a unităţii ($\omega \neq 1$). Elementele lui I_p sînt combinaţii liniare cu coeficienţi întregi de diverse puteri (întregi) ale lui ω.

PROPOZIŢIA 2.1. *Grupul abelian asociat inelului* I_p *este izomorf cu* G_p[1].

Demonstraţie. Va fi suficient să arătăm că relaţia $c_0 + c_1\omega + \ldots + c_{p-2}\,\omega^{p-2} = 0$ $(c_s \in Z)$ implică $c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-2} = 0$. Să presupunem că ar exista o asemenea relaţie, fără ca toţi coeficienţii ei să fie nuli. Vom considera polinomul $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{p-2}\,x^{p-2}$. p fiind prim, polinomul de diviziune circulară asociat ecuaţiei binome $x^p - 1 = 0$ este : $D(x) = 1 + x + \ldots + x^{p-1}$. $P(x)$ şi $D(x)$ au o rădăcină comună ω, iar gradul lui $P(x)$ este cel mult $p-2$. Atunci, cel mai mare divizor comun al polinoamelor $P(x)$ şi $D(x)$ va fi un polinom al cărui grad h verifică condiţia $0 < h < p-1$, ceea ce contrazice ireductibilitatea lui $D(x)$ în inelul polinoamelor cu coeficienţi raţionali [8]. Această contradicţie demonstrează propoziţia 2.1.

Notăm :

$$\lambda_q = 1 + \omega + \ldots + \omega^{q-1} \qquad (q = 1, \ldots, p-1).$$

PROPOZIŢIA 2.2. *Inversele elementelor* λ_q *se găsesc în* I_p.

Demonstraţie. Vom utiliza inducţia în raport cu q. Pentru $q = 1$, proprietatea este adevărată deoarece $\lambda_1 = 1$. Fie acum o valoare fixă a lui $q\,(q > 1)$ şi $p = sq + q'$ $(0 \leqslant q' < q)$ împărţirea întreagă a lui p la q ; cum p este prim, rezultă că q' nu poate fi nul. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate valorile lui q mai mici decît aceea pe care am fixat-o.

Relaţia $1 + \omega + \ldots + \omega^{p-1} = 0$ poate fi scrisă sub forma :

$$\lambda_q \sum_{k=0}^{s-1} \omega^{qk} = -\,\omega^{sq}\,\lambda_{q'}.$$

Termenul din membrul drept al acestei egalităţi este diferit de zero, iar inversul său se găseşte în I_p conform ipotezei de inducţie. Cu aceasta, propoziţia 2.2 este demonstrată.

În cele ce urmează vom presupune că se dă un I_p-modul A. Simbolul A va fi folosit, în funcţie de împrejurări, pentru a desemna şi grupul abelian asociat modulului respectiv.

Vom asocia, ca şi în teoria clasică a omologiei, fiecărui complex simplicial S grupul abelian $X(S)$ al lanţurilor singulare cu coeficienţi în A şi vom defini un operator d al lui $X(S)$ punînd pentru fiecare simplex singular de dimensiune $n > 0$, $s = (v_0 \ldots v_n)$ al lui S :

$$d(as) = \sum_{i=0}^{n} \omega^i\, a(v_0 \ldots \dot{v}_i \ldots v_n) \qquad (a \in A) \tag{7}$$

---

[1] Demonstraţia acestei propoziţii mi-a fost indicată de A. Solian.

și $d(a\dot{s}) = 0$ cînd dimensiunea lui s este zero. Simbolul $\dot{v}_i$ înseamnă că din paranteza respectivă s-a scos vîrful v_i.

Pentru $p = 2$, obținem operatorul de derivare din teoria formală a omologiei. În acest caz, noțiunea de I_p-modul coincide cu aceea de grup abelian.

Teorema 2.3. *Operatorul d definit de* (7) *este o* $(p-1)$*-derivare.*

Demonstrație. Aplicînd de q ori ($q \leqslant n$) operatorul d lanțului singular as, se stabilește prin inducție următoarea relație :

$$d^q(as) = \lambda_1 \ldots \lambda_q \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \omega^{i_1 + \cdots + i_q + q(q-1)/2} a(v_0 \ldots \dot{v}_{i_1} \ldots \dot{v}_{i_q} \ldots v_n),$$

din care rezultă $d^p = 0$, deoarece $\lambda_p = 1 + \omega + \ldots + \omega^{p-1} = 0$.

Fiecărui complex simplicial S i se asociază (conform teoremei 2.3) un complex de lanțuri $K(S) \in \mathcal{C}_p$ al cărui operator d este definit de (7). Vom nota cu $\mathcal{S}$ categoria perechilor (S, T) de complexe simpliciale finite cu $T \subset S$; morfismele categoriei $\mathcal{S}$ sînt aplicațiile simpliciale [2]. Observăm că, dacă $(S, T) \in \mathcal{S}$, atunci $(K(S), K(T)) \in \mathcal{C}_p$. Prin urmare, unei funcții $F(K, L)$ definită pe mulțimea obiectelor categoriei $\mathcal{C}_p$, îi corespunde o funcție $F(S, T) = F(K(S), K(T))$ definită pe categoria $\mathcal{S}$. În acest fel putem introduce pe categoria $\mathcal{S}$ grupurile de q-omologie $H^q_n(S, T)$, cît și celelalte grupuri considerate în paragraful 1.

Orice aplicație simplicială $f : (S, T) \rightarrow (S', T')$ induce în mod natural un morfism $f' : (K(S), K(T)) \rightarrow (K(S'), K(T'))$ al categoriei $\mathcal{C}_p$. Notăm : $f_* = f'_*$; de asemenea, operatorul frontieră din $\mathcal{C}_p$ induce un operator frontieră $H^q_n(S, T) \rightarrow H^{p-q}_{n-q}(T)$ în $\mathcal{S}$, care poate fi notat cu același simbol δ.

Propoziția 2.4. *Fie P un complex simplicial format dintr-un singur vîrf. Atunci grupurile $H^q_n(P)$ sînt nule, cu excepția cazului $n = q - 1$ cînd $H^q_{q-1}(P) \approx A$.*

Demonstrație. Fie s_n simplexul singular de dimensiune n al lui P ; lanțurile singulare ale grupului $C_n(P)$ sînt de forma $as_n (a \in A)$. Restricția lui d la $C_n(P)$ $(n > 0)$ este operatorul nul dacă $n + 1 \equiv 0 \bmod p$ și este un izomorfism (conform propoziției 2.2) în caz contrar.

Fiind dați doi întregi n și q, există un întreg k unic determinat astfel ca $n-q+2 \leqslant kp \leqslant n + p - q + 1$.

Pentru $n \geqslant q$ avem :

$$Z^q_n(P) \approx A, \quad B^q_n(P) \approx A \text{ dacă } kp \leqslant n + 1 ;$$

$$Z^q_n(P) = 0, \quad B^q_n(P) = 0 \text{ dacă } kp > n + 1.$$

Deci $H^q_n(P) = 0$.

Pentru $n < q$, $Z^q_n(P) \approx A$. În acest caz, $n + p - q + 1 \leqslant p$ și atunci relația $kp > n + 1$ are loc dacă și numai dacă $n = q - 1$. Deci $H^q_{q-1}(P) \approx A$ și $H^q_n(P) = 0$ pentru $n < q-1$.

Cele două cazuri studiate ($n \geqslant q$ și $n < q$) demonstrează propoziția 2.4.

Propoziția 2.5. *Fie $f, g : (S, T) \rightarrow (S', T')$ două aplicații simpliciale contigue* [2]. *Atunci* $f_* = g_*$.

Demonstrație. Conform propoziției 1.4, va fi suficient să arătăm că morfismele $f', g' : (K(, (S), K(T)) \to (K(S'), K(T'))$ asociate aplicațiilor simpliciale f respectiv g sînt omotope. Pentru aceasta, vom adapta procedeul lui Mayer [4] la cazul operatorului d definit de (7).

Fie $(u_0\, u_1 \ldots u_n)$ un simplex singular arbitrar al complexului simplicial S (sau al lui T). Notăm : $v_i = f(u_i)$, $w_i = g(u_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$.

Vom considera omomorfismele $\Delta_r : (C_n(S), C_n(T)) \to (C_{n+r}(S'), C_{n+r}(T'))$ $(r = 0, \ldots, p-1)$ definite de :

$$(8)\qquad \Delta_r (u_0 \ldots u_n) = \sum_{i=0}^{n} [(v_i^r v_0 \ldots v_{i-1}\, w_i \ldots w_n) - (v_i^r v_0 \ldots v_i\, w_{i+1} \ldots w_n)],$$

unde v_i^r reprezintă șirul format din r elemente egale cu v_i $(v_i^0 = \emptyset)$.

Un calcul direct conduce la următorul rezultat :

$$(9)\qquad d\Delta_r - \omega^r \Delta_r d = \lambda_r \Delta_{r-1} \qquad (r = 1, \ldots, p-1).$$

Prin urmare, dacă notăm :

$$(8')\qquad \Delta'_r = (\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_r)^{-1} \Delta_r \qquad (\lambda_0 = 1),$$

din (9) deducem :

$$(9')\qquad d\Delta'_r - \omega^r \Delta'_r d = \Delta'_{r-1}.$$

Din (9′) obținem (prin inducție în raport cu r) o relație de forma :

$$(10)\qquad \Delta'_0 = \sum_{s=0}^{r} \alpha_r^s d^{r-s} \Delta'_r d^s \qquad (\alpha_r^s \in I_p).$$

Observăm că $\Delta'_0 = \Delta_0 = g' - f'$. Atunci, luînd în (10) $r = p - 1$ și notînd $D_s = \alpha_{p-1}^s \Delta'_{p-1}$, obținem (5).

Cu aceasta propoziția 2.5 este demonstrată.

Efectuînd un calcul mai precis, algoritmul prezentat anterior arată că $\alpha_{p-1}^s = 1$. Observăm de asemenea că omomorfismele Δ_r date de (8) pot fi utilizate și în cazul operatorului de derivare generalizată al lui Mayer pentru a stabili relația de omotopie între f' și g' ; nu putem însă folosi analoagele omomorfismelor Δ_r considerate de Mayer [4] în cazul operatorului d definit de (7).

Fie $H(A)$ teoria de omologie [6],[2] pe categoria $\mathfrak{S}$, cu coeficienți în I_p-modulul A (considerat ca grup abelian), definită cu ajutorul operatorului (7) corespunzător lui $p = 2$. $H(A)$ constă din următoarele trei obiecte : o aplicație care asociază fiecărui întreg i și fiecărei perechi $(S, T) \in \mathfrak{S}$ grupul de omologie $H_i(S, T)$; o aplicație care asociază fiecărei aplicații simpliciale $f : (S, T) \to (S', T')$ omomorfismul $f_* : H_i(S, T) \to H_i(S', T')$; operatorul frontieră $\delta : H_i(S, T) \to H_{i-1}(T)$. Aceste obiecte apar și ca un caz particular al considerațiilor anterioare. În adevăr, pentru $p = 2$, singura valoarea admisibilă a lui q este $q = 1$ și putem pune : $H_i(S, T) = H_i^1(S, T)$.

Fiind dat un număr prim p și un I_p-modul A, ne propunem să exprimăm grupurile de q-omologie $H_n^q(S, T)$ ale fiecărei perechi $(S, T) \in \mathfrak{S}$ în funcție de $H_i(S, T)$.

O numerotare convenabilă a mulțimii verigilor șirului (2′) corespunzător unei perechi p-admisibile (q, r) conduce la următoarea indexare a grupurilor $H_n^q(S, T)$:

$$\text{(11)} \qquad H_i^{qr}(S, T) = \begin{cases} H_{r-q+ip/2}^{p-q}(S, T) \text{ pentru } i \text{ par;} \\ H_{r+p(i-1)/2}^{q}(S, T) \text{ pentru } i \text{ impar.} \end{cases}$$

Conform propoziției 1.6, grupul $H_i^{qr}(S, T)$ descrie mulțimea grupurilor $H_n^q(S, T)$ cu (S, T) fixă cînd i și (q, r) parcurg în mod independent Z, respectiv mulțimea perechilor p-admisibile; corespondența $\{H_i^{qr}(S, T)\} \to \to \{H_n^q(S, T)\}$ este biunivocă.

Trecînd la indexarea grupurilor $H_n^q(S, T)$ dată de (11), putem construi, pentru fiecare pereche p-admisibilă (q, r), cîte un triplet $H^{qr}(A)$ format din: aplicația care asociază fiecărui întreg i și fiecărei perechi $(S, T) \in \mathcal{S}$ grupul $H_i^{qr}(S, T)$; aplicația care asociază fiecărei aplicații simpliciale $f : (S, T) \to (S', T')$ omomorfismul $f_* : H_i^{qr}(S, T) \to H_i^{qr}(S', T')$; operatorul frontieră $\delta : H_i^{qr}(S, T) \to H_{i-1}^{qr}(T)$. Observăm că inelul I_p are față de aceste triplete același rol cu Z în teoria clasică a omologiei. De aceea vom pune $H^{qr}(I_p) = H^{qr}$.

Teorema 2.6. *Fiind dat un I_p-modul A, grupurile de q-omologie (de diverse dimensiuni) $H_n^q(S, T)$ cu $(S, T) \in \mathcal{S}$ se exprimă în funcție de grupurile teoriei de omologie $H(A)$ prin formulele următoare:*

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} H_i^{qr}(S, T) \approx H_i(S, T) \text{ pentru } r = p - 1; \\ H_i^{qr}(S, T) = 0 \text{ pentru } q \leqslant r < p - 1. \end{cases}$$

Demonstrație. Vom utiliza teoria axiomatică a omologiei [6], [2], verificată, în particular, de $H(A)$. Două teorii de omologie pe categoria $\mathcal{S}$, cu același grup al coeficienților, sînt izomorfe (a se vedea teorema de unicitate din [2], cap. VI). Atunci, pentru a demonstra formulele (12), va fi suficient să arătăm că $H^{qr}(A)$ este o teorie de omologie avînd drept grup de coeficienți pe A sau 0, după cum $r = p - 1$ sau $r < p-1$. Va trebui, anume, să stabilim existența următoarelor șapte proprietăți:

I. dacă $f : (S, T) \to (S, T)$ este aplicația simplicială identică, atunci $f_* : H_i^{qr}(S, T) \to H_i^{qr}(S, T)$ este omomorfismul identic;

II. fiind date aplicațiile simpliciale $f : (S, T) \to (S', T')$ și $g : (S', T') \to (S'', T'')$, atunci $(gf)_* = g_* f_*$;

III. $\delta f_* = (f/T)_* \delta$, oricare ar fi aplicația simplicială $f : (S, T) \to \to (S', T')$;

IV. șirul

$$\ldots \leftarrow H_{i-1}^{qr}(T) \xleftarrow{\delta} H_i^{qr}(S, T) \xleftarrow{j_*} H_i^{qr}(S) \xleftarrow{i_*} H_i^{qr}(T) \leftarrow \ldots$$

este exact pentru orice pereche $(S, T) \in \mathcal{S}$;

V. dacă $f, g : (S, T) \to (S', T')$ sînt două aplicații simpliciale contigue, atunci $f_* = g_*$;

VI. dacă i este incluziunea $(S_1, S_1 \cap S_2) \to (S_1 \cup S_2, S_2)$ $[(S, S_1), (S, S_2) \in \mathcal{S}]$, atunci i_* este izomorfism;

VII. dacă P este un complex simplicial format dintr-un singur vîrf, atunci $H_i^{qr}(P) = 0$ pentru $i \neq 0$, iar

$$H_0^{qr}(P) \approx A \text{ pentru } r = p - 1,\ H_0^{qr}(P) = 0 \text{ pentru } r < p - 1.$$

Axiomele I, II şi III rezultă din propoziţia 1.1. Axioma IV rezultă din propoziţia 1.2. Axioma V rezultă din propoziţia 2.5. Axioma VI rezultă din propoziţia 1.3, deoarece $C_i(S_1 \cap S_2) = C_i(S_1) \cap C_i(S_2)$ şi $C_i(S_1 \cup S_2) = C_i(S_1) \cup C_i(S_2)$. În sfîrşit, axioma VII rezultă din propoziţia 2.4.

Observăm că ipoteza restrictivă impusă categoriei $\mathcal{S}$ (de a fi formată din complexe simpliciale finite) intervine numai în cursul demonstraţiei teoremei 2.6, această ipoteză fiind esenţială pentru teorema de unicitate a unei teorii formale de omologie.

În particular, dacă $A = I_p$, grupurile $H_i(S, T)$ din (12) aparţin teoriei de omologie $H(G_p)$, conform propoziţiei 2.1.

Fie $q' = p - 1$ şi k izomorfismul $H_i^{qq'}(S, T) \to H_i(S, T)$. Izomorfismul $H^{qq'}(A) \approx H(A)$ implică de asemenea comutativitatea diagramelor :

$$\begin{tikzcd} H_i^{qq'}(S, T) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "k"'] & H_i^{qq'}(S', T') \arrow[d, "k"'] \\ H_i(S, T) \arrow[r, "f_*"] & H_i(S', T') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_i^{qq'}(S, T) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "k"'] & H_{i-1}^{qq'}(T) \arrow[d, "k"'] \\ H_i(S, T) \arrow[r, "\delta"] & H_{i-1}(T), \end{tikzcd}$$

oricare ar fi perechea $(S, T) \in \mathcal{S}$ şi aplicaţia simplicială $f : (S, T) \to (S', T')$.

Am studiat operatorul de derivare generalizată (7), extinzînd metoda folosită de Spanier [6] în studierea operatorului lui Mayer [4]. Se observă că forma rezultatelor coincide în ambele cazuri. Vom da o explicaţie a acestui fapt.

Observăm mai întîi că oricărui functor covariant $\theta : \mathcal{S} \to \mathcal{C}_p$ i se poate asocia (pe baza rezultatelor din paragraful 1) un sistem de triplete $H^{qr}(\theta)$ analog sistemului $H^{qr}(A)$ definit mai sus. Fiecare triplet $H^{qr}(\theta)$ verifică în mod automat primele patru axiome ale unei teorii de omologie. Dar operatorul (7), ca şi operatorul lui Mayer, definesc doi functori de forma θ, cu ajutorul cărora se introduc aplicaţiile $f \to f_*$ şi δ.

Pe de altă parte, calculul grupurilor de omologie asociate complexelor simpliciale cu un singur vîrf conduce, în ambele cazuri, la rezultate identice.

Prin urmare, operatorul de derivare generalizată al lui Mayer poate fi interpretat ca un *caz singular* al operatorului studiat în această lucrare, luînd $\omega = 1$ şi înlocuind noţiunea de I_p-modul cu aceea de grup abelian ale cărui elemente sînt de perioadă p.

Primită la redacţie la 25 martie 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste
România, Str. M. Eminescu
nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. C. Bănica, N. Popescu, Comunicările Acad. R.P.R., **13**, 6 (1963).
2. S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundation of Algebraic Topology*, Princeton, New Jersey, 1952.
3. S. Eilenberg, H. Cartan, *Homological Algebra*. Princeton, 1956.
4. W. Mayer, Ann. of Math., **43**, 2 (1942).
5. N. Popescu, Revue Roumaine de math. pures et appl., **9**, 6 (1964).
6. H. E. Spanier, Bull. of the Amer. Math. Soc., **55**, 2 (1949).
7. C. Teleman, *Elemente de topologie și varietăți diferențiabile*. București, 1964.
8. B. L. Van Der Waerden, *Moderne Algebra*, vol. I, Berlin, 1930.

ASUPRA DISPERSIEI PRODUSULUI DE VARIABILE ALEATOARE INDEPENDENTE

DE

ANCA CREANGĂ-SÂMBOAN

În această Notă analizăm dispersia $D^2(\xi^p \eta^q)$, unde ξ şi η sînt variabile aleatoare independente definite pe un cîmp de probabilitate dat, iar p şi q numere naturale şi dăm cîteva aplicaţii în statistica matematică.

1. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente, avînd valorile medii x şi y; ele pot fi reprezentate sub forma

$$\xi = x(1 + \delta\xi), \quad \eta = y(1 + \delta\eta).$$

Din relaţia

$$\xi^p \eta^q - x^p y^q = x^p y^q \left[\sum_{i=1}^{p} C_p^i \, \delta\xi^i + \sum_{j=1}^{q} C_q^j \, \delta\eta^j + \left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i \, \delta\xi^i \right) \left(\sum_{j=1}^{q} C_q^j \, \delta\eta^j \right) \right]$$

obţinem, ţinînd seama de proprietăţile dispersiei,

$$\begin{aligned} D^2(\xi^p \eta^q) = x^{2p} y^{2q} \Bigg[& D^2\left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i \, \delta\xi^i \right) + D^2\left(\sum_{j=1}^{q} C_q^j \, \delta\eta^j \right) + \\ & + D^2\left(\left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i \, \delta\xi^i \right) \left(\sum_{j=1}^{q} C_q^j \, \delta\eta_j \right) \right) + 2 D^2\left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i \, \delta\xi^i \right) E\left(\sum_{i=1}^{q} C_q^j \delta\eta^j \right) + \\ & + 2 D^2\left(\sum_{j=1}^{q} C_q^j \, \delta\eta^j \right) E\left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i \, \delta\xi^i \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{1}$$

Pentru evaluarea termenilor din paranteză să introducem relaţiile

$$\varphi_p = \sum_{i=1}^{p} C_p^i \, \delta\xi^i, \quad \psi_q = \sum_{j=1}^{q} C_q^j \, \delta\eta^j ;$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1339–1345, BUCUREŞTI, 1966

avem atunci

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i\,\delta\xi^i\right) = D^2(\varphi_p) = D^2\left(1+\sum_{i=1}^{p} C_p^i\,\delta\xi^i\right) = D^2((1+\delta\xi)^p) = \frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}}$$

$$D^2\left(\sum_{j=1}^{q} C_q^j\,\delta\eta^j\right) = D^2(\psi_q) = \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}}$$

$$E(\varphi_p) = E((1+\delta\xi)^p) - 1 = \frac{E(\xi^p)}{x^p} - 1 = \frac{u_p}{2} \tag{2}$$

$$E(\psi_q) = E(1+\delta\eta)^q - 1 = \frac{E(\eta^q)}{y^q} - 1 = \frac{v_q}{2}$$

$$A_{pq} = D^2\left(\left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i\,\delta\xi^i\right)\left(\sum_{j=1}^{q} C_q^j\,\delta\eta^j\right)\right).$$

Formula (1) devine atunci

$$D^2(\xi^p\eta^q) = x^{2p}y^{2q}\left[\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}} + 2\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}}\frac{v_q}{2} + 2\frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}}\frac{u_p}{2} + A_{pq}\right]$$

sau, în definitiv,

$$D^2(\xi^p\eta^q) = x^{2p}y^{2q}\left[\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}}(1+v_q) + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}}(1+u_p) + A_{pq}\right]. \tag{3}$$

Să observăm că pentru $p = q = 1$ obţinem

$$u_1 = 0\,,\quad v_1 = 0\,,$$

$$A_{11} = D^2(\delta\xi\,\delta\eta) = E(\delta\xi^2\,\delta\eta^2) = \frac{D^2(\xi)\,D^2(\eta)}{x^2y^2}$$

şi formula (3) se reduce la formula cunoscută

$$D^2(\xi\eta) = x^2y^2\left[\frac{D^2(\xi)}{x^2} + \frac{D^2(\eta)}{y^2} + \frac{D^2(\xi)\,D^2(\eta)}{x^2y^2}\right]. \tag{4}$$

Pentru calculul termenului A_{pq} vom folosi formula (4). Variabilele aleatoare ξ şi η fiind independente, rezultă că şi variabilele aleatoare φ_p şi ψ_q sînt de asemenea independente şi după (4) avem

$$A_{pq} = D^2(\varphi_p\,\psi_q) = (E(\varphi_p))^2\,(E(\psi_q))^2\left[\frac{D^2(\varphi_p)}{(E(\varphi_p))^2} + \frac{D^2(\psi_q)}{(E(\psi_q))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{D^2(\varphi_p)\,D^2(\psi_q)}{(E(\varphi_p))^2(E(\psi_q))^2}\right] = \frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}}\frac{v_q^2}{2^2} + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}}\frac{u_p^2}{2^2} + \frac{D^2(\xi^p)\,D^2(\eta^q)}{x^{2p}y^{2q}}$$

iar formula (3) devine

$$D^2(\xi^p \eta^q) = x^{2p} y^{2q} \left[\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} \left(1 + \frac{v_q}{2}\right)^2 + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}} \left(1 + \frac{u_p}{2}\right)^2 + \right. \tag{5}$$

$$\left. + \frac{D^2(\xi^p) D^2(\eta^q)}{x_{2p} y_{2q}} \right]$$

sau încă

$$D^2(\xi^p \eta^q) = D^2(\xi^p)(E(\eta^q))^2 + D^2(\eta^q)(E(\xi^p))^2 + D^2(\xi^p) D^2(\eta^q). \tag{5'}$$

Dacă din formula (5) luăm pentru dispersia expresiei $\xi^p \eta^q$ valoarea

$$\widetilde{D}^2(\xi^p \eta^q) = x^{2p} y^{2q} \left[\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}} \right], \tag{6}$$

atunci eroarea relativă pe care o facem cînd am lua (6) în loc de (5) este

$$\mathcal{E} = \frac{D^2(\xi^p \eta^q) - \widetilde{D}^2(\xi^p \eta^q)}{D^2(\xi^p \eta^q)} = \frac{1}{1 + \mathcal{C}},$$

unde

$$\mathcal{C} = \frac{\dfrac{1}{\dfrac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}}} + \dfrac{1}{\dfrac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}}}}{1 + \dfrac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} \left(u_p + \dfrac{u_p^2}{2^2}\right) + \dfrac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}} \left(v_q + \dfrac{v_q^2}{2^2}\right)}.$$

Dacă $u_p + \frac{u_p^2}{2^2} \geqslant 0$, $v_q + \frac{v_q^2}{2^2} \geqslant 0$, atunci vedem că

$$\mathcal{C} \leqslant \frac{1}{\dfrac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}}} + \frac{1}{\dfrac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}}}$$

și $\mathcal{C}$ este mic dacă unul dintre termenii din membrul al doilea este mare, ceea ce implică faptul că $\mathcal{E}$ este mare.

Dacă în formula (5) punem

$$B_{pq} = \frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} \left(v_q + \frac{v_q^2}{2^2}\right) + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}} \left(u_p + \frac{u_p^2}{2^2}\right) + \frac{D^2(\xi^p) D^2(\eta^q)}{x^{2p} y^{2q}}, \tag{7}$$

atunci $B_{pq} \geqslant 0$ iar (5) ia forma

$$D^2(\xi^p \eta^q) = x^{2p} y^{2q} \left[\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}} + B_{pq} \right]. \tag{8}$$

Din (2) deducem că $u_p + \frac{u_p^2}{2^2}$ este de forma

$$u_p + \frac{u_p^2}{2^2} = \sum_{i \neq 0,\, j=0}^{p,p} a_{ij}\, E(\delta \xi^i)\, E(\delta \xi^j),$$

iar termenul $v_q + \frac{v_q^2}{2^2}$ are formă asemănătoare. Dacă u_p şi v_q sînt mici, atunci B_{pq} diferă puţin de produsul

$$\frac{D^2(\xi^p)\,D^2(\eta^q)}{x^{2p}\,y^{2q}}.$$

Pentru evaluarea diferenţei

$$B_{pq} - \frac{D^2(\xi^p)\,D^2(\eta^q)}{x^{2p}\,y^{2q}},$$

vom observa, în virtutea inegalităţii lui Cebîşev, că

$$\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} \geqslant P(|\xi^p - E(\xi^p)| \geqslant |x|^p).$$

Inegalitatea $|\xi^p - E(\xi^p)| \geqslant |x|^p$ echivalează cu inegalitatea

$$\left|\sum_{i=1}^{p} C_p^i(\delta\xi^i - E(\delta\xi^i))\right| \geqslant 1$$

care atrage după sine inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{p} C_p^i\,|\delta\xi^i - E(\delta\xi^i)| \geqslant 1$$

şi deci

$$P(|\xi^p - E(\xi^p)| \geqslant |x|^p) \geqslant P\left(\sum_{i=1}^{p} C_p^i\,|\delta\xi^i - E(\delta\xi^i)| \geqslant 1\right).$$

Rezultă că există $1 \leqslant l_0 \leqslant p$ astfel încît

$$|\delta\xi^{l_0} - E(\delta\xi^{l_0})| \geqslant \frac{1}{p\,C_p^{l_0}}$$

şi atunci

$$\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} \geqslant P\left(|\delta\xi^{l_0} - E(\delta\xi^{l_0})| \geqslant \frac{1}{p\,C_p^{l_0}}\right).$$

Dacă notăm cu K probabilitatea

$$K = P\left(|\delta\xi^{l_0} - E(\delta\xi^{l_0})| \geqslant \frac{1}{p\,C_p^{l_0}}\right) P\left(|\delta\eta^{m_0} - E(\delta\eta^{m_0})| \geqslant \frac{1}{q\,C_q^{m_0}}\right),$$

atunci

$$B_{pq} - \frac{D^2(\xi^p)\,D^2(\eta^q)}{x^{2p}\,y^{2q}} \geqslant K\left(u_p + \frac{u_p^2}{2^2} + v_q + \frac{v_q^2}{2^2}\right) \geqslant K(u_p + v_q) \geqslant$$

$$\geqslant K\left(\sum_{i=1}^{p} E(\delta\xi^i) + \sum_{j=1}^{q} E(\delta\eta^j)\right) \geqslant K(pL + qM).$$

Prin urmare diferenţa creşte o dată cu p şi q.

2. a) Din populațiile corespunzătoare variabilelor aleatoare ξ și η să facem selecții bernoulliene de volum n și să notăm

$$a_n^p(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^n}{n}, \quad a_n^q(\eta) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \eta_j^q}{n},$$

$$a_n^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^p \eta_j^q}{n^2} = a_n^p(\xi)\, a_n^q(\eta).$$

Atunci aplicînd formula (8) pentru fiecare produs $\xi_i^p \eta_j^q$, avem relațiile

$$D^2(\xi_i^p \eta_j^q) = x^{2p} y^{2q} \left[\frac{D^2(\xi_i^p)}{x^{2p}} + \frac{D^2(\eta_j^q)}{y^{2q}} + B_{pq}(\xi_i, \eta_j) \right]$$

$$1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

din care însumînd după indicii i și j obținem

$$\sum_{i,j} D^2(\xi_i^p \eta_j^q) = x^{2p} y^{2q} \left[\frac{n \sum_i D^2(\xi_i^p)}{x^{2p}} + \frac{n \sum_j D^2(\eta_j^q)}{y^{2q}} + \sum_{i,j} B_{pq}(\xi_i, \eta_j) \right].$$

Variabilele de selecție ξ_i, η_j fiind independente și cu aceeași funcție de repartiție ca și ξ și η respectiv, urmează că

$$D^2(a_n^{p,q}(\xi, \eta)) = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j} D^2(\xi_i^p \eta_j^q) = \frac{x^{2p} y^{2q}}{n^2} \left[\frac{D^2(\xi^p)}{x^{2p}} + \frac{D^2(\eta^q)}{y^{2q}} + B_{pq}(\xi, \eta) \right]$$

sau încă

$$D^2(a_n^{p,q}(\xi, \eta)) = x^{2p} y^{2q} \left[\frac{D^2(a_n^p(\xi))}{n x^{2p}} + \frac{D^2(a_n^q(\eta))}{n y^{2q}} + \frac{1}{n^2} B_{pq}(\xi, \eta) \right].$$

Din (7) rezultă că

$$B_{pq}(\xi, \eta) \leqslant \frac{E(\xi^{2p}) + (E(\xi^p))^2}{x^{2p}} \cdot \frac{E(\eta^{2q}) + (E(\eta^q))^2}{y^{2q}} \leqslant \frac{E(\xi^{2p}) E(\eta^{2q})}{x^{2p} y^{2q}}.$$

Variabilele aleatoare ξ și η fiind independente, putem scrie

$$B_{pq}(\xi, \eta) \leqslant 4 E \left(\frac{\xi^{2p}}{x^{2p}} \frac{\eta^{2q}}{y^{2q}} \right) = 4 E((1 + \delta\xi)^{2p} (1 + \delta\eta)^{2q}) \leqslant$$

$$\leqslant 2 E[(1 + \delta\xi)^{4p} + (1 + \delta\eta)^{4q}].$$

Să presupunem acum că momentele $E(|\delta\xi|^i)$ și $E(|\delta\eta|^j)$ sînt mărginite de T; atunci

$$B_{pq}(\xi, \eta) \leqslant 2 . 2^{4(p+q)} T.$$

Rezultă că în formula dispersiei $D^2(a_n^{p,q}(\xi, \eta))$, termenul $\frac{1}{n^2} B_{pq}(\xi, \eta)$ este majorat de $\frac{2 . 2^{4(p+q)} T}{n^2}$. Dacă alegem pe n suficient de mare, atunci putem neglija ultimul termen.

b) Să presupunem că ξ şi η sînt estimaţii nedeplasate pentru parametrii x şi y şi anume, vom presupune că sînt chiar mediile de selecţie $\xi = \overline{\xi}$ şi $\eta = \overline{\eta}$. În acest caz vom da pentru dispersia $D^2(\overline{\xi}^p \overline{\eta}^q)$ o formulă asimptotică.

Pentru determinarea formulei asimptotice, vom pleca de la reprezentarea mediei de selecţie $\overline{\xi}$ sub forma

$$\overline{\xi} = x + \psi_n \frac{D(\xi)}{n^{1/2}},$$

unde variabila aleatoare ψ_n este asimptotic normală $N(0, 1)$. Pentru dispersia $D^2(\overline{\xi}^p)$, cînd n este suficient de mare, avem

$$D^2(\overline{\xi}^p) = E(\xi^{2p}) - (E(\overline{\xi}^p))^2 = p^2 x^{2p-2} \frac{D^2(\xi)}{n} + \varepsilon(p) x^{2p-4} \frac{D^4(\xi)}{n^2} + \theta(n^{-\frac{5}{2}}),$$

unde

$$\varepsilon(p) = \frac{2 p (p-1)(7 p^2 - 13 p + 3)}{4}.$$

De aici deducem

$$\frac{D^2(\overline{\xi}^p)}{x^{2p}} = p^2 \frac{D^2(\xi)}{n x^2} + \varepsilon(p) \frac{D^4(\xi)}{n^2 x^4} + \theta(n^{-\frac{5}{2}})(p-1).$$

Pentru calculul termenului $B_{pq}(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ vom evalua mai întîi partea

$$u_p + \frac{u_p^2}{2^2} = \frac{(E(\overline{\xi}^p))^2}{x^{2p}} - 1 = p(p-1) \frac{D^2(\xi)}{n x^2} + \chi(p) \frac{D^4(\xi)}{n^2 x^4} + \theta(n^{-\frac{5}{2}}).$$

Rezultă atunci că

$$B_{pq}(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = p^2 q^2 \frac{D^2(\xi) D^2(\eta)}{n^2 x^2 y^2} \left[1 + \frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q}\right] + \theta(n^{-\frac{5}{2}})$$

şi

$$D^2(\overline{\xi}^p \overline{\eta}^q) = x^{2p} y^{2q} \left[p^2 \frac{D^2(\xi)}{n x^2} + q^2 \frac{D^2(\eta)}{n y^2} + \right.$$

$$+ p^2 q^2 \frac{D^2(\xi) D^2(\eta)}{n^2 x^2 y^2} \left(1 + \frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q}\right) + \varepsilon(p) \frac{D^4(\xi)}{n^2 x^4} +$$

$$\left. + \varepsilon(q) \frac{D^4(\eta)}{n^2 y^4}\right] + \theta_{pq}(n^{-\frac{5}{2}}),$$

unde $\varepsilon(1) = 0$ şi termenul $\theta_{11}(n^{-\frac{5}{2}}) = 0$.

Pentru $p = q = 1$ obţinem

$$D^2(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = x^2 y^2 \left[\frac{D^2(\xi)}{n x^2} + \frac{D^2(\eta)}{n y^2} + \frac{D^2(\xi) D^2(\eta)}{n^2 x^2 y^2} \right].$$

Primită la redacţie la 22 martie 1966

Centrul de statistică matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*. Univ. Press, Princeton 1946.
2. Leo A. Goodman, *On the Exact Variance of Products*. Journal of the American Statistical Association, **55**, *292* (1960).

ASUPRA UNEI TEOREME A LUI U. GRENANDER

DE

H. COHN

În această Notă se dă o extindere a teoremei lui U. Grenander [2] referitoare la construcția regiunilor critice optime pentru testarea ipotezelor statistice în cazul proceselor aleatoare.

Fie spațiul măsurabil $(R^{\infty}, \mathfrak{B}^{\infty})$, P_0 și P_1 două probabilități definite pe $\mathfrak{B}^{\infty}$ și funcțiile coordonate $\{\mathfrak{X}_n\}_{n \in N^*}$ $(N^* = \{1, 2, \ldots\})$ definite astfel

$$\mathfrak{X}_n(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = x_n, \quad (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in R^{\infty}.$$

Acestor funcții le corespund două procese stocastice atunci cînd le considerăm atașate cîmpurilor de probabilitate $(R^{\infty}, \mathfrak{B}^{\infty}, P_0)$ și respectiv $(R^{\infty}, \mathfrak{B}^{\infty}, P_1)$.

Pentru verificarea ipotezelor statistice se alege o regiune critică $W \in \mathfrak{B}^{\infty}$ astfel ca $P_0(W) = \alpha$, α fiind un număr pozitiv fixat, numit eroare de genul întîi. Fie H_0 ipoteza că adevărata probabilitate este P_0 și H_1 ipoteza că adevărata probabilitate este P_1.

Verificarea ipotezelor statistice decurge în felul următor :

$$\text{dacă } (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in W^* \quad \text{acceptăm ipoteza } H_0$$

$$\text{dacă } (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in W \quad \text{acceptăm ipoteza } H_1$$

$\beta = P_1(W^*)$ se numește eroare de genul al doilea. Erorile de primul și al doilea gen reprezintă probabilitățile de a accepta o ipoteză falsă : eroarea de genul întîi de a accepta ipoteza H_1 cînd este adevărată ipoteza H_0, iar eroarea de genul al doilea de a accepta ipoteza H_0 cînd este adevărată ipoteza H_1.

Este de dorit ca regiunea critică aleasă să fie optimală în sensul că fiind fixată eroarea de primul gen să alegem domeniul W care realizează cea mai mică eroare de genul al doilea. După teorema lui Lebesgue de dezvoltare a funcțiilor aditive de mulțime și după teorema lui Radon-Nycodim, există o mulțime $H \in \mathfrak{B}^{\infty}$ de măsură P_0 nulă și o funcție $f(x)$ aproape

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1347–1349, BUCUREȘTI, 1966

sigur nenegativă în raport cu P_0, astfel încît pentru orice $E \in \mathfrak{B}^\infty$ să avem

$$P_1(E) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}P_0(x) + P_1(EH), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots).$$

U. Grenander arată în [2] că mulțimea

$$S_k = \{f(x) \geqslant k\} \cup H,$$

unde k este definit de condiția $P_0(S_k) = \alpha$, este o regiune critică optimă în sensul specificat mai sus. Totodată U. Grenander dă o teoremă care constituie un procedeu practic de construcție a regiunii critice S_k. Asupra acestei teoreme ne vom ocupa în lucrarea de față, dînd o extindere care renunță la restricția impusă privind absolut continuitatea unei măsuri în raport cu cealaltă și obținînd o convergență aproape sigură în raport cu ambele măsuri (în locul convergenței în probabilitate pe o anumită mulțime în cazul teoremei lui U. Grenander).

Fie P_0^n și P_1^n restricțiile lui P_0 și P_1 la mulțimile din σ-algebra $\mathfrak{B}^n \times R \times \ldots$. Vom presupune că P_0^n și P_1^n sînt absolut continue în raport cu măsura Lebesgue și admit deci densitățile $g_0(x_1, \ldots, x_n)$ și $g_1(x_1, \ldots, x_n)$ care satisfac relațiile :

$$P_0^n(A \times R \times \ldots) = \int_A g_0(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

$$P_1^n(A \times R \times \ldots) = \int_A g_1(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

pentru orice $A \in \mathfrak{B}^n$ și $n \in N^*$.

Să considerăm funcția

$$l(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{g_1(x_1, \ldots, x_n)}{g_0(x_1, \ldots, x_n)} & \text{dacă } g_0(x_1, \ldots, x_n) > 0 \\ 1 & \text{dacă } g_0(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n) = 1 \\ \infty & \text{dacă } g_0(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ și} \\ & \quad g_1(x_1, \ldots, x_n) > 0 \end{cases}$$

Obținem cu ușurință :

$$\int_A l(x_1, \ldots, x_n)\, g_0(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \begin{cases} P_1(A) & \text{dacă } AD = \emptyset \\ 0 & \text{dacă } A \subset D \end{cases}$$

unde $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid g_0(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$.

Prin urmare $h(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = l(x_1, \ldots, x_n)$ este o variantă a derivatei Radon-Nycodim a lui P_1^n în raport cu P_0^n. Conform unei teoreme a lui P. Billingsley [1], obținem

$$\lim_{n \to \infty} l(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$$

aproape sigur în raport cu P_0. Pe mulţimea H^* avem şi $\lim\limits_{n\to\infty} l(x_1, \dots, x_n) = f(x)$ aproape sigur în raport cu P_1. În adevăr, dacă ar exista un $B \subset H^*$ cu $P_1(B) > 0$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} l(x_1, \dots, x_n) \nrightarrow f(x)$ sau nu ar exista, atunci am avea evident $P_0(B) = 0$ şi ar fi inclusă în H ca mulţime singulară.

Să considerăm acum dezvoltarea lui P_0 în raport cu P_1

$$P_0(E) = \int_E g(x)\,\mathrm{d}P_1(x) + P_0(EH')$$

pentru orice $E \in \mathfrak{B}^\infty$, H' fiind o mulţime de măsură P_1 nulă.

Conform teoremei amintite mai sus a lui P. Billingsley, avem :

$$\lim_{n\to\infty} l(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{g(x)}$$

aproape sigur în raport cu P_1. De aici rezultă că pe mulţimea H avem

$$\lim_{n\to\infty} l(x_1, \dots, x_n) = \infty$$

aproape sigur în raport cu P_1. În adevăr, avem

$$P_0(H) = \int_H g(x)\,\mathrm{d}P_1(x) + P_0(HH') = 0$$

de unde obţinem $g(x) = 0$ aproape sigur în raport cu P_1 ceea ce demonstrează afirmaţia de mai sus.

Rezultatele obţinute sînt următoarele :

1) În raport cu P_0, $l(x_1, \dots, x_n)$ converge aproape sigur către $f(x)$.

2) În raport cu P_1, $l(x_1, \dots, x_n)$ converge aproape sigur către $f(x)$ pe mulţimea H, iar pe mulţimea H^*, $l(x_1, \dots, x_n)$ converge aproape sigur către $+\infty$.

De aici obţinem că putem lua drept regiune critică optimă mulţimea

$$S'_k = \{(x_1, \dots, x_n, \dots) \mid (\lim_{n\to\infty} l(x_1, \dots, x_n) \geqq k\}$$

Primit la redacţie la 14 februarie 1966

Centrul de statistcă matematică al
Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. P. Billingsley, *Statistical inference for Marcov processes*. University of Chicago Press, Chicago, 1961.
2. V. Grenander, *Stochastic processes and statistical inference* Arkiv. for. Math. **1**, 195—277 (1950).

ASUPRA UNEI TEOREME PRIVIND TENSORUL DE CURBURĂ

DE

N. N. TEODORESCU şi GH. N. RIZESCU

Se studiază perechile de spaţii Riemann V_n şi $\overline{V}_n$ care au tensorii de curbură proporţionali. Se arată că în general factorul de proporţionalitate este egal cu unitatea şi deci conform unei teoreme a lui C. Teleman, metricile celor două spaţii coincid pînă la un factor constant.

Fac excepţie anumite spaţii conform euclidiene.

În lucrarea [1] C. Teleman demonstrează că dacă două spaţii Riemann V_n şi $\overline{V}_n$ au tensorii de curbură R^i_{jkl} şi $\overline{R}^i_{jkl}$ egali, atunci au şi aceeaşi metrică, abstracţie făcînd de un factor constant, presupunînd că matricele $X_{kl} = \| R^i_{jkl} \|$ formează un sistem ireductibil de transformări liniare.

Noi vom considera aici cazul mai general, cînd tensorii de curbură ai celor două spaţii sînt proporţionali şi vom arăta că, şi în acest caz, spaţiile V_n şi $\overline{V}_n$ $(n > 3)$ au aceeaşi metrică pînă la un factor constant, cu excepţia anumitor spaţii conform euclidiene.

★

Considerăm spaţiile Riemann V_n şi $\overline{V}_n$ avînd metricile $\mathrm{d}s^2 = a_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ şi $\mathrm{d}\bar{s}^2 = \bar{a}_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$. Presupunem că tensorii de curbură R^i_{jkl} şi $\overline{R}^i_{jkl}$ sînt proporţionali, adică :

$$R^i_{jkl} = \rho \, \overline{R}^i_{jkl} \, . \tag{1}$$

Dacă matricile $X_{kl} = \| R^i_{jkl} \|$ formează un sistem ireductibil de transformări liniare, atunci sistemul de ecuaţii în necunoscutele x_{ij},

$$x_{ri} \, R^r_{jkl} + x_{rj} \, R^r_{ikl} = 0$$

are soluţie unică, abstracţie făcînd de un factor.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1351–1356, BUCUREŞTI, 1966

Ţinînd seama de (1), rezultă că acest sistem este verificat atît de a_{ij} cît şi de $\bar{a}_{ij}$. Rezultă deci că :

$$a_{ij} = e^{2\sigma} \bar{a}_{ij}, \tag{2}$$

unde σ este o funcţie de variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Punînd în (1) $i = k$ şi sumînd se obţine :

$$R_{jl} = \rho \bar{R}_{jl} \tag{3}$$

Din relaţiile (2) şi (3) se obţine imediat :

$$a_{jk} R^i_l = \rho \bar{a}_{jk} \bar{R}^i_l, \tag{3'}$$

$$a_{jk} R = \rho \bar{a}_{jk} \bar{R}. \tag{3''}$$

Considerînd tensorul conform al lui Weyl [4] :

$$W^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n-2}(\delta^i_k R_{jl} - \delta^i_l R_{jk} - a_{jk} R^i_l + a_{jl} R^i_k) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^i_k a_{jl} - \delta^i_l a_{jk}),$$

relaţiile (1), (3), (3′), (3″) ne arată că :

$$W^i_{jkl} = \rho \bar{W}^i_{jkl} \tag{4}$$

Pe de altă parte, formula (2) ne spune că spaţiile V_n şi $\bar{V}_n$ sînt în corespondenţă conformă, deci :

$$W^i_{jkl} = \bar{W}^i_{jkl}. \tag{4'}$$

Scăzînd (4) şi (4′) se obţine :

$$(\rho - 1) \bar{W}^i_{jkl} = 0. \tag{5}$$

Relaţiile (4′) şi (5) ne arată că avem de considerat două cazuri :

I. $\rho = 1$, de unde, conform cu (1),

$$R^i_{jkl} = \bar{R}^i_{jkl}.$$

În acest caz teorema lui Teleman ne spune că metricile spaţiilor V_n şi $\bar{V}_n$ coincid pînă la un factor constant.

II. $$\bar{W}^i_{jkl} = 0$$

$$W^i_{jkl} = 0.$$

În acest caz, o teoremă a lui Schouten ne spune că spaţiile V_n şi $\bar{V}_n$ sînt conform euclidiene, dacă $n > 3$.

★

Rămîne de văzut, dacă există spaţii conform euclidiene care să verifice relaţia (1). În primul rînd să arătăm că ρ nu poate fi o constantă diferită de 1, ceea ce ar însemna că metricile coincid pînă la un factor constant.

Notînd cu T^i_{jk} diferența între simbolii lui Cristoffel $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|$ și $\left|\begin{matrix} i \\ ij \end{matrix}\right|$, relația (2) ne spune că avem :

$$T^i_{jk} = \delta^i_j \sigma_k + \delta^i_k \sigma_j - \overline{a}_{jk} \sigma^i, \tag{6}$$

unde am notat $\sigma_j = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x^j}$ și $\sigma^i = a^{ir} \sigma_r$.

Luînd derivata covariantă în relația (3), obținem :

$$R_{jl:k} = \rho\,(\overline{R}_{jl:\overline{k}} - \overline{R}_{ml}\, T^m_{jk} - \overline{R}_{mj}\, T^m_{kl}) \tag{6'}$$

De aici,

$$R_{jk:l} - R_{jl:k} = \rho\,(\overline{R}_{jk:\overline{l}} - \overline{R}_{jl:\overline{k}} + \overline{R}_{ml}\, T^m_{jk} - \overline{R}_{mk}\, T^m_{jl}).$$

De asemenea, din relația

$$R = \rho\ \overline{R}\ \mathrm{e}^{-2\sigma}$$

rezultă :

$$a_{jl}\frac{\partial R}{\partial x^k} - a_{jk}\frac{\partial R}{\partial x^l} = \rho\left(\overline{a}_{jl}\frac{\partial \overline{R}}{\partial x^k} - \overline{a}_{jk}\frac{\partial \overline{R}}{\partial x^l}\right) - 2\rho\,\overline{R}\,(\overline{a}_{jl}\sigma_k - \overline{a}_{jk}\sigma_l). \tag{6''}$$

Comparînd (6′) cu (6″), rezultă

$$V_{jkl} = \rho\,\overline{V}_{jkl} + \rho\,(\overline{R}_{ml}\, T^m_{jk} - \overline{R}_{mk}\, T^m_{jl}) - \frac{\rho\,\overline{R}}{n-1}\,(\overline{a}_{jl}\,\sigma_k - \overline{a}_{jk}\,\sigma_l), \tag{6'''}$$

unde am notat [4] :

$$V_{jkl} = R_{jk:l} - R_{jl:k} + \frac{1}{2\,(n-1)}\left(a_{jl}\frac{\partial R}{\partial x^k} - a_{jk}\frac{\partial R}{\partial x^l}\right).$$

Dar în cazul unui spațiu conform euclidian, $V_{jkl} = 0$, deoarece avem identitatea [4] :

$$W^s_{jkl:s} + \frac{n-3}{n-2}\, V_{jkl} = 0.$$

Ținînd seama de acest lucru, precum și de (6), relația (6‴) ne arată că :

$$\overline{R}_{jl}\,\sigma_k - \overline{R}_{jk}\,\sigma_l + (\overline{a}_{jl}\,\overline{R}^m_k - \overline{a}_{jk}\,\overline{R}^m_l)\sigma_m - \frac{\overline{R}}{n-1}(\overline{a}_{jl}\,\sigma_k - \overline{a}_{jk}\,\sigma_l) = 0$$

Înmulțind această relație cu $\overline{a}^{jl}$, se obține :

$$(n-2)\,\overline{R}^s_k\,\sigma_s = 0,$$

relație care nu poate fi verificată [2] decît pentru $\sigma_i = 0$, deci σ este o constantă.

Însă de aici rezultă că cele două spații, avînd metricile proporționale cu o constantă, au și același tensor de curbură, deci $\rho = 1$.

Să căutăm deci spațiile conform euclidiene ai căror tensori de curbură sînt proporționali printr-o funcție de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Presupunem că printr-o schimbare de variabile am redus metrica spaţiului V_n la forma :

$$ds^2 = e^{2\psi}\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2].$$

Tensorul de curbură se scrie

$$R^i_{jkl} = \delta^i_l\, P_{jk} - \delta^i_k\, P_{jl} + \delta_{jk}\, P_{il} - \delta_{jl}\, P_{ik}\,, \tag{7}$$

unde am notat

$$P_{jk} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\,\delta_{jk}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^n}\right)^2\right]. \tag{7'}$$

Mai avem :

$$R_{jl} = (2 - n)\, P_{jl} - \delta_{jl}\left(\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\,\Psi^2\right), \tag{7''}$$

unde am notat :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial {x^1}^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial {x^2}^2} + \ldots + \frac{\partial^2\psi}{\partial {x^n}^2}$$

$$\Psi^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x^n}\right)^2.$$

Dacă metrica lui $\overline{V}_n$ a fost adusă la forma

$$d\overline{s}^2 = e^{2\overline{\psi}}\,[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2],$$

atunci, ţinînd seama de (3) şi (7''), trebuie să avem :

$$(2-n)\, P_{jl} - \delta_{jl}\left(\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\,\Psi^2\right) = \rho\left[(2-n)\,\overline{P}_{jl} - \delta_{jl}\left(\Delta\overline{\psi} + \frac{n-2}{2}\,\overline{\Psi}^2\right)\right]. \tag{7'''}$$

Din relaţiile (1) şi (7) rezultă :

$$\delta^i_l P_{jk} - \delta^i_k P_{jl} + \delta_{jk} P_{il} - \delta_{jl} P_{ik} = \rho\,[\delta^i_l\,\overline{P}_{jk} - \delta^i_k\,\overline{P}_{jl} + \delta_{jk}\,\overline{P}_{il} - \delta_{jl}\,\overline{P}_{ik}]$$

şi înlocuind valoarea lui P_{jl} din (7'''), rezultă :

$$(\delta^i_l\,\delta_{jk} - \delta^i_k\,\delta_{jl} + \delta_{jk}\,\delta_{il} - \delta_{ji}\,\delta_{ik})\left[\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\,\Psi^2 - \rho\left(\Delta\overline{\psi} + \frac{n-2}{2}\,\overline{\Psi}^2\right)\right] = 0.$$

Punînd $i = l$ şi sumînd, apoi punînd $j = k$, se obţine :

$$\Delta\psi + \frac{n-2}{2}\,\Psi^2 = \rho\left(\Delta\overline{\psi} + \frac{n-2}{2}\,\overline{\Psi}^2\right). \tag{8}$$

Ţinînd seama de (7''') şi de (8), rezultă :

$$P_{jl} = \rho\,\overline{P}_{jl}$$

adică, conform cu (7), avem :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\,\delta_{jk}\,\Psi^2 = \rho\left[\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^j}\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\,\delta_{jk}\,\overline{\Psi}^2\right], \tag{9}$$

Ecuaţiile (8) şi (9) reprezintă condiţiile necesare şi suficiente pe care trebuie să le satisfacă funcţiile ρ, ψ, $\overline{\psi}$ pentru ca tensorii de curbură ai spaţiilor de metrici $\mathrm{d}s^2 = e^{2\psi}[(\mathrm{d}x^1)^2 + \dots + (\mathrm{d}x^n)^2]$ şi $\mathrm{d}\overline{s}^2 = e^{2\overline{\psi}}[(\mathrm{d}x^1)^2 + \dots + (\mathrm{d}x^n)^2]$ să fie proporţionali prin factorul ρ.

★

Vom da un exemplu prin care vom arăta că sistemul format de ecuaţiile (8) şi (9) admite soluţii, deci vom arăta că există spaţii conform euclidiene care să aibă tensorii de curbură proporţionali.

Fie V_n un spaţiu cu curbură constantă pozitivă k, avînd metrica :

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{10}$$

Fie $\overline{V}_n$ spaţiul de metrică :

$$\mathrm{d}\overline{s}^2 = \overline{\alpha}_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = \left\{\frac{4+k[(x^1)^2+(x^2)^2+\dots+(x^n)^2]}{4+K[(x^1)^2+(x^2)^2+\dots+(x^n)^2]}\right\}^2 \alpha_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{10'}$$

unde K este o constantă pozitivă diferită de k.

Se observă că şi $\overline{V}_n$ este cu curbură constantă.

Într-adevăr, să presupunem că prin transformarea :

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

am redus metrica lui V_n la forma lui Riemann :

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}y^1)^2+(\mathrm{d}y^2)^2+\dots+(\mathrm{d}y^n)^2}{\left\{1+\frac{k}{4}[(y^1)^2+(y^2)^2+\dots+(y^n)^2]\right\}^2}.$$

În acest mod, metrica lui $\overline{V}_n$ se scrie :

$$\mathrm{d}\overline{s}^2 = \frac{(\mathrm{d}y^1)^2+(\mathrm{d}y^2)^2+\dots+(\mathrm{d}y^n)^2}{\left\{1+\frac{K}{4}[(y^1)^2+(y^2)^2+\dots+(y^n)^2]\right\}^2}$$

care reprezintă metrica unui spaţiu cu curbura constantă K.

Spaţiile V_n şi $\overline{V}_n$ fiind cu curbură constantă, tensorii de curbură au forma :

$$R^i_{jkl} = k\,(\delta^i_k\,\alpha_{jl} - \delta^i_l\,\alpha_{jk}),$$

$$\overline{R}^i_{jkl} = K\,(\delta^i_k\,\overline{\alpha}_{jl} - \delta^i_l\,\overline{\alpha}_{jk}).$$

Ţinînd seama de (10′) avem :

$$R^i_{jkl} = \rho\,\overline{R}^i_{jkl}$$

unde :

$$\rho = \frac{K}{k}\left\{\frac{4+k[(x^1)^2+(x^2)^2+\dots+(x^n)^2]}{4+K[(x^1)^2+(x^2)^2+\dots+(x^n)^2]}\right\}^2$$

iar funcţiile ψ şi $\bar{\psi}$ au forma :

$$\psi = -\log\left\{1 + \frac{k}{4}\left[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2\right]\right\}$$

$$\bar{\psi} = -\log\left\{1 + \frac{K}{4}\left[(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2\right]\right\}.$$

Primită la redacţie la 7 ianuarie 1966

Liceul „C. A. Rosetti”,
Bucureşti
Liceul „Dimitrie Cantemir”,
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. K. TEЛЕМАН, *Об одной теореме Бореля-Лихнеровича.* Rev. Math. pures et appl., **III** (1958).
2. N. N. TEODORESCU şi GH. RIZESCU, *O demonstraţie a unei teoreme privind tensorul de curbură.* St. cerc. mat., **18**, *4* (1966).
3. N. N. TEODORESCU, *Asupra unor spaţii Finsler.* St. cerc. mat., **18**, *3* (1962).
4. G. VRĂNCEANU, *Sur la décomposabilité et les groupes d'holonomie espaces A_n.* Publicationes mathematicae, Debrecen, **7** (1960).
5. G. VRĂNCEANU, *Lecţii de geometrie diferenţială,* vol. I, II, Bucureşti, 1952.

ASUPRA MIŞCĂRII COMPRESIBILE SUBSONICE ÎN JURUL UNOR PROFILE OBŢINUTE PRIN TRANSFORMĂRI CONFORME DE UN TIP PARTICULAR

DE

ANA DUCARU DRAGA

În lucrare se studiază profile aerodinamice obţinute prin reprezentări conforme z (ζ) de forma (1.2) a căror derivată este funcţia raţională (1.1).

Reducînd problema matematică a mişcării compresibile subsonice (în a doua aproximaţie) la o problemă Dirichlet regulată, folosind metoda indicată în [3], se dau expresiile respective pentru circulaţie.

1. Vom considera cîteva exemple de profile cu un singur punct angulos, care să fie punct de înapoiere, din clasa profilelor al căror domeniu exterior este reprezentabil pe exteriorul unui cerc printr-o transformare a cărei derivată este o funcţie raţională.

Aşa cum a arătat Caius Iacob în [1], determinarea corecţiei de compresibilitate în a doua aproximaţie în studiul mişcării subsonice compresibile în jurul unor asemenea profile, comportă în ultimă etapă rezolvarea unei probleme Dirichlet regulate.

Vom da cîteva caracteristici grafice ale acestor profile şi expresia circulaţiei în a doua aproximaţie.

2. Fie D domeniul exterior profilului C iar Ω domeniul exterior cercului $(|\zeta| = a)$.

Fie $z = z(\zeta)$ funcţia ce reprezintă conform Ω pe D cu corespondenţa frontierelor, a cărei derivată este de forma

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = (\zeta - \zeta_0)\frac{\prod_{i=1}^{p}(\zeta - \mu_i)^{m_i}}{\prod_{j=1}^{q}(\zeta - \nu_j)^{n_j}}, \tag{1.1}$$

unde $\mu_i \neq \nu_j$ sînt puncte interioare cercului $|\zeta| = a$, iar ζ_0 este imaginea punctului angulos z_0.

ST. CERC. MAT. TOM. 18, Nr. 9, p. 1357-1364, BUCUREŞTI, 1966

Din comportarea funcţiei $z(\zeta)$ la infinit

$$z = \zeta + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots \tag{1.2}$$

se impune să fie îndeplinite condiţiile

$$\sum_{j=1}^{q} n_j = 1 + \sum_{i=1}^{p} m_i , \quad \sum_{j=1}^{q} n_j \nu_j = \zeta_0 + \sum_{i=1}^{p} m_i \mu_i . \tag{1.3}$$

În studiul aproximativ al mişcării subsonice se consideră dezvoltările

$$f(z, \overline{z}) = f_0(z) + M_0^2 f_1(z, \overline{z}) + \dots \tag{1.4}$$

pentru potenţialul complex şi

$$k = k_0 + M_0^2 k_1 + \dots \tag{1.5}$$

pentru circulaţie ; $f_0(z)$ este potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul aceluiaşi profil cu circulaţia dată de regula lui Jukovski :

$$k_0 = 2 \pi i a V_\infty [e^{i(\alpha - \beta)} - e^{-i(\alpha - \beta)}], \tag{1.6}$$

a fiind raza cercului pe care se reprezintă profilul, α unghiul vitezei la infinit cu axa orizontală ($w_\infty = V_\infty e^{-i\alpha}$), β argumentul imaginii ζ_0 pe cerc a punctului angulos z_0, iar $M_0 = V_\infty / c_0$ este numărul adimensional bine cunoscut, C_0 fiind viteza sunetului în punctul de impact. M_0 este legat de M_∞, numărul lui Mach la infinit, printr-o relaţie cunoscută.

Aşa cum se arată în [2], avem

$$f_1(z, \overline{z}) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{V_\infty^2} \frac{df_0}{dz} N(z, \overline{z}) + H(z) \right], \tag{1.7}$$

unde

$$N(z, \overline{z}) = \overline{\int_{z_0}^{z} \left(\frac{df_0}{dz} \right)^2 dz} - 2 \overline{w}_\infty [f_0(z) + G(z)],$$

funcţia $G(z)$ aleasă convenabil este olomorfă în $D + C$, în afara punctului $z = \infty$ în vecinătatea căruia avem dezvoltarea :

$$G(z) = g_{-1} z + g_0 + \frac{g_1}{z} + \dots$$

iar $H(z)$ la infinit este de forma

$$H(z) = h_{-1} z + \frac{k_1}{2 \pi i} \log z + h_0 + \frac{h_1}{z} + \dots$$

cu k_1 real.

Din condiţia

$$\lim_{|z| \to \infty} (u - iv) = V_\infty e^{-i\alpha} = w_\infty$$

rezultă pentru a doua aproximaţie

$$h_{-1} = 2g_{-1} + w_\infty . \tag{1.8}$$

$H\,(z)$ este soluţia problemei lui Dirichlet

$$\mathrm{Im}\{H(z)\}_C = -\frac{1}{V_\infty^2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}N(z,\,\bar z)\right\} \tag{1.9}$$

cu singularităţi impuse la infinit. Această problemă se reduce la o problemă Dirichlet regulată considerînd diferenţa

$$H_1\,(z) = H\,(z) - F_1\,(z) = P_1\,(x,\,y) + iQ_1\,(x,\,y)$$

$H_1\,(z)$ este funcţie olomorfă în D, iar $F_1\,(z)$ este potenţialul complex al mişcării incompresibile în jurul profilului C, cu viteza complexă h_{-1} la infinit şi circulaţia k_1. Potenţialul $F_1\,(z)$ satisface condiţia

$$\mathrm{Im}\{F_1\,(z)\}_C = 0$$

prin care rezultă din (1.9)

$$\mathrm{Im}\{H_1(z)\}_C = -\frac{1}{V_\infty^2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}f_0}{\mathrm{d}z}\,N\,(z,\,\bar z)\right\}_C . \tag{1.9'}$$

Pentru determinarea expresiei circulaţiei în a doua aproximaţie, se folosesc rezultatele obţinute de Caius Iacob în legătură cu generalizarea regulei lui Jukovski relativ la determinarea circulaţiei, [3], care impun ca $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} =$ finită. Din această condiţie, k_1 se deduce sub forma

$$k_1 = -2\pi i a\,(h_{-1}\,\mathrm{e}^{i\beta} - \bar h_{-1}\,\mathrm{e}^{-i\beta}) - 2\,\pi\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \sigma}\right)\sigma = \beta \tag{1.10}$$

deoarece pe Γ, $\zeta = a\mathrm{e}^{i\sigma}$.

3. Vom studia şi reprezenta grafic profilele obţinute particularizînd (1.1) pentru

$$\mu_i = 0,\ (i = 1,\,2,\,\ldots,\,p),\ \nu_1 \neq 0,\ \nu_2 \neq 0,\ \nu_j = 0\ (j = 3,\,4,\,\ldots,\,q),$$

$$n_1 = n_2 = 1,\ n_j = 0\ (j = 3,\,4,\,\ldots,\,q)$$

cînd cu ajutorul relaţiilor (1.3) găsim

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta} = 1 - \frac{\nu_1\nu_2}{(\zeta-\nu_1)(\zeta-\nu_2)} = \frac{\zeta(\zeta-\zeta_0)}{(\zeta-\nu_1)(\zeta-\nu_2)} \tag{2.1}$$

din care rezultă

$$z = \zeta - \frac{\nu_1\nu_2}{\nu_1-\nu_2}\log\frac{\zeta-\nu_1}{\zeta-\nu_2}, \tag{2.2}$$

luînd nulă constanta de integrare; de asemenea vom considera (1.1) pentru

$$\mu_i = 0, (i = 1,\ 2, \ldots, p)\ \ \nu_1 \neq 0,\ \ \nu_2 \neq 0,\ \ \nu_j = 0\ \ (j = 3,\ 4, \ldots, q),$$

$$n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_j = 0,\ \ (j = 3,\ 4, \ldots, q)$$

cînd se obține relația

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{\zeta^2(\zeta - \zeta_0)}{(\zeta - \nu_1)(\zeta - \nu_2)^2} \tag{2.3}$$

care conduce la formula de transformare

$$z = \zeta - \frac{2\nu_1^2\nu_2}{(\nu_2 - \nu_1)^2}\log\frac{\zeta - \nu_1}{\zeta - \nu_2} + \frac{\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2)}{\nu_2 - \nu_1}\cdot\frac{1}{\zeta - \nu_2}. \tag{2.4}$$

Exemplele de mai jos reprezintă profile simetrice (ν_1, ν_2 numere reale) în cazul $\beta = 0$.

Vom nota cu l lungimea corzii profilului și cu i grosimea maximă.

Exemplul I. Acest exemplu corespunde cazului

$$\nu_1 = \frac{1}{4},\quad \nu_2 = \frac{3}{4},\quad \zeta_0 = 1,\quad \frac{i}{l} \approx 0{,}67$$

dat de relația (2.2).

Profilul corespunzător fiind simetric, în figura 1 este reprezentată numai porțiunea situată deasupra axei sale de simetrie. Raportul i/l caracterizează alungirea profilului considerat.

În acest caz avem

$$k_0 = -4\pi V_\infty \sin\alpha.$$

În determinarea aproximației a doua a mișcării obținem

$$N[z(\zeta), \overline{z(\zeta)}] = N(\zeta) = \frac{3}{16}V_\infty^2 e^{-2i\alpha}\left(\frac{1}{4}\zeta^4 + \frac{6e^{2i\alpha} - 19}{9}\zeta^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{3e^{4i\alpha} - 38e^{2i\alpha} + 32}{6}\zeta^2 - \frac{29e^{4i\alpha} + 32e^{2i\alpha} - 16}{3}\cdot\frac{1}{\zeta} + \frac{55e^{4i\alpha} + 98e^{2i\alpha} + 50}{6}\right),$$

$$H_1(\zeta) = -\frac{3}{16}V_\infty e^{-3i\alpha}\left(\frac{8634e^{6i\alpha} - 10351e^{4i\alpha} - 5604e^{2i\alpha} - 2016}{576}\cdot\frac{1}{\zeta} + \right.$$

$$+ \frac{864e^{2i\alpha} - 3410e^{4i\alpha} - 15163e^{6i\alpha} - 2172}{576}\cdot\frac{1}{\zeta^2} +$$

$$+ \frac{96 - 554e^{2i\alpha} + 1050e^{4i\alpha} - 1139e^{6i\alpha}}{96}\cdot\frac{1}{\zeta^3} + \frac{48e^{2i\alpha} - 96e^{4i\alpha} - 99e^{6i\alpha}}{48}\cdot$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\zeta^4} + \frac{896 + 5424e^{2i\alpha} + 1509e^{4i\alpha} - 48e^{6i\alpha}}{96}\right) + \text{const. reală.}$$

$$h - 1 = -V_\infty e^{-3i\alpha}$$

şi, în sfîrşit,

$$k_1 = \pi V_\infty (0{,}607 \sin \alpha - 35{,}\ 322 \sin 3\alpha).$$

Deci, circulaţia în a doua aproximaţie în jurul acestui profil este :

$$k = -4\pi V_\infty \sin \alpha + \pi V_\infty M_0^2 (0{,}607 \sin \alpha - 35{,}\ 322 \sin 3\alpha).$$

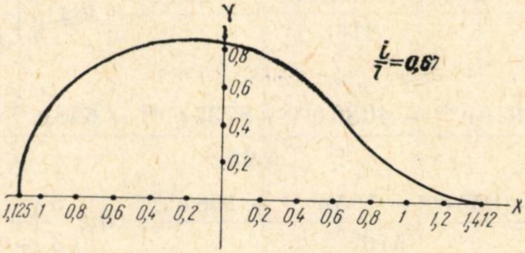


Fig. 1.

Exemplul II. Dacă în (2.2) efectuăm o translaţie $\zeta' = \zeta - \zeta_k$ cu $\zeta_k = \dfrac{\nu_1 + k\nu_2}{\nu_1 - \nu_2}$, $0 < k < 1$, se obţine

$$z = \zeta' + \zeta_k - \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \log \frac{\zeta' - \nu_1'}{\zeta' - \nu_2'},$$

transformarea de acelaşi tip (1.1), deoarece

$$\frac{dz}{d\zeta'} = (\zeta' - \zeta_0') \frac{\zeta' + \zeta_k}{(\zeta' - \nu_1')(\zeta' - \nu_2')},$$

unde $\zeta_0' = \zeta_0 - \zeta_k$, $\nu_1' = \nu_1 - \zeta_k$, $\nu_2' = \nu_2 - \zeta_k$.

Figura 2 reprezintă cazul particular $\nu_1 = \dfrac{1}{4}$, $\nu_2 = \dfrac{3}{4}$, $k = \dfrac{1}{3}$, $\zeta_0 = 1$, raportul $i/l \approx 0{,}3$ deci un profil de formă mai alungită decît cel din figura 1.

În acest caz avem

$$k_0 = -\frac{5}{2} \pi V_\infty \sin \alpha.$$

Expresiile premergătoare calculului lui k_1 sînt :

$$N(\zeta') = -\frac{64}{125} V_\infty^2 e^{-2i\alpha} \left[\frac{1}{3} \zeta'^3 + \frac{15 e^{2i\alpha} + 5}{24} \zeta'^2 + \right.$$
$$+ \frac{4500 e^{4i\alpha} - 24375 e^{2i\alpha} + 12500}{1728} \log \left(\zeta' + \frac{25}{24} \right) +$$
$$+ \frac{16875 e^{4i\alpha} - 71250 e^{2i\alpha} + 143750}{36864} \cdot \frac{1}{\zeta'} - \frac{3375 e^{4i\alpha} - 15375 e^{2i\alpha} + 28000}{4608} -$$
$$\left. - \frac{9000 e^{4i\alpha} - 48750 e^{2i\alpha} + 25000}{3456} \log \frac{5}{3} \right]$$

$$\begin{aligned}
H_1(\zeta) = V_\infty \biggl[& \frac{1250\,e^{i\alpha} + 1560\,e^{-i\alpha} - 288\,e^{-3i\alpha}}{1125}\,\zeta' + \\
& + \biggl(\frac{-18\,975\,e^{i\alpha} - 83030\,e^{-i\alpha} + 202748\,e^{-3i\alpha}}{184000} - \\
& - \frac{180\,e^{3i\alpha} - 1047\,e^{i\alpha} + 890\,e^{-i\alpha} - 200\,e^{-3i\alpha}}{216} \log\frac{5}{3} \biggr) \frac{1}{\zeta' + \frac{3}{8}} + \\
& + \biggl(\frac{945\,e^{3i\alpha} - 4089\,e^{i\alpha} + 8735\,e^{-i\alpha} + 648\,e^{-3i\alpha}}{4608} + \\
& + \frac{120\,e^{3i\alpha} - 254\,e^{i\alpha} - 195\,e^{-i\alpha} + 108\,e^{-3i\alpha}}{576} \log\frac{5}{3} \biggr) \frac{1}{\zeta'\left(\zeta' + \frac{3}{8}\right)} + \\
& + \frac{945\,e^{3i\alpha} + 21196800\,e^{-3i\alpha} - 2025\,e^{i\alpha} - 16130\,e^{-i\alpha}}{36864} + \\
& + \frac{2880\,e^{3i\alpha} - 975\,e^{i\alpha} + 500\,e^{-i\alpha}}{4608} \log\frac{5}{3} \biggr) \frac{1}{\zeta'^2\left(\zeta' + \frac{3}{8}\right)} - \\
& - \frac{2025\,e^{3i\alpha} - 8550\,e^{i\alpha} + 17250\,e^{-i\alpha}}{294912} \cdot \frac{1}{\zeta'^3\left(\zeta' + \frac{3}{8}\right)} + \\
& + \biggl(\frac{-27\,e^{i\alpha} + 105\,e^{-i\alpha} - 220\,e^{-3i\alpha}}{72} - \frac{36\,e^{i\alpha} - 195\,e^{-i\alpha} + 100\,e^{-3i\alpha}}{27} \log\frac{5}{3} \biggr) \frac{1}{1 + \frac{3}{8}\zeta'} + \\
& + \frac{12800\,e^{i\alpha} - 2420\,e^{-i\alpha} + 4608\,e^{-3i\alpha}}{6750} \cdot \\
& \cdot \frac{\zeta'^3 + \frac{50 + 15^{2i\alpha}}{24}\zeta'^2 + \frac{250\,e^{2i\alpha} - 625}{192}\zeta' + \frac{3125}{1536}e^{2i\alpha}}{\zeta' + \frac{25}{42}} \log\left(1 + \frac{3}{8\zeta'}\right) + \\
& + \frac{249\,e^{3i\alpha} - 1785\,e^{i\alpha} + 1025\,e^{-i\alpha}}{2880} \cdot \frac{1}{\zeta'} + \frac{8}{9}e^{i\alpha} \cdot \frac{1}{\zeta'^2} - \frac{125}{12288}e^{3i\alpha} \cdot \frac{1}{\zeta'^3} \biggr] + \\
& + \text{const.reală}.
\end{aligned}$$

În virtutea formulei (1.8) obținem :

$$h_{-1} = \frac{23}{9} V_\infty e^{-3i\alpha} - \frac{19}{5} V_\infty e^{-i\alpha} - \frac{1}{5} V_\infty e^{i\alpha}.$$

În final formula (1.10) ne dă pentru k_1 expresia :

$$k_1 = \pi V_\infty (13{,}916 \sin \alpha - 7729{,}939 \sin 3\alpha).$$

Prin urmare :

$$k = -2{,}5\, \pi V_\infty \sin \alpha + \pi V_\infty M_0^2 (13{,}916 \sin \alpha - 7729{,}939 \sin 3\alpha).$$

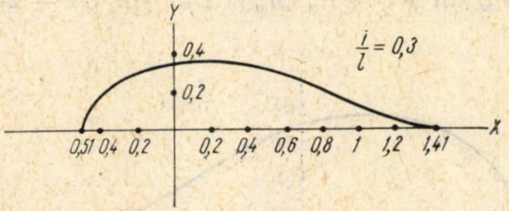


Fig. 2

Exemplul III. Figura 3 reprezintă profilul obţinut cu transformarea (2.4) considerînd $\nu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_2 = \frac{1}{4}$, $\zeta_0 = 1$.

Rezultă $i/l \approx 0{,}4$ iar $k_0 = -4\pi V_\infty \sin \alpha$:

$$N(\zeta) = -\frac{V_\infty^2 e^{-2i\alpha}}{32}\left[\frac{\zeta^5}{5} + \frac{2e^{2i\alpha} - 11}{4}\zeta^4 + \frac{e^{4i\alpha} - 22e^{2i\alpha} + 42}{3}\zeta^3 + \right.$$

$$+ \frac{84e^{2i\alpha} - 11e^{4i\alpha} - 64}{2}\zeta^2 + \frac{54e^{4i\alpha} + 64e^{2i\alpha} - 32}{\zeta} -$$

$$\left. - \frac{1775e^{4i\alpha} + 2975e^{2i\alpha} - 1494}{30}\right]$$

$$H_1(\zeta) = \frac{V_\infty e^{-3i\alpha}}{32}\left[\frac{-178360e^{6i\alpha} + 204529e^{4i\alpha} + 327980e^{2i\alpha} - 154576}{1920} \cdot \right.$$

$$\cdot \frac{1}{\zeta} + \frac{40196e^{6i\alpha} - 166360e^{4i\alpha} + 3790e^{2i\alpha} + 26340}{960} \cdot \frac{1}{\zeta^2} +$$

$$+ \frac{-166180e^{6i\alpha} - 125726e^{4i\alpha} + 134070e^{2i\alpha} - 22188}{1920} \cdot \frac{1}{\zeta^3} +$$

$$+ \frac{41614e^{6i\alpha} + 40366e^{4i\alpha} - 1894e^{2i\alpha} + 1920}{1920} \cdot \frac{1}{\zeta^4} +$$

$$+ \frac{-302e^{6i\alpha} - 64e^{4i\alpha} + 32e^{2i\alpha}}{160} \cdot \frac{1}{\zeta^5} +$$

$$\left. + \frac{2152e^{6i\alpha} - 17078^{4i\alpha} + 19129e^{2i\alpha} - 4008}{384}\right] + \text{const. reală nec.}$$

$$h_{-1} = -\frac{V_\infty}{32}(42e^{i\alpha} - 96e^{-i\alpha} + 32e^{-3i\alpha})$$

Cu aceste expresii formula (1.10) ne dă :

$$k_1 = \pi V_\infty (1{,}245 \sin 3\alpha + 26{,}723 \sin \alpha)$$

Rezultă :

$$k = - 4\pi V_\infty \sin \alpha + \pi V_\infty M_0^2 (1{,}245 \sin 3\alpha + 26{,}723 \sin\alpha).$$

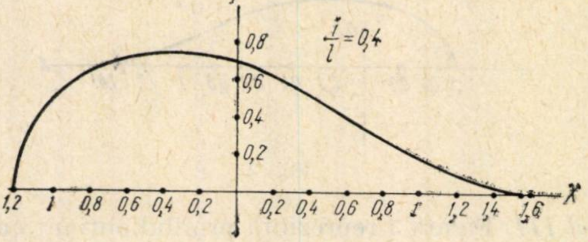


Fig 3

Avînd expresia circulaţiei în aproximaţia considerată, se poate calcula uşor rezultanta acţiunii hidrodinamice asupra obstacolului.

Primită la redacţie la 17 februarie 1966

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Caius Iacob, Archiwum Mech. Stosowanej, **XVI**, *2*, 273–284, (1964).
2. Caius Iacob, *Introduction math. à la méc. des fluides.* Academia R.P.R., Bucureşti, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
3. Caius Iacob, *Asupra unei generalizări a regulei lui Jukovski pentru determinarea circulaţiei.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de Ştiinţe matematice şi fizice, *6*, 222–227 (1954).

ASUPRA UNUI MODEL DE TRANSPORT ÎN MAI MULTE ETAPE

DE

CORNELIU ZIDĂROIU

În lucrare se examinează problema de programare liniară (1.1)—(1.8) în legătură cu o problemă considerată în [1].

Se arată că problemele (1.1)—(1.8) și (2.1)—(2.8) sînt echivalente (teorema I). Se definește o rețea de transport $R = (\pi, U)$ și se arată că problema (2.1)—(2.8) este o problemă de distribuție (optimală) în această rețea (teorema II). Se dă apoi un criteriu de existență a programelor pentru problema considerată (teorema III).

Să considerăm problema de programare liniară următoare :

1. Să se determine valorile variabilelor x_{ij} $(i, j) \in MN$ și y_{jk}, $(j, k) \in NP$ care minimizează forma liniară

$$\sum_{(i,j) \in MN} a_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k) \in NP} b_{jk} y_{jk} = \text{minim} \tag{1.1}$$

in condițiile :

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leqslant p_i, \quad i \in M \tag{1.2}$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \leqslant q_j, \quad j \in N \tag{1.3}$$

$$\sum_{k \in P} y_{jk} \leqslant q_j, \quad j \in N \tag{1.4}$$

$$\sum_{j \in N} y_{jk} \geqslant r_k, \quad k \in P \tag{1.5}$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} - \sum_{k \in P} y_{jk} = 0, \quad j \in N \tag{1.6}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant f_{ij}, \quad (i, j) \in MN \tag{1.7}$$

$$0 \leqslant y_{jk} \leqslant g_{jk}, \quad (j, k) \in NP, \tag{1.8}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1365—1369, BUCUREȘTI, 1966

unde p_i, q_j, r_k, a_{ij}, b_{jk}, f_{ij}, g_{jk}, sînt constante nenegative cunoscute, iar $M=\{1, 2, \ldots, m\}$ $N=\{1, 2, \ldots, n\}$, $P=\{1, 2, \ldots p\}$.

Problema (1.1)—(1.6) la care se adaugă restricţiile

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad (i, j) \in MN \tag{1.7'}$$

$$y_{jk} \geqslant 0, \quad (j, k) \in NP \tag{1.8'}$$

a fost rezolvată în [1] obţinîndu-se un algoritm similar cu cel obţinut în [2] pentru problema de transport simplă.

Tot în [1] se arată că problema (1.1)—(1.6), (1.7'), (1.8') este o *problemă de transport în două etape*. Pentru o *problemă de transport în mai multe etape* se obţin un model şi un algoritm, similare cu cele obţinute pentru cazul studiat.

Problema (1.1)—(1.8) se poate numi, deci, *problemă de transport în două etape cu capacităţi limitate*, în acord cu restricţiile suplimentare (1.7) şi (1.8).

Să considerăm acum problema următoare :

2. Să se determine valorile variabilelor x_{ij}, $(i, j) \in MN$, z_j, $j \in N$ şi y_{jk}, $(j, k) \in NP$ care minimizează forma liniară

$$\sum_{(i,j) \in MN} a_{ij}\, x_{ij} + \sum_{(j,k) \in NP} b_{jk}\, y_{jk} = \text{minim} \tag{2.1}$$

în condiţiile :

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leqslant p_i, \quad i \in M \tag{2.2}$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} - z_j = 0, \quad j \in N \tag{2.3}$$

$$z_j - \sum_{k \in P} y_{jk} = 0, \quad j \in N \tag{2.4}$$

$$\sum_{j \in N} y_{jk} \geqslant r_k, \quad k \in P \tag{2.5}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant f_{ij}, \quad (i, j) \in MN \tag{2.6}$$

$$0 \leqslant y_{jk} \leqslant g_{jk}, \quad (j, k) \in NP \tag{2.7}$$

$$0 \leqslant z_j \leqslant q_j, \quad j \in N \tag{2.8}$$

DEFINIŢIE. Valorile variabilelor x_{ij}, $(i, j) \in MN$ şi y_{jk}, $(j, k) \in NP$ care verifică relaţiile (1.2)—(1.8) constituie un *program* al problemei (1.1) — (1.8). Programul este *optimal* dacă realizează minimul formei liniare (1.1).

DEFINIŢIE. Valorile variabilelor x_{ij}, $(i, j) \in MN$, z_j, $j \in N$ şi y_{jk}, $(j, k) \in N\ P$ care verifică relaţiile (2.2) — (2.8) constituie un *program* al problemei (2.1)—(2.8). Programul este *optimal* dacă realizează minimul formei liniare (2.1)

TEOREMA I. *Condiția necesară și suficientă ca valorile* $\overline{x}_{ij}$, $(i, j) \in MN$ *și* $\overline{y}_{jk}$ $(j, k) \in NP$ *să constituie un program optimal pentru problema* (1.1) — (1.8) *este ca valorile*

$$x'_{ij} = \overline{x}_{ij}, \; (i, j) \in MN \tag{I.1}$$

$$z'_j = \sum_{i \in M} \overline{x}_{ij}, \; j \in N \tag{I.2}$$

$$y'_{jk} = \overline{y}_{jk}, \; (j, k) \in NP \tag{I.3}$$

să constituie un program optimal pentru problema (2.1) — (2.8).

Demonstrație. Fie $\overline{x}_{ij}$, $(i, j) \in MN$ și $\overline{y}_{jk}$, $(j, k) \in NP$ un program al problemei (1.1) — (1.8). Să arătăm că valorile x'_{ij}, z'_j și y'_{jk}, date de (I.1), (I.2), (I.3) constituie un program pentru problema (2.1)—(2.8). Avem, într-adevăr :

$$\sum_{j \in N} x'_{ij} = \sum_{j \in N} \overline{x}_{ij} \leqslant p_i, \; i \in M$$

$$\sum_{j \in M} x'_{ij} - z'_j = \sum_{i \in M} \overline{x}_{ij} - \sum_{i \in M} \overline{x}_{ij} = 0, j \in N$$

$$z'_j - \sum_{k \in P} y'_{jk} = \sum_{i \in M} \overline{x}_{ij} - \sum_{k \in P} \overline{y}_{jk} = 0, \; j \in N$$

$$\sum_{j \in N} y'_{jk} = \sum_{j \in N} \overline{y}_{jk} \geqslant r_k, \; k \in P$$

$$0 \leqslant x'_{ij} = \overline{x}_{ij} \leqslant f_{ij}, \; (i, j) \in MN$$

$$0 \leqslant y'_{jk} = \overline{y}_{jk} \leqslant g_{jk}, \; (j, k) \in NP$$

$$0 \leqslant z'_j = \sum_{i \in M} \overline{x}_{ij} \leqslant q_j, \; j \in N.$$

Dacă programul primei probleme este optimal, atunci și programul celeilalte este evident optimal.

Suficiența se demonstrează analog.

TEOREMA II. *Problema* (2.1)—(2.8) *este o problemă de distribuție* (*optimală*) *pentru rețeaua de transport* $R = (\pi, U)$ *definită mai jos.*

Demonstrație. Rețeaua de transport $R = (\pi, U)$ se definește astfel :

$$\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_v\}$$

este mulțimea nodurilor iar

$$U = \{ \bigcup_{(i, j) \in MN} (\alpha_i, \beta_j)\} \cup \{\bigcup_{j \in N} (\beta_j ; \beta'_j)\} \cup \{ \bigcup_{(i, j) \in NP} (\beta'_j, \gamma_k)\}$$

este mulțimea arcelor sale.

Capacitățile arcelor rețelei sînt :

$$c(\alpha_i, \beta_j) = f_{ij}, \quad (i, j) \in MN$$

$$c(\beta_j, \beta'_j) = q_j, \; j \in N$$

$$c(\beta'_j, \gamma_k) = g_{jk}, \; (j, k) \in NP$$

unde, de exemplu, $c(\sigma_i, \beta_j)$ notează capacitatea arcului (α_i, β_j).

Definim de asemenea pe mulţimea π o funcţie „de cerere" d astfel:

$$d(\alpha_i) = -p_i, \quad i \in M$$
$$d(\beta_j) = d(\beta'_j) = 0, \quad j \in N$$
$$d(\gamma_k) = r_k, \quad k \in P.$$

Definim, în sfîrşit, o funcţie „de penalitate" l pe mulţimea U astfel:

$$l(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}, \ (i, j) \in MN$$
$$l(\beta_j, \beta'_j) = 0, \ j \in N$$
$$l(\beta'_j, \gamma_k) = b_{jk}, \ (j, k) \in NP.$$

3. Pentru reţeaua R astfel definită, problema (2.1)—(2.8) este o problemă de distribuţie (optimală) în mod evident.

Corolar. *Problema* (1.1)—(1.8) *se poate rezolva ca o problemă de distribuţie* (*optimală*) *folosind algoritmul cunoscut* [1].

Teorema III. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca problema* (1.1)—(1.8) *să posede cel puţin un program este ca*

$$\text{(III.1)} \qquad \sum_{j\in N} \min \left[q_j, \sum_{k\in P'} g_{jk}, \sum_{i\in M} \min(p_i, f_{ij})\right] \geqslant \sum_{k\in P'} r_k$$

pentru orice $P' \subset P$.

Demonstraţie. Să transformăm reţeaua $R = (\pi, U)$ într-o reţea redusă $R' = (\pi', U')$, definită astfel:

$$\pi' = \pi \cup \{\alpha_0\} \cup \{\gamma_\nu\}$$
$$U' = U \cup \{\bigcup_{i\in M} (\alpha_0, \alpha_i)\} \cup \{\bigcup_{k\in P} (\gamma_k, \gamma_\nu)\}$$
$$d(\alpha_0) = -\sum_{i\in M} p_i; \quad d(\gamma_\nu) = \sum_{k\in P} r_k$$
$$c(\alpha_0, \alpha_i) = p_i, \ i \in M; \quad c(\gamma_k, \gamma_\nu) = r_k, \ k \in P$$
$$l(\alpha_0, \alpha_i) = 0, \quad i \in M; \ l(\gamma_k, \gamma_\nu) = 0, \ k \in P.$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca să existe un flux care saturează arcele incidente nodului γ_ν, este existenţa unui flux (aritmetic) în R' astfel ca

$$\text{(III.2)} \qquad \sum_{(j,k)\in NP'} y_{jk} \geqslant \sum_{k\in P'} r_k \quad \text{pentru orice } P' \subset P\text{[2]}.$$

Este uşor de văzut că

$$\text{(III.3)} \qquad \sum_{k\in P'} y_{jk} \leqslant \min\left[q_j, \sum_{k\in P'} g_{jk}, \sum_{i\in M} \min(p_i, f_{ij})\right] \text{ pentru orice } P' \subset P.$$

---

[1] Se poate vedea [3], p. 292.

[2] Se poate vedea [3], p. 288.

În sfîrşit, (III.2) şi (III.3) implică evident (III.1)

Observaţie. Condiţia (III.1) conţine evident condiţiile necesare $\sum_{i\in M} p_i \geqslant \sum_{k\in P} r_k$; $\sum_{j\in N} q_j \geqslant \sum_{k\in P} r_k$, care rezultă direct din forma problemei (1.1)—(1.8).

Primită la redacţie la 28 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. K. Maghout, G. Comes, N. Steinberg, *Géneralisation à „n" dimensions du problème de transport*. Revue française de rech. op., **22**, Dunod, Paris, 1962.
2. A. Charnes, W. W. Cooper, *The stepping stone method of explaining linear programming calculations in transportation* problems. Management Science, **1**, *I* (1954).
3. M. Simonnard, *Programmation linéaire*. Dunod, Paris, 1962.

ASUPRA CONCEPŢIEI CUANTICE-RELATIVISTE A FOTONULUI

DE

LIVIU SOFONEA
(Braşov)

În lucrare se cercetează în perspectivă istorică modalităţile în care se asociază fotonului o funcţie de undă, folosind corespondenţa cu cazul descrierii clasice, caz în care fotonul are ca ecuaţii de cîmp ecuaţiile lui Maxwell, ecuaţii cu caracter relativist. Se studiază modul cum sînt introduse şi descrise mărimile cuantice de stare = energia impulsul, momentul cinetic, de asemenea proprietăţile de polarizare şi de paritate. Se face legătura cu cazul ansamblului de fotoni şi cu descrierile de cîmp bazate pe cuantificarea a doua.

I. ASPECTUL DUAL AL FOTONULUI

Proprietăţile corpusculare ale luminii au constituit primul fapt fizic fundamental care a servit ca bază pentru dezvoltarea ideilor cuantice (*teoria cuantelor*, creată începînd cu 1900). Lumina a oferit pentru prima oară aspectul uimitor de *dualitate* al obiectelor fizice, adică acea fuziune dintre latura continuă şi cea discontinuă prezentă şi concretizată în orice microobiect. Relaţia dintre energia particulei de lumină, *(fotonul)*, şi pulsaţia oscilaţiilor cîmpului electromagnetic corespunzător, ($\omega = 2\pi\nu$) a însemnat prima relaţie de dualitate, prima lege fizică care conţine constanta cuantică a lui Planck, h :

$$\boxed{W = h\nu = \hbar\omega} \tag{1}$$

Folosind constanta raţionalizată, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, şi sistemul atomic de unităţi, sistem în care valoarea constantei cuantice se ia unu, de asemenea şi viteza luminii în vid, $\hbar = 1$, $c = 1$, relaţia fundamentală care exprimă caracterul cuantic al microparticulei asociată ondulaţiilor luminoase, devine :

$$\boxed{W = k}. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1371–1404, BUCUREŞTI, 1966

Astfel, numeric, energia coincide cu numărul de undă $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, mărime inversă lungimii de undă a radiaţiei transportată de foton.

Pe lîngă *energie*, corpusculul luminos are şi un *impuls* al său, mărime care descrie impulsul electromagnetic al cîmpului, şi totodată proprietăţile de inerţie şi mişcare ale luminii ca corpuscul:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{W}{c}\vec{p}^{\circ} = \frac{h\vec{\nu}}{c} = \frac{h}{c}2\pi\omega = \hbar\frac{\omega}{c}} \tag{3}$$

În acelaşi sistem de unităţi, impulsul coincide numeric cu vectorul de undă, $\vec{k}$, orientat pe direcţia propagării, şi egal ca valoare cu inversul lungimii de undă $\left(\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{k}^{\circ}\right)$.

$$\boxed{\vec{p} = \vec{k}}\,. \tag{4}$$

Mecanica cuantică consecventă a diferitelor microobiecte a căror existenţă fizică s-a impus cercetării (electroni, atomi, molecule) a fost construită înainte de mecanica cuantică a fotonului, ca o teorie nerelativistă, devenită prin succesele ei repede o teorie ,,clasică", consacrată. Această succesiune istorică reflectă un fapt fizic profund: particulele atomice (electron, proton, nuclee) avînd o *masă de repaus finită* (*nenulă*) pentru ele exista un domeniu de energii mici în comparaţie cu energia de repaus, sector în care comportarea este nerelativistă. Şi tocmai o asemenea comportare ocazionează efecte fizice atomice de seamă, care au fost descoperite şi cercetate consecvent. Cum masa fotonului este cu necesitate nulă (masa de repaus), pentru acesta nu există nici un domeniu nerelativist — *mecanica cuantică a fotonului trebuie să fie de la început relativistă.* Fuziunea dintre ideile cuantice (atomiste) şi cele relativiste (mecanice, macroscopice), care s-a dovedit a fi dificil de împlinit în toate implicaţiile ei, trebuia neapărat încercată (am putea spune iniţial încercată) în cazul fotonului : *cuantificarea cîmpului electromagnetic.*

Mecanica cuantică *ataşează unei microparticule cîmpul funcţiei de undă* Ψ, *care determină distribuţia probabilităţilor de localizare, evoluţia şi toate valorile medii ale diferitelor mărimi fizice referitoare la microparticulă.* Mişcarea este dată de o *ecuaţie a cîmpului* : în cazul nerelativist ecuaţia lui Schrödinger. Într-o tratare relativistă, *ecuaţiile cîmpului trebuie să se supună principiului relativităţii*, adică să fie invariante la grupul transformărilor Lorentz. Or, numai cu această restricţie de esenţă mecanică, principială, legată de natura însăşi a mişcării (a spaţiului şi a timpului), nu este posibil în general a alege univoc forma ecuaţiilor care să reflecte adecvat proprietăţile individuale ale tipului de particule. Mecanica cîmpurilor cuantice se construiesc atunci adăugînd şi alte ipoteze, anume căutînd condiţii de simplitate şi simetrie la care ar fi supuse căutatele ecuaţii de cîmp şi funcţiile de undă. Se caută astfel diferite variante de funcţii de undă, în ordinea complexităţii lor faţă de transformarea referenţialelor, adică în privinţa caracterului lor tensorial.

În cazul fotonului, alegerea este mult uşurată de existenţa *analogului clasic = cîmpul electromagnetic maxwellian*, entitate fizică necuantică, dar desigur relativistă. *Ecuaţiile lui Maxwell servesc ca termen de comparaţie, sînt ecuaţii de evoluţie ale cîmpului. Proprietăţile ondulatorii ale fotonului vor coincide cu proprietăţile cîmpului fizic electromagnetic.* Cîmpul cuantic descris de o funcţie matematică de variabilă complexă, Ψ, este redat atunci de funcţiile reale, nemijlocit fizice, vectorii cîmp electric, $\vec{\mathcal{E}}$ şi cîmp magnetic, $\vec{\mathcal{H}}$, apte să descrie aspectul ondulatoriu al fotonului. *Aspectul corpuscular, pe care electrodinamica nu-l poate conţine, este concretizat în cuantizarea energiei* [1]. Aceste două teze, naturale amîndouă, au fost suficiente pentru a construi o teorie a fotonului, şi a interacţiei acestuia cu particulele încărcate : o primă problemă importantă a mecanicii relativiste a cîmpurilor.

Proprietăţile microparticulelor se manifestă în interacţia lor cu alte microparticule, dar în cazul fotonului, *interacţia fiind de natură electromagnetică* (*deci relativ slabă*, cu caracter de perturbaţie), s-a putut examina un model abstract dar rezonabil de foton liber, asociat cîmpului electromagnetic liber. Acesta, ca stare fizică, este descris de ecuaţiile lui Maxwell, formulate în absenţa sarcinilor şi a curenţilor :

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{\mathcal{H}} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}} &= \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}} &= 0. \end{aligned}} \tag{5}$$

Aceste ecuaţii, evident relativist invariante, reprezintă numai aspectul ondulatoriu, descris prin funcţii vectoriale, reale.

Aspectul corpuscular trebuie să se bazeze pe principiul cuantic al suprapunerilor, după care starea generală de cîmp este o suprapunere de stări, de unde, într-un număr infinit. Funcţia de undă, în cazul acesta $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$, trebuie să fie dată ca o dezvoltare după aceste stări componente, în general infinite ca număr şi infinit apropiate în privinţa lungimilor lor de undă $\lambda \sim k^{-1}$ (spectrul continuu). Starea generală de cîmp cuantic, o soluţie a ecuaţiei de evoluţie, va fi suprapunerea de unde, fiecare fiind o posibilitate a cîmpului, ceea ce matematic se redă prin integrala Fourier (trecerea de la spaţiul vectorilor geometrici de poziţie, $\vec{r}$, la spaţiul vectorilor de undă $\vec{k}$) :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) &= \int \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot (d\vec{k}) \equiv \int \vec{\mathcal{E}}(k_x, k_y, k_z)\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \cdot dk_x\, dk_y\, dk_z \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) &= \int \vec{\mathcal{H}}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot (d\vec{k}) \equiv \int \vec{\mathcal{H}}(k_x, k_y, k_z)\, e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \cdot dk_x\, dk_y\, dk_z \end{aligned}} \tag{6}$$

Cum aceşti vectori satisfac ecuaţiile de cîmp (5), înlocuind în acestea dezvoltările, ecuaţiile lui Maxwell vor căpăta forme simple vectoriale, nediferenţiale (fără operatorii vectoriali), referitoare la amplitudinile $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ şi $\vec{\mathcal{H}}(\vec{k})$ (componentele Fourier) dependente de timp :

$$
(7) \quad
\begin{aligned}
\vec{\mathcal{H}}(\vec{k}) &= -i\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) \\
\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) &= i\vec{k} \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{k}) \\
\vec{k}\vec{\mathcal{H}} &= 0 \\
\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}(k) &= 0.
\end{aligned}
$$

Primele două sînt ecuaţii de evoluţie (cuprind derivatele faţă de timp), pe cînd celelalte arată transversalitatea vectorilor cîmp-perpendicularitatea lor pe direcţia mişcării, $\vec{k}$. Matematic se arată imediat ceea ce fizic era evident, că transformarea mărimilor $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$, $\vec{\mathcal{H}}(\vec{k})$, funcţii de undă în spaţiul impulsurilor k, la o schimbare de referenţial este în acord cu relativitatea, fiind echivalente cu sistemul relativist-invariant (5). Cei doi vectori, $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$, fiind mutual legaţi (prin (7)), unul din ei se elimină, şi atunci candidat la reprezentarea corpusculară rămîne numai un vector :

$$
(8) \qquad \vec{\mathcal{H}}(\vec{k}) = i\,\frac{k}{k^2} \times \dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k}).
$$

Funcţia de undă, în esenţă, va fi atunci vectorul $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$, adică o funcţie de tip vectorial, reală, dată în spaţiul impulsurilor :

$$
(9) \qquad \vec{\mathcal{E}}(-\vec{k}) = \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{k})\,; \qquad \vec{\mathcal{H}}(-\vec{k}) = \vec{\mathcal{H}}^*(\vec{k}).
$$

Astfel natura electromagnetică a luminii impune forma funcţiei de undă, formă de la care se pot aştepta descrieri de comportare mai bogate decît cele ondulatorii. Îmbogăţirea se face prin întregirea cu unele consideraţii cuantice.

II. FUNCŢIA DE UNDĂ A FOTONULUI

În general, funcţie de undă este o funcţie de variabilă complexă ; s-a putut îndeplini condiţia de realitate (9), introducîndu-se o unică funcţie complexă, vectorială, $\vec{\Psi}(\vec{k})$ (şi desigur complex conjugata ei $\vec{\Psi}^*(\vec{k})$, prin substituţia :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&(10) \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = N(k)\cdot[\vec{\Psi}(\vec{k}) + \vec{\Psi}^*(-\vec{k})] \equiv \frac{\sqrt{k}}{4\pi^{3/2}}\cdot[\vec{\Psi}(\vec{k}) + \vec{\Psi}^*(-\vec{k})] \\
&(11) \quad \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = -ikN(k)[\vec{\Psi}(\vec{k}) - \vec{\Psi}^*(-\vec{k})] \equiv -\frac{ik\sqrt{k}}{4\pi^{3/2}}[\vec{\Psi}(\vec{k}) - \vec{\Psi}^*(-\vec{k})]
\end{aligned}
}
$$

Factorul de normare arbitrar $N(k)$ ia tocmai valoarea $\frac{\sqrt{k}}{4\pi^{3/2}}$, din condiţia ca cu o astfel de reprezentare cuantică să fie corect prinsă şi expresia energiei fotonului, adică cuantificarea (1).

Totul revine ca în locul celor două funcţii reale $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$; $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t)$, să se introducă o unică funcţie complexă, şi atunci principiul suprapunerii din optică (6), se referă acum la $\vec{\Psi}$, şi enunţă suprapunerea stărilor cuantice, a ipostazelor în care se poate afla fotonul în natură :

$$\boxed{\vec{\Psi}(\vec{r}) = \int \vec{\Psi}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\,(d\vec{k})} \tag{12}$$

Se mai remarcă faptul că $\vec{\Psi}(\vec{r})$ nu poate fi o combinaţie liniară a lui $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$. În reprezentarea de poziţie $(\vec{r})$, funcţia de undă este determinată dacă se cunoaşte funcţia de undă mai specifică, mai potrivită descrierii cuantice, anume aceea care se referă la impulsuri. Fiind dată $\vec{\Psi}(\vec{k})$, se aplică transformarea Fourier inversă :

$$\int \vec{\Psi}(\vec{k})\cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}\cdot(d\vec{k}) = \Psi(\vec{r}) \tag{13}$$

(L. Landau-R. Peierls, Zs. f. Phys., 1930). Cum normarea funcţiei de undă $\vec{\Psi}(\vec{k})$ este obişnuită, nu diferă de cea care se pune în mecanica cuantică nerelativistă (normarea la unitate) :

$$\boxed{\int \vec{\Psi}^*(\vec{k})\cdot\vec{\Psi}(\vec{k})\cdot(d\vec{k}) = 1} \tag{14}$$

Funcţia $\vec{\Psi}(\vec{k})$ are pe deplin *sensul unei probabilităţi. Anume indică probabilitatea de a găsi o anumită stare ondulatorie,* cu un $\vec{k}$ dat, deci cu o lungime de undă dată (şi cu energie $W = k$ dată şi impuls determinat $\vec{p} = \vec{k}$). Datorită acestui înţeles, şi acestei normări (care devine pe deplin raţională dacă se urmăreşte a descrie şi fizic şi energia prin intermediul funcţiei de undă), şi funcţia de undă ,,de poziţie'' $\vec{\Psi}(\vec{r})$, are o normare asemănătoare :

$$\int \vec{\Psi}^*(\vec{r})\cdot\Psi(\vec{r})\cdot(d\vec{r}) = 1 \tag{15}$$

S-ar părea că mărimea $\vec{\Psi}^*(\vec{r})\ \Psi(\vec{r})$, are, analogic, semnificaţia unei densităţi de probabilitate, indicînd şansa ca fotonul să se afle într-un anume punct al spaţiului. Or, lucrurile nu stau aşa : prezenţa fotonului poate fi stabilită numai pe baza interacţiei sale cu sarcinile, şi aceste sarcini sînt date de valorile lui $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$. Însă acestea nu sînt determinate de $\vec{\Psi}(\vec{r})$ în acel punct, ci de valorile sale în întreg spaţiul, căci $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = (4\pi)^{-3/2}\cdot\sqrt{k}\,[\vec{\Psi}(\vec{k}) + \vec{\Psi}^*(-\vec{k})]$, adică conţine coeficientul $\sqrt{k}$. Relaţia dintre

$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ şi $\vec{\Psi}(\vec{r})$ nu este locală, ci integrală, ceea ce corespunde faptului fizic că *nu se poate localiza fotonul într-un domeniu mai mic ca ordin de mărime ca* λ. *Fotonul fiind esenţial o particulă în propagare, nu se poate vorbi de densitate de probabilitate a localizării.* Matematic toate acestea se leagă, aşa cum arată teoria generală a cîmpurilor cuantice, de caracterul real al cîmpului. În cazul de faţă : din vectorii $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$, nu se poate construi o combinaţie biliniară care să formeze un vector cvadridimensional care, satisfăcînd ecuaţia de continuitate, să aibă un înţeles relativist, de densitate a particulelor (densitate de sarcină şi curent reunite cvadridimensional). Se poate însă construi un tensor de energie-impuls. În felul acesta *caracterul eminamente dinamic al microparticulei cu masă strict de mişcare, se manifestă şi în privinţa funcţiei de undă potrivite a-l descrie, pe care astfel o impune.*

III. EVOLUŢIA FOTONULUI

Mişcarea este descrisă cuantic printr-o ecuaţie de evoluţie de tip Schrödinger, pe care o satisface funcţia de undă $\vec{\Psi}(\vec{k})$. Această ecuaţie se stabileşte pe baza ecuaţiilor clasice de evoluţie (7), anume din primele două ecuaţii se elimină $\vec{\mathcal{H}}$ (dat de (8)), încît va apare derivata de ordinul doi a lui $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+k^2\right)\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})=0, \tag{16}$$

sau, pentru a pune în evidenţă caracterul complex (conjugarea), se descompune

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+ik\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-ik\right)\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})=0. \tag{17}$$

Această ecuaţie trebuie să fie o ecuaţie de evoluţie pentru $\vec{\Psi}(\vec{k})$. Primul termen operatorial (luat din dreapta) se exprimă uşor din cele două relaţii (10), (11) dacă prin adunare îl eliminăm pe $\vec{\Psi}^*(\vec{k})$, păstrînd numai pe $\vec{\Psi}(\vec{k})$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-ik\right)\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})=-2\,i\,N(k)\cdot k\,\vec{\Psi}(\vec{k}) \tag{18}$$

A mai rămas atunci în (17) numai un operator care se va răsfrînge asupra termenului din dreapta, încît ecuaţia de evoluţie se scrie

$$\boxed{i\frac{\partial\vec{\Psi}(\vec{k})}{\partial t}=k\cdot\vec{\Psi}(\vec{k})} \tag{19}$$

La fel, $\vec{\Psi}^*$ satisface o ecuaţie conjugată

$$-i\frac{\partial\vec{\Psi}^*(\vec{k})}{\partial t}=k\,\vec{\Psi}^*(\vec{k}). \tag{20}$$

Cum întreaga realitate ondulatorie prezentă în structura fotonului cuprinde şi ultimele două ecuaţii din (7), adică *condiţiile de transversalitate*, formulîndu-le pe acestea prin noile funcţii de undă $\vec{\Psi}$ şi $\vec{\Psi}^*$ (deci după (10)—(11)), se obţin două condiţii de transversalitate. Ele se referă acum la funcţiile de undă ; deci *cîmpul cuantic asociat fotonului este transversal*

$$\boxed{\vec{k}\vec{\Psi}(\vec{k}) = 0\,; \quad \vec{k}\vec{\Psi}^*(\vec{k}) = 0} \tag{21}$$

Ecuaţiile (19) şi (21) sînt *echivalente cu ecuaţiile Maxwell*, fiind transpunerea acestora în limbajul noii funcţii de undă. Ecuaţia de evoluţie a cîmpului (19) are forma ecuaţiei lui Schrödinger, dacă operatorul energiei fotonului în reprezentarea $\vec{k}$ este un înmulţitor cu numărul de undă (hamiltonianul) :

$$\boxed{\hat{W} = k.} \tag{22}$$

Adică tocmai forma operaţională a postulatului cuantic fundamental (1).

Legătura dintre reprezentarea ondulatorie şi cea corpusculară este astfel asigurată, $w \to \hat{w} = \hat{k}$. Ea este deplină în sensul că şi celelalte mărimi de stare ale fotonului, energia, impulsul, momentul cinetic, se definesc prin intermediul aceleiaşi funcţii de undă în spaţiul $(\vec{k})$, în mod necontradictoriu. Mişcarea fotonului este descrisă de o ecuaţie cuantică, de tip Schrödinger, dar, spre deosebire de electronul nerelativist descris de o ecuaţie scalară, nu orice soluţie formală a ecuaţiei vectoriale de evoluţie corespunde unei stări fizice efectiv realizate. *Numai acele soluţii ale ecuaţiei lui Schrödinger pentru foton sînt fizic valabile, care satisfac şi condiţiile* (21), *care reflectă caracterul transversal al ondulaţiilor asociate fotonului.*

IV. ENERGIA FOTONULUI

Fotonul, acest organicul al naturii, apărea în fizica etapei cuantelor, ca un *corpuscul relativist, înzestrat cu energie şi cu impuls.* Ca purtător de cîmp electromagnetic, fotonul are o energie, postulată în electrodinamica clasică prin relaţia integrală :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)\,\mathrm{dV} \equiv \frac{1}{2}\int(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)\,(\mathrm{d}\vec{r})} \tag{23}$$

Cuantic, această energie trebuie considerată o valoare de provenienţă macroscopică, deci o valoare medie a energiei fotonului, care este un microobiect. Interpretarea corpusculară a relaţiei de mai sus ca o valoare medie a energiei fotonului este firească, cu atît mai mult cu cît în mecanica cuantică integralele de volum ale unor expresii pătratice faţă de funcţiile de undă, înseamnă valori medii ale mărimilor fizice respective. Înlocuind (şi efectuînd ridicarea la pătrat) a cîmpurilor $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$ prin dezvoltările Fourier ale lor (6), şi efectuînd integrările (unele integrale dispar prin ortogonalizare), se ajunge la rezultatul sugestiv :

$$\overline{W} = 16\,\pi^8 \cdot \int N^2 \cdot \vec{\Psi}^*(\vec{k}) \cdot \vec{\Psi}(\vec{k})\,(\mathrm{d}\vec{k}) \tag{24}$$

egal mai departe

$$\boxed{\overline{W} = \int \vec{\Psi}^*(\vec{k}) \cdot \hat{W}\,\Psi(\vec{k}) \cdot (\mathrm{d}\vec{k}).} \tag{25}$$

Acest rezultat arată într-adevăr o medie în spiritul mecanicii cuantice, energia electromagnetică clasică fiind o medie a energiilor stărilor cuantice. Operatorul $\hat{W} = k$ este într-adevăr un operator al energiei fotonului : descrie energia sa electromagnetică. De remarcat aici că se ajunge întocmai la (25), atribuind normei $N(k)$, tocmai valoarea $\sqrt{k}\,.\,\dfrac{1}{4\pi^{3/2}}$, ceea ce motivează această normare a funcţiilor de undă.

Stările cu energie staţionară sînt soluţiile monocromatice ale ecuaţiei de evoluţie

$$\vec{\Psi}(\vec{k}) = \vec{\Psi}_0(\vec{k}) \cdot \mathrm{e}^{-iW_0 t}. \tag{26}$$

Valoarea energiei este W_0, o valoare proprie a operatorului energiei fotonului :

$$\hat{W}\,\vec{\Psi}_0(\vec{k}) = W_0\,\vec{\Psi}_0(\vec{k}). \tag{27}$$

Expresia energiei medii devine

$$\overline{W} = \int \vec{\Psi}^*(\vec{k}) \cdot \hat{W}\,\vec{\Psi}(\vec{k}) \cdot (\mathrm{d}\vec{k}) = W_0 \cdot \int \vec{\Psi}^*(\vec{k}) \cdot \vec{\Psi}(\vec{k})\,(\mathrm{d}\vec{k}). \tag{28}$$

Şi cum postulatul cuantic fundamental cere în general $W = k$, adică $\overline{W} = W_0$, ceea ce înseamnă că valoarea medie este energia în starea determinată, funcţia de undă în spaţiul vectorilor $\vec{k}$ satisface o condiţie firească de normare :

$$\int \vec{\Psi}^*(\vec{k}) \cdot \vec{\Psi}(\vec{k})\,(\mathrm{d}\vec{k}) = 1. \tag{29}$$

Astfel normarea la unitate este firească, şi necesară. *Energia fotonului introdusă în acord şi cu aspectul ondulatoriu fixează prin urmare pe deplin funcţia de undă* (norma şi regula de normare), eliminîndu-i orice alt fel de arbitrar. Funcţia de undă astfel precizată îşi arată capacităţile sale de descriere cuantică, exprimînd şi celelalte proprietăţi dinamice ale fotonului.

V. IMPULSUL FOTONULUI

Dacă fotonul are un impuls egal (în sistemul atomic folosit), cu vectorul de undă, $\vec{p} = \vec{k}$, ca undă, acelaşi impuls trebuie atribuit cîmpului electromagnetic purtat de foton. Acest impuls, după cum preciza încă electrodinamica clasică, se obţine din produsul vectorilor de cîmp. Este natural a se presupune că *acestui impuls de esenţă clasică îi corespunde o valoare medie a impulsului fotonului, medie luată faţă de microstările cuantice în care se poate afla fotonul*

$$\boxed{\vec{p} = \int (\vec{\mathcal{E}} \times \mathcal{H}) \cdot (\mathrm{d}\vec{r})} \tag{30}$$

Exprimarea cuantică, adică faţă de funcţiile de undă introduse se face înlocuind cîmpurile prin suprapunerile Fourier (şi efectuînd produsul vectorial ca şi integrarea). Se obţine un rezultat sugestiv

$$\boxed{\vec{p} = \int \sum_{\alpha = 1,2,3} \Psi^{*}_{\alpha} \cdot \vec{k} \cdot \Psi_{\alpha} \cdot (\mathrm{d}\vec{k}).} \tag{31}$$

(α = cele trei componente ale vectorului $\vec{\Psi}(\vec{k})$ în spaţiul $\vec{k}$ al impulsurilor. Expresia are alura unei medii cuantice, şi ea este deplin aşa, dacă se defineşte operatorul de impuls ca fiind operatorul multiplicare cu vectorul de undă :

$$\boxed{\hat{\vec{p}} = \hat{\vec{k}}.} \tag{32}$$

Astfel operatorii de energie şi de impuls s-au obţinut prin operaţionalizarea rezultatelor clasice, ca peste tot în mecanica cuantică

$$\boxed{\begin{aligned} W = k &\longrightarrow \hat{W} = \hat{k} \\ \vec{p} = \vec{k} &\longrightarrow \hat{\vec{p}} = \hat{\vec{k}}, \end{aligned}} \tag{33}$$

unde exista un anumit analog clasic. Mărimea $\Psi^{*} \overset{\rightarrow}{\cdot} \Psi$ se interpretează ca o densitate de probabilitate desemnînd faptul că fotonul are impulsul de valoare $\vec{k}$. Condiţia de normare la unitate este cît se poate de firească, iar spaţiul $(\vec{k})$ al vectorilor de undă este şi *spaţiul impulsurilor*.

Fotonul se poate afla în stări cu impuls cvasideterminat şi atunci, din punctul de vedere al reprezentării, funcţia de undă trebuie să fie nenulă numai în vecinătatea valorii $\vec{k} = \vec{p}$, adică impulsul va fi situat între $\vec{p}$ şi $\vec{p} + \mathrm{d}\vec{p}$ (în intervalul $\mathrm{d}\vec{p}$). Mărime cuantică cu caracter continuu, impulsul fotonului liber va avea funcţiile de undă proprii normate în modul corespunzător acestei situaţii (stările de impuls sînt aşa-numitele diferenţiale proprii). Funcţiile de undă potrivite acestor stări cu spectru continuu sînt date de un termen temporal exponenţial, şi un factor de normare corespunzător spectrului continuu, adică limitării valorii impulsului. Norma, adică valoarea impulsului, $\sqrt{\mathrm{d}p_x \mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z}$, apare la numitor, în așa fel încît efectuînd produsul funcțiilor $\vec{\Psi}_{d\vec{p}} \cdot \vec{\Psi}^{*}_{d\vec{p}}(\vec{k}, t)$ să se obțină probabilitatea de a găsi un foton cu impulsul situat în domeniul $(d\vec{p})$. Așadar

$$\boxed{\vec{\Psi}_{(d\vec{p})}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{(d\vec{p})}}\, e^{-ipt} \cdot \delta(\vec{k}, \vec{p}) \cdot \vec{1}} \tag{34}$$

Funcția δ a lui Dirac, și termenul $\sqrt{(d\vec{p})}$, arată clar că impulsul este într-adevăr cuprins între $\vec{p}$ și $\vec{p} + d\vec{p}$. $\vec{1}$ este un versor.

Fizic fotonul este asociat unei unde electromagnetice de o anumită polaritate. Și această trăsătură a stării ondulatorii trebuie specificată cuantic, undele deosebindu-se după felul polarizației lor. Polarizarea se precizează printr-un versor $\vec{e}_{\mu}$, vectorul unitate fiind orientat perpendicular pe direcția propagării, deci perpendicular pe $\vec{p}$:

$$|\vec{e}_{\mu}| = 1\,; \quad \vec{e}_{\mu} \cdot \vec{p} = 0. \tag{35}$$

Un singur foton cu impulsul în $(d\vec{p})$ este deci descris prin

$$\boxed{\vec{\Psi}_{d\vec{p},\mu} = i\vec{e}_{\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{(d\vec{p})}} \cdot e^{-ipt} \cdot \delta(\vec{k}, p)} \tag{35'}$$

Ce-i drept factorul i din față nu părea necesar, dar el a fost totuși pus pentru ușurința pe mai departe a scrierii cîmpurilor, pentru o concordanță mai bună cu notațiile uzuale. (Factorul i nu are nici o importanță principială căci orice funcție de undă cuantică are un anumit arbitrar : un factor de fază oarecare.)

Starea de polarizare a undei electromagnetice poate fi *liniară* și atunci pentru o direcție dată $\vec{p}$ există doi versori $\vec{e}$, liniar independenți, orientați pe cele două axe, OX și OY :

$$\begin{aligned} &e_{1x} = 1\,; \quad e_{1y} = 0\,; \quad e_{1z} = 0, \\ &e_{2x} = 0\,; \quad e_{2y} = 1\,; \quad e_{2z} = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

Polarizarea poate fi *circulară*, și atunci cei doi vectori $\vec{e}$ liniar independenți sînt orientați, întotdeauna, tot perpendicular între ei, dar nu pe axe ; se pot alege versorii de forma

$$\begin{aligned} &e_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,; \quad e_{1y} = i/\sqrt{2}\,; \quad e_{1z} = 0, \\ &e_{2x} = -1/\sqrt{2}\,; e_{2y} = -i/\sqrt{2}\,; e_{2z} = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

În ambele cazuri versorii de polarizare trebuie să fie ortogonali între ei, ceea ce este asigurat de modul în care au fost construiți ei :

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 = 0. \tag{38}$$

Cuantic existența unei unde cu impuls determinat (și automat cu energie determinată $W = |\vec{p}|$), dar cu dublă posibilitate de polarizație se numește degenerare; numărul stărilor cu aceeași energie (adică ponderea), este 2. Starea cuantică este univoc determinată integrînd mărimile p_x, p_y, p_z cu numărul cuantic μ (*sistem complet de numere cuantice*).

Pentru stările cu valori ale impulsului strict determinate, distribuția este lipsită de factorul $\sqrt{\mathrm{d}p_x\, \mathrm{d}p_y\, \mathrm{d}p_z}$, și se exprimă fizic prin funcția δ, aplicată impulsurilor și polarizațiilor. Probabilitatea ca să găsim fotonul cu impulsul $p = p'$, și polarizarea $\mu = \mu'$, va fi

$$\int \vec{\Psi}^{*}_{\vec{p},\mu}(\vec{k}) \cdot \vec{\Psi}_{\vec{p}',\mu'}(\vec{k}) \cdot (\mathrm{d}\vec{k}) = \delta(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \delta_{\mu,\mu'} \cdot \tag{39}$$

În felul acesta proprietățile de inerție și de propagare legate de impulsul fotonic sînt descrise și după înțelesurile naturii cuantice a microobiectelor, unificînd latura corpusculară cu cea ondulatorie.

VI. UNDELE PLANE

Stările impulsului fotonului cu impuls determinat și polarizație de asemenea determinată, reprezintă undele plane. Orice mărime fizică descriind fotonul se scrie ca o dezvoltare în serie după acest sistem ortonormat complet de funcții

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{k}) = \sum_{\vec{p},\mu} \cdot \mathcal{C}_{\vec{p},\mu} \cdot \vec{\Psi}_{\vec{p},\mu}\,; \quad \mathcal{C}_{\vec{p},\mu} = \int \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{\Psi}_{\vec{p},\mu}\,(\mathrm{d}\vec{k}). \tag{40}$$

În particular cîmpurile electromagnetice, stări de ondulație ale vectorului electric și magnetic, cu impulsuri și polarizări date $\vec{p}$, μ, se exprimă cuantic față de funcția de undă ale fotonului. Din

$$\vec{\mathcal{E}} = \int \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\,\vec{r}}\,(\mathrm{d}\vec{k})\,; \quad \vec{\mathcal{H}} = \int \vec{\mathcal{H}}(\vec{k}) \cdot \mathrm{e}^{i\vec{k}\,\vec{r}}\,(\mathrm{d}\vec{k}) \tag{41}$$

urmează a se exprima componentele $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ față de funcțiile cuantice de undă (bineînțeles potrivit cu definiția (10) — (11) în care forma concretă a lui $\vec{\Psi}(\vec{k})$ este exponențiala temporală corespunzătoare stării de impuls cvasideterminat $k = p$. La fel se exprimă și $\vec{\mathcal{H}}(\vec{k})$ (care este legat de $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ prin (8). S-a obținut

$$\boxed{\begin{aligned}
&(42)\quad \vec{\mathcal{E}}_{\vec{p},\mu} = \vec{\mathcal{E}}_{\vec{p},\mu}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{E}}^{*}_{\vec{p},\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \cdot i\sqrt{p \cdot (\mathrm{d}\vec{p})} \cdot \vec{e}_{\mu}\,\mathrm{e}^{i(\vec{p}\,\vec{r} - pt)} + \\
&\qquad + \text{compl. conjug.} \\
&(43)\quad \vec{\mathcal{H}}_{\vec{p},\mu} = \vec{\mathcal{H}}_{\vec{p},\mu}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{H}}_{\vec{p},\mu}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \cdot i\sqrt{p \cdot (\mathrm{d}\vec{p})} \cdot \frac{\vec{p}}{p} \times \vec{e}_{\mu} \cdot \mathrm{e}^{i(\vec{p}\,\vec{r} - pt)} + \\
&\qquad + \text{compl. conjug.}
\end{aligned}}$$

Pentru stările cu impuls strict determinat, normarea fiind făcută la funcţia δ (după (39)), se obţin aceleaşi rezultate, numai că lipseşte factorul $\sqrt{(d\vec{p})}$., specific limitării valorii impulsului (diferenţiale proprii). Foarte frecvente sînt situaţiile fizice în care se cercetează stările de cîmp corespunzătoare unui foton localizat într-un volum V deci a cărui energie (impuls şi număr de undă k) este supus condiţiei

$$\overline{W} = \int_V (\vec{\mathcal{E}}^2 + \vec{\mathcal{H}}^2)\,\mathrm{d}V = k. \tag{44}$$

Înlocuind aici dezvoltarea cîmpului după undele parţiale (integralele Fourier), exprimînd ca mai sus amplitudinile $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ şi $\vec{\mathcal{H}}(\vec{k})$, cuantic, adică faţă de funcţia de undă ale stărilor cu impuls dat (10)—(11) şi (35), precum şi (8) şi (35), ridicînd la pătrat şi integrînd conform relaţiei fizice de localizare (44), se obţin formulele pentru cîmpuri. Ele sînt desigur analoage cu (42)—(43) dar apare acum şi volumul incintei în care este închis fotonul (radiaţia):

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vec{p},\mu} = i\sqrt{\frac{\vec{p}}{2V}}\cdot \vec{e}_{\mu}\, e^{i(\vec{p}\,\vec{r} - pt)} + \text{compl. conj.} \tag{45}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{\vec{p},\mu} = \frac{\vec{p}}{p} \times \vec{\mathcal{E}}_{\vec{p},\mu}. \tag{46}$$

Fizic descompunerea faţă de stările monocromatice (impuls şi polarizaţie determinată), exprimă principiul suprapunerii referitor la orice mărime fotonică $F(\vec{k})$. În particular orice cîmp electric, sau magnetic, se descompune în unde plane-polarizate, aspect optic al fotonului binecunoscut din fizica clasică.

VII. MOMENTUL CINETIC

În spiritul mecanicii cuantice, sistemelor microscopice li se atribuie un anumit *moment cinetic, care reflectă comportarea sistemului faţă de rotaţie*. Acest moment cinetic are un caracter de ansamblu (parte orbitală) şi un caracter intrinsec (propriu, spinul). Sub aspect cuantic, fotonul aflat într-o stare determinată $\vec{\Psi}(\vec{k})$ (deci energia şi impulsul date), înseamnă un cîmp electromagnetic al cărui moment cinetic este definit în electrodinamică. Anume, momentul cinetic de cîmp însemna momentul vectorului care arată impulsul, $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$, asociat cîmpului, şi este o consecinţă a faptului că fiind un sistem cu inerţie, cîmpul manifestă în afara lui forţe materiale, ponderomotoare.

Acest moment cinetic clasic, bine îndreptăţit fiziceşte, trebuie să reprezinte o medie a stărilor individuale de cîmp asociate fotonului, în privinţa momentului cinetic. El este prin urmare identificat cu valoarea medie a momentului fotonului în starea $\vec{\Psi}(\vec{k})$.

$$\boxed{\overline{\vec{\mathcal{M}}} = \int \vec{r} \times (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}})\,(\mathrm{d}\vec{r}).} \tag{47}$$

Cuantic starea generală fiind suprapunerea de unde armonice, se introduce în definiția macroscopică dezvoltările Fourier ale cîmpurilor, și se trece apoi de la acestea la funcția de undă $\Psi(\vec{k})$ (conform definițiilor (10)—(11) și desigur (8), pentru cîmpul magnetic). Rezultatul efectuării acestor operații indicate în (47) definește expresia momentului cinetic

$$\boxed{\overline{\vec{\mathscr{M}}} = \int \mathrm{d}\vec{k}\,\{-i\vec{k} \times \nabla\,(\vec{\Psi}_c^* \cdot \vec{\Psi}) - i\,\vec{\Psi}^* \times \vec{\Psi}\}} \tag{48}$$

($\hat{\nabla}$ înseamănă derivarea în raport cu $\vec{k}$, iar indicele c arată că la derivare mărimea $\vec{\Psi}_c^*$ rămîne constantă. Pe cele trei axe, componentele sînt :

$$\overline{\mathscr{M}}_\alpha = \int \mathrm{d}\vec{k}\,\{\Psi_\beta^*\,(-i\vec{k} \times \nabla)_\alpha\,\Psi_\beta - i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \cdot \Psi_\beta^* \cdot \Psi_\gamma\} \tag{49}$$

($\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$: tensorul unitate antisimetric de ordinul trei).

Fotonul ca microparticulă este presupus a fi înzestrat cu un moment cinetic ,,intern'' : un spin, descris printr-un operator $\hat{S}$ aplicat asupra funcției de undă $\vec{\Psi}(\vec{k})$, funcție în care figurează și o variabilă nouă intrinsecă, cuantică prin excelență. Pentru o microparticulă operatorul momentului cinetic total este de forma

$$\hat{\mathscr{M}}_{\mathrm{tot}} = -i\,\vec{p} \times \hat{\nabla} + \hat{S} = \hat{\mathscr{M}}_{\mathrm{orb}} + \hat{\mathscr{M}}_{\mathrm{spin}} \tag{50}$$

iar valoarea mediei este dată de expresia integrală a elementelor de matrice (integrala operatorului flancat de funcțiile de undă)

$$\overline{\vec{\mathscr{M}}} = \int \Psi^*\,(-i\vec{k} \times \hat{\nabla} + \hat{S})\,\Psi \cdot (\mathrm{d}\vec{k}) \tag{51}$$

(aici $\vec{p} \equiv \vec{k}$; $\mathrm{d}\vec{k} = \mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z = \mathrm{d}k_\alpha\,\mathrm{d}k_\beta\,\mathrm{d}k_\gamma$; și Ψ este Ψ_α^*). Prima parte, cea orbitală, este prezentă explicit în (49); cea de spin trebuie s-a să fie de asemenea conținută în (49) sub forma ultimului termen. De aceea s-a introdus în mod firesc operatorul vectorial de spin

$$\boxed{\hat{S}_\alpha\,\Psi_\beta = -i\,e_{\alpha\beta\gamma} \cdot \Psi_\gamma} \tag{52}$$

legat direct de alternatorul de semne, tensorul $e_{\alpha\beta\gamma}$. Produsul vectorial de felul lui $\vec{g} \times \vec{\Psi}$, de care este nevoie în (49), se exprimă prin acest operator astfel :

$$(\vec{g} \times \vec{\Psi})_\alpha = \vec{g} \cdot (i\,\hat{S}_\alpha)\,\vec{\Psi} \tag{53}$$

Așa că (49) este

$$\boxed{\overline{\vec{\mathscr{M}}} = \int \Psi_\alpha^*(-i\vec{k} \times \nabla + \hat{\vec{S}}) \cdot \Psi_\alpha \cdot (\mathrm{d}\vec{k}).} \tag{54}$$

Operatorul moment cinetic total $\vec{\hat{\mathscr{M}}} = - i\vec{k} \times \hat{\nabla} + \vec{\hat{S}}$ reprezintă efectiv un moment cinetic, întrucît coincide cu operatorul unei rotații infinit mici a cîmpului vectorial (abstracție făcînd de factorul i). Or, momentul cinetic arată invarianța naturală a mărimilor fizice tocmai la o rotație : aici rotația se referă în esență la direcția de propagare, anume, vectorul $\vec{k}$ (și tot spațiul $\vec{k}$ al impulsurilor) trebuie să rămînă în esență același la o rotație efectuată cu un unghi $\delta\varphi$ față de o axă de versor $\vec{\nu}$. Unda nu se poate modifica la o schimbare a reperului prin rotire geometrică. Operatorul rotației este vectorul orientat în lungul axei, și egal cu valoarea unghiului de rotire :

$$\delta\vec{\hat{\varphi}} = \vec{\nu} \cdot \delta\,\hat{\varphi}. \tag{55}$$

Impulsul rotit (adică raza vectoare în spațiul $\vec{k}$ care se rotește), capătă o creștere

$$\delta\vec{k} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{k}. \tag{56}$$

Cîmpul cuantic $\vec{\Psi}(\vec{k})$ se transformă prin rotația undei (a spațiului $\vec{k}$) în cîmpul vectorial $\vec{\Psi}'(\vec{k})$:

$$\vec{\Psi}'(\vec{k} + \delta\vec{k}) = \vec{\Psi}(\vec{k}) + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\Psi}(\vec{k}). \tag{57}$$

Dezvoltînd funcția de undă $\vec{\Psi}'$ în serie, în prima aproximație se obține

$$\begin{aligned} &\vec{\Psi}'(\vec{k} + \delta\vec{k}) = \vec{\Psi}'(\vec{k}) + (\delta\vec{k} \cdot \nabla)\,\vec{\Psi}'(\vec{k}) + \\ &+ \ldots \simeq \vec{\Psi}'(\vec{k}) + (\delta\vec{\varphi}\,(\vec{k} \times \nabla) \cdot \vec{\Psi}(k) \ldots \equiv \vec{\Psi}(\vec{k}) + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\Psi}(\vec{k}). \end{aligned} \tag{58}$$

Variația cîmpului va fi evident diferența vectorială :

$$\delta\vec{\Psi}(\vec{k}) \equiv \vec{\Psi}'(\vec{k}) - \vec{\Psi}(\vec{k}) = - [\delta\vec{\varphi}\,(\vec{k} \times \nabla)\,\vec{\Psi}(\vec{k})] + \delta\vec{\varphi} \times \vec{\Psi}(\vec{k}). \tag{59}$$

În particular, un cîmp de simetrie sferică nu trebuie să sufere nici o schimbare la rotație, atunci $\vec{\Psi}(\vec{k}) = \Psi(k) \cdot \vec{k}$ și $\delta\vec{\Psi} = 0$ (căci ambii termeni de mai sus sînt nuli). Rotirea axelor cu unghiul $\delta\varphi$ în jurul axei ν se descrie printr-un operator, $\hat{R}$, aplicat mărimii în chestiune (aici $\vec{\Psi}$), în așa fel ca prin aplicarea lui să se obțină schimbarea (variația cîmpului în punctul dat) mărimii, proporțională cu unghiul de rotire. Operatorul rotației infinitezimale este definit atunci prin :

$$\delta\vec{\Psi} \equiv (\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{\hat{R}}) \cdot \vec{\Psi} \equiv \delta\varphi \cdot (\vec{\nu} \cdot \vec{\hat{R}})\,\vec{\Psi}. \tag{60}$$

Expresia cîmpului „rotit”, din (60), arată că operatorul rotație (60) trebuie să fie

$$\hat{R} = - \vec{k} \times \nabla - i\,\vec{\hat{S}} \equiv - i\,\vec{\hat{\mathscr{M}}}, \tag{61}$$

($\hat{S}$ fiind desigur operatorul antisimetric de spin (52)).

Componentele operatorului momentului cinetic satisfac relațiile de comutare tipice care rezultă din forma efectivă concretă a operatorilor, și sînt în esență relații general valabile pentru orice sistem cuantic, fiind o consecință a legăturii generale dintre operatorul momentului și cel al rotației infinitezimale (deci o trăsătură tipică de cuantificare a rotației spațiale) :

$$\begin{array}{l} (62) \\ \\ (63) \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \hat{\mathscr{M}}_x \hat{\mathscr{M}}_y - \hat{\mathscr{M}}_y \hat{\mathscr{M}}_x = i \mathscr{M}_z \\ \hat{\mathscr{M}}_\alpha \hat{\vec{\mathscr{M}}}^2 - \hat{\vec{\mathscr{M}}}^2 \hat{\mathscr{M}}_\alpha = 0 \\ \hat{\mathscr{M}}^2 \equiv \hat{\mathscr{M}}_x^2 + \hat{\mathscr{M}}_y^2 + \hat{\mathscr{M}}_z^2 . \end{array}}$$

(Am notat modulul ca operator cu $\hat{\mathscr{M}}^2$.)

Tot general valabile pentru orice sistem cuantic, sînt și valorile proprii ale operatorului moment cinetic. Funcțiile proprii și valorile proprii se obțin prin definițiile :

$$\begin{array}{l} (64) \\ (65) \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{ll} \hat{\vec{\mathscr{M}}}^2 \Psi = \mathscr{M} \Psi & \mathscr{M}^2 = j(j+1) \\ \hat{\mathscr{M}}_z \Psi = \mathscr{M}_z \Psi & \mathscr{M}_z = M = -j, -j+1, \ldots, 0,1, \ldots, +j . \end{array}}$$

(j = număr întreg pozitiv ; M ia $2j + 1$ valori).

Operatorul moment cinetic $\hat{\mathscr{M}} \equiv - i \vec{k} \times \nabla + \vec{S} = - i \vec{k} \times \nabla - i e_{\alpha\beta\gamma}$, comută cu operatorul energie $\hat{W} = k$:

$$\boxed{\hat{\vec{\mathscr{M}}} \hat{W} - \hat{W} \hat{\vec{\mathscr{M}}} = 0.} \tag{66}$$

În limbajul mecanicii cuantice, asta înseamnă că sînt fizic posibile *stări ale fotonului cu energie W, moment cinetic total (ca modul și ca proiecție a sa pe o axă), simultan determinate. O anumită stare este individualizată prin trei numere cuantice p, j, M.* În aceste stări bine precizate, fotonul este descris prin funcții de undă distincte, determinate.

VIII. STĂRILE DE MOMENT CINETIC

Operatorul momentului cinetic al fotonului este format dintr-un termen care sugerează momentul cuantic orbital $\vec{L}$ (numai că el este dat în spațiul impulsurilor $\hat{\nabla}_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ etc$\Big)$, în vreme ce al doilea termen poate fi considerat ca operator al spinului propriu-zis $\hat{\vec{S}}$:

$$(67) \qquad \boxed{\hat{\vec{\mathcal{M}}} \equiv -i\,\vec{k} \times \hat{\nabla}_k = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}.}$$

Împărțirea momentului cinetic al fotonului în parte orbitală și parte de spin este comodă din punct de vedere formal (indică o suprapunere de două stări, de două „mișcări"). Funcțiile de undă ale stărilor fotonului cu valori determinate ale momentului se compun din funcțiile mai simple ale momentului orbital și de spin. *Fizic, despărțirea între momentul „orbital" și cel de „spin" este limitată,* căci nu se poate considera că fotonul ar putea avea un spin propriu, conceput ca un moment al unei particule în repaus nenulă, fotonul fiind totdeauna în mișcare. Nu este deloc clar ce trebuie înțeles prin mișcare orbitală, detașată de cea proprie la fotonul neutru, și mobil, așa cum s-a considerat, la electronul antrenat în atom în jurul nucleului pe de o parte, pe de alta în jurul său propriu (spinul 1/2"). Stările fizice, din punctul de vedere al momentului, avînd deci valori proprii determinate atît pentru momentul orbital, cît și pentru spin, ar trebui să fie întotdeauna realizabile, dacă aceste două „mișcări" se compun. Or, construind efectiv aceste stări (funcțiile proprii ale operatorilor parte orbitală $\hat{\vec{L}}$ și de spin $\hat{\vec{S}}$), ele nu satisfac în general condiția de transversalitate care să le asigure existența fizică. Așadar nu toate aceste „stări" cu „moment orbital" și „propriu" sînt reale, ci numai anumite suprapuneri ale lor, care satisfac transversalitatea.

Spinul, ca o proprietate intrinsecă a fotonului, este în esență legat de polaritate, și se exprimă prin indicele vectorial α al funcției de undă $\vec{\Psi}$. El reprezintă o anumită variabilă de spin, care poate lua trei valori ($\alpha = x, y, z$). În felul acesta funcția de undă care descrie mișcarea fotonului este un vector $\vec{\Psi}(\vec{k})$, dependent de cele trei coordonate ale impulsului k_x, k_y, k_z, ci un *scalar dependent de patru variabile,* în spațiul generalizat al impulsurilor și spinului (variabilele k_x, k_y, k_z și α)

$$(68) \qquad \vec{\Psi}(\vec{k}) = \Psi_\alpha(\vec{k})\,; \quad \Psi_\beta(\vec{k})\,; \quad \Psi_\gamma(\vec{k}).$$

$$(69) \qquad \vec{\Psi}_\alpha(\vec{k}) \equiv \Psi(\vec{k}, \alpha)$$

Operatorul care poate fi numit orbital, $\hat{\vec{L}}$, acționează numai asupra variabilelor de impuls, $\vec{k}$, iar operatorul de spin, prin definiția sa, numai asupra variabilei de spin. De aceea cei doi operatori avînd efecte independente comută între ei, ceea ce cuantic înseamnă simultana determinare a stărilor

„orbitale" şi de spin (aceste stări sînt realizate efectiv, dacă funcţiile proprii sînt în acord cu transversabilitatea) :

$$\hat{\vec{L}}\,\Psi(\vec{k}) = L\,\Psi(\vec{k})\,; \qquad \hat{S}\,\Psi(\alpha) = S\,\Psi(\alpha) \tag{70}$$

$$\boxed{\hat{L}\hat{S} - \hat{S}\hat{L} = 0} \tag{71}$$

Funcţiile proprii ale operatorilor orbitali $\hat{\vec{L}}^2$ şi $\hat{L}_z$ (modul şi proiecţie) ca şi valorile lor proprii (regulile de cuantificare se cunosc din mecanica cuantică generală) satisfac ecuaţiile :

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\vec{L}}^2\,\Phi_{lm} = l\,(l+1).\,\Phi_{lm}\,, && (72)\\ &L_z\,\Phi_{lm} = m\,\Phi_{lm}\,. && (73)\end{aligned}}$$

Valorile proprii ale modulului ascultă de regula de cuantificare după numărul cuantic l, iar cele ale proiecţiei după numărul cuantic m. Stările sînt descrie de funcţiile $\Phi_{lm}(\vec{k})$ numai de $\vec{k}$, funcţii care sînt aşa-zisele funcţii sferice (soluţii ale ecuaţiilor (72)—(73), funcţii scalare unghiulare, adică de $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$:

$$\Phi_{lm}(\vec{k}) = a\,(k)\cdot Y_{lm}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \tag{74}$$

(Ca structură, funcţiile sînt nişte polinoame suficient de simple, ortonormate.)

Stările de spin se stabilesc uşor, scriind ecuaţiile analoage lui (72)—(73), dar pentru operatorii modul şi proiecţie $\hat{\vec{S}}^2$ şi $\hat{S}_z$, care acţionează asupra unei funcţii numai de variabila de spin, $\varkappa_{s\mu}(\alpha)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\vec{S}}^2.\,\varkappa_{s\mu}(\alpha) = s\,(s+1)\,\varkappa_{s\mu}(\alpha), && (75)\\ &\hat{S}_z.\,\varkappa_{s\mu}(\alpha) = \mu.\,\varkappa_{s\mu}(\alpha). && (76)\end{aligned}}$$

Fiind funcţie dependentă de variabila α cu o tripletă de valori, funcţia de spin se poate reprezenta într-o notaţie vectorială, printr-o coloană :

$$\varkappa_{s\mu} \equiv \vec{\varkappa}_\alpha = \begin{pmatrix} \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ \varkappa_z \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Asupra acestei funcţii trebuie să se exercite operatorul de spin, potrivit definiţiei sale :

$$\hat{S}_\alpha\,\varkappa_\beta = -\,i\,e_{\alpha\beta\gamma}\cdot\varkappa_\gamma\,. \tag{78}$$

Cum $\varkappa$ este coloana (77), se obţine, din regula obligatorie de mai sus, forma concretă a operatorilor de spin $\hat{S}_\alpha$, adică $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$, şi o dată cu aceştia, şi a modulului $\hat{S}^2 = \hat{S}_\alpha^2 + \hat{S}_\beta^2 + \hat{S}_\gamma^2$. Sînt nişte matrici de ordinul trei :

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{79}$$

$$\boxed{S^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \tag{80}$$

Se vede că matricea (S^2) este diagonală : adică se prezintă în reprezentarea proprie. Valorile proprii sînt $2 = s\,(s + 1)$. Cu alte cuvinte, *spinul fotonului este egal cu unu.* Iar ca proiecţie el poate lua trei orientări în spaţiul impulsului :

$$\boxed{s = 1\,; \quad \mu = 0, \pm 1\,; \quad \varkappa_{s\mu} \equiv (\varkappa_0, \varkappa_{+1}, \varkappa_{-1}).} \tag{81}$$

Un ansamblu de fotoni reprezintă deci un sistem de microparticule identice cu spin întreg, supuse statisticei cuantice Bose-Einstein (bosoni).

Forma concretă a funcţiilor de spin, $\varkappa_{s\mu}$, se obţine rezolvînd ecuaţia de definiţie (75)—(76) în care operatorii ce intervin sînt tocmai matricile simple (79)—(80). Coloanele care reprezintă funcţiile $\varkappa_\mu$ se umple astfel cu numerele :

$$\underset{s=1\,;\,\mu=0}{\varkappa_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \underset{s=1\,;\,\mu=1}{\varkappa_1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underset{s=1\,;\,\mu=1}{\varkappa_{-1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Fiind funcţii proprii ale operatorului hermitic $\hat{S}$ cu valori proprii diferite, ele sînt ortogonale între ele, şi ortonormate $(\vec{x}_{\mu}' \cdot \vec{\varkappa}_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'})$. Orice mărime cuantică fizică $\vec{\mathcal{F}}$ se poate descompune faţă de aceste stări de spin, mărimea realizîndu-se cu probabilitatea $\mathcal{F}^\mu$ (cele trei stări de spin sînt asemănătoare cu trei versori necoplanari) :

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_{\mu = -1,0,1} \mathcal{F}^\mu \cdot \vec{\varkappa}_\mu\,. \tag{83}$$

Fizic starea de spin este legată de polarizarea undei — vectorul de polarizare $\vec{e}_\mu$ indică şi starea de spin ; vectorii $\vec{e}_\mu$ pot fi aleşi ca :

$$\boxed{\vec{e}_\mu = \vec{\varkappa}_\mu}\,; \quad \boxed{\hat{S}\hat{k} - \hat{k}\hat{S} = 0.} \tag{84}$$

Celor două polarizații $\mu = +1, -1$, le corespund cele două valori ale proiecției spinului. Valoarea a treia este exclusă prin condiția de transversalitate. Cuantic, deoarece operatorul de spin $\hat{S}$ comută cu cel de impuls $\vec{k}$, se poate vorbi de *stări cu impuls determinat și proiecție determinată*. Dacă $\vec{p}$ este dirijat pe OZ, transversalitatea elimină starea $\varkappa_0$ și unda aflată cu o polarizare dextrogiră $\vec{e}_1$, are valoarea spinului $\mu = +1$, spre deosebire de unda cu polarizare levogiră $\vec{e}_2$ cu $\mu = -1$.

Starea cuantică generală de moment cinetic în care se poate afla un foton este descrisă de funcțiile proprii ale operatorului moment cinetic total $\hat{\vec{M}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$. Aceste funcții sînt descrise de numerele cuantice j corespunzînd momentului cinetic total ca modul $\mathcal{M}^2$ („spino-orbital”) $j = l + s$ și numărul cuantic M al proiecției acestuia $\mathcal{M}_z$ (tot spino-orbital) $M = m + \mu$. Funcțiile satisfac ecuațiile.

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{\vec{\mathcal{M}}}^2 \Psi_{jM}(\vec{k}, \alpha) = j(j+1)\Psi_{jM}(k, \alpha), && (85)\\ &\hat{\mathcal{M}}_z \Psi_{jM}(\vec{k}, \alpha) = M \cdot \Psi_{jM}(\vec{k}, \alpha). && (86)\end{aligned}}$$

Forma acestor funcții este cunoscută din mecanica cuantică generală, deoarece problema aceasta nu este altceva decît regula de compunere a momentelor. Forma funcției de undă se poate obține nu rezolvînd neapărat ecuațiile (86), ci construind momentul cinetic total al unui sistem din componentele sale. În cazul fotonului este vorba formal de două subsisteme fără interacție avînd gradele de libertate orbitale (variabilele $\vec{k}$) și pe cele de spin (variabila α). Faptul că este vorba de un foton se răsfrînge asupra numărului cuantic s, care aici este 1 (la electron este 1/2). Așa că momentul total $j = l + s$ este supus restricției

$$\boxed{l = j;\ j \pm 1;\ j \neq 0.} \tag{87}$$

Există deci trei funcții de undă distincte Ψ_{jM}, care corespund celor trei stări orbitale Ψ_{jlM}.

Aceste funcții sînt suprapunerea stărilor separate orbitale și de spin, adică produsele dintre funcțiile orbitale Φ_{lm} și cele de spin $\varkappa_{s\mu}$. Proiecțiile momentelor cinetice orbitale (m) și de spin (μ), dau reunite proiecția momentului cinetic total:

$$\boxed{\begin{gathered}\Psi_{jlM}(\vec{k}, \alpha) = \textstyle\sum_{M=m+\mu} \mathcal{C}_{jM}^{lm;s\mu} \cdot \Phi_{ml}(\vec{k}) \cdot \varkappa_{s\mu}(\alpha);\\ l = j;\ j \pm 1;\ j \neq 0;\ M = m + \mu\end{gathered}} \tag{88}$$

Coeficienții $\mathcal{C}$ sînt numere care depind de indicii scriși, binecunoscuți în mecanica cuantică (niște radicali simpli). Aici ei se dau pentru $s = 1$. Ansamblul acestor numere $\mathcal{C}_{jM}^{l, M-\mu; s\mu}$, formează un tablou, o matrice cu trei coloane $j = l$; $l \pm 1$ și trei linii $\mu = 0, \pm 1$, ceilalți termeni sînt nuli (în plus matricea coeficienților este ortogonală și normată). Sub formă vectorială, funcțiile proprii sînt:

$$(89)\qquad \boxed{\vec{\Psi}_{jlm}(\vec{k}) = a(k). \sum_{\mu=-1}^{\mu=1} \cdot \mathcal{C}_{jM}^{l;\, M-\mu;\, s\mu} \cdot Y_{l,\, M-\mu}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right) \cdot \vec{\varkappa}_{\mu}.}$$

Funcțiile $\vec{\Psi}_{jlM}$ alcătuiesc un sistem ortogonal, indicii arătînd valorile proprii ale operatorilor autoadjuncți $\hat{\vec{\mathcal{M}}}^2$, $\hat{\mathcal{M}}_z$, $\hat{\vec{L}}^2$. Și funcțiile vectoriale sînt ortonormate:

$$(90)\qquad \boxed{\int \vec{\Psi}^{*}_{jlM} \cdot \vec{\Psi}_{j'M'l'}\,(\mathrm{d}\vec{k}') = \delta_{jj'} \cdot \delta_{ll'} \cdot \delta_{MM'}.}$$

Partea unghiulară a funcției de undă se zice funcție sferică vectorială sau vector sferic Y_{jlM}.

$$(91)\qquad \boxed{\vec{\Psi}_{jlM} = a(k)\; \vec{Y}_{jlM}(\vec{k}/k).}$$

Și aceste funcții sferice vectoriale formează un sistem ortonormal. Ele au fost studiate de numeroși autori (Klebsch--Gordan, G. Petrasen, Sorokin, Berestetki-Dolghinov, Ter Martirosian J.E.T.F., 1947—1950 ș.a.).

Starea generală a fotonului cu valori determinate pentru pătratul momentului cinetic ($\hat{\vec{\mathcal{M}}}^2$ numărul cuantic j), și a proiecției $\mathcal{M}_z$ (valori M), este în general o suprapunere de trei stări, căci numărul cuantic j are numai trei valori nenule. Funcția de undă cea mai generală este o combinație liniară a trei vectori sferici

$$(92)\qquad \vec{\Psi}_{jM} = \sum_{l=j-1}^{j+1} \rho \cdot \vec{Y}_{jlM}.$$

Acestea din punctul de vedere al momentului cinetic. Fiind vorba de foton, nu chiar toate stările au realitate fizică, ci numai acele transversale. De aceea nu există trei, ci numai două stări distincte ale fotonului, cu numere cuantice j, M date. Așadar, *două stări* $\vec{\Psi}_{jM}^{(\lambda)}$; $\lambda = 1,0$: *două ipostaze de împlinire ale fotonului în care momentul cinetic este determinat.*

IX. UNDELE SFERICE

Starea de moment cinetic determinat precizată și cu determinarea de paritate reprezintă fizic o undă sferică. Pentru a cunoaște în mod cuantic undele sferice, trebuie stabilite forma explicită a funcțiilor $\vec{\Psi}_{jM}^{(\lambda)}$ în privința parității. Anume, din cei trei vectori $\vec{Y}_{jlM}$, liniar independenți, se pot forma trei combinații liniare $\vec{Y}_{jM}^{(\lambda)}$; $\lambda = 0; +1, -1,$

astfel încît să fie perpendiculare între ele. Un vector $\vec{Y}_{jM}^{(-1)}$ să fie longitudinal (în lungul lui $\vec{k}$), iar ceilalţi doi, $\vec{Y}_{jM}^{(1)}$ şi $\vec{Y}_{jM}^{0}$, să fie transversali. (S-au denumit tot vectori sferici, deoarece se bucură de aceeaşi condiţie de normare, şi se exprimă în mod simplu faţă de vectorii sferici).

Partea transversală trebuie să fie o funcţie $\vec{Y}_{jlM}$, care să fie perpendiculară pe versorul de propagare $\vec{n} = \vec{k}/k$. Or, examinînd funcţiile sferice vectoriale, se găseşte că produsul scalar $\vec{n}.\ \vec{Y}_{jjM}$ este nul în cazul $l = j$, ceea ce a şi pus în evidenţă unul dintre vectorii sferici transversali. I se asociază valoarea $\lambda = 0$. Celălalt vector sferic transversal fiind perpendicular, este orientat pe direcţia produsului vectorial $\vec{n} \times \vec{Y}_{jM}^{0}$. I se asociază paritatea $+1$. Astfel doi vectori au fost imediat determinaţi. În locul produsului vectorial $\vec{n} \times \vec{Y}_{jM}^{0}$, folosind descompunerea după funcţii sferice ale produsului dintre versorul $\vec{n}$ $\left(\text{de componente } n_0 = \cos\theta\,;\ n_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \cdot e^{\pm i\varphi}\right)$ şi funcţiile sferice, se poate obţine vectorul stării $+1$, în mod independent de $\vec{Y}_{jM}^{0}$ exprimîndu-se prin vectorii sferici) anume cei corespunzători valorilor $j - 1$ şi $j + 1$).

Recurgînd la definiţii, dezvoltarea auxiliară, a produsului dintre versorul $\vec{n}_{\mu}$ şi funcţia sferică Y_{jM}, s-a obţinut rezultatul

$$(93)\qquad \vec{n}\, Y_{jM} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\, \vec{Y}_{j,\,j-1,\,M} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\, \vec{Y}_{j,\,j+1,\,M}\,.$$

Expresia a fost exploatată pentru produsul vectorial $\vec{h} \times \vec{Y}_{jM}^{0}$. Dar ea mai reprezintă şi acea combinaţie liniară a vectorilor sferici care formează termenul longitudinal. Deci este firesc a considera termenul longitudinal $\vec{n}\, Y_{jM}$, ca fiind $\vec{Y}_{jM}^{(-1)}$, asociat parităţii -1. Cu aceste întemeieri putem scrie rezultatele :

$$(94)\qquad \vec{Y}_{jM}^{(-1)} \equiv \vec{n}\, Y_{jM} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\, \vec{Y}_{j,\,j-1,\,M} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\, \vec{Y}_{j,\,j+1,\,M}\,,$$

$$(95)\qquad \vec{Y}_{jM}^{0} \equiv \vec{Y}_{j,\,j,\,M}$$

$$(96)\qquad \vec{Y}_{jM}^{(+1)} \equiv -i\,(\vec{n} \times \vec{Y}_{jM}^{0}) = \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\, \vec{Y}_{j,\,j+1,\,M} + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\, \vec{Y}_{j,\,j-1,\,M}\,.$$

Prin felul în care au fost definite aceste funcţii, ele ascultă de o normare analoagă cu vectorii sferici $\vec{Y}_{jlM}$, prin care de altfel se exprimă (ortonormare). Starea fotonului este descrisă numai de părţile perpendiculare lui $\vec{k}$ (transversale) : de $\vec{Y}_{jM}^{(1)}$ şi $\vec{Y}_{jM}^{0}$. Aşadar o combinaţie :

$$\begin{array}{l} (97) \\[2ex] (98) \end{array}\qquad \boxed{\begin{array}{l} \int \vec{Y}_{jM}^{(\lambda)} \cdot \vec{Y}_{j'M'}^{(\lambda')} \cdot (\mathrm{d}\vec{k}) = \delta_{jj'} \cdot \delta_{MM'}\, \delta_{\lambda\lambda'} \\[2ex] \vec{\psi}_{jM} = \rho_1 \cdot \vec{Y}_{jM}^{(1)} + \rho_0\, \vec{Y}_{jM}^{0} \end{array}}$$

(ρ_0, ρ_1 sînt arbitrare). *Stările de moment cinetic au deci o dublă degenerare.*

Precizarea fără orice echivoc a stării de moment cinetic (*ridicarea degenerescenței*) *se face punînd condiția ca fiecare stare să aibă o paritate determinată*, ceea ce fizic înseamnă a lua în considerație proprietățile naturale de orientare ale undei, față de sensul convențional, inversabil, direcția $\vec{k}$. Matematic, fiecare stare trebuie să fie proprie operatorului de reflexie $\hat{\mathcal{J}}$, operator prin care trecem de la $\vec{k}$ la $-\vec{k}$, sensul pozitiv sau cel negativ al axelor fiind ceva relativ. Schimbînd sensul axei de propagare, se inversează și sensul funcției de cîmp. Astfel, definiția operatorului de reflexie aplicabilă de data asta unui cîmp vectorial (nu unui scalar), trebuie să fie :

$$\boxed{\hat{\mathcal{J}}\vec{\psi}(\vec{k}) = -\vec{\psi}(-\vec{k}).} \tag{99}$$

Operatorul inversare de semn, $\hat{\mathcal{J}}$, este independent cu operatorul moment cinetic ($\hat{\mathcal{M}} = \hat{\imath} + \hat{s}$; $\hat{L}$ este diferențial, $\hat{S}$ se aplică variabilei de spin). Valorile proprii ale operatorului $\hat{\mathcal{J}}$ sînt ± 1, așa cum se vede aplicîndu-l de două ori :

$$\boxed{\hat{\vec{\mathcal{M}}}\hat{\mathcal{J}} = \hat{\mathcal{J}}\hat{\mathcal{M}}\,;\ \hat{\mathcal{J}}\vec{\Psi} = \mathcal{J}\vec{\Psi}\,;\ \mathcal{J}^2 = 1.} \tag{100}$$

Pe de altă parte, paritatea funcției sferice este binecunoscută : ea este decisă de indicele l, deoarece dacă în aceste funcții de unghi facem inversarea de semn a argumentului se obține :

$$\hat{\mathcal{J}}\,Y_{lm}(\vec{n}) = Y_{lm}(-\vec{n}) = (-1)^l \cdot Y_{m}(\vec{n}). \tag{101}$$

Aici interesează paritățile vectorilor sferici, care în esență se compun tot din funcții sferice clasice. Funcțiile sferice vectoriale transversale se comportă la paritate astfel :

$$\hat{\mathcal{J}}\vec{Y}_{jlM}(\vec{n}) = (-1)^{l+1} \cdot \vec{Y}_{jlM}(\vec{n}) \tag{102}$$

$$\hat{\mathcal{J}}\vec{Y}^{(1)}_{jM} = (-1)^j \cdot \vec{Y}^{(1)}_{jM} \tag{103}$$

$$\hat{\mathcal{J}}\vec{Y}^{0}_{jM} = (-1)^{j+1} \cdot \vec{Y}^{(0)}_{jM}. \tag{104}$$

Astfel, pentru j și M dați, sînt posibile două stări care diferă prin paritate $\lambda = 0, 1$ nou număr cuantic legat de simetria undei cuantice, de caracterul relativ al direcțiilor pozitive sau negative ale propagării. Important este faptul că fotonul nu se poate găsi într-o altă stare decît cele descrise de funcțiile $\Psi_{jM\lambda}$; $\lambda = 0,1$. Stările clasificate după paritate au un sens fizic direct, concretizat prin aceea că *radiația din starea cu paritate $\lambda = 1$ este condiționată de momentul electric al unui sistem de sarcini creatoare de cîmp, iar cel cu $\lambda = 0$, de momentul mag-*

netic al sistemului de sarcini. Această condiţionare se desprinde din studiul emisiei şi absorbţiei unui foton de către un sistem de sarcini : deci din analiza efectelor de interacţie între sarcini şi radiaţia liberă (teoria radiaţiei multipolare, electrice şi magnetice).

În felul acesta, starea unui foton, asociat cîmpului liber înfăţişat aici, este condiţionată de structura sistemului (cuantic) de sarcini electrice mobile care-l generează, deoarece în esenţă proprietăţile microparticulelor se manifestă tocmai prin interacţia lor cu alte microparticule, şi tratarea fotonului ca un obiect liber, în absenţa sarcinilor şi a momentelor magnetice elementare, a însemnat o etapă pregătitoare studiului interacţiilor de tipul electron-foton (teoria relativistă Dirac-iană ; teoria dublei cuantificări). Stările cu $\lambda = 1$ *s-au numit, prin urmare, stări de tip electric, iar cele cu* $\lambda = 0$ *de tip magnetic.*

În starea ,,electrică'' $\lambda = 1$, nu se poate atribui o anumită valoare momentului cinetic ,,orbital'', deoarece funcţia c de undă corespunzătoare $\vec{Y}^{(1)}_{jM}$ acestei parităţi, nu depinde de un singur l, ci este o combinaţie liniară a doi vectori sferici $\vec{Y}_{jlM}$ cu valorile diferite (vezi (96)). Aici apare caracterul parţial, formal, al împărţirii momentului cinetic al fotonului în moment cinetic de tip ,,orbital'' (în spaţiul $\vec{k}$; $\hat{L} = -i\,\vec{k} \times \nabla_k$) şi în parte numai de spin, ,,proprie''.

Cît priveşte starea cu moment cinetic total $j = 0$, ea este exclusă de regulă de adunarea momentelor foto aplicată la foton ($s = 1$, $l = j$; $j \pm 1$; $j \neq 0$). Acest lucru apare concludent şi în privinţa funcţiei de undă deoarece pentru $j = 0$, definiţia vectorilor sferici arată că există numai un singur asemenea vector, $\vec{Y}_{010}$, şi acesta nu este dintre cei transversali. Iar vectorul longitudinal $\vec{Y}^{(-1)}_{00} = n\,Y_{00}$, poate fi în orice caz construit. Într-o asemenea stare de moment nul (stare de simetrie sferică), cîmpul cuantic vectorial care descrie matematic mecanica fotonului este neapărat longitudinal, şi prin urmare fotonul nu poate ocupa o asemenea stare. *Obiect în mişcare, avînd o anumită direcţie de propagare, fotonul nu se poate afla într-o stare de moment nul.*

Stările care au în acelaşi timp determinate momentul, paritatea şi energia (sau cvaziderteminate ; cu impulsurile cvazideterminate), sînt descrise în limbajul probabilist al funcţiei de undă prin produsul funcţiei de undă de impuls cu aceea de moment cinetic. Adică partea neunghiulară $a\,(k)$ este chiar funcţia de undă corespunzătoare determinării impulsului :

$$\vec{\Psi}_{pjM\lambda} = i \cdot \frac{e^{-ipt}}{\sqrt{p^2 \mathrm{d}p}} \cdot \delta_{kp} \cdot \vec{Y}^{(\lambda)}_{jM}. \tag{105}$$

Funcţia de undă a fotonului într-o stare fizică arbitrară se prezintă, în virtutea suprapunerii, ca o dezvoltare după funcţiile cuantice de stare care pun în evidenţă impulsul, momentul cinetic şi paritatea :

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_{p,\,j,\,M,\,\lambda} \mathcal{C}_{pjM\lambda} \cdot \vec{\Psi}_{p,\,j,\,M,\,\lambda}, \tag{106}$$

$$\mathcal{C}_{pjM\lambda} = \int \vec{\Psi} \vec{\Psi}^{*}_{pjM\lambda}\,(\mathrm{d}\vec{k}). \tag{107}$$

Coeficienţii $\mathcal{C}_{pjM\lambda}$ (obţinuţi prin ortonormare) au, în lumina interpretării statistice a mecanicei cuantice, sensul unei probabilităţi, indicînd şansa de a găsi sistemul în starea precizată de indici. Astfel se poate dezvolta stările de impuls determinat $\vec{p}$ (deci trei numere cuantice) şi polarizaţie determinată μ, faţă de stări de moment şi paritate determinată:

$$\vec{\Psi}_{\vec{p},\mu} = \sum_{p',j,M,\lambda} \cdot \mathcal{C}_{\vec{p},\mu}^{p',jM\lambda} \cdot \vec{\Psi}_{p'jM\lambda}. \tag{108}$$

Sau, invers, stările de energie dată (p' modulul lui $\vec{p}'$) şi moment cinetic j, M, împreună cu paritatea λ, dezvoltate faţă de stările proprii în care fotonul are un impuls p şi o polaritate dată:

$$\vec{\Psi}_{p'jM\lambda} = \sum_{\vec{p},\mu} \mathcal{C}_{p',j,M,\lambda}^{\vec{p};\mu} \cdot \vec{\Psi}_{\vec{p},\mu}. \tag{109}$$

Coeficienţii determină probabilităţile de stare; astfel $|\mathcal{C}_{p,j,M,\lambda}^{\vec{p};\mu}|^2$ înseamnă probabilitatea ca fotonul să se mişte pe direcţia $\vec{p}$, avînd polarizaţia dată μ, dacă se ştie că el are un anume moment. Iar probabilitatea ca un foton în condiţii de moment cinetic precizat şi paritate dată, dar indiferent de felul în care este polarizaţia, se obţine sumînd după μ pătratele coeficienţilor $\sum_{\mu} |\mathcal{C}_{p,j,M,\lambda}^{p,\mu}|^2$. Ştiind funcţiile de undă, adică s:

$$\vec{\Psi}_{pjM\lambda} = \frac{i}{\sqrt{p^2\,\mathrm{d}p}} \cdot \vec{Y}_{jM}^{(\lambda)} \cdot \mathrm{e}^{-ipt}\,\delta(kp). \tag{110}$$

şi

$$\vec{\Psi}_{\vec{p},\mu} = i\,c_\mu \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{d}\vec{p}}} \cdot \mathrm{e}^{-ipt} \cdot \delta(\vec{k},\vec{p}) \tag{111}$$

se pot calcula efectiv coeficienţii $|\mathcal{C}^2|$ şi suma lor după μ, expresie necesară în aplicaţii. Aceste expresii se prezintă explicit sub forma de polinoame speciale, unghiulare, cu coeficienţi numerici. Întrucît vectorii sferici transversali sînt legaţi (prin definiţia $i\,\vec{Y}_{jM}^{(1)} = \vec{h} \times \vec{Y}_{jM}^{0}$), rezultatul care se urmăreşte nu conţine explicit pe λ ca pe o variabilă independentă. Aşa că *distribuţia unghiulară a radiaţiei fotonului este determinată numai de momentul său cinetic, nu şi de paritate.*

X. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC ŞI STĂRILE DE MOMENT CINETIC

Cîmpurile electromagnetice, reale, fizice, asociate fotonului, sînt

$$\vec{\mathcal{E}} = \int \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\,(\mathrm{d}\vec{k}); \quad \vec{\mathcal{H}} = \int \vec{\mathcal{H}}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}\,(\mathrm{d}\vec{k}) \tag{112}$$

iar componentele $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ sînt exprimate cuantic faţă de funcţiile de undă prin definiţia

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = \frac{\sqrt{k}}{4\pi^{3/2}} \cdot [\vec{\Psi}(\vec{k}) + \vec{\Psi}^*(-\vec{k})]; \quad \dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k}) = -i\frac{k\sqrt{(k)}}{4\pi^{3/2}}[\vec{\Psi}(\vec{k}) - \vec{\Psi}^*(\vec{k})]. \tag{113}$$

Asemănător şi cîmpul magnetic (113) şi (8)

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{k}) = i\frac{\vec{k}}{k^2} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}). \tag{114}$$

Rămîne acum de specificat faptul că starea $\vec{\Psi}(\vec{k})$ este funcţia de undă corespunzătoare unei energii (sau modul de impuls $p = k$ dat), sau a unui moment cinetic j, M dat, şi a unei parităţi determinate :

$$\vec{\Psi}_{pjM\lambda} = \frac{i}{\sqrt{p^2\,\mathrm{d}p}}\,\vec{Y}^{(\lambda)}_{jM}\,\mathrm{e}^{-ipt} - \delta_{(kp)}. \tag{115}$$

Înlocuind în (113) se obţine componenta Fourier a cîmpului electric, şi în mod analog şi cea a cîmpului magnetic ($\lambda = 0{,}1$) :

$$\vec{\mathcal{E}}_{pjM\lambda}(\vec{k}) = \frac{i}{4\pi^{3/2}\sqrt{p\,\mathrm{d}p}}\,(\vec{Y}^{(\lambda)}_{jM}\,\mathrm{e}^{-ipt} - \vec{Y}^{(\lambda)*}_{jM}\,\mathrm{e}^{+ipt})\,\delta_{kp} \tag{116}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{pjM\lambda}(\vec{k}) = -\frac{1}{4\pi^{3/2}\sqrt{p\,\mathrm{d}p}}\,(\vec{Y}^{(1-\lambda)}_{jM}\,\mathrm{e}^{-ipt} + \vec{Y}^{(1-\lambda)*}_{jM}\,\mathrm{e}^{ipt})\,\delta_{kp} \tag{117}$$

Cîmpul ca funcţie de coordonate, deci aspectul ondulatoriu corespunzător cuantic unei stări indicate prin p, j, M, λ se va obţine dacă în definiţia (112) introducem componentele $\vec{\mathcal{E}}_{pjM\lambda}(\vec{k})$ şi $\vec{\mathcal{H}}_{pjM\lambda}(\vec{k})$ de mai sus (116) — (117). Urmează a efectua integrale asupra unor termeni de forma $\vec{Y}^{(\lambda)}_{jM}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)\cdot \mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}$. Fără a insista aici asupra acestor detalii de calcul, menţionăm că unda plană, $\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}$, se dezvoltă tot după funcţiile sferice (nevectoriale) : apare o parte radială, alta referitoare la unghiuri, $\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, şi o amplitudine exprimabilă în esenţă prin funcţia Bessel. Rezultatul acestei dezvoltări matematice, frecvent utilizate (de pildă în teoria ciocnirilor cuantice) este

$$\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{lm} g_l(kr)\cdot Y^*_{lm}\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)\cdot Y_{lm}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{118}$$

Folosind şi expresiile funcţiilor sferice, vectoriale de data asta (cele transversale), integralele care intervin se pot calcula simplu. Cîmpul electric şi cel magnetic se poate exprima astfel faţă de funcţiile cu înţeles cuantic, numerotate prin indicii j, M şi λ. Cîmpul electromagnetic real, în condiţiile în care starea cuantică este precizată în privinţa energiei momentului cinetic şi parităţii (unde sferice), este dată analog cu exprimarea faţă de stările cu impuls şi paritate determinate (undele plane (42)—(43)), printr-o expresie de forma :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_{pjM,+\lambda}(\vec{r}) + \text{compl. conj.} \tag{119}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{H}}_{pjM,\lambda}(\vec{r}) + \text{compl. conj.} \tag{120}$$

Aici forma explicită a funcțiilor complexe (calculate cum s-a indicat mai sus), depinde de tipul electric sau magnetic al radiației :

Tip electric :

$$(121)\qquad \vec{\mathscr{E}}_{r,j,M,+1}(\vec{r}) = \frac{i\sqrt{p^3\,\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,g_{j+1}(pr)\,\vec{Y}_{j,j+1,M} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,g_{j-1}(pr)\cdot\vec{Y}_{j,j-1,M}\right]\mathrm{e}^{-ipt}$$

$$\equiv \frac{i\sqrt{p^3\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\cdot\left\{\frac{\sqrt{j/j+1}}{2j+1}(g_{j-1}-g_{j+1})\,\vec{Y}^{(-1)}_{jM} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{j}{2j+1}\,g_{j+1} + \frac{j+1}{2j+1}\,g_{j-1}\right)\vec{Y}^{(1)}_{jM}\right\}\mathrm{e}^{-ipt}$$

$$(122)\qquad \vec{\mathscr{H}}_{p,j,M,+1} = -\frac{\sqrt{p^3\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\cdot g_j(pr).\,\vec{Y}_{j,i,M}\,\mathrm{e}^{-ipt}$$

Tip magnetic :

$$(123)\qquad \vec{\mathscr{E}}_{pjM,0} = \frac{i\sqrt{p^3\,\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\cdot g_j(pr)\cdot\vec{Y}_{j,j,M}\,\mathrm{e}^{-ipt}$$

$$(124)\qquad \vec{\mathscr{H}}_{p,j,M,0} = -\frac{\sqrt{p^3\,\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\cdot\left[\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,g_{j+1}\cdot\vec{Y}_{j,j+1,M} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,g_{j-1}\cdot\vec{Y}_{j,j-1,M}\right]\cdot\mathrm{e}^{-ipt}.$$

Bineînțeles, cîmpul electromagnetic fiind în esență real, se face suma $\vec{\mathscr{E}} + \vec{\mathscr{E}}^*$ și $\vec{\mathscr{H}} + \vec{\mathscr{H}}^*$ (funcțiile cu * sînt complexele conjugate) luîndu-se numai partea reală. Rezultatele de mai sus au o anumită simetrie a lor, și anume (121)—(122) trece în (123)—(124), dacă se face transformarea de conjugare a cîmpului $\vec{\mathscr{E}} \to -i\vec{\mathscr{H}}$; $\vec{\mathscr{H}} \to +i\vec{\mathscr{E}}$. În cazul în care energia este strict determinată, iar nu situată în intervalul p, $p + \mathrm{d}p$, prin normarea corespunzătoare (la funcția $\delta(p-p')$), dispare factorul $\sqrt{\mathrm{d}p}$, iar în cazul localizării fotonului într-un volum V (de pildă al sferei), folosind normarea volumetrică va dispare $\sqrt{\mathrm{d}p}$ și va apare corespunzător volumul.

Din rezultatele (121)—(122)—(123)—(124) se mai observă caracterul reciproc *transversal al cîmpului magnetic în stările de tip electric, și a cîmpului electric în stările de tip magnetic* ($\vec{\mathscr{H}}_{p,j,M,+1} \perp \vec{\mathscr{E}}_{p,j,M,0}$) asta datorită transversalității vectorului sferic $\vec{Y}^0_{jM} \equiv \vec{Y}_{jjM}$. De asemenea se vede din prima exprimare a cîmpului electric în stările de tip electric, și cîmpul magnetic în stările de tip magnetic, că aceste cîmpuri sînt date prin vectorii sferici $\vec{Y}_{j,j\pm1,M}$, care nu sînt reciproc transversali, dar acești vectori pot fi corelați cu vectorii sferici longitudinali $\vec{Y}^{(-1)}_{jM} = \vec{n}\,Y_{jM}$ și transversali

$\vec{Y}^{(1)}_{jM}$ (a doua formulă din (121)). În zona undelor, departe de sursă (unde $pr \gg 1$) primul termen care reprezintă componenta radială dispare, deoarece forma asimptotică a funcțiilor besseliene duce la anularea parantezei ($g_{j-1} \simeq g_{j+1}$). Rămîne, așadar, termenul exprimat prin vectorul sferic transversal $\vec{Y}^{(1)}_{gM}$ (*transversalitate reciprocă la distanțe mari*).

O stare de cîmp oarecare poate fi dezvoltată după componentele cîmpurile corespunzătoare stărilor fotonului cu moment și paritate determinate :

$$\vec{\mathcal{E}} = \sum_{pjM\lambda} \mathcal{C}^{pjM\lambda} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{pjM\lambda} \tag{125}$$

$$\mathcal{C}^{pjM\lambda} = \int \vec{\mathcal{E}}\, \vec{\mathcal{E}}^{*}_{pjM\lambda} . \tag{126}$$

În particular, o stare de cîmp corespunzătoare unui foton cu impuls-polarizație determinate (undă plană) se poate dezvolta după undele sferice (ca în (106)—(107)) în care $\mathcal{F}$ este cîmpul $\vec{\mathcal{E}}_{\vec{p},\mu}(\vec{r})$; $\vec{\mathcal{H}}_{\vec{p},\mu}(\vec{r})$. Astfel descris ca entitate cuantică, și calculat în diferitele sale posturi fizice, *cîmpul electromagnetic al fotonului a fost cuantificat, ceea ce a permis interpretarea radiației sistemelor* (în special radiația nucleară γ), problemă cardinală, și mereu actuală, în dezvoltarea ideilor atomismului.

XI. POTENȚIALELE CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC

În electrodinamica macroscopică, vectorii de cîmp sînt descriși foarte bine prin intermediul potențialelor vectorial $\vec{\mathcal{A}}$ și scalar V :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} - \nabla V, && (127)\\ \vec{\mathcal{H}} &= \operatorname{rot} \vec{\mathcal{A}} . && (128) \end{aligned}}$$

Aceste potențiale au un anumit grad de arbitrar, ceea ce s-a numit prin invarianta la etalonare, invariantă după care cîmpurile fizice nu schimbă valoarea, dacă la funcțiile de lucru $\vec{\mathcal{A}}$ și V adăugăm anumiți factori permiși de restricția de calibrare. Anume, se poate adăuga potențialului scalar o funcție arbitrară $-\frac{\partial f}{\partial t}$, adăugîndu-se în același timp ∇f la potențialul vector. *Arbitrarul, inerent potențialelor, arată caracterul lor de mărimi auxiliare*, și poate fi izgonit folosind obișnuita condiție suplimentară a lui Lorentz, din electromagnetismul macroscopic :

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{A}} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 . \tag{129}$$

Principiul suprapunerii stărilor cuantice înseamnă a descompune vectorii $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$ conform transformării Fourier, ceea ce înseamnă că şi potenţialele trebuie date sub această formă :

$$\boxed{\begin{aligned} &(130) \qquad \vec{\mathcal{A}} = \int \vec{\mathcal{A}}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, (d\vec{k}) \\ &(131) \qquad V = \int V(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}\, (d\vec{k}) \end{aligned}}$$

$$(132) \qquad \vec{\mathcal{E}} = \int \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, (d\vec{k}),$$

$$(133) \qquad \vec{\mathcal{H}} = \int \vec{\mathcal{H}}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, (d\vec{k}).$$

Stările parţiale ale cîmpurilor (componentele $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ şi $\vec{\mathcal{H}}(\vec{k})$ din spaţiul impulsurilor), se vor exprima prin aceleaşi componente referitoare la potenţiale $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k})$ şi $V(\vec{k})$. Anume, înlocuind în definiţiile (127) — (128) dezvoltările (130) — (133), legătura dintre cîmpuri şi potenţiale la care se ajunge este :

$$(134) \qquad \vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = -\dot{\vec{\mathcal{A}}}(\vec{k}) - i\vec{k}\, V(\vec{k}),$$

$$(135) \qquad \vec{\mathcal{H}}(\vec{k}) = i\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}(\vec{k}).$$

Mărimile de cîmp $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ şi $\vec{\mathcal{H}}(\vec{k})$ sînt nişte vectori fizici, transversali, pe cînd mărimile $\vec{\mathcal{A}}$ şi V au un caracter de mărimi de lucru. De aceea este nimerit a pune în evidenţă partea transversală şi partea longitudinală :

$$(136) \qquad \vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}_{\text{trans.}} + \vec{\mathcal{A}}_{\text{long.}} = \vec{\mathcal{A}}_{\text{trans.}} + \vec{n}\, \mathcal{A}_{\text{long.}}$$

Cîmpul fiind transversal, rezultă

$$(137) \qquad \vec{n}\vec{\mathcal{E}} = 0\,; \quad \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}}_{\text{trans.}} = 0\,; \quad \left(\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}\right)$$

aşa că separarea în partea longitudinală şi în cea transversală (136), împreună cu (134)—(135), conduce la o legătură între potenţialul scalar şi partea longitudinală $\mathcal{A}_{\text{long.}}$:

$$(138) \qquad i\, k\, V = \dot{\mathcal{A}}_{\text{long.}} = 0.$$

Eliminînd cîmpul magnetic (prin (8)), se obţine legătura dintre cîmpul electric şi potenţial, anume legătura cu partea transversală :

$$(139) \qquad \begin{aligned} \vec{\mathcal{A}}_{\text{trans.}} &= \frac{1}{k^2}\, \vec{\mathcal{E}}\,, \\ \dot{\vec{\mathcal{A}}}_{\text{trans.}} &= -\vec{\mathcal{E}}\,. \end{aligned}$$

Partea longitudinală $\mathcal{A}_{\mathrm{long.}}$ este legată de potenţialul scalar prin (138), în rest fiind arbitrară (invariantă la etalonare). Dacă se impune în plus condiţia lorentziană de calibrare :

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{A}} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0\,; \quad \vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{trans.}} + \vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{long.}}, \tag{140}$$

se obţine o legătură nouă în timp, în care derivata temporală îşi schimbă acuma obiectul, aplicîndu-se lui V :

$$i\,k\,\mathcal{A}_{\mathrm{long.}} + \dot{V} = 0. \tag{141}$$

Sistemul de ecuaţii (138)—(141), pentru părţile longitudinale, este analog cu sistemul la care sînt supuse cîmpurile transversale. Din motive fizice, potenţialul „longitudinal" trebuie considerat o mărime reală $V(\vec{k}) = V^*(\vec{k})$.

Din punct de vedere cuantic, *a descrie pe mai departe cîmpul electromagnetic prin potenţiale, înseamnă a le cuantifica şi pe acestea, adică a le exprima pe ele faţă de funcţia de undă într-un mod asemănător cu cel aplicat la cîmpuri* : baza cuantică a teoriei ((10) şi (11)) :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = \frac{\sqrt{k}}{4\pi^{3/2}}\cdot[\vec{\Psi}(\vec{k}) + \vec{\Psi}^*(-\vec{k})] \tag{142}$$

$$\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k}) = -\frac{i\,k\cdot\sqrt{k}}{4\pi^{3/2}}\,[\vec{\Psi}(\vec{k}) - \vec{\Psi}^*(-\vec{k})]. \tag{143}$$

Folosind aceste definiţii, se pot exprima vectorii transversali $\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{transv.}}$ prin funcţia de undă a fotonului în spaţiul impulsurilor :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec{\mathcal{A}}_{\mathrm{trans.}}(\vec{k}) = -\frac{i}{4\pi^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}[\vec{\Psi}(\vec{k}) - \vec{\Psi}^*(-\vec{k})], && (144)\\
&\dot{\vec{\mathcal{A}}}_{\mathrm{trans.}}(\vec{k}) = -\frac{\sqrt{k}}{4\pi^{3/2}}\cdot[\vec{\Psi}(\vec{k}) + \vec{\Psi}^*(-\vec{k})]. && (145)
\end{aligned}}$$

„Cuantificarea" pune, prin urmare, problema exprimării potenţialelor clasice $\vec{\mathcal{A}}$, V, prin intermediul unei funcţii de undă care în orice caz să satisfacă o lege de evoluţie cuantică, adică o ecuaţie a lui Schrödinger :

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = k\Psi. \tag{146}$$

Construirea funcţiei de undă potrivită a reprezenta cîmpurile prin potenţiale, trebuie să fie în acord cu cea referitoare la cîmpuri (142)—(143) pe care trebuie să le obţină. Pe lîngă cuantificarea părţii transversale, care s-a efectuat direct, dictată fiind de cîmpuri, trebuie făcută şi cuantificarea părţii longitudinale, $\mathcal{A}_{\mathrm{long.}}$ legată de potenţialul scalar. Adică o cuantificare a acestuia : o exprimare a acestuia prin funcţia de undă.

În electrodinamica cuantică s-a arătat cu toată consecvența că funcția de undă potrivită a descrie cîmpurile electromagnetice prin potențiale, este

$$\boxed{\vec{\Psi}_{\text{pot}} = \vec{\Psi}\,(\vec{k}) + i\,\vec{n}\,\Psi_0\,(\vec{k}) \equiv \vec{\Psi}_{\text{trans.}} + \vec{\Psi}_{\text{long.}}} \tag{147}$$

$\left(\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}\right)$. Schema după care se introduce această funcție de undă (adică în esență Ψ_0) căci $\vec{\Psi}\,(\vec{k})$ (se știe), se bazează pe următoarele exprimări ale potențialeler

$$V\,(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi^{3/2}}\,\frac{1}{\sqrt{k}}\,(\Psi_{\text{long.}}\,(\vec{k}) + \Psi^*_{\text{long.}}\,(-\vec{k})), \tag{148}$$

$$\dot{V}\,(\vec{k}) = -\,\frac{i}{4\pi^{3/2}}\cdot\sqrt{k}\cdot(\Psi_{\text{long.}}\,(\vec{k}) - \Psi^*_{\text{long.}}\,(-\vec{k})). \tag{149}$$

În felul acesta trebuie construită funcția de undă scalară $\Psi_0\;(\vec{k})$. Potențialul vectorial se exprimă atunci astfel, în funcție de funcția de undă (vectorială) $\vec{\Psi}_{\text{pot}}$ (din (147)) introdusă mai sus, reunind partea transversală $\vec{\Psi}\,(\vec{k})$ și cea longitudinală Ψ_0 (ambele satisfac ecuația de evoluție în mod separat) $i\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial t} = k\vec{\Psi}$; $i\frac{\partial\Psi_0}{\partial t} = (k\Psi_0)$:

$$\boxed{\vec{\mathcal{A}}\,(\vec{k}) = -\,\frac{i}{4\pi^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}\,[\vec{\Psi}_{\text{pot}}\,(\vec{k}) - \vec{\Psi}^*_{\text{pot}}\,(-\,\vec{k}).]} \tag{150}$$

Ansamblul celor patru mărimi de undă $\vec{\Psi}_{\text{pot}}$ și Ψ_0 ,întrucît determină componentele Fourier ale potențialelor cîmpului, poate servi ca o funcție de undă efectivă a fotonului. Acest lucru este întărit prin aceea că prin funcția de undă cu patru indici ($\vec{\Psi}_{\text{pot}}$, Ψ_0), se exprimă mărimile de stare : energia, impulsul, momentul cinetic. Modul în care se exprimă valorile medii ale lui $\overline{W}$, $\overline{\vec{p}}$, $\overline{\vec{\mathcal{M}}}$, este impus de definiția cuantică a mediei, în care intervine vectorul $\vec{\Psi}$, iar ($\vec{\Psi}_{\text{pot}}$, Ψ_0) este legat de acest vector transversal prin definiția (147). Astfel, pentru energie :

$$\boxed{\overline{W} \equiv \int \vec{\Psi}^*\,\hat{k}\Psi\,(\mathrm{d}\vec{k}) = \int k\,(\vec{\Psi}^*_{\text{pot.}}\,\vec{\Psi}_{\text{pot.}} - \Psi^*_0\,\Psi_0)\,(\mathrm{d}\vec{k}).} \tag{151}$$

În acest mod ar urma să se calculeze o medie. Pentru impuls și moment cinetic, media se exprimă prin :

$$\overline{\vec{p}} = \int \vec{k}\,(\vec{\Psi}^*_{\text{pot}}\;\vec{\Psi}_{\text{pot}} - \Psi^*_0\,\Psi_0)\,(\mathrm{d}\vec{k})\,. \tag{152}$$

$$\overline{\vec{\mathcal{M}}} = \int \Psi^*_{\text{pot}_\alpha\cdot}\,\hat{\vec{\mathcal{M}}}\,\Psi_{\text{pot}_\alpha\cdot} - \Psi^*_0\,\hat{\vec{L}}\,\Psi_0)\;(\mathrm{d}\vec{k}). \tag{153}$$

Funcția de undă cu patru componente ($\vec{\Psi}_{\text{pot}}, \Psi_0$) nu satisface nici o condiție de normare, căci normarea cuantică a fost prescrisă de energie și valoarea medie $\overline{W}$ nu depinde de Ψ_0 (aici se manifestă invarianța la etalonare, în privința părții longitudinale).

Unei stări a fotonului cu impuls sau cu moment determinat îi va corespunde un anumit potențial electrodinamic $\vec{\mathcal{A}}$, V, și corespunzător acestuia un anumit cîmp electromagnetic. Cuantic vorbind, pentru a obține aceste potențiale este necesar ca funcția de undă, avînd componente longitudinale și transversale, ($\vec{\Psi}, \Psi_0$), să fie funcție a operatorilor respectivi, care precizează tipul determinat de stare ($\hat{P}\,\vec{\Psi}_{\text{pot.}} = P\,\vec{\Psi}_{\text{pot.}}$ $\hat{P}\,\Psi_0 = P\,\Psi_0$; $\vec{M}\,\vec{\Psi} = M\,\vec{\Psi}$; $\hat{M}\,\Psi_0 = M\,\Psi_0$). De fapt $\vec{\Psi}_{\text{pot.}}$ fiind compus aditiv din $\vec{\Psi}$ și Ψ_0, funcțiile de undă fiind cunoscute ($\vec{\Psi}$), rămîne a determina forma funcției noi Ψ_0 scalare. Cum ea intervine aditiv, trebuie să fie de aceeași formă ca $\vec{\Psi}_{\vec{p}.\mu}$, diferind de aceasta printr-o constantă oarecare :

$$(154)\qquad \begin{gathered} \vec{\Psi}_{\vec{p}.\mu} = i\,\frac{e_\mu}{\sqrt{d\vec{p}}}\cdot e^{-ipt}\cdot \delta(\vec{k}, \vec{p})\,;\; \Psi_{0\,\vec{p}\mu} = C\,\frac{i}{\sqrt{d\vec{p}}}\;e^{-ipt}\;\delta(\vec{k}, \vec{p})\,; \\ \vec{\Psi}^{\text{pot.}}_{\vec{p}.\mu} = \frac{i\,e^{-ipt}}{\sqrt{d\vec{p}}}\cdot(\vec{e}_\mu + i\,C\,\vec{n})\,\delta(\vec{k}, p). \end{gathered}$$

La fel și pentru funcția proprie a operatorului cuantic-moment cinetic :

$$(155)\qquad \begin{gathered} \vec{\Psi}_{p,j,M,\lambda} = \frac{i}{\sqrt{p^2\,dp}}\vec{Y}^{(\lambda)}_{jM}\,e^{-ipt}\cdot\delta(k, p)\,;\; \Psi^0_{p.j.M} = \frac{iC}{\sqrt{p^2\,dp}}\,Y_{,M}e^{-ipt}\cdot\delta(\vec{k}, p)\,; \\ \vec{\Psi}^{\text{pot.}}_{p.j.M.\lambda} = \frac{ie^{-ipt}}{\sqrt{p^2 dp}}\,\vec{Y}(^{(\lambda)}_{jM} + iC\vec{n}\cdot Y_{jM})\,|\cdot|\,\delta(k, p). \end{gathered}$$

Această adaptare este întrutotul motivată întrucît funcțiile proprii ale momentului se referă aici la un caz scalar (la Ψ_0), și atunci ele coincid cu cele ale operatorului momentului orbital (spinul ne mai avînd parte vectorială asupra căreia să acționeze). Iar funcțiile proprii ale momentului orbital sînt polinoamele sferice.

Paritatea funcției scalare Ψ_{0pjM}, este determinată în mod univoc de momentul ei, va fi deci paritatea funcției sferice, Y_{jM}, egală cu $(-1)^j$. Paritatea $(-1)^j$ coincide cu paritatea stărilor de tip electric $\lambda = 1$ (103) – (105).

$$(156)\qquad \vec{\Psi}^{\text{pot.}}_{p.j.M.+1} = \frac{i}{\sqrt{p^2\,dp}}(\vec{Y}^{(1)}_{jM} + i\,C\,\vec{n}\;\;Y_{jM})\;e^{-ipt}\;\delta(k, p).$$

Pentru stările de $\lambda = 0$ de tip magnetic, partea scalară a funcției de undă $\Psi_{0pjM}((-1)^{j+1})$ este nulă, așa că funcția de undă se reduce la zero, și la vectorul $\vec{\Psi}$:

$$(157)\qquad \Psi_{0pjM:0} = 0\,;\;\; \vec{\Psi}^{\text{pot.}}_{p.j.M.0} = \vec{\Psi}_{p.j.M.0}\,.$$

Funcţia de undă în reprezentarea faţă de potenţiale, cuprinde un anumit grad de arbitrar : parametrul C. Printr-o alegere adecvată a constantei arbitrare, funcţia matematică de undă poate primi diferite forme, toate echivalente fizic. Cazul $C=0$ simplifică mult relaţiile, deoarece atunci vectorii $\vec{\Psi}_{\text{pot}}$ şi $\vec{\Psi}$ coincid :

$$(158) \qquad \vec{\Psi}_{\text{pot}\,;\,p;\,j;\,M;+1}=\vec{\Psi}_{p,\,j,\,M,\,+1}\,;\ \Psi_{0,\,p,\,j\ M\ +1}=0\,;\vec{\Psi}_{\text{pot},\,p,\,j,\,M,\,0}=\vec{\Psi}_{p,\,j,\,M,\,0}.$$

(W. Heitler, Proc. Cambr. Phil. Soc., 1936). Simetria formulelor pune în evidenţă şi cazul $C=-i\sqrt{\frac{j}{j+1}}$, cînd vectorul $\vec{\Psi}_{\text{pot}}$. este proporţional cu o anumită funcţie sferică. Această afirmaţie se sprijină pe cunoscuta dezvoltare a lui $\vec{n}\ Y_{jM}$ din (94), care este prezentă mai sus în (156), şi care a condus la vectorii sferici. Din acest motiv ea exprimă de asemenea şi pe $\vec{Y}^{(1)}_{jM}$ care apare în formula (97). Se vede că pentru acest C, al doilea termen din (94) şi (97) care urmează a se reuni în (156), dispar :

$$(159) \qquad \vec{\Psi}_{\text{pot},\,p,\,j,\,M,\,+1}=\frac{i}{\sqrt{p^2\,\mathrm{d}p}}\sqrt{\frac{2j+1}{j+1}}\,\vec{Y}_{j,\,j-1,\,M}\cdot \mathrm{e}^{-i\,pt}\,\delta\,(k,\,p).$$

$$(160) \qquad \Psi_{0,\,p,\,j,\,M,\,+1}=\sqrt{\frac{j}{j+1}}\,\frac{1}{\sqrt{p^2\,\mathrm{d}p}}\cdot Y_{jM}\cdot e^{-i\,pt}\,\delta\,(k,\,p).$$

Potenţialele $\vec{\mathcal{A}}$, V, ca mai înainte vectorii reali de cîmp $\vec{\mathcal{E}}\ \vec{\mathcal{H}}$ se exprimă asemănător prin mărimile complexe :

$$(161) \qquad \vec{A}\,(\vec{r})=\vec{\mathcal{A}}\,(\vec{r})+\text{compl. conj.}$$

$$(162) \qquad \mathrm{V}\,(\vec{r})=V\,(\vec{r})+\text{compl. conj.}$$

În terminologia mecanicii cuantice, potenţialele se vor exprima faţă de funcţia de undă, prin chiar definiţia acestora (150)—(148)—(149) care se referă la componentele Fourier (componentele de impuls $\vec{k}$). Dependenţa faţă de coordonate se obţine, desigur, făcînd transformarea Fourier inversă, într-un mod cu totul asemănător ca la cîmpul electric (magnetic). Aşa se obţin potenţialele pentru undele plane : stări cu impuls determinat şi polarizaţie determinată :

$$\boxed{\begin{aligned}
&(163) \qquad \vec{\mathcal{A}}_{\vec{p},\,\mu}=\frac{1}{4\pi^{3/2}}\cdot\sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{p}}\left(\vec{e}_\mu+\mathcal{C}\,\frac{\vec{p}}{p}\right)\mathrm{e}^{i(\vec{p}\,\vec{r}-pt)}\\
&(164) \qquad V_{\vec{p},\,\mu}=\frac{1}{4\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{p}}\cdot\mathcal{C}\,\mathrm{e}^{i(\vec{p}\,\vec{r}-pt)}.
\end{aligned}}$$

Pentru undele sferice: stări cu moment cinetic şi paritate determinată, se obţine:

unde sferice de tip electric:

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{\mathcal{A}}_{p,\mu,M,+1} &= \frac{\sqrt{p\,\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\Bigg\{\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,g_{j+1}(pr)\cdot\vec{Y}_{j,j+1,M}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)+\\
&\quad+\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,g_{j-1}\cdot\vec{Y}_{j,j-1,M}+\mathcal{C}\Bigg[\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\,g_{j+1}\cdot\\
&\quad\cdot\vec{Y}_{j,j+1,M}-\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\,g_{j-1}\vec{Y}_{j,j-1,M}\Bigg]\Bigg\}\mathrm{e}^{-ipt} \qquad (165)\\
V_{pj,M,+1} &= \mathcal{C}\,\frac{\sqrt{p\,\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\cdot g_j Y_{jM}\cdot\mathrm{e}^{-ipt} \qquad (166)
\end{aligned}}$$

unde sferice de tip magnetic:

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{\mathcal{A}}_{p,j,M,0} &= \frac{\sqrt{p\,\mathrm{d}p}}{4\pi^{3/2}}\cdot\,g_j\vec{Y}^{(0)}_{jM}\mathrm{e}^{-ipt} \qquad (167)\\
V_{p,jM} &= 0\,. \qquad (168)
\end{aligned}}$$

În cazul $C=0$, etalonînd aşa, expresiile se simplifică (astfel $\vec{\mathcal{A}}_{pjM}$ diferă numai printr-un factor de termenul corespunzător al cîmpului $\vec{\mathcal{E}}_{pjM}$ iar în cazul celălalt $-\sqrt{\frac{j}{j+1}}$, se va reduce la un singur termen (cel proporţional cu $g_{j-1}\vec{Y}_{j,j-1}$). Componentele $\vec{\mathcal{A}}$, ale potenţialului pentru undele de tip magnetic, nu sînt afectate de etalonare (de C). În felul acesta *unei anumite microstări în care se află fotonul generat sau absorbit de sistemele încărcate, îi corespunde un anumit potenţial electrodinamic, prin intermediul căruia se pot calcula cîmpurile electromagnetice ale fotonului*, adică radiaţia sa, prezenţa sa fizică în univers.

Privite în perspectiva istorică a desfăşurării ideilor de bază ale atomismului cuantic, consideraţiile făcute arată posibilitatea de a cuantifica aspectul ondulatoriu clasic al fotonului, *descriind dinamica sa cuantică prin intermediul unei funcţii de undă cu înţeles probabilist. Tratat la fel ca un microobiect cu masa de repaus nenulă, fotonul, ca şi sistemul de fotoni, poate fi descris în limbajul funcţiei de undă apelînd la principiile mecanicei cuantice generale „clasice", fără a le depăşi în esenţă.* Caracterul de transformare, de anihilare şi de generare al fotonilor, adică în esenţă regimul lor relativist care duce la un număr variabil de particule, trebuie neapărat pus în evidenţă atunci cînd se cercetează nu un singur obiect, un foton rupt de interacţii, ci neapărat un sistem de fotoni, aflat într-un permanent schimb de energie cu sarcinile. Aceste consideraţii au reprezentat o etapă preliminară necesară în dezvoltarea ideilor asupra cîmpurilor cuantice, asupra cuplării lor, şi asupra efectelor de interacţie.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1966

Institutul politehnic Braşov

BIBLIOGRAFIE

1. A. I. Ahiezer, V. B. Berestetki, *Electrodinamica cuantică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
2. J. M. Blatt, V. F. Veisskopf, *Theoretical nuclear physics*. New York, 1952.
3. L. De Broglie, *Théorie generale des particules a spin*. Paris, 1954.
4. L. De Broglie, *Mecanique ondulatoire du photon et theorie quantique des champs*. Paris, 1949.
5. W. Heitler, *The quantum theory of radiation*. Oxford, 1954.
6. L. Landau, E. Lifsits, *Mecanica cuantică*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1965.
7. L. Landau, E. Lifsits, *Teoria cîmpului*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1963.
8. V. Novacu, *Introducere în electrodinamică*. Bucureşti, 1959.
9. A. Sanielevici, D. Bogdan, *Structura nucleului atomic şi tranziţiile radioactive*. Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1958.
10. A. Sokolov, I. Ivanenko, *Teoria cuantică a cîmpului*. Institutul de studii romāno-sovietic, 1956.
11. I. E. Tamm, *Bazele teoriei electricităţii*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
12. T. Vescan şi colaboratori, *Curs de teoria particulelor elementare*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
13. G. Wentzel, *Einführung in die Quantentheo in der Wellenfelder*. Wien, 1943.

TEOREMA DE SEPARARE A LUI JORDAN
(ASPECTE METODOLOGICE)

DE

ILIE PETRE IAMBOR

În acest articol sînt scoase în evidență etapele ce nu pot fi evitate în demonstrarea teoremei lui Jordan și modurile în care se pot stabili acestea. Se arată unde intervin aceste etape în demonstrarea teoremei și cum se stabilește teorema generală. De asemenea se arată ideile care au stat la baza demonstrării fiecărui moment esențial, stabilindu-se asemănări și deosebiri între acestea la diverși autori. Atricolul prezintă și aspecte ale modului în care s-a stabilit teorema pentru cazul în care curba este un poligon și cum au fost preluate unele idei pentru a demonstra teorema în cazul general.

SCURT ISTORIC

Pînă la sfîrşitul secolului XIX s-a abuzat în analiză de intuiţia geometrică. Revizuirea aprofundată a principiilor făcută de G. Cantor şi C. Jordan are marele avantaj de a aşeza definitiv edificiul analitic pe baze aritmetice.

Consideraţiile făcute de C. Jordan (1893) asupra liniilor l-au condus la enunţarea şi demonstrarea pentru prima oară a unei frumoase teoreme ce-i poartă numele :

„Orice curbă plană, simplă, închisă, separă planul în două domenii şi este frontiera lor comună”.

S-au dat multe demonstraţii acestei teoreme, unele pentru cazul particular în care curba este un poligon. Printre acestea din urmă sînt demonstraţiile date de Lennes (1911) şi Denjoy (1911), iar Errera (1922) [1] a căutat să stabilească teorema lui Jordan pentru poligoane sprijinîndu-se pe postulatele lui Hilbert.

Dintre demonstraţiile date teoremei lui Jordan în toată generalitatea ei, vom aminti aici demonstraţiile date de Kerékjarto (1930) [2] şi Dieudonné [3] precum şi demonstraţiile cu caracter elementar date de

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1405–1410, BUCUREŞTI, 1966

A. I. Volpert şi A. F. Filippov în 1950 [4]. Demonstraţia lui Kerékjarto, ca şi cea expusă în : *Manual de analiza matematică* vol. II al acad. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus [5], admite faptul că un poligon separă planul.

UN MOD DE A STABILI TEOREMA : „ORICE POLIGON SEPARĂ PLANUL”

În demonstrarea teoremei lui Jordan pentru poligoane, Errera foloseşte postulatele lui Hilbert I/1—6 şi II/1—4, care exprimă legături între punctele şi dreptele unui plan şi relaţiile lor de ordine. Cu ajutorul acestor postulate se stabilesc proprietăţile fundamentale de ordonare a punctelor pe o dreaptă. Apoi demonstrează că o dreaptă separă planul în două regiuni, după care stabileşte aceeaşi proprietate pentru poligoanele convexe. În demonstrarea acestei proprietăţi pentru poligoanele convexe, Errera foloseşte următoarea lemă :

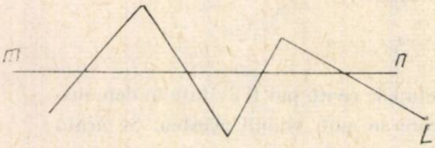


Fig. 1

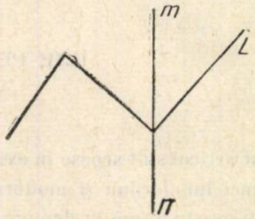


Fig. 2

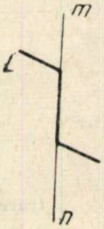


Fig. 3

Situaţii în care avem puncte de intersecţie.

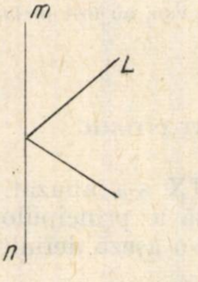


Fig. 4

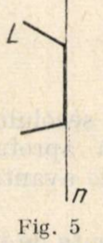


Fig. 5

Situaţii pentru care nu avem puncte de intersecţie.

„O *diagonală a unui poligon convex are exact două puncte comune cu el*” şi demonstrează descompunînd poligonul în triunghiuri prin diagonalele ieşite dintr-un vîrf.

Cînd poligoanele nu sînt convexe, se utilizează următoarea lemă :

„*Atunci cînd o linie frîntă L uneşte două puncte E, F, situate de o parte şi de alta a unei drepte d, există pe L două vîrfuri G, H de o parte şi de alta a lui d şi între care linia L nu are nici-un vîrf care să nu fie pe d.*

Această lemă se aseamănă cu definiţia introdusă de A. F. Filippov pentru punctele de intersecţie ale unei linii frînte cu o dreaptă. Acest autor consideră ca *puncte de intersecţie ale liniei frînte* L *cu o dreaptă* (*sau o semidreaptă*) mn :

1) *fiecare punct al intersecţiei lui* L *cu* mn *care nu constituie un vîrf al lui* L

2) *fiecare vîrf* (*sau latură*) *a lui* L *care se găseşte pe* mn *şi pentru care laturile lui* L *care se întîlnesc în vîrful respectiv sînt situate de o parte şi de alta a dreptei* mn.

ETAPELE DEMONSTRAŢIEI. MODURI DE STABILIRE A LOR ŞI CUM SE DEMONSTREAZĂ TEOREMA

În cele ce urmează, vrem să atragem atenţia asupra faptului că există două etape ce nu pot fi evitate de nici una dintre demonstraţiile teoremei generale a lui Jordan, indiferent de noţiunile şi metodele folosite.

Aceste etape constau în următoarele două fapte :

— *Un arc simplu nu separă planul* şi

— Teorema lui Janiszewski : „*Fie* A *şi* B *două părţi compacte ale lui* C, a, b, *două puncte distincte din* $C - (A \cup B)$. *Dacă nici* A, *nici* B *nu separă punctele* a *şi* b *şi dacă* $A \cap B$ *este conexă, atunci* $A \cup B$ *nu separă punctele* a *şi* b”.

Este de remarcat modul variat în care se stabilesc aceste fapte. Astfel, Dieudonné se bazează pe criteriul lui S. Eilenberg ; „*Fie* H *o mulţime compactă în* C. *Pentru ca* H *să separe două puncte oarecare* a *şi* b *ale mulţimii* $C - H$, *este necesar şi suficient ca aplicaţia* :

$$z \to \frac{S_{a,b}(z)}{|S_{a,b}(z)|}$$

a mulţimii H *în* U *să fie esenţială* [1]).

Din acest criteriu decurg, ca nişte consecinţe, cele două propoziţii de mai sus.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny] & \textit{Teorema Janiszewski.} \\ \textit{Criteriul lui S. Eilenberg} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \textit{Complementara în } C \textit{ a oricărui arc simplu este conexă.} \end{tikzcd}$$

Ceilalţi autori stabilesc aceste lucruri pe căi diferite. Astfel, la Kerékjarto şi în [5] se demonstrează teorema lui Janiszewski admiţîndu-se faptul că un poligon separă planul, după care se demonstrează că un arc

---

[1]) D$_1$: *Pentru orice două puncte* $a \in C$ *şi* $b \in C$. $a \neq b$, *considerăm funcţia* $S_{a,b}(z)$ *definită astfel:*

$$z \to \frac{z-a}{z-b} \quad \textit{definită în } C - \{b\}.$$

Se verifică uşor că $S_{a,b}$ este un omeomorfism al mulţimii $C - \{b\}$ pe $C - \{1\}$.

D$_2$: *Fie* E *un spaţiu metric. Vom spune că aplicaţia* f *a spaţiului* E *în cercul unitate* $U : |z| = 1$ *este* **neesenţială** *dacă există o aplicaţie continuă* g *a spaţiului* E *în* R *astfel ca:* $f(x) = e^{ig(x)}$ *pentru orice* $x \in E$.

D$_3$: *Aplicaţia continuă a spaţiului* E *în* U *se numeşte* **esenţială** *dacă ea nu este neesenţială.*

simplu nu separă planul, folosindu-se teorema lui Janiszewski. Deci aceste demonstrații se conduc după următorul plan :

Un poligon separă planul → *Teorema lui Janiszewschi* → *Un arc simplu nu separă planul.*

A. F. Filipov și A. I. Volpert, care au dat demonstrații cu caracter elementar, își pregătesc terenul pentru demonstrarea teoremei numai cu faptul că ,,*Un arc simplu nu separă planul*". Demonstrarea elementară a acestui lucru este destul de laborioasă și prezintă asemănări cu anumite tehnici folosite pentru stabilirea teoremei lui Janiszewski în [5]. Deci cu tot efortul depus pentru eliminarea teoremei lui Janiszewski, acest lucru nu s-a putut realiza integral. Putem spune însă că din momentul în care am arătat că : ,,Arcul simplu nu separă planul" am găsit cheia pentru demonstrarea teoremei lui Jordan, dificultatea demonstrației constînd tocmai în stabilirea acestei propoziții. Odată stabilit acest punct cheie, se trece la demonstrarea teoremei lui Jordan, teoremă care cuprinde următoarele afirmații :

1) *Mulțimea* $R^2 - \Gamma$ *este neconexă.*
2) *Mulțimea* $R^2 - \Gamma$ *are exact două componente.*
3) *Mulțimea* Γ *este frontiera fiecărei componente a lui* $R^2 - \Gamma$.

Înainte însă de a demonstra teorema pentru cazul unei curbe plane, simple, închise, oarecare, se demonstrează teorema pentru cazul în care curba conține un segment, anume se stabilește propoziția :

Fie A un arc simplu și pq un segment care se intersectează în extremitățile lor și nu au alte puncte comune. Curba jordaniană $\Gamma = A \cup pq$ separă planul în două domenii și este frontiera lor comună.

Se stabilește apoi teorema generală în felul următor : Se unesc două puncte p, q ale curbei printr-un segment. Punctele p și q determină pe Γ două arce simple A_1 și A_2. Curbele

$$\Gamma_1 = A_1 \cup pq$$
$$\Gamma_2 = A_2 \cup pq$$

satisfac ipotezele propoziției precedente și acum demonstrația se face prin stabilirea afirmațiilor 1), 2) și 3).

În continuare, căutăm să scoatem în evidență ideile care au stat la baza demonstrării fiecărui moment esențial, stabilind asemănări și deosebiri între acestea, la diverși autori.

MODURI DE STABILIRE A PROPOZIȚIEI : UN ARC SIMPLU NU SEPARĂ PLANUL

A. F. Filippov și A. I. Volpert demonstrează această propoziție folosind ideea următoare :

Dacă punctele p și q nu sînt separate prin fiecare arc $ac \subset ab$, care este diferit de ab, atunci nici ab nu separă punctele p și q. Anume, se arată că fiecare porțiune $p_i q_i$ a liniei frînte pq care se intersectează cu ac poate fi înlocuită cu altă linie, care nu intersectează pe ac. Se arată apoi că $ac = ab$, unde c este marginea superioară pe ab a punctelor c' pentru care arcul $ac' \subset ab$ nu separă punctele p și q.

Această idee stă și la baza demonstrației din [5]. Se împarte arcul A într-un număr finit de arce simple consecutive $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Se arată că nici unul din arcele A_i nu separă punctele a, b, apoi aplicînd teorema lui Janiszewski succesiv arcelor A_1 și A_2, $A_1 \cup A_2$, și A_3 etc. ... deducem că arcul A nu separă punctele a și b.

Demonstrația dată de Dieudonné se bazează pe cu totul alte considerații, ea rezultînd imediat din criteriul lui S. Eilenberg prin considerarea restricției aplicației :

$$z \to \frac{S_{a,b}(z)}{|S_{a,b}(z)|} \text{ la } \gamma(I)$$

și arătînd că această restricție este neesențială [1]).

MODURI DE STABILIRE A TEOREMEI LUI JANISZEWSKI

La Dieudonné, ea rezultă tot ca un corolar al criteriului lui S. Eilenberg ; anume se arată că restricția aplicației :

$$z \to \frac{S_{a,b}(z)}{|S_{a,b}(z)|} \text{ la } A \cup B \text{ este neesențială.}$$

În [5], teorema lui Janiszewski se demonstrează folosindu-se faptul că un poligon separă planul, și anume poligonul format din cele două linii poligonale L_1 și L_2 ce unesc punctele a și b. Punctele lui A situate pe poligonul $P = L_1 \cup L_2$ și în exterior formează o mulțime compactă F_1 disjunctă de mulțimea închisă $B \cup L_1$. Tehnica folosită pentru construirea liniei poligonale care unește punctele a și b dintr-o anumită porțiune a liniei L_2 care nu intersectează mulțimea și din frontierele pătratelor care constituie acoperirea finită a mulțimii F_1 este aceeași ca la A. I. Volpert și A. F. Filippov.

MODURI DE STABILIRE A PROPOZIȚIEI : CURBA Γ ESTE FRONTIERĂ PENTRU FIECARE COMPONENTĂ A LUI $R^2 - \Gamma$

Demonstrația se bazează la toți autorii, pe aceeași idee ; dar metodele sînt diferite :

Se demonstrează că în orice vecinătate a unui punct arbitrar $a \in \Gamma$ se găsesc puncte q_i ale fiecărui domeniu G_i definit de curba Γ în plan.

A. I. Volpert folosește o metodă elementară de construcție iar A. F. Filippov utilizează raționamentul prin absurd, folosind faptul că arcul simplu nu separă.

În [3] și [5] acest lucru se stabilește prin dublă incluziune și anume se demonstrează că : $\mathrm{Fr}\, A \subset \Gamma$ și $\Gamma \subset \mathrm{Fr}\, A$, unde A este o componentă conexă a mulțimii $R^2 - \Gamma$.

La acest punct în raționamentele tuturor demonstrațiilor date intervine faptul că „Arcul simplu nu separă două puncte din plan". Metodele folosite sînt specifice fie analizei reale, fie funcţiilor complexe sau geometriei, însă se utilizează aceeaşi tehnică de a trimite puncte din fiecare domeniu în vecinătatea punctului considerat de pe frontieră.

---

[1]) γ este drumul simplu definit în I, I, fiind un interval $[\alpha, \beta]$.

MODURI DE STABILIRE A PROPOZIŢIEI : $R^2 - \Gamma$ ESTE NECONEXĂ

În demonstrarea acestui fapt intervine teorema lui Janiszewski. În [3] se foloseşte raţionamentul prin absurd, iar în [5] se foloseşte o metodă elementară şi se aplică din nou faptul că poligonul separă.

MODURI DE STABILIRE A PROPOZIŢIEI : $R^2 - \Gamma$ ARE EXACT DOUĂ COMPONENTE

Ideea folosită în [4] şi [5] este următoarea :

„Dacă, fiind date trei puncte, două din ele se pot uni printr-o linie, atunci $R^2 - \Gamma$ are exact două componente". În [3], după ce se arată că $R^2 - \Gamma$ e neconexă, se consideră o sferă care se intersectează cu fiecare componentă conexă a mulţimii $R^2 - \Gamma$ şi astfel încît, dacă două componente conexe ale lui $R^2 - \Gamma$ intersectează o componentă conexă, ele coincid.

Prin urmare, se observă că toate demonstraţiile prezintă multe idei comune.

În topologia planului se demonstrează următoarea teoremă a lui Antoine relativă la curbe simple închise, teoremă ce constituie o întărire a teoremei lui Jordan :

Date fiind în planul (z) *o circumferinţă* Γ *şi o transformare topologică* τ *a acesteia în curba simplă închisă* C *din planul* (u), *transformarea* τ *se poate extinde la o transformare topologică* T *a planului* (z) *în planul* (u).

Din această teoremă, rezultă imediat teorema lui Jordan, însă demonstrarea teoremei lui Antoine cere consideraţii speciale. Ea se poate stabili direct, sau se demonstrează folosind teorema lui Jordan.

Primită la redacţie la 23 februarie 1966

Şcoala Medie nr .16
„George Coşbuc".

BIBLIOGRAFIE

1. M. A. Errera, *Une demonstration du théorème de Jordan* Mathesis. **36**, 374–386, (1922).
2. Von Kerekjartó B., *Demonstration élémentaire du théorème de Jordan sur les courbes simple.* Szeged Acta, **5**, 56–59 (1930).
3. J. Dieudonné, *Foundation of Modern Analysis.* Academie Press, 1960.
4. A. I. Volpert şi A. F. Filipoov, *Успехи математических наук,*168 şi 173 (1950).
5. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică.* vol. II, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964, pag. 193.
6. C. Jordan, *Cours d'Analyse.* Paris, 1893, p. 90–99.
7 N. J. Lennes, Am. J. of. Maths. Baltimore, **XXXIII**, 37–62 (1911).
8. A. Denjoy, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences.* Paris, 423 – 426 şi 493 – 496 (1911).
9. M. A. Errera, *Le théorème de Jordan pour les polygones.* Mathesis, Bruxelles, **XXXVI.** (1922) suplément de juillet p. 13–16.
10. S. Stoilow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă.* vol. I, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.

A DOUA SESIUNE ȘTIINȚIFICĂ A TINERETULUI
BUCUREȘTI 20–22 MAI 1966

Cea de-a doua sesiune științifică a tineretului, organizată de Institutul de matematică și centrul de statistică matematică al Academiei Republicii Socialiste România în cinstea celei de-a 45-a aniversări a Partidului Comunist Român, ținută în București între 20 și 22 mai a.c., a înlesnit posibilitatea cunoașterii preocupărilor majore ale tineretului în exploararea rodnică a multiplelor domenii ale matematicii.

Inițiativa organizării acestei sesiuni se datorește faptului că organizatorii ei au avut în vedere în primul rînd directivele Comitetului Central al Partidului Comunist Român în ceea ce privește dezvoltarea cercetării științifice din țara noastră. Toate acestea au pornit de la faptul că, după cum a arătat tovarășul Nicolae Ceaușescu, secretar general al C.C. al P.C.R., în expunerea cu privire la îmbunătățirea organizării și îndrumării activității de cercetare științifică : „Dezvoltarea științei la nivelul cerințelor contemporane presupune manifestarea liberă a individualității creatorilor în sfera cercetării, îndrăzneală și spirit inovator, înlăturarea oricărei rigidități, îngustimi de vederi și lipsa de obiectivitate științifică, desfășurarea unui larg schimb de opinii științifice, confruntarea deschisă a punctelor de vedere". Mai departe se arată că : „Vor trebui organizate periodic reuniuni și alte manifestări științifice în cadrul cărora să fie puse în discuție puncte de vedere și ipoteze originale, tendințe de dezvoltare pe plan mondial, problemele teoretice și implicațiile noilor descoperiri științifice".

Ședința de deschidere a sesiunii s-a ținut în sala (sindicală) de festivități a Academiei Republicii Socialiste România. Pentru buna desfășurare a ședinței s-a ales un prezidiu a cărui componență a fost următoarea : acad. Miron Nicolescu, Directorul Institutului de matematică al Academiei Republicii Socialiste România, acad. Octav Onicescu și cercetătorii Corneliu Constantinescu, Ion Suciu din cadrul Institutului de matematică și Anca Creangă-Sâmboan de la Centrul de statistică matematică al Academiei Republicii Socialiste România.

Cuvîntul de deschidere a fost rostit de acad. prof. Miron Nicolescu, iar în încheiere cercetătorul Ion Suciu a dat indicațiile necesare relative la locul de prezentare a comunicărilor care s-au ținut în cinci secții și anume :

I. Algebră, geometrie și topologie.
II. Analiză funcțională, teoria funcțiilor și ecuații.
III. Analiză numerică, programare și mașini de calcul.
IV. Mecanică.
V. Teoria probabilităților și statistică matematică.

Participarea numeroasă la această sesiune vine să dovedească interesul pe care-l prezintă acest gen de manifestare științifică în lumea celor care caută neîntrerupt să pătrundă tot mai adînc în cunoașterea legilor naturii, în apropierea granițelor nemărginite ale științei.

Din istoria dezvoltării științelor se știe că, în lupta fără răgaz a oamenilor de știință cu amurgul cunoașterii legilor ei, un aport deosebit l-a adus și tineretul. Acesta, după cum arăta tovarăşul Nicolae Ceauşescu în expunerea amintită mai sus, ... „reprezintă o forţă de seamă ; alături de experienţa bogată şi competenţa oamenilor de ştiinţă mai în vîrstă, el aduce elanul şi cutezanţa, indispensabile marilor investigaţii de cunoaştere ştiinţifică a naturii şi societăţii, progresul ştiinţelor moderne".

Fără dîrzenie şi elan, lucruri caracteristice tineretului, lupta titanică în „abatajele" ştiinţei n-ar face posibilă înaintarea progresivă şi sigură în miezul problemelor în scopul eliberării întunericului a unor taine încă nedezvăluite cunoaşterii noastre. Dîrzenia şi elanul tinereţii aşezate pe făgaşuri fecunde reuşeşte să ducă la cucerirea tainelor lumii noastre înconjurătoare, aflată în neîntreruptă dezvoltare şi transformare, reuşeşte să îmbogăţească patrimoniul de nepreţuit al cuceririlor ştiinţifice ale lumii în scopul luptei pentru progresul omenirii, reuşeşte să situeze cercetarea ştiinţifică din ţara noastră la nivelul cerinţelor mondiale.

De-a lungul vremii, poporul nostru a dat dovadă de mult talent, punîndu-şi în valoare nesecatele calităţi cu care este înzestrat, ca forţa şi capacitatea de creare de valori ştiinţifice şi culturale. Punerea în valoare a acestor calităţi au menirea de a duce neîndoios la progresul neîntrerupt al orînduirii noastre socialiste. La asigurarea acestui progres contribuie din plin şi cercetarea matematică din ţara noastră, cercetare care se bucură de o veche tradiţie. Purtarea pe mai departe a acestei vechi tradiţii pe drumul cu lauri ai ştiinţei e un lucru care cade şi în sarcina tineretului. Dar în afară de aceasta, el nu trebuie să nu ia în seamă şi noile ramuri ale matematicii, ale căror temelii au fost fundate nu de prea multă vreme. Acest lucru a ieşit clar din cele aproape 100 de comunicări prezentate în cele cinci secţii ale sesiunii. Aici, pe lîngă lucrările cu caracter de cercetare ştiinţifică teoretică legate de domeniile fundamentale ale matematicii, menite să îmbogăţească rezultatele cercetărilor pe tărîm mondial, au fost prezentate şi lucrări legate de cercetarea aplicativă, factor important în asigurarea dezvoltării tehnicii în producţie, lăsînd posibilitate ştiinţei de a deveni factor activ de producţie în scopul creşterii bazei materiale a orînduirii noastre socialiste. Mărturie a acestora stau lucrările prezentate de cercetători care activează în marele centru industrial al ţării Hunedoara, precum şi cei de la Centrul de calcul din Cluj.

Interesante lucrări teoretice din domeniile fundamentale ale matematicii au fost prezentate de cercetătorii care îşi desfăşoară activitatea nu numai în centrele mari cu tradiţie culturală ale ţării cum ar fi : Iaşi, Cluj şi Timişoara, ci şi din oraşe care cunosc o dezvoltare tot mai mare : Braşov, Piteşti, Oradea etc.

De bună seamă că localităţi în care se găsesc cercetători matematicieni nu se epuizează prin cele citate mai sus. Ele sînt mult mai multe faţă de cele amintite, rămînînd însă ca în viitor, bănuim nu prea îndepărtat, prezenţa cercetătorilor la asemenea manifestări ştiinţifice să ne dovedească rodnicia activităţii de cercetare pe care o desfăşoară.

Din cele arătate anterior, reiese clar că cercetarea matematică cunoaşte o dezvoltare din ce în ce mai mare în aproape toate oraşele ţării noastre, demonstrînd astfel importanţa de care se bucură astăzi ştiinţele matematice atît în desfăşurarea ei ca ştiinţă, cît şi în ajutorul dat asigurării progresului tehnicii în dezvoltarea bazei tehnice materiale la noi în ţară.

Existenţa noului atît în cercetările teoretice cît şi în cele aplicative trebuie să-şi găsească concretizarea în lucrări şi experienţe pentru ca astfel să se asigure pe mai departe pe plan mondial locuri de frunte ţării noastre.

Sesiunile ştiinţifice de acest gen încearcă să devină o tradiţie în lumea ştiinţifică matematică, deoarece permit :

Luări de contact între oameni care au preocupări în aceleaşi domenii.

Înlăturarea îngustimii în tematica problemelor de cercetare.

Posibilitatea situării cercetării pe un plan fertil, nu pe unul arid a cărui exploarare asiduă n-ar duce la rezultate fructuoase, ci ar duce la închistare într-o temă care ar necesita eforturi prea mari faţă de rezultatele obţinute.

Ţinerea pasului cu cercetarea mondială.

Poticnirile în rezolvarea unor probleme să nu se permanentizeze.

Orientarea spre abordarea acelor probleme care prezintă o importanţă deosebită atît pentru economia ţării, cît şi pe plan mondial.

Evitarea izolării în cercetare ; chemarea la o activitate cît de cît colectivă şi coordonată, care dă posibilitate unei păşiri mai rapide în domeniile respective ale matematicii.

Cuvîntul de închidere al sesiunii a fost rostit de tov. Corneliu Constantinescu, care în încheiere a invitat pe toţi participanţii la sesiune să ia parte la o excursie de o zi la hidrocentrala ,,Gheorghe Gheorghiu-Dej'' de pe Argeş, transferîndu-i astfel de la frumoasa ,,lume'' a jocului literelor şi cifrelor la cea a naturii.

Pentru o completă cunoaştere a problemelor abordate dăm, în cele ce urmează, lista lucrărilor prezentate în cele cinci secţii :

I. *În secţia algebră, geometrie şi topologie au fost prezentate următoarele lucrări* :

A) *Prima zi* :

1. Asupra compatibilităţii operaţiei de grup cu relaţia de ordonare parţială de M. Jalobeanu (Cluj)
2. Asupra unei clase de algebre slabe nilpotente de V. Tamaş (Iaşi)
3. Asupra independenţei sistemului axiomatic al teoriei omologice de D. Brînzei (Iaşi)
4. Asupra inversei generalizate de M. Fildman (Timişoara)
5. O generalizare a functorului de omotopie de D. Brînzei (Iaşi)
6. Spectrul unei latici şi cîteva proprietăţi ale preschemelor de C. Bănică şi O. Stănăşilă
7. Morfisme şi comorfisme de situri de N. Popescu şi A. Radu
8. Cîteva chestiuni asupra spaţiilor inelate de N. Popescu
9. Asupra fasciculului de diferenţiale de A. Brezulescu
10. Rezoluţii standard în categorii cu multiplicare de C. Niţă
11. Structuri de categorii abeliene de C. Năstăsescu
12. Spaţii inelate de fracţii de A. Duma
13. Subcategorii ale categoriei spaţiilor inelate de A. Duma

B) *A doua zi*:

14. Despre corpuri convexe şi problema celor patru culori de I. Opriş (Cluj)
15. Asupra reductibilităţii corpurilor convexe de T. Zamfirescu
16. Diferenţiale generalizate în teoria omologiei de I. Popovici
17. Asupra scufundării spaţiilor Einstein într-un spaţiu pseudoeuclidian de S. Ianuş, N. Nediţă, L. Nicolescu
18. Din geometria unei forme exterioare cubice de O. Nanu (Iaşi)
19. Studiul varietăţilor într-un spaţiu cu conexiune proiectivă fără torsiune de Gh. Murărescu (Iaşi)
20. Asupra reprezentărilor algebrelor Jordan de R. Iordănescu
21. Asupra omologiei modulelor diferenţiabile de V. Udrescu
22. Spaţii fibrate semisimpliciale de D. Burghelea
23. Modele aciclice şi şirul spectral al spaţiilor fibrate de Gh. Lustig şi H. Moscovici.
24. Despre grupurile de invarianţă ale obiectelor geometrice liniare de I. Şutac
25. Suprafeţe în spaţiul echicentroafin de L. Maxim
26. Asupra conexiunilor din spaţiul fibrat tangent la un spaţiu fibrat principal de V. Oproiu

II. *În secţia analiză funcţională, teoria funcţiilor şi ecuaţii au fost prezentate lucrările* :

A) *În prima zi*:

1. Funcţii de matrici spaţiale de M. Brînzei (Iaşi)
2. Sisteme de comandă şi ecuaţii în paratingent în spaţii Banach de F. Cîmpu
3. Lema lui Neyman-Pearson şi programarea liniară de C. Vîrsan

4. Stabilitatea unor sisteme cu parametri aleatori de T. Morozan.
5. Asupra seriilor de puteri Bernstein de A. Lupaş (Cluj)
6. Operator modul pentru operatorii în spaţiul L_1-vectorial de I. Felten (Braşov)
7. Măsuri Vitali pe spaţii metrice de C. Simionescu (Braşov)
8. Cîteva proprietăţi ale funcţiilor distribuţionale compozabile de M. Cîrnu
9. Asupra operatorilor de convoluţie de I. Ciorănescu
10. Transformata Laplace a unei matrici (Proprietăţi) de C. Udrişte
11. Asupra teoremei de reprezentare a lui Kakutani de Gh. Bucur
12. Subspaţii hilbertiene şi nuclee reproduizante de C. Tudor şi Gh. Tudor
13. Asupra spaţiilor maximal-spectrale şi operatorilor decompozabili de C. Apostol
14. Algebre spectrale pentru operatori scalari generalizaţi de F. Vasilescu
15. Reprezentări de subnormalgebre de I. Suciu

B) *A doua zi* :

16. Asupra unei ecuaţii integrale neliniare de tip Volterra de N. Luca (Iaşi)
17. Generalizări ale unor ecuaţii funcţionale integrale de T. Aczel şi O. E. Gheorghiu de F. Tomuţa
18. Asupra sistemelor disipative de P. Talpalaru (Iaşi)
19. Operatori diferenţiali cu coeficienţi variabili parţiali hipoeliptici de V. Barbu (Iaşi)
20. Reprezentarea funcţiilor analitice generalizate de ordinul n de D. Pascali
21. Extensiuni ale polinoamelor areolare de I. Toma
22. Asupra unor ecuaţii de tip parabolic de O. Berechet.

III. *În cadrul secţiei de analiză numerică, programare şi maşini de calcul au fost prezentate lucrările* :

A) *În prima zi* :

1. Probleme matematice rezolvate în cadrul lucrării privind reducerea consumului specific de cocs la furnalele C.S.H. de F. Csaba (Hunedoara)
2. Generalizarea produsului a două relaţii liniare de I. Preda (Cluj)
3. Asupra unor teoreme de simplificare a schemelor cu contacte de I. Tomescu
4. Tratarea algebrică a limbajelor formalizate de Dr. T. Rus (Cluj)
5. Asupra nomogramelor de gen zero cu două scări regulate şi una proiectivă de M. Mihoc (Cluj)
6. Contribuţii la teoria abstractă a automatelor finite de P. Drăgan (Hunedoara)
7. Inversarea matricelor la calculatoarele electronice cu virgulă fixă de G. Martin
8. Asupra unei proprietăţi a convexităţii de P. Petrişor (Cluj)
9. Procedee de tip Runge-Kutta, de ordinul $p + 5$ ($p = 1$) de exactitate pe două noduri, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul III de I. Indoleanu (Cluj)
10. Generalizarea unei formule de cvadratură a lui H. Wilf de M. Munteanu (Cluj)
11. Evaluări ale erorii relative la aproximarea soluţiei unui sistem de ecuaţii liniare algebrice de C. Ilici (Iaşi)
12. Observaţii asupra rezolvării sistemelor de ecuaţii neliniare prin procedee iterative de I. Păvăloiu (Cluj)
13. Asupra sistemelor Cebîşev cu trei parametrii de A. Nemeth (Cluj)
14. O metodă iterativă de rezolvare a ecuaţiei operaţionale $x = BF(x)$ de Şt. Enceanu şi A. Şchiop

B) *A doua zi* :

15. Posibilităţi actuale de rezolvare a problemelor de programare liniară la calculatorul ELLIOTT 803—B de V. Chihernea (Hunedoara)
16. Metode simpliciale aplicate la rezolvarea problemelor de programare liniară de A. Berechet
17. Asupra unei probleme de transport în mai multe etaje de C. Zidăroiu
18. Probleme tridimensionale de transport cu produse neomogene de A. Corban

19. Un algoritm matricial pentru toate drumurile critice într-un graf de M. Dragomirescu
20. Unele aplicaţii ale corpurilor finite în cibernetică de V. Felea

IV. *În secţia mecanică au fost prezentate lucrările* :

A) *Prima zi* :

1. Cîteva probleme din mişcarea apelor arteziene de S. Gogonea
2. O generalizare a problemei Jukovski în teoria filtraţiei de Gh. Petrescu (Piteşti)
3. Asupra unei mişcări a fluidelor în medii poroase în regim termic de E. Ungureanu
4. Mişcarea rotaţională a unui fluid perfect în prezenţa unui corp poros neomogen de H. Ene
5. Studiul mişcării supersonice în jurul unor corpuri eliptice de R. Chirilă
6. Scurgerea nestaţionară din jurul unui disc rotitor în prezenţa unui cîmp magnetic de I. Pop (Cluj)
7. Mişcarea unui fluid nenewtonian între două conuri rotitoare de M. Poricel
8. O generalizare a problemei lui Hartmann de L. Dinu
9. Asupra unui regim optim de mişcare a rachetelor balistice de Gh. Nadiu (Oradea)

B) *A doua zi* :

10. O reprezentare a tensiunilor provocate de un cîmp termic staţionar într-un corp elastic omogen posedînd o anizotropie rectilinie generală de A. Manolache (Iaşi)
11. Deformarea electroplastică a tubului ortotrop sub acţiunea presiunii interioare de V. Diaconiţa (Iaşi)
12. Relaţii între tensiuni şi deformări în teoria termovîscoelasticităţii liniare de Gh. Ciobanu şi D. Ieşan (Iaşi)
13. Asupra ecuaţiei termovîscoelasticităţii cuplate de D. Ieşan (Iaşi)
14. Unde elastovîscoplastice în bare metalice de M. Mihăilescu
15. Unele probleme asupra semispaţiului ortotrop de V. Gheorghiţă
16. Încovoierea cu torsiune a barelor neomogene de Arsene Cătălin
17. Determinarea exactă a corelaţiei (G , m) pentru Pleiade de G. Procopiu

V. *În secţia teoria probabilităţilor şi statică matematică au fost prezentate lucrările* :

1. Prezentarea subproceselor Markov ca procese de sine stătătoare de I. Cuculescu
2. Asupra principiului lui E. T. Jaynes de S. Guiaşu
3. Precizarea teoremei limită centrale pentru sisteme cu legături complete de M. Iosifescu
4. Asupra modelelor aleatoare discrete de M. Botez
5. Valori extreme pentru procese uniform ergodice de H. Cohn
6. Utilizarea calculatorului electronic de la C.S.H. în aplicaţiile analizei statistice în industrie de C. Lupşa (Hunedoara)
7. Determinarea optimă a cotei de reglaj de G. Obreja, E. Mărgăritescu şi L. Ursianu
8. Verificarea caracterului aleator şi a normalităţii pentru o relaţie bidimensională de G. Obreja, E. Mărgăritescu şi L. Ursianu
9. Asupra dispersiei produsului de estimaţie a două variabile aleatoare de A. Sîmboan
10. Estimaţii pentru densităţile de repartiţie a unor procese stocastice de I. Văduva
11. O metodă statistică pentru interpretarea măsurătorilor magnitudinilor cutremurelor de pămînt produse de centrul Vrancea de M. Săcuiu şi D. Zorilescu

Comitetul de organizare al sesiunii a avut următoarea componenţă :

Preşedinte : Dr.C. Constantinescu

Secretar : I. Suciu

Membrii : E.Ungureanu, I.Văduva, I.Cuculescu, M. Iosifescu, H.Cohn şi O.Stănăşilă.

P. Mocanu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugați să înainteze articolele, notele și recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuș, pe hîrtie de calc. Tabelele și ilustrațiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planșe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea acelorași date în text, tabele și grafice. Explicația figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de inițială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzanțelor internaționale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conținutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondența privind manuscrisele, schimbul de publicații etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacție, str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT
1883

1966 NOV

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.

ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.

N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.

S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.

A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.

LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.

SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.

N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.

TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.

O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aléatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.

O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÂMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.

SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.

S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 9, P. 1229—1416, BUCUREŞTI, 1966

I. P. I. — c. 3659

43 831

Lei 12.

F 762

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

10

TOMUL 18

1966

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

COMITETUL DE REDACȚIE

ACAD. MIRON NICOLESCU — redactor responsabil;
ACAD. GR. C. MOISIL — redactor responsabil adjunct;
ACAD. GH. MIHOC;
ACAD. G. VRĂNCEANU;
ACAD. CAIUS IACOB;
ACAD. TIBERIU POPOVICIU;
ACAD. M. HAIMOVICI;
G. MARINESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România;
CIPRIAN FOIAȘ — secretar de redacție.

Pentru completarea colecției și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1967.
În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice altă corespondență, se trimit la Comitetul de redacție al revistei pe adresa: Str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

TOM. 18, Nr. 10
1966

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

S U M A R

Pag.

OCTAV ONICESCU, Energia informațională 1419
SILVIU TELEMAN, Analiză armonică în algebre regulate 1421
ANDREI POPOVICI, Teoreme suprarelativiste 1471
I. DRĂGHICI, Soluția generală nenegativă a unui sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute $(m < n)$ 1511
I. DRĂGAN, Algoritmul lui Beale pentru programe liniare parametrice raționale 1525
VIOREL DUMITRAȘ, Asupra spațiilor A_n care admit o omotetie 1529
VASILE I. ISTRĂȚESCU, Asupra teoriei subspațiilor invariante (I) 1533
RADU IORDĂNESCU, Spațiile cu conexiune afină constantă atașate algebrelor $A^p_{m,n}$ 1543
IOAN A. RUS, Cîteva proprietăți ale zerourilor componentelor soluțiilor unui sistem de două ecuații diferențiale neliniare de ordin I 1549
GEORGETA I. VOICULESCU, Observații asupra variantelor metodei de aproximație a lui S. A. Ciaplîghin 1555
ST. CRUCEANU și ALEX. I. SCHIOP, O metodă iterativă de rezolvare a ecuației operaționale $x = BF(x)$ 1563
HORIA I. ENE, Aplicarea metodei lui A. B. Tayler la o mișcare în canale 1567
L. I. DINU, O generalizare a problemei Kapur-Shukla 1573
I. MATEI, Asupra unor invarianți în spațiile A_4 cu torsiune 1579

RECENZIE 1597

INDEX ALFABETIC 1599

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1417–1602 BUCUREȘTI, 1966

ENERGIA INFORMAȚIONALĂ

DE

OCTAV ONICESCU

I. ENERGIA INFORMAȚIONALĂ A SISTEMELOR FINITE

DEFINIȚIE. *Energia informațională a unui sistem* A *de stări* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *cu probabilitățile respective* $p_1, p_2, \ldots, p_m \left(p_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} p_j = 1\right)$, *este, prin definiție, valoarea medie a acestor probabilități :*

$$\mathcal{E}(A) = \sum_{j=1}^{m} p_j^2, \quad m \geqslant 2. \tag{1}$$

Proprietăți. $\mathcal{E}(A)$ are valoarea minimă egală cu $\frac{1}{m}$ cînd sistemul este total dezorganizat $\left(p_1 = p_2 = \ldots = p_m = \frac{1}{m}\right)$ și valoarea maximă egală cu 1, cînd sistemul are cea mai deplină organizație : una din stări are probabilitatea 1 și celelalte au probabilitatea 0.

Pentru stările intermediare, energia informațională are o valoare cuprinsă între $\frac{1}{m}$ și 1 și crește pe măsura organizării sistemului.

Așa cum se știe, *entropia informațională* are o evoluție inversă ; ea scade de la valoarea $\log m$ la 0 pe măsura organizării.

Enunțăm aici cîteva proprietăți ale energiei informaționale.

Dacă B este o subpartiție a lui A (considerată ca o partiție a unui cîmp de probabilitate $\{E, \mathcal{K}, P\}$), atunci $\mathcal{E}(B) \leqslant \mathcal{E}(A)$.

Dacă A și B sînt două partiții independente ale cîmpului, atunci $\mathcal{E}(AB) = \mathcal{E}(A)\,\mathcal{E}(B)$.

Dacă A și B nu sînt independente, atunci $\mathcal{E}(AB) \leqslant \mathcal{E}_A(B)$.

În general energia informațională a unui sistem crește dacă îi impunem o condiționare prin alt sistem.

Oricare sînt sistemele A și B, avem întotdeauna $\mathcal{E}(AB) > \frac{1}{m}\,\mathcal{E}(A)$ deci și $\mathcal{E}(AB) > \frac{1}{m}\,\mathcal{E}(A)\,\mathcal{E}(B)$, m fiind numărul componentelor sistemului B.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1419–1420, BUCUREȘTI, 1966

II. SISTEMELE INFINITE

Definiţia de mai sus corespunde unei partiţii a cîmpului total E într-un număr finit de părţi din $\mathcal{K}$, deci unei variabile aleatoare simple. Ea se poate extinde şi la cazul unei partiţii numărabile. În cazul general energia informaţională ca şi entropia informaţională nu mai sînt proprii pentru a caracteriza starea sistemului. Partiţia infinită care corespunde unei variabile aleatoare $x = f(\xi)$ a cîmpului $\{E, \mathcal{K}, P\}$ are, în general, o parte atomică, constituită dintr-o mulţime numărabilă de atomi (sau cvasiatomi) cu probabilitatea finită şi diferită de 0 şi o parte continuă.

Partea atomică are o energie informaţională $\mathcal{E}_a = \sum_{j \in N}^{\infty} p_j^2$. Energia informaţională a părţii continue calculată după aceleaşi reguli este în general nulă. Pentru a obţine o caracteristică informaţională a acestui sistem, trebuie să evaluăm *intensitatea energetică.* Dacă punem

$$F(\Delta x) = P\{\xi \,|\, x \leqslant f(\xi) < x + \Delta x\}, \quad \Delta x > 0$$

şi presupunînd că există

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(\Delta x)}{\Delta x},$$

atunci considerăm ca energie informaţională a părţii continue *valoarea medie* a *intensităţii energetice* $\rho(x)$:

$$\mathcal{E}_c = \int_R \rho(x) F(\mathrm{d}x) = \int \rho^2(x)\, \mathrm{d}x$$

dacă această valoare este finită.

Cele două energii $\mathcal{E}_a$ şi $\mathcal{E}_c$ nu sînt aditive şi urmează să fie tratate separat pentru a caracteriza sistemul definit de funcţia $f(\xi)$.

Primită la redacţie la 3 octombrie 1966.

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

ANALIZĂ ARMONICĂ ÎN ALGEBRE REGULATE

DE

SILVIU TELEMAN

Se extinde teoria algebrelor Banach regulate, dezvoltată de G. E. Şilov şi A. B. Willcox, la algebrele peste un corp oarecare, eventual necomutativ. Ca aplicaţie se obţine teorema sintezei spectrale pentru idealele închise ale algebrei tuturor funcţiilor continue, cu valori cuaternionice, definite pe un spaţiu compact oarecare.

În această lucrare generalizăm teoria dezvoltată în cadrul algebrelor Banach regulate, lărgind, în felul acesta, cadrul algebric şi topologic al teoremei tauberiene a lui N. Wiener [3], [4], [5]. Prin generalizarea pe care o facem arătăm că teoria algebrelor Banach regulate, în cea mai mare parte, nu este legată nici de structura lor topologică şi nici de natura corpului scalarilor.

Teoria algebrelor Banach comutative regulate a fost dezvoltată de G. E. Şilov în [12]. A. B. Willcox generalizează în [9] teoria lui G. E. Şilov, renunţînd la comutativitatea algebrei Banach. A. B. Willcox numeşte algebrele, pe care le introduce, *GS*-algebre. C. E. Rickart, în [8], reproduce teoria lui A. B. Willcox, dînd aceloraşi algebre numele de algebre complet regulate, pentru a evita confuzia cu inelele regulate ale lui J. v. Neumann [15], [7]. Deoarece termenul de algebră complet regulată a mai fost folosit de I. M. Ghelfand şi M. A. Naimark, cu alt înţeles, în [14], preferăm să utilizăm termenul de algebră regulată pentru a desemna categoria de algebre care generalizează *GS*-algebrele lui A. B. Willcox şi algebrele regulate ale lui G. E. Şilov, şi pe care o studiem în această lucrare.

Menţionăm că algebrele în cadrul cărora dezvoltăm teoria sînt algebre peste un corp oarecare, eventual necomutativ.

Citirea lucrării nu presupune decît cunoaşterea elementelor de algebră şi de topologie generală.

În § 1 precizăm cadrul teoriei. Într-o oarecare măsură, aceasta se poate dezvolta paralel, pe de o parte, în cadrul teoriei inelelor şi, pe de altă parte, în cadrul teoriei algebrelor peste un corp, eventual, necomutativ. Deoarece nu am găsit în literatura consultată expunerea acestei teorii, am socotit necesar să indicăm axiomele pe care le adoptăm. Un exemplu de astfel de algebră, peste un corp necomutativ, îl constituie mulţimea tuturor funcţiilor, cu valori în corpul cuaternionilor, definite pe o mulţime oarecare. Am expus în mod detaliat teoremele fundamentale ale teoriei, atît din cadrul teoriei inelelor, cît şi din cadrul teoriei

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1421–1470, BUCUREŞTI, 1966

algebrelor peste un corp, pentru a scoate mai bine în evidență paralelismul dintre cele două teorii. Observăm cu această ocazie că, deși algebrele peste un corp sînt cazuri particulare de inele, teoria dezvoltată în cadrul lor nu se poate obține în întregime prin particularizarea teoriei dezvoltate în cadrul teoriei inelelor, deoarece un ideal maximal al algebrei nu mai este, în mod necesar, ideal maximal dacă îl gîndim ca ideal al inelului corespunzător algebrei. Cea mai mare parte a teoremelor expuse în acest paragraf sînt cunoscute în cadrul teoriei inelelor și al teoriei algebrelor peste un corp comutativ.

În § 2 demonstrăm două teoreme de prelungire a idealelor maximale regulate. Ele sînt analogul unei teoreme de prelungire a idealelor primitive ale unui inel, obținută de A. W. Goldie [2], și, pentru cazul corpului comutativ, sînt conținute într-o teoremă din [8] (teorema 2.6.6, p. 79).

În § 3 studiem o conexiune galoisiană care se poate stabili între mulțimea părților unui inel, sau ale unei algebre, și mulțimea părților mulțimii idealelor maximale regulate. Rezultatele acestui paragraf sînt toate cunoscute în cazul comutativității corpului scalarilor (v. [5], [8]).

În § 4 studiem spațiul structural asociat unui inel sau unei algebre. Menționăm faptul că, în literatură, prin spațiu structural se înțelege mulțimea idealelor primitive ale inelului sau ale algebrei, topologizată într-un anumit mod (v. [2], [3[, [8]). În lucrarea noastră preferăm, însă, să lucrăm cu mulțimea idealelor maximale regulate, așa cum, de altfel, face L. H. Loomis în [5]. De aceea spațiul structural cu care lucrăm aici este spațiul pe care C. E. Rickart îl numește spațiu structural tare [8].

În § 5 expunem teoria adjuncționării unui element unitate unui inel sau unei algebre. Aici încetează paralelismul dintre cele două teorii, și în continuare, ne ocupăm numai de algebre.

În § 6 al lucrării, cel mai important de altfel, expunem teoria algebrelor regulate. Înțelegem prin algebră regulată o algebră care are proprietatea că spațiul structural al algebrei obținute prin adjuncționarea unui element unitate este spațiu Hausdorff, menținînd deci definiția prin care A. B. Willcox caracterizează *GS*-algebrele în cadrul algebrelor Banach [9].

Obținem generalizările unor teoreme cunoscute din cadrul teoriei algebrelor Banach [3], [4], [5], [8], [9]. Printre altele, teorema 6.12 constituie generalizarea formei algebrice a teoremei tauberiene a lui N. Wiener [3,] [4], [5], iar teorema 6.17 constituie o formă algebrică generalizată a teoremei tauberiene a lui G. E. Șilov [3], [4], [5].

În § 7 considerăm cazul algebrelor regulate topologice (peste un corp topologic) și generalizăm teorema tauberiană (topologică) a lui G. E. Șilov. De asemenea, generalizăm forma topologică a teoremei tauberiene generalizate a lui N. Wiener [3], [4[, [5], [8], [9], [16].

În § 8 dăm cîteva exemple și aplicăm teoria dezvoltată la demonstrarea faptului că teorema sintezei spectrale are loc pentru idealele închise ale algebrei tuturor funcțiilor continue cu valori cuaternionice, definite pe un spațiu compact (teorema 8.4).

§ 1. INTRODUCERE

În acest paragraf vom expune cîteva rezultate, cunoscute în cea mai mare parte, referitoare la teoria inelelor și a algebrelor, rezultate de care ne vom folosi în cele ce urmează. O parte din teoria pe care o dezvoltăm în această lucrare se încadrează în teoria inelelor. Rezultatele cele mai interesante, însă, se obțin în cadrul teoriei algebrelor peste un corp, eventual necomutativ. În cazul necomutativității corpului, care este gîndit ca domeniu de operatori, trebuie să presupunem că elementele lui acționează bilateral distinct asupra elementelor algebrei.

Reamintim, mai întîi, cîteva definiţii clasice, pentru a preciza mai bine cadrul teoriei.

A. 1. Numim *inel* o mulţime A, înzestrată cu două legi de compoziţie internă, adunarea şi înmulţirea, care satisfac următoarele axiome:

I. Adunarea este o aplicaţie definită pe $A \times A$, cu valori în A, notată $(x, y) \to x + y$, astfel încît:

I$_1$) $(x + y) + z = x + (y + z)$, pentru orice $x, y, z \in A$.

I$_2$) Există un element $0 \in A$, numit *zero*, astfel încît să avem $x + 0 = x$, pentru orice $x \in A$.

I$_3$) Pentru orice $x \in A$ există un element în A, notat $-x$, astfel încît $x + (-x) = 0$.

I$_4$) $x + y = y + x$, pentru orice $x, y \in A$.

II) Înmulţirea este o aplicaţie definită pe $A \times A$, cu valori în A, notată $(x, y) \to xy$, astfel încît:

II$_1$) $(xy)z = x(yz)$, pentru orice $x, y, z \in A$.

II$_2$) $x(y + z) = xy + xz$ şi $(y + z)x = yx + zx$, pentru orice $x, y, z \in A$.

Se spune că inelul A este *comutativ* dacă

II$_3$) $xy = yx$, pentru orice $x, y \in A$.

Se spune că A este *inel cu element unitate*, dacă există un element $e \in A$, numit *elementul unitate* al inelului, astfel încît să avem

II$_4$) $ex = xe = x$, pentru orice $x \in A$.

Vom spune că elementul $e_S \in A$ este *element unitate la stînga*, dacă

II$'_4$) $e_S x = x$, pentru orice $x \in A$.

Vom spune că elementul $e_D \in A$ este *element unitate la dreapta*, dacă

II$''_4$) $xe_D = x$, pentru orice $x \in A$.

Se numeşte *corp* un inel A cu element unitate e, astfel încît

II$_5$) Pentru orice $x \in A$, $x \neq 0$, există un element $x^{-1} \in A$, astfel încît $x^{-1} x = e$.

Corpul A se numeşte *corp comutativ* dacă este îndeplinită şi axioma II$_3$).

Se numeşte *ideal* al unui inel A orice submulţime nevidă I a lui A, care satisface următoarelor axiome

III$_1$) Dacă $x, y \in I$, atunci $x - y \in I$

III$_2$) Dacă $x \in I$ şi $y \in A$, atunci $xy \in I$ şi $yx \in I$.

Un ideal I al inelului A se numeşte *ideal propriu* dacă $I \neq A$.

Vom spune că idealul I al inelului A este *regulat la stînga*, dacă

III$'_3$) Există un element $e'_I \in A$, astfel încît $e'_I x - x \in I$ pentru orice $x \in A$;

Vom spune că idealul I al inelului A este *regulat la dreapta*, dacă:

III$''_3$) Există un element $e''_I \in A$, astfel încît $x e''_I - x \in I$ pentru orice $x \in A$.

e'_I se numeşte *element unitate modulo I la stînga*, iar e''_I se numeşte *element unitate modulo I la dreapta*, ale inelului A.

Se spune că idealul I este *bilateral regulat*, dacă I este regulat atît la stînga cît şi la dreapta.

Un ideal M al inelului A se numeşte *ideal maximal*, dacă:

III$_4$) M este ideal propriu şi nu există nici un ideal propriu M' al inelului A, astfel încît $M \subset M'$ şi $M \neq M'$.

Dacă I este un ideal al inelului A, vom nota cu φ_I omomorfismul canonic $A \to A/I$.

TEOREMA 1.1. a) *Idealul I al inelului A este regulat la stînga (dreapta), dacă și numai dacă inelul A/I are un element unitate la stînga (dreapta).*

b) *Dacă e_I' (e_I'') este element unitate modulo I la stînga (dreapta), atunci $e_I' + i$ $(e_I'' + i)$ este element unitate modulo I la stînga (dreapta), oricare ar fi $i \in I$.*

c) *Dacă idealul I al inelului A este bilateral regulat, atunci există un element $e_I \in A$, astfel încît e_I să fie element unitate modulo I, atît la stînga, cît și la dreapta.*

d) *Dacă I este un ideal regulat la stînga (la dreapta, sau bilateral) și J este un ideal, astfel încît $I \subset J$, atunci și J este un ideal regulat la stînga (la dreapta, sau bilateral).*

Demonstrație. a) Să presupunem că idealul I este regulat la stînga. Atunci există un element $e_I' \in A$ astfel încît $e_I' x - x \in I$ pentru orice $x \in A$. Deducem $\varphi_I(e_I')\, \varphi_I(x) = \varphi_I(x)$, deci $\varphi_I(e_I')$ este element unitate la stînga al inelului A/I. Reciproc, să presupunem că în A/I există un element unitate la stînga $\hat{e}'$. Atunci $\hat{e}' \hat{x} = \hat{x}$, pentru orice $\hat{x} \in A/I$

Fie $e' \in A$, astfel încît $\varphi_I(e') = \hat{e}'$. Atunci obținem $\varphi_I(e' x - x) = 0$, pentru orice $x \in A$, deci $e' x \in x \in I$ pentru orice $x \in A$. Prin urmare, e' este element unitate modulo I la stînga, ceea ce arată că I este regulat la stînga.

b) Fie e_I' un element unitate modulo I la stînga, și $i \in I$. Atunci $(e_I' + i)\, x - x = e_I' x - x + ix \in I$, pentru orice $x \in A$, deci $e_I' + i$ este element unitate modulo I la stînga. În mod similar se face demonstrația pentru elementul unitate modulo I la dreapta, e_I''.

c) Fie I un ideal bilateral regulat al inelului A, și e_I' un element unitate modulo I la stînga, iar e_I'' un element unitate modulo I la dreapta. Atunci $\varphi_I(e_I')$ este element unitate la stînga, iar $\varphi_I(e_I'')$ este element unitate la dreapta în inelul A/I. Prin urmare avem

$$\varphi_I(e_I')\, \hat{x} = \hat{x}, \qquad \hat{x}\, \varphi_I(e_I'') = \hat{x},$$

pentru orice $\hat{x} \in A/I$. Luînd $\hat{x} = \varphi_I(e_I'')$ în prima egalitate și $\hat{x} = \varphi_I(e_I')$ în a doua, obținem

$$\varphi_I(e_I') = \varphi_I(e_I''),$$

deci $e_I' - e_I'' = i \in I$. Luînd $e_I = e_I'$, din b) deducem că e_I este element unitate modulo I, atît la stînga, cît și la dreapta.

d) Fie I un ideal regulat la stînga și e_I' un element unitate modulo I la stînga. Atunci

$$e_I' x - x \in I \subset J,$$

pentru orice $x \in A$, deci e_I' este element unitate modulo J la stînga. Prin urmare, idealul J este regulat la stînga. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.2. *Dacă I este un ideal propriu, regulat la stînga (la dreapta) al inelului A, și dacă e_I' (sau e_I'') este un element unitate modulo I la stînga (la dreapta), atunci $e_I' \notin I$ $(e_I'' \notin I)$.*

Demonstrație. Să presupunem că I este ideal propriu, regulat la stînga, al inelului A, și că e'_I este un element unitate modulo I la stînga. Dacă, prin absurd, am avea $e'_I \in I$, atunci am avea $e'_I x \in I$ pentru orice $x \in A$ și deci $x = (x - e'_I x) + e'_I x \in I$, pentru orice $x \in A$, ceea ce arată că I nu este propriu, contrar ipotezei.

TEOREMA 1.3. *Fie A un inel, I un ideal al inclului A și φ_I omomorfismul canonic $A \to A/I$. Atunci*

a) *Pentru orice ideal J al inelului A, $\varphi_I(J)$ este un ideal al inelului A/I.*

b) *Dacă J este un ideal propriu al inelului A, și dacă $J \supset I$, atunci $\varphi_I(J)$ este un ideal propiu al inelului A/I.*

c) *Pentru orice ideal $\hat{J}$ al inelului A/I, există un singur ideal J al inelului A, astfel încît $J \supset I$ și $\varphi_I(J) = \hat{J}$, dat de $J = \varphi_I^{-1}(\hat{J})$. J este propriu dacă $\hat{J}$ este propriu.*

d) *Dacă J este un ideal regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al inelului A, atunci $\varphi_I(J)$ este un ideal regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al inelului A/I.*

e) *Dacă $\hat{J}$ este un ideal regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al inelului A/I, atunci există un singur ideal J regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al inelului A, astfel încît $J \supset I$ și $\varphi_I(J) = \hat{J}$.*

f) *Dacă M este un ideal maximal al inelului A și dacă $M \supset I$, atunci $\varphi_I(M)$ este un ideal maximal al inelului A/I.*

g) *Dacă $\hat{M}$ este un ideal maximal al inelului A/I, atunci există un singur ideal maximal M al inelului A, astfel încît $M \supset I$ și $\varphi_I(M) = \hat{M}$.*

Demonstrație. a) Fie $\hat{x}, \hat{y} \in \varphi_I(J)$. Atunci există $x, y \in J$, astfel încît $\varphi_I(x) = \hat{x}$, $\varphi_I(y) = \hat{y}$. Avem $\hat{x} - \hat{y} = \varphi_I(x) - \varphi_I(y) = \varphi_I(x - y)$, deci $\hat{x} - \hat{y} \in \varphi_I(J)$, deoarece $x - y \in J$. Apoi, dacă $\hat{z} \in A/I$, există $z \in A$, astfel încît $\varphi_I(z) = \hat{z}$. Din $xz \in J$ și $zx \in J$ deducem $\hat{x}\hat{z} = \varphi_I(x)\varphi_I(z) = \varphi_I(xz) \in \varphi_I(J)$ și $\hat{z}\hat{x} = \varphi_I(z)\varphi_I(x) = \varphi_I(zx) \in \varphi_I(J)$. Deci $\varphi_I(J)$ este ideal al inelului A/I.

b) Prin ipoteză, există $x_0 \in A - J$. Dacă am avea, prin absurd, $\varphi_I(x_0) \in \varphi_I(J)$, ar exista $x_1 \in J$, astfel încît $\varphi_I(x_0) = \varphi_I(x_1)$. Dar atunci am avea $x_0 - x_1 \in I \subset J$, deci $x_0 = (x_0 - x_1) + x_1 \in J$, ceea ce este absurd. Prin urmare $\varphi_I(x_0) \notin \varphi_I(J)$, și deci, din a), $\varphi_I(I)$ este ideal propriu al inelului A/I.

c) Fie $\hat{J}$ un ideal al inelului A/I și $J = \varphi_I^{-1}(\hat{J})$. Să arătăm, în primul rînd, că J este ideal al inelului A. Într-adevăr, dacă $x, y \in J$, atunci $\varphi_I(x), \varphi_I(y) \in \hat{J}$, deci $\varphi_I(x - y) = \varphi_I(x) - \varphi_I(y) \in \hat{J}$, ceea ce arată că $x - y \in J$. Dacă $z \in A$, atunci $\varphi_I(xz) = \varphi_I(x)\varphi_I(z) \in \hat{J}$ și $\varphi_I(zx) = \varphi_I(z)\varphi_I(x) \in \hat{J}$, ceea ce arată că $xz, zx \in J$, deci J este ideal al inelului A. Evident, $\varphi_I(J) = \hat{J}$, deoarece φ_I este o aplicație *pe* A/I.

Cu aceasta existența idealului J a fost demonstrată, deoarece din $\hat{0} \in \hat{J}$ rezultă $I = \varphi_I^{-1}(\{\hat{0}\}) \subset \varphi_I^{-1}(\hat{J}) = J$, unde cu $\hat{0}$ am notat elementul zero din A/I $(\hat{0} = \varphi_I(0))$.

Să demonstrăm unicitatea idealului J. Într-adevăr, fie J' un al doilea ideal, cu proprietăţile $J' \supset I$ şi $\varphi_I(J') = \hat{J}$. Dacă $x \in J'$, atunci $\varphi_I(x) \in \hat{J}$, deci există $y \in J$, astfel încît $i = x - y \in I$. Dar atunci $i \in J$, şi deci $x = i + y \in J$, deci $J' \subset J$. În mod analog se arată că $J \subset J'$ şi, cu aceasta, unicitatea lui J a fost stabilită.

Dacă J nu ar fi propriu, am avea $J = A$, deci $\hat{J} = \varphi_I(J) = \varphi_I(A) = A/I$, ceea ce este absurd.

d) Fie e'_J un element unitate modulo J la stînga. Prin urmare, avem $e'_J x - x \in J$, pentru orice $x \in A$. Rezultă $\varphi_I(e'_J)\, \varphi_I(x) - \varphi_I(x) \in \varphi_I(J)$, deci $\varphi_I(e'_J)$ este element unitate modulo $\varphi_I(J)$ la stînga, deoarece aplicaţia φ_I este o aplicaţie *pe* A/I. Prin urmare, $\varphi_I(J)$ este ideal regulat la stînga al inelului A/I.

e) Fie $\hat{J}$ un ideal regulat la stînga al inelului A/I şi $\hat{e}'_{\hat{J}}$ un element unitate modulo $\hat{J}$ la stînga. Fie $e'_J \in A$, astfel încît $\varphi_I(e'_J) = \hat{e}'_{\hat{J}}$. Din c) rezultă că există un singur ideal J al inelului A, astfel încît $J \supset I$ şi $\varphi_I(J) = \hat{J}$, şi anume $J = \varphi_I^{-1}(\hat{J})$. Să arătăm că J este regulat la stînga. Într-adevăr, pentru orice $x \in A$ avem $\varphi_I(e'_J x - x) = \varphi_I(e'_J)\, \varphi_I(x) - \varphi_I(x) = \hat{e}'_{\hat{J}}\, \varphi_I(x) - \varphi_I(x) \in \hat{J}$. Deci $e'_J x - x \in J$, pentru orice $x \in A$, deci e'_J este element unitate modulo J la stînga. Cu aceasta am arătat că J este ideal regulat la stînga.

f) Fie M un ideal maximal al inelului A, astfel încît $M \supset I$. Din b) rezultă că $\varphi_I(M)$ este un ideal propriu al inelului A/I. Să arătăm că $\varphi_I(M)$ este ideal maximal. Într-adevăr, din c) rezultă că $J = \varphi_I^{-1}[\varphi_I(J)]$ pentru orice ideal J al inelului A, pentru care $J \supset I$, şi evident $\varphi_I[\varphi_I^{-1}(\hat{J})] = \hat{J}$ pentru orice ideal $\hat{J}$ al inelului A/I.

Dacă $\hat{M}$ este un ideal al inelului A/I, astfel încît $\varphi_I(M) \subset \hat{M}$, atunci obţinem $M = \varphi_I^{-1}[\varphi_I(M)] \subset \varphi_I^{-1}(\hat{M})$.

M fiind maximal în A, avem $\varphi_I^{-1}(\hat{M}) = M$, în care caz $\varphi_I(M) = \hat{M}$, sau $\varphi_I^{-1}(\hat{M}) = A$, în care caz $\hat{M} = A/I$. Cu aceasta am arătat că $\varphi_I(M)$ este maximal în A/I.

g) Fie $\hat{M}$ un ideal maximal al inelului A/I. Din c) rezultă că M este dat de $M = \varphi_I^{-1}(\hat{M})$ şi că M este propriu. Fie M' un ideal al inelului A, astfel încît $M' \supset M$. Atunci $\hat{M} = \varphi_I(M) \subset \varphi_I(M')$; $\hat{M}$ fiind ideal maximal în A/I, iar $\varphi_I(M')$ ideal în A/I, deducem $\varphi_I(M) = \varphi_I(M')$, sau $A/I = \varphi_I(M')$. În primul caz $M' = \varphi_I^{-1}[\varphi_I(M')] = \varphi_I^{-1}[\varphi_I(M)] = M$, iar în al doilea $M' = \varphi_I^{-1}[\varphi_I(M')] = \varphi_I^{-1}(A/I) = A$. Deci M este ideal maximal. Teorema este demonstrată.

COROLARUL 1.4. *Aplicaţia canonică* φ_I *stabileşte o corespondenţă biunivocă* $J \to \varphi_I(J)$ *între* :

a) *Mulţimea tuturor idealelor proprii* $J \supset I$ *ale inelului* A *şi mulţimea tuturor idealelor proprii ale inelului* A/I.

b) *Mulţimea tuturor idealelor maximale* $M \supset I$ *ale inelului* A *şi mulţimea tuturor idealelor maximale ale inelului* A/I.

Demonstraţie. Rezultă imediat din teorema 1.3, pct. b), c), f) şi g).

COROLARUL 1.5. *Aplicația canonică* φ_I *stabilește o corespondență biunivocă* $J \to \varphi_I(J)$ *între mulțimea tuturor idealelor* $J \supset I$, *regulate la stînga* (*la dreapta, bilateral*) *ale inelului* A *și mulțimea tuturor idealelor regulate la stînga* (*la dreapta, bilateral*) *ale inelului* A/I,

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 1.3, pct. d) și e).

TEOREMA 1.6. *Dacă* M *este un ideal maximal, regulat la stînga, al inelului* A, *atunci* M *este și regulat la dreapta, deci bilateral regulat.*

Demonstrație. Fie e'_M un element unitate modulo M la stînga. Deducem că avem $e'_M x - x \in M$ pentru orice $x \in A$, deci, notînd $\hat{e} = \varphi_M(e'_M)$, avem $\hat{e}\hat{x} - \hat{x} = \hat{0}$ pentru orice $\hat{x} \in A/I$.

Fie acum $\hat{N} = \{\hat{x}\hat{e} - \hat{x};\ \hat{x} \in A/M\}$. Dacă $\hat{x}_1, \hat{y}_1 \in \hat{N}$, atunci $\hat{x}_1 = \hat{x}\hat{e} - \hat{x}$ și $\hat{y}_1 = \hat{y}\hat{e} - \hat{y}$, deci $\hat{x}_1 - \hat{y}_1 = (\hat{x} - \hat{y})\,\hat{e} - (\hat{x} - \hat{y}) \in \hat{N}$. Dacă $\hat{z} \in A/M$, atunci $\hat{z}\hat{x}_1 = \hat{z}(\hat{x}\hat{e} - \hat{x}) = (\hat{z}\hat{x})\,\hat{e} - (\hat{z}\hat{x}) \in \hat{N}$ și $\hat{x}_1\hat{z} = (\hat{x}\hat{e} - \hat{x})\,\hat{z} = \hat{x}\hat{e}\hat{z} - \hat{x}\hat{z} = \hat{x}\hat{z} - \hat{x}\hat{z} = \hat{0} \in \hat{N}$, deci $\hat{N}$ este ideal în A/M. Deoarece M este maximal în A, din corolarul 1.4, pct. a) rezultă că $\hat{N} = \{\hat{0}\}$, sau $\hat{N} = A/M$.

În primul caz avem $\hat{x}\hat{e} - \hat{x} = \hat{0}$ pentru orice $\hat{x} \in A/M$, deci $\hat{e}$ este element unitate și la dreapta în A/M, deci, din teorema 1.1, pct. a), rezultă că M este regulat și la dreapta, deci bilateral regulat. Să arătăm că al doilea caz este imposibil. Într-adevăr, dacă $\hat{N} = A/M$, atunci există $x_0 \in A$, astfel încît, punînd $\hat{x}_0 = \varphi_M(x_0)$, să avem $\hat{x}_0\,\hat{e} - \hat{x}_0 = \hat{e}$. Dar atunci pentru orice $\hat{x} \in A/M$ deducem $\hat{x} = \hat{e}\hat{x} = (\hat{x}_0\,\hat{e} - \hat{x}_0)\,\hat{x} = \hat{x}_0\,e\hat{x} - \hat{x}_0\,\hat{x} = \hat{x}_0\,\hat{x} - \hat{x}_0\,\hat{x} = 0$, deci $A/M = \{\hat{0}\}$, ceea ce este absurd, deoarece M este ideal propriu.

Teorema este demonstrată.

Datorită teoremei precedente, referindu-ne la idealele maximale, vom spune că acestea sînt *ideale regulate*, dacă sînt regulate la stînga, sau regulate la dreapta, deci bilateral regulate, în virtutea teoremei precedente.

TEOREMA 1.7. *Dacă* M *este un ideal maximal regulat al inelului* A *și dacă* e'_M *este element unitate modulo* M *la stînga, atunci* e'_M *este element unitate modulo* M *și la dreapta și reciproc.*

Demonstrație. Din demonstrația teoremei 1.6 rezultă că $\hat{e} = \varphi_M(e'_M)$ este element unitate al inelului A/M, deci $\hat{x}\hat{e} = \hat{x}$, pentru orice $\hat{x} \in A/M$. Dar de aici rezultă $xe'_M - x \in M$, pentru orice $x \in A$. q.e.d.

Datorită teoremei precedente, vom spune că elementul $e_M \in A$ este *element unitate modulo* M îndată ce e_M este element unitate modulo M la stînga (sau la dreapta), M fiind un ideal maximal regulat al inelului A.

TEOREMA 1.8. *Dacă* M *este un ideal maximal regulat al inelului* A *și dacă* e_M *este un element unitate modulo* M, *atunci orice element unitate modulo* M *este de forma* $e_M + x$, $x \in M$, *și, reciproc, orice element de forma* $e_M + x$, $x \in M$, *este element unitate modulo* M.

Demonstrație. Fie e'_M un element unitate modulo M, oarecare. Atunci $\varphi_M(e'_M)$ este element unitate al inelului A/M, deci $e'_M - e_M \in M$, ceea ce demonstrează prima parte a teoremei. Reciproca rezultă imediat din teorema 1.1, pct. b). q.e.d.

TEOREMA 1.9. *Orice ideal J al inelului A, care conține un ideal I, regulat la stînga (sau la dreapta) este un ideal regulat la stînga (sau la dreapta), cu același element unitate.*

Demonstrație. Dacă I este ideal regulat la stînga, iar e'_I este un element unitate modulo I la stînga, avem $e'_I x - x \in I \subset J$, pentru orice $x \in A$, deci J este ideal regulat la stînga, iar e'_I este și element unitate modulo J la stînga. q.e.d.

COROLARUL 1.10. *Orice ideal maximal M al inelului A, care conține un ideal I, regulat la stînga (sau la dreapta), este un ideal maximal regulat.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 1.9 și din teorema 1.6. q.e.d.

TEOREMA 1.11. *Orice ideal propriu I, regulat la stînga (sau la dreapta), al inelului A, este inclus într-un ideal maximal regulat al inelului A.*

Demonstrație. Fie e'_I un element unitate modulo I la stînga, al inelului A și $\mathcal{M}(I)$ mulțimea tuturor idealelor proprii ale inelului A, care îl conțin pe I. Din teorema 1.1, pct. d), rezultă că orice ideal $J \in \mathcal{M}(I)$ este un ideal (propriu), regulat la stînga, pentru care e'_I este element unitate modulo J la stînga, deci $e'_I \notin J$, pentru orice $J \in \mathcal{M}(I)$ (teorema 1.2). Ordonînd mulțimea $\mathcal{M}(I)$ prin incluziune, să considerăm o mulțime total ordonată $\mathcal{T}$ de elemente din $\mathcal{M}(I)$. Mulțimea $J_0 = \bigcup\limits_{J \in \mathcal{T}} J$ este un ideal al inelului A și $e'_I \notin J_0$, deci J_0 este un ideal propriu. Deoarece $J_0 \supset I$, avem $J_0 \in \mathcal{M}(I)$, și, evident, $J_0 \supset J$ pentru orice $J \in \mathcal{T}$. Prin urmare, J_0 este marginea superioară a mulțimii $\mathcal{T}$, deoarece pentru orice ideal $J_0 \in \mathcal{M}(I)$, pentru care $J_1 \supset J$, oricare ar fi $J \in \mathcal{T}$, avem $J_1 \supset J_0$. Rezultă că $\mathcal{M}(I)$ este o mulțime inductiv ordonată și deci, în baza lemei lui Zorn, rezultă că există cel puțin un element maximal $M \in \mathcal{M}(I)$. Ținînd seama de corolarul 1.10, deducem că M este un ideal maximal regulat al inelului A, care conține idealul I. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.12. *a) Inelul A are element unitate la stînga dacă și numai dacă idealul $\{0\}$ este ideal regulat la stînga.*

b) Inelul A are element unitate la dreapta dacă și numai dacă idealul $\{0\}$ este ideal regulat la dreapta.

c) Inelul A are element unitate dacă și numai dacă idealul $\{0\}$ este un ideal bilateral regulat.

Demonstrație. a) Fie e' un element unitate la stînga al inelului A. Atunci $e'x - x = 0 \in \{0\}$, pentru orice $x \in A$, deci $\{0\}$ este un ideal regulat la stînga. Reciproc, dacă $\{0\}$ este un ideal regulat la stînga, atunci există un element $e' \in A$, astfel încît să avem $e'x - x \in \{0\}$ pentru orice $x \in A$, deci e' este element unitate la stînga al inelului A. Demonstrație similară pentru b). Pentru c), ținem seama de faptul că dacă A are element unitate e' la stînga și element unitate e'' la dreapta, atunci $e' = e''$. Teorema este demonstrată.

COROLARUL 1.13. *Dacă inelul A are element unitate la stînga (sau la dreapta), atunci orice ideal I al inelului A este ideal regulat la stînga (sau la dreapta). În particular, dacă inelul A are element unitate, atunci orice ideal al inelului A este ideal bilateral regulat.*

Demonstrație. Deoarece avem $\{0\} \subset I$ pentru orice ideal I al inelului A, corolarul rezultă imediat din teoremele 1.9 și 1.12.

COROLARUL 1.14. *Dacă inelul A are element unitate la stînga (sau la dreapta), atunci orice ideal maximal al inelului A este ideal maximal regulat. În particular, dacă inelul A are element unitate, atunci orice ideal maximal al inelului A este ideal maximal regulat.*

Demonstrație. Rezultă imediat din corolarele 1.10 și 1.13.

TEOREMA 1.15. *Dacă M este un ideal maximal regulat al inelului A și dacă I este un ideal oarecare al inelului A, astfel încît $M \not\supset I$, atunci există în I un element unitate modulo M.*

Demonstrație. Din teorema 1.3, pct. a) rezultă că $\varphi_M(I)$ este un ideal al inelului A/M. Din $M \not\supset I$ rezultă că $\varphi_M(I) \neq \{\hat{0}\}$. Deoarece, în baza teoremei 1.3, pct. f), $\{\hat{0}\}$ este ideal maximal al inelului A/M, avem $\varphi_M(I) = A/M$. Dacă e este un element unitate modulo M, oarecare, atunci $\varphi_M(e) \in \varphi_M(I)$, deci există $i \in I$, astfel încît $i - e \in M$. Dar atunci, din teorema 1.8, rezultă că i este element unitate modulo M. Teorema este demonstrată.

2. Fie $\mathcal{J}(A)$ mulțimea tuturor idealelor inelului A, $\mathcal{J}_s(A)$ mulțimea tuturor idealelor regulate la stînga, $\mathcal{J}_d(A)$ mulțimea tuturor idealelor regulate la dreapta și $\mathcal{J}_r(A)$ mulțimea tuturor idealelor bilateral regulate ale inelului A. Le vom ordona prin relația de incluziune.

LEMA 1.16. a) *Fie $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}(A)$. Atunci $I_0 = \bigcap\limits_{I\in\mathcal{J}} I$ este un ideal al inelului A.*

b) *Fie $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}(A)$ (sau $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_s(A)$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_d(A)$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_r(A)$). Atunci mulțimea I° a tuturor elementelor x ale inelului A, de forma*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

unde $x_i \in I_i$, $i = 1, 2 \ldots, n$, iar $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\} \subset \mathcal{J}$ parcurge mulțimea tuturor părților finite ale lui $\mathcal{J}$, este un ideal al inelului A (sau ideal regulat la stînga, regulat la dreapta, bilateral regulat).

Demonstrație. a). Dacă $x, y \in \bigcap\limits_{I\in\mathcal{J}} I$, atunci $x, y \in I$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, deci $x - y \in I$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, deci $x - y \in \bigcap\limits_{I\in\mathcal{J}} I$. Dacă $x \in \bigcap\limits_{I\in\mathcal{J}} I$ și $z \in A$, atunci $x \in I$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, deci $xz, zx \in I$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, deci $xz, zx \in \bigcap\limits_{I\in\mathcal{J}} I$. Din $0 \in I$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, deducem $0 \in \bigcap\limits_{I\in\mathcal{J}} I$, deci $\bigcap\limits_{I\in\mathcal{J}} I \neq \emptyset$.

b) Dacă $x', x'' \in I^\circ$, atunci

$$x' = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n,$$

$$x'' = x''_1 + x''_2 + \ldots + x''_m,$$

unde $x'_i \in I'_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $x''_j \in I''_j$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$, și $I'_i \in \mathcal{J}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $I''_j \in \mathcal{J}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Deducem

$$x' - x'' = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n - x''_1 - x''_2 - \ldots - x''_m,$$

ceea ce arată că $x' - x'' \in I^\circ$. Dacă $x \in A$, atunci

$$xx' = xx_1' + xx_2' + \ldots + xx_n',$$

$$x'x = x_1'x + x_2'x + \ldots + x_m'x,$$

ceea ce arată că xx', $x'x \in I^\circ$. Prin urmare, I° este un ideal al inelului A. Observînd că $I \subset I^\circ$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, deducem, ţinînd seama de teorema 1.9, că I° este regulat la stînga (sau la dreapta, sau bilateral regulat) dacă în mulţimea $\mathcal{J}$ se află cel puţin un ideal regulat la stînga (sau la dreapta, sau bilateral regulat). Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.17. a) *$\mathcal{J}(A)$ este o latice completă, în care $\{0\}$ este cel mai mic element, iar A este cel mai mare element.*

b) *$\mathcal{J}_s(A)$, $\mathcal{J}_d(A)$ şi $\mathcal{J}_r(A)$ sînt semilatici superioare complete.*

Demonstraţie. a) Fie $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}(A)$. Atunci, din lema 1.16, rezultă că $\bigcap_{I\in\mathcal{J}} I = I_0$ este un ideal al inelului A şi $I_0 \subset I$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$. Dacă I_1 este un ideal al inelului A şi dacă $I_1 \subset I$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, atunci, evident, $I_1 \subset I_0$, deci I_0 este marginea inferioară a mulţimii $\mathcal{J}$ în $\mathcal{J}(A)$. Idealul I°, construit ca în lema 1.16, pct. b), satisface, evident, condiţia $I \subset I^\circ$ pentru orice $I \in \mathcal{J}$. Dacă I^1 este un ideal al inelului A, astfel încît $I \subset I^1$, pentru orice $I \in \mathcal{J}$, atunci, evident, $I^\circ \subset I^1$, deci I° este marginea superioară a mulţimii $\mathcal{J}$ în $\mathcal{J}(A)$.

b) Dacă $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_s(A)$, atunci, în baza lemei 1.16, avem $I^\circ \in \mathcal{J}_s(A)$, unde I° este idealul construit în lema 1.16, pct. b). Ca mai sus, deducem că I° este marginea superioară a mulţimii $\mathcal{J}$ în $\mathcal{J}_s(A)$ (în ipoteza că $\mathcal{J} \neq \emptyset$, deci $\mathcal{J}_s(A) \neq \emptyset$). La fel se face demonstraţia pentru cazul mulţimilor $\mathcal{J}_d(A)$ şi $\mathcal{J}_r(A)$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.18. *Mulţimea idealelor maximale regulate ale inelului A coincide cu:*

a) *mulţimea elementelor maximale din $\mathcal{J}_s(A) - \{A\}$;*

b) *mulţimea elementelor maximale din $\mathcal{J}_d(A) - \{A\}$;*

c) *mulţimea elementelor maximale din $\mathcal{J}_r(A) - \{A\}$.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema 1.6, teorema 1.9 şi corolarul 1.10.

Dacă $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}(A)$, vom nota cu $\bigwedge_{I\in\mathcal{J}} I$ idealul $\bigcap_{I\in\mathcal{J}} I$. Dacă $\mathcal{J}$ este finită, $\mathcal{J} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, vom mai nota idealul $\bigcap_{I\in\mathcal{J}} I$ şi în felul următor: $I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_n$. Idealul I°, construit ca în lema 1.15, pct. b), va mai fi notat $\bigvee_{I\in\mathcal{J}} I$, sau $I_1 \vee I_2 \vee \ldots \vee I_n$, în cazul cînd $\mathcal{J} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, în conformitate cu notaţiile adoptate în teoria laticilor.

Vom nota cu $\mathcal{M}(A)$ mulţimea idealelor maximale regulate ale inelului A.

Vom spune că inelul A este *simplu*, dacă $\{0\}$ este ideal maximal regulat.

Vom spune că inelul A este *semisimplu*, dacă $\bigwedge_{M\in\mathcal{M}(A)} M = \{0\}$. În general, vom numi *radical* al inelului A idealul $R(A) = \bigwedge_{M\in\mathcal{M}(A)} M$.

TEOREMA 1.19. *Idealul M al inelului A este ideal maximal regulat dacă și numai dacă inelul A/M este simplu.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 1.3.

TEOREMA 1.20. *Un inel comutativ este simplu dacă și numai dacă este corp.*

Demonstrație. Fie A un inel comutativ, simplu. $\{0\}$ fiind ideal maximal regulat, din teorema 1.12, pct. c), rezultă că A are element unitate e. Fie $x_0 \in A$, $x_0 \neq 0$ și fie $I(x_0) = \{xx_0 ;\ x \in A\}$. $I(x_0)$ este, evident, un ideal al inelului A. Deoarece idealul $\{0\}$ este, prin ipoteză, maximal, avem $I(x_0) = \{0\}$ sau $I(x_0) = A$. Primul caz este, însă, imposibil, deoarece $x_0 = x_0 e \in I(x_0)$ și $x_0 \neq 0$. Deci $I(x_0) = A$. Prin urmare există $x_1 \in A$, astfel încît $x_0 x_1 = e$, ceea ce arată că A este corp. Reciproc, dacă A este corp și $I \neq \{0\}$ este un ideal al inelului A, atunci dacă $x_0 \in I$, $x_0 \neq 0$, avem $e = x_0 x_0^{-1} \in I$, deci $I = A$, ceea ce arată că $\{0\}$ este un ideal maximal. Deoarece A are element unitate, $\{0\}$ este ideal maximal regulat și deci A este un inel simplu. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.21. *Un ideal M al unui inel comutativ A este ideal maximal regulat dacă și numai dacă inelul A/M este corp.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 1.19 și teorema 1.20.

TEOREMA 1.22. *Dacă inelul A este semisimplu și dacă $e \in A$ este element unitate la stînga, atunci e este și element unitate la dreapta, și reciproc.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $ex - x = 0$ pentru orice $x \in A$, atunci $ex - x \in M$, pentru orice ideal maximal regulat, deci e este element unitate modulo M pentru orice ideal maximal regulat M al inelului A. Deducem că avem $xe - x \in M$, pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$ și orice $x \in A$, deci $xe - x = 0$, pentru orice $x \in A$, deoarece $\bigcap\limits_{M \in \mathfrak{M}(A)} M = \{0\}$. Prin urmare, $xe = x$, pentru orice $x \in A$, ceea ce arată că e este și element unitate la dreapta al inelului A. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.23. *Inelul $A/R(A)$ este semisimplu.*

Demonstrație. Rezultă din teorema 1.3, pct. d), e), f) și g), ținînd seama că $\varphi_{R(A)}\left(\bigwedge\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} M_\alpha\right) = \bigwedge\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi_{R(A)}(M_\alpha)$, pentru orice familie $(M_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de ideale M_α ale inelului A, pentru care $M_\alpha \supset R(A)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathcal{A}$. Teorema este demonstrată.

B. 1. Fie C un corp, eventual necomutativ. Numim *algebră* peste corpul C un inel A, înzestrat cu două legi de compoziție externă, definite de aplicațiile $(\alpha, x) \to \alpha x$ și $(\alpha, x) \to x\alpha$, numite înmulțirea cu scalari la stînga, respectiv la dreapta, definite pe $C \times A$, cu valori în A, astfel încît să fie satisfăcute următoarele axiome :

IV$_1$) Notînd cu 1 elementul unitate al corpului C, avem

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \text{ pentru orice } x \in A.$$

IV$_2$) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ și $(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha$, pentru orice $\alpha \in C$ și orice $x, y \in A$.

IV$_3$) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ și $x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta$, pentru orice $\alpha, \beta \in C$ și orice $x \in A$.

IV_4) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $\alpha(x\beta) = (\alpha x)\beta$ şi $(x\alpha)\beta = x(\alpha\beta)$, pentru orice $\alpha, \beta \in C$ şi orice $x \in A$.

IV_5) $\alpha(xy) = (\alpha x)y$, $(x\alpha)y = x(\alpha y)$ şi $(xy)\alpha = x(y\alpha)$ pentru orice $\alpha \in C$ şi orice $x, y \in A$.

Vom spune că algebra A are element unitate e, dacă e este element unitate al inelului A şi dacă

IV_6) $\alpha e = e\alpha$, pentru orice $\alpha \in C$.

Vom spune că e' este *element unitate la stînga* al algebrei A dacă e' este element unitate la stînga al inelului A şi dacă :

IV_6') $\alpha e' = e'\alpha$, pentru orice $\alpha \in C$.

Vom spune că e'' este *element unitate la dreapta* al algebrei A dacă e'' este element unitate la dreapta al inelului A şi dacă

IV_6'') $\alpha e'' = e''\alpha$, pentru orice $\alpha \in C$.

Dacă corpul C este comutativ şi dacă inelul A este algebră peste corpul C în sensul obişnuit, adică dacă este definită o operaţie $(\alpha, x) \to \alpha x$, pe $C \times A$ cu valori în A, cu proprietăţile obişnuite, ne putem încadra în teoria pe care o dezvoltăm definind a doua operaţie de înmulţire cu scalari, înmulţirea la dreapta, punînd

$$x\alpha = \alpha x,$$

pentru orice $\alpha \in C$ şi orice $x \in A$.

Vom numi *ideal* al algebrei A orice ideal I al inelului A, care verifică şi axioma

III_5) Dacă $\alpha \in C$ şi $x \in I$, atunci $\alpha x \in I$ şi $x\alpha \in I$.

Prin urmare, mulţimea idealelor algebrei A este o submulţime a mulţimii idealelor inelului A.

I se numeşte *ideal propriu* al algebrei A dacă este ideal propriu al inelului A.

I se numeşte *ideal regulat la stînga* al algebrei A, dacă I este ideal al algebrei A şi dacă există un element $e_I' \in A$, astfel încît

a) $e_I'x - x \in I$, pentru orice $x \in A$,

b) $\alpha e_I' - e_I'\alpha \in I$, pentru orice $\alpha \in C$.

I se numeşte *ideal regulat la dreapta* al algebrei A, dacă I este ideal al algebrei A şi dacă există un element $e_I'' \in A$, astfel încît

a) $xe_I'' - x \in I$ pentru orice $x \in A$

b) $\alpha e_I'' - e_I''\alpha \in I$, pentru orice $\alpha \in C$.

Se spune că I este un *ideal bilateral regulat* al algebrei A, dacă I este ideal regulat al algebrei A, atît la dreapta, cît şi la stînga.

M se numeşte *ideal maximal* al algebrei A dacă :

III_6) M este ideal propriu al algebrei A şi nu există nici un ideal propriu M' al algebrei A, astfel încît $M \subset M'$ şi $M \neq M'$.

Rezultă din această definiţie că un ideal maximal al algebrei A poate să nu fie ideal maximal, ca ideal al inelului A.

Vom vedea, totuşi, mai jos, că mulţimea idealelor maximale regulate ale inelului A coincide cu mulţimea idealelor maximale regulate ale algebrei A (v. teorema 1.47).

Oricărui ideal I al algebrei A i se asociază o algebră peste acelaşi corp C, numită *algebră cît* a algebrei A prin idealul I şi notată A/I, în felul următor : se introduce pe A, ca şi în cazul algebrelor peste un corp comutativ, o relaţie de echivalenţă, punînd $x \equiv y \pmod I$ dacă şi numai dacă $x - y \in I$. Atunci A/I este mulțimea claselor determinate în A de această relație de echivalență. Notînd cu $\varphi_I(x)$ clasa de reprezentant $x \in A$, operațiile în A/I se definesc în modul următor

$$\varphi_I(x) + \varphi_I(y) = \varphi_I(x + y),$$

$$\varphi_I(x)\,\varphi_I(y) = \varphi_I(xy),$$

$$\alpha\varphi_I(x) = \varphi_I(\alpha x), \quad \varphi_I(x)\,\alpha = \varphi_I(x\alpha),$$

unde $x, y \in A$ și $\alpha \in C$. Definițiile astfel date, prin intermediul reprezentanților, sînt corecte. Se demonstrează ușor, ca și în cazul algebrelor peste un corp comutativ, că mulțimea A/I, înzestrată cu operațiile definite mai sus, este o algebră peste corpul C, iar φ_I este un omomorfism al algebrei A pe algebra A/I, pe care îl vom numi *omomorfismul canonic*.

Deoarece un ideal maximal al algebrei A nu este neapărat ideal maximal al inelului A, teoremele demonstrate mai sus pentru cazul inelelor nu se transpun direct la cazul algebrelor. De aceea, este indicat să refacem enunțurile și demonstrațiile teoremelor corespunzătoare.

TEOREMA 1.24. a) *Idealul I al algebrei A este regulat la stînga (la dreapta), dacă și numai dacă algebra A/I are element unitate la stînga (la dreapta).*

b) *Dacă e'_I (sau e''_I) este element unitate modulo I la stînga (sau la dreapta), atunci $e'_I + i$ (sau $e''_{II} + i$) este element unitate modulo I la stînga (sau la dreapta), oricare ar fi $i \in I$.*

c) *Dacă idealul I al algebrei A este bilateral regulat, atunci există un element $e_I \in A$, astfel încît e_I să fie element unitate modulo I, atît la stînga, cît și la dreapta.*

d) *Dacă I este un ideal regulat la stînga (sau la dreapta, sau bilateral) al algebrei A și dacă J este un ideal al algebrei A, astfel încît $I \subset J$, atunci și J este un ideal regulat la stînga (sau la dreapta, sau bilateral) al algebrei A.*

Demonstrație. a) Să presupunem că idealul I al algebrei A este regulat la stînga. Atunci există un element $e'_I \in A$, astfel încît $e'_I x - x \in I$, pentru orice $x \in A$ și $\alpha e'_I - e'_I \alpha \in I$, pentru orice $\alpha \in C$. Deducem $\varphi_I(e'_I)\,\varphi_I(x) = \varphi_I(x)$ și $\alpha\varphi_I(e'_I) = \varphi_I(e'_I)\,\alpha$, pentru orice $\alpha \in C$, deci $\varphi_I(e'_I)$ este element unitate la stînga al algebrei A/I. Reciproc, să presupunem că în algebra A/I există un element unitate la stînga $\hat{e}'$. Atunci $\hat{e}'\hat{x} = \hat{x}$, pentru orice $\hat{x} \in A/I$ și $\alpha\hat{e}' = \hat{e}'\alpha$, pentru orice $\alpha \in C$. Fie $e' \in A$, astfel încît $\varphi_I(e') = \hat{e}'$. Atunci vom avea $\varphi_I(e'x - x) = 0$, pentru orice $x \in A$, deci $e'x - x \in I$, pentru orice $x \in A$, și $\varphi_I(\alpha e' - e'\alpha) = 0$, pentru orice $\alpha \in C$, deci $\alpha e' - e'\alpha \in I$, pentru orice $\alpha \in C$, ceea ce arată că e' este element unitate modulo I la stînga și deci I este ideal regulat la stînga al algebrei A.

b) Fie e'_I un element unitate modulo I la stînga și $i \in I$. Atunci $(e'_I + i)\,x - x = e'_I x - x + ix \in I$, pentru orice $x \in A$, și $(e'_I + i)\,\alpha - \alpha(e'_I + i) = e'_I\alpha - \alpha e'_I + i\alpha - \alpha i \in I$, pentru orice $\alpha \in C$, deci $e'_I + i$ este element unitate modulo I la stînga.

În mod similar se face demonstrația pentru elementul unitate modulo I la dreapta, e''_I.

c) Fie I un ideal bilateral regulat al algebrei A și e'_I un element unitate modulo I la stînga, iar e''_I un element unitate modulo I la dreapta. Atunci $\varphi_I(e'_I)$ este element unitate la stînga, iar $\varphi_I(e''_I)$ este element unitate la dreapta în algebra A/I. Prin urmare avem

$$\varphi_I(e'_I)\,\hat{x} = \hat{x}, \ \hat{x}\,\varphi_I(e''_I) = \hat{x},$$

pentru orice $\hat{x} \in A/I$. Luînd $\hat{x} = \varphi_I(e''_I)$ în prima egalitate și $\hat{x} = \varphi_I(e'_I)$ în a doua, obținem

$$\varphi_I(e'_I) = \varphi_I(e''_I),$$

deci $e'_I - e''_I = i \in I$. Luînd $e_I = e'_I$, din b) deducem că e_I este element unitate modulo I atît la stînga, cît și la dreapta.

d) Fie I un ideal regulat la stînga al algebrei A și e'_I un element unitate modulo I la stînga. Atunci

$$e'_I x - x \in I \subset J, \text{ pentru orice } x \in A$$

și

$$\alpha e'_I - e'_I \alpha \in I \subset J, \text{ pentru orice } \alpha \in C,$$

deci e'_I este element unitate modulo J la stînga. Prin urmare, idealul J este ideal regulat la stînga al algebrei A. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 1.25. *Dacă 1 este un ideal propriu, regulat la stînga (la dreapta) al algebrei A, și dacă e'_I (sau e''_I) este un element unitate modulo I la stînga (la dreapta), atunci $e'_I \notin I$ (sau $e''_I \notin I$).*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 1.2, ținînd seama că I este și ideal propriu, regulat la stînga (sau la dreapta) al inelului A, iar e'_I (sau e''_I) este element unitate modulo I la stînga (sau la dreapta) în inelul A.

TEOREMA 1.26. *Fie A o algebră peste corpul C, I un ideal al algebrei A și φ_I omomorfismul canonic $A \to A/I$. Atunci:*

a) *Pentru orice ideal J al algebrei A, $\varphi_I(J)$ este un ideal al algebrei A/I.*

b) *Dacă J este un ideal propriu al algebrei A și dacă $J \supset I$, atunci $\varphi_I(J)$ este un ideal propriu al algebrei A/I.*

c) *Pentru orice ideal $\hat{J}$ al algebrei A/I, există un singur ideal J al algebrei A, astfel încît $J \supset I$ și $\varphi_I(J) = \hat{J}$, dat de $J = \varphi_I^{-1}(\hat{J})$. J este propriu dacă $\hat{J}$ este propriu.*

d) *Dacă J este un ideal regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al algebrei A, atunci $\varphi_I(J)$ este un ideal regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al algebrei A/I.*

e) *Dacă $\hat{J}$ este un ideal regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al algebrei A/I, atunci există un singur ideal J, regulat la stînga (la dreapta, bilateral) al algebrei A, astfel încît $J \supset I$ și $\varphi_I(J) = \hat{J}$.*

f) *Dacă M este un ideal maximal al algebrei A și dacă $M \supset I$ atunci $\varphi_I(M)$ este un ideal maximal al algebrei A/I.*

g) *Dacă $\hat{M}$ este un ideal maximal al algebrei A/I, atunci există un singur ideal maximal M al algebrei A, astfel încît $M \supset I$ și $\varphi_I(M) = \hat{M}$.*

Demonstrație. Este similară cu aceea a teoremei 1.3.

COROLARUL 1.27. *Aplicația canonică φ_I stabilește o corespondență biunivocă $J \to \varphi_I(J)$ între:*

a) *Mulțimea tuturor idealelor proprii $J \supset I$ ale algebrei A și mulțimea tuturor idealelor proprii ale algebrei A/I.*

b) *Mulțimea tuturor idealelor maximale $M \supset I$ ale algebrei A și mulțimea tuturor idealelor maximale ale algebrei A/I.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 1.26, pct. b), c), f) și g).

COROLARUL 1.28. *Aplicația canonică φ_I stabilește o corespondență biunivocă $J \to \varphi_I(J)$ între mulțimea tuturor idealelor $J \supset I$, regulate la stînga (la dreapta, bilateral) ale algebrei A, și mulțimea tuturor idealelor regulate la stînga (la dreapta, bilateral), ale algebrei A/I.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 1.26, pct. d) și e)

TEOREMA 1.29. *Dacă M este un ideal maximal, regulat la stînga, al algebrei A, atunci M este și regulat la dreapta, deci bilateral regulat.*

Demonstrație. Fie e'_M un element unitate modulo M la stînga. Deducem că avem $e'_M x - x \in M$, pentru orice $x \in A$ și $\alpha e'_M - e'_M \alpha \in M$, pentru orice $\alpha \in C$. Notînd $\hat{e} = \varphi_M(e'_M)$, avem $\hat{e}\hat{x} - \hat{x} = \hat{0}$, pentru orice $\hat{x} \in A/I$ și $\hat{e}\alpha = \alpha\hat{e}$, pentru orice $\alpha \in C$. Fie $\hat{N} = \{\hat{x}\hat{e} - \hat{x}\,;\, \hat{x} \in A/I\}$. Dacă $\hat{x}_1, \hat{y}_1 \in \hat{N}$, atunci $\hat{x}_1 = \hat{x}\hat{e} - \hat{x}$ și $\hat{y}_1 = \hat{y}\hat{e} - \hat{y}$, deci $\hat{x}_1 - \hat{y}_1 = (\hat{x} - \hat{y})\hat{e} - (\hat{x} - \hat{y}) \in \hat{N}$. Dacă $\hat{z} \in A/I$, atunci $\hat{z}\hat{x}_1 = \hat{z}(\hat{x}\hat{e} - \hat{x}) = (\hat{z}\hat{x})\hat{e} - \hat{z}\hat{x} \in \hat{N}$ și $\hat{x}_1\hat{z} = (\hat{x}\hat{e} - \hat{x})\hat{z} = \hat{x}\hat{e}\hat{z} - \hat{x}\hat{z} = \hat{x}\hat{z} - \hat{x}\hat{z} = \hat{0} \in \hat{N}$; pentru orice $\alpha \in C$ avem $\alpha\hat{x}_1 = \alpha(\hat{x}\hat{e} - \hat{x}) = (\alpha\hat{x})\hat{e} - \alpha\hat{x} \in \hat{N}$ și $\hat{x}_1\alpha = (\hat{x}\hat{e} - \hat{x})\alpha = (\hat{x}\hat{e})\alpha - \hat{x}\alpha = \hat{x}(\hat{e}\alpha) - \hat{x}\alpha = \hat{x}(\alpha\hat{e}) - \hat{x}\alpha = (\hat{x}\alpha)\hat{e} - \hat{x}\alpha \in \hat{N}$, deci $\hat{N}$ este un ideal al algebrei A/M.

Deoarece M este maximal în A, prin ipoteză, din corolarul 1.27, pct. a), rezultă că $\hat{N} = \{\hat{0}\}$ sau $\hat{N} = A/M$. În primul caz avem $\hat{x}\hat{e} - \hat{x} = \hat{0}$, pentru orice $\hat{x} \in A/M$, deci $\hat{e}$ este element unitate și la dreapta în A/M, deci, din teorema 1.24, pct. a), rezultă că M este regulat și la dreapta, deci bilateral regulat. Să arătăm că al doilea caz este imposibil. Într-adevăr, dacă $\hat{N} = A/M$, atunci există $x_0 \in A$, astfel încît punînd $\hat{x}_0 = \varphi_M(x_0)$, să avem $\hat{x}_0\hat{e} - \hat{x}_0 = \hat{e}$. Dar atunci, pentru orice $\hat{x} \in A/M$, deducem $\hat{x} = \hat{e}\hat{x} = (\hat{x}_0\hat{e} - \hat{x}_0)\hat{x} = \hat{x}_0\hat{e}\hat{x} - \hat{x}_0\hat{x} = \hat{x}_0\hat{x} - \hat{x}_0\hat{x} = \hat{0}$, deci $A/M = \{\hat{0}\}$, ceea ce este absurd, deoarece M este ideal propriu. Teorema este demonstrată.

Datorită teoremei precedente, referindu-ne la idealele maximale ale algebrei A, vom spune că sînt *ideale regulate*, îndată ce sînt regulate la stînga, sau regulate la dreapta, deci bilateral regulate, în virtutea teoremei precedente.

TEOREMA 1.30. *Dacă M este un ideal maximal, regulat, al algebrei A, și dacă e'_M este element unitate modulo M la stînga, atunci e'_M este element unitate modulo M și la dreapta și reciproc.*

Demonstrație. Din demonstrația teoremei 1.29 rezultă că $\hat{e} = \varphi_M(e'_M)$ este element unitate al algebrei A/M, deci $\hat{x}\hat{e} = \hat{e}\hat{x} = \hat{x}$, pentru orice $\hat{x} \in A/M$ și $\alpha\hat{e} = \hat{e}\alpha$, pentru orice $\alpha \in C$. De aici rezultă $xe'_M - x \in M$ pentru orice $x \in A$ și $\alpha e'_M - e'_M\alpha \in M$ pentru orice $\alpha \in C$. q.e.d.

Datorită teoremei precedente vom spune că elementul $e_M \in A$ este *element unitate modulo* M, îndată ce e_M este element unitate modulo M la stînga (sau la dreapta), M fiind un ideal maximal regulat al algebrei A.

TEOREMA 1.31. *Dacă* M *este un ideal maximal regulat al algebrei* A *și dacă* e_M, *este un element unitate modulo* M, *atunci orice element unitate modulo* M *este de forma* $e_M + x$, $x \in M$, *și, reciproc, orice element de forma* $e_M + x$, $x \in M$, *este element unitate modulo* M.

Demonstrație. Similară cu aceea a teoremei 1.8.

TEOREMA 1.32. *Orice ideal* J *al algebrei* A, *care conține un ideal* I *regulat la stînga* (*sau la dreapta*), *este un ideal regulat la stînga* (*sau la dreapta*), *cu același element unitate.*

Demonstrație. Similară cu aceea a teoremei 1.9.

COROLARUL 1.33. *Orice ideal maximal* M *al algebrei* A, *care conține un ideal* I *al algebrei* A, *regulat la stînga* (*sau la dreapta*), *este un ideal maximal regulat.*

Demonstrație. Similară cu aceea a corolarului 1.10.

TEOREMA 1.34. *Orice ideal propriu* I *al algebrei* A, *regulat la stînga* (*sau la dreapta*), *este inclus într-un ideal maximal regulat al algebrei* A.

Demonstrație. Similară cu aceea a teoremei 1.11.

TEOREMA 1.35. a) *Algebra* A *are element unitate la stînga dacă și numai dacă idealul* $\{0\}$ *este ideal regulat la stînga.*

b) *Algebra* A *are element unitate la dreapta dacă și numai dacă idealul* $\{0\}$ *este ideal regulat la dreapta.*

c) *Algebra* A *are element unitate dacă și numai dacă idealul* $\{0\}$ *este un ideal bilateral regulat.*

Demonstrație. Similară cu aceea a teoremei 1.12.

COROLARUL 1.36. *Dacă algebra* A *are element unitate la stînga* (*sau la derapta*), *atunci orice ideal* I *al algebrei* A *este ideal regulat la stînga* (*sau la dreapta*). *În particular, dacă algebra* A *are element unitate, atunci orice ideal al algebrei* A *este ideal bilateral regulat.*

Demonstrație. Similară cu aceea a corolarului 1.13.

COROLARUL 1.37. *Dacă algebra* A *are element unitate la stînga* (*sau la dreapta*), *atunci orice ideal maximal al algebrei* A *este ideal maximal regulat. În particular, dacă algebra* A *are element unitate, atunci orice ideal maximal al algebrei* A *este ideal maximal regulat.*

Demonstrație. Similară cu a corolarului 1.14.

TEOREMA 1.38. *Dacă* M *este un ideal maximal regulat al algebrei* A *și dacă* I *este un ideal oarecare al algebrei* A, *astfel încît* $M \not\supset I$, *atunci există în* I *un element unitate modulo* M.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 1.15.

2. Fie $\mathcal{J}_C(A)$ mulțimea tuturor idealelor algebrei A, peste corpul C, $\mathcal{J}^s_C(A)$ mulțimea tuturor idealelor regulate la stînga, $\mathcal{J}^d_C(A)$ mulțimea tuturor idealelor regulate la dreapta și $\mathcal{J}^r_C(A)$ mulțimea tuturor idealelor bilateral regulate ale algebrei A. Le vom ordona prin relația de incluziune.

LEMĂ 1.39. a) *Fie* $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_C(A)$. *Atunci* $I_0 = \bigcap_{I \in \mathcal{J}} I$ *este un ideal al algebrei* A.

b) *Fie* $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_C(A)$ (*sau* $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^s_C(A)$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^d_C(A)$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}^r_C(A)$). *Atunci mulțimea* I^0 *a tuturor elementelor* x *ale algebrei* A, *de forma*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

unde $x_i \in I_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *iar* $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\} \subset \mathcal{J}$ *parcurge mulțimea tuturor părților finite ale lui* $\mathcal{J}$, *este un ideal al algebrei* A *(sau ideal regulat la stînga, regulat la dreapta, bilateral regulat).*

Demonstrație. Similară cu a lemei 1.16.

TEOREMA 1.40. a) $\mathcal{J}_C(A)$ *este o latice completă, în care* $\{0\}$ *este cel mai mic element, iar* A *este cel mai mare element.*

b) $\mathcal{J}^s_C(A)$, $\mathcal{J}^d_C(A)$ *și* $\mathcal{J}^r_C(A)$ *sînt semilatici superioare complete.*

Demonstrație. Similară cu a teoremei 1.17.

TEOREMA 1.41. *Mulțimea idealelor maximale regulate ale algebrei* A *coincide cu* :

a) *Mulțimea elementelor maximale din* $\mathcal{J}^s_C(A) - \{A\}$.

b) *Mulțimea elementelor maximale din* $\mathcal{J}^d_C(A) - \{A\}$.

c) *Mulțimea elementelor maximale din* $\mathcal{J}^r_C(A) - \{A\}$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 1.18.

Ca și în cazul inelelor, dacă $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_C(A)$, vom nota cu $\bigwedge\limits_{I \in \mathcal{J}} I$ idealul $\bigcap\limits_{I \in \mathcal{J}} I$. Dacă $\mathcal{J}$ este finită, $\mathcal{J} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, vom mai nota idealul $\bigcap\limits_{I \in \mathcal{J}} I$ și în felul următor : $I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_n$.

Idealul I^0, construit ca în lema 1.37, pct. b), va mai fi notat $\bigvee\limits_{I \in \mathcal{J}} I$, sau $I_1 \vee I_2 \vee \ldots \vee I_n$, în cazul cînd $\mathcal{J} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, în conformitate cu notațiile adoptate în teoria laticilor.

Vom nota cu $\mathfrak{M}_C(A)$ mulțimea idealelor maximale regulate ale algebrei A.

Vom spune că algebra A este *simplă*, dacă $\{0\}$ este ideal maximal regulat.

Vom spune că algebra A este *semisimplă*, dacă $\bigwedge\limits_{M \in \mathfrak{M}_C(A)} M = \{0\}$.

În general, vom numi *radical* al algebrei A idealul $R_C(A) = \bigwedge\limits_{M \in \mathfrak{M}_C(A)} M$.

TEOREMA 1.42. *Idealul* M *al algebrei* A *este ideal maximal regulat, dacă și numai dacă algebra* A/M *este simplă.*

Demonstrație. Similară cu a teoremei 1.19.

TEOREMA 1.43. *O algebră* A *cu element unitate* $e \neq 0$, *peste corpul* C, *este comutativă numai dacă corpul* C *este comutativ. Algebra comutativă* A, *peste corpul comutativ* C, *este simplă dacă și numai dacă* A *este algebră comutativă cu diviziune, peste corpul* C.

Demonstrație. Ținînd seama că, în general, dacă algebra A are element unitate $e \neq 0$, atunci aplicația $\alpha \to \alpha e$, a lui C în A, este un izomorfism, din comutativitatea lui A rezultă comutativitatea lui C. În continuare, demonstrația este similară aceleia a teoremei 1.20.

TEOREMA 1.44. *Un ideal* M *al unei algebre comutative* A *este un ideal maximal regulat dacă și numai dacă algebra* A/M *este algebră cu diviziune peste corpul* C.

Demonstrație. Similară cu aceea a teoremei 1.21.

TEOREMA 1.45. *Dacă algebra* A *este semisimplă și daca* $e \in A$ *este element unitate la stînga, atunci* e *este și element unitate la dreapta și reciproc.*

Demonstrație. Similară cu aceea a teoremei 1.22.

TEOREMA 1.46. *Algebra $A/R_C(A)$ este semisimplă.*

Demonstrație. Similară cu a teoremei 1.23.

Teorema următoare ne dă o informație importantă referitoare la natura idealelor maximale regulate ale algebrei A.

TEOREMA 1.47. *Fie A o algebră peste corpul C. Atunci $M \subset A$ este ideal maximal regulat al algebrei A dacă și numai dacă este ideal maximal regulat al inelului A.*

Demonstrație. Fie M un ideal maximal regulat al inelului A, și fie e un element unitate modulo M. Din teorema 1.6 rezultă că avem $ex-x \in M$ și $xe - x \in M$ pentru orice $x \in A$. Pentru a demonstra că M este ideal maximal regulat al algebrei A, va fi suficient să demonstrăm că dacă $x \in M$, atunci $\alpha x \in M$ și $x\alpha \in M$, pentru orice $\alpha \in C$ și că $\alpha e - e\alpha \in M$, pentru orice $\alpha \in C$.

Într-adevăr, fie $x \in M$. Avem $e(\alpha x) - \alpha x \in M$, pentru orice $\alpha \in C$, deci $(e\alpha) x - \alpha x \in M$. Dar din $x \in M$ rezultă $(e\alpha) x \in M$, deci avem $\alpha x \in M$. În mod analog se arată că $x\alpha \in M$ pentru orice $\alpha \in C$. Cu aceasta am arătat că M este și ideal al algebrei A. Atunci A/M este algebră peste corpul C, iar $\varphi_M(e)$ este element unitate în A/M. Fie $\alpha \in C$ și $\hat{z} = \alpha\varphi_M(e) - \varphi_M(e)\alpha$. Avem $\hat{z} = \hat{z}\,\varphi_M(e) = [\alpha\varphi_M(e) - \varphi_M(e)\,\alpha]\,\varphi_M(e) = \alpha\varphi_M(e) - \varphi_M(e)\,(\alpha\varphi_M(e)) = \alpha\varphi_M(e) - \alpha\varphi_M(e) = 0$.

De aici rezultă imediat că avem $\alpha e - e\alpha \in M$, pentru orice $\alpha \in C$, deci e este element unitate modulo M în algebra A. Prin urmare, M este ideal regulat al algebrei A. Faptul că M este ideal maximal al algebrei A se stabilește imediat : dacă M_0 este un ideal propriu al algebrei A, astfel încît $M \subset M_0$, atunci M_0 este și ideal propriu al inelului A. Prin urmare, M fiind maximal ca ideal al inelului A, avem $M = M_0$. Rezultă că M este ideal maximal al algebrei A.

Reciproc, să presupunem că M este un ideal maximal regulat al algebrei A. Atunci M este, evident, un ideal regulat al inelului A. Fie M_0 un ideal maximal al inelului A, astfel încît $M \subset M_0$, a cărui existență este asigurată de teorema 1.11. Dacă e este un element unitate modulo M în algebra A, atunci e este și element unitate modulo M în inelul A, deci, în baza teoremei 1.1, pct. d), M_0 este ideal maximal regulat în inelul A. Din prima parte a teoremei rezultă că M_0 este ideal al algebrei A, deci $M = M_0$ deoarece M este maximal. Cu aceasta am arătat că M este ideal maximal și ca ideal al inelului A. Teorema este demonstrată.

Această teoremă ne arată că mulțimea idealelor maximale regulate ale algebrei A coincide cu mulțimea idealelor maximale regulate ale inelului A și de aceea, în cele ce urmează, putem identifica pe $\mathcal{M}_C(A)$ cu $\mathcal{M}(A)$. Rezultă, de asemenea, că radicalul algebrei A coincide cu radicalul inelului A și că, prin urmare, A este algebră semisimplă dacă și numai dacă este inel semisimplu.

§ 2. PRELUNGIREA IDEALELOR MAXIMALE

Fie I un ideal al inelului (algebrei) A. În acest paragraf vom stabili o anumită corespondență între idealele maximale regulate ale idealului I, gîndit ca inel (algebră) și idealele maximale regulate ale inelului (algebrei) A. Ne vom ocupa mai întîi de cazul inelelor și apoi de cazul algebrelor.

A) Fie A un inel oarecare și $I \subset A$ un ideal. Atunci și I poate fi gîndit ca inel și se pune problema de a stabili natura idealelor maximale regulate ale idealului I, gîndit ca inel, în funcție de idealele maximale regulate ale inelului A. Răspunsul este dat de următoarea teoremă :

TEOREMA 2.1. *Fie A un inel și $I \subset A$ un ideal. Dacă $m \subset I$ este un ideal maximal regulat al inelului I, atunci există un singur ideal maximal regulat M al inelului A, astfel încît $M \supset m$ și $M \not\supset I$. Dacă $e_m \in I$ este un element unitate modulo m, atunci idealul M este dat de*

$$M = \{x;\ x \in A,\ e_m x \in I\}, \tag{1}$$

și avem $m = M \cap I$. Reciproc, dacă $M \subset A$ este un ideal maximal regulat astfel încît $M \not\supset I$, atunci $m = M \cap I$ este un ideal maximal regulat al inelului I, iar M este restabilit de m prin formula (1).

Demonstrație. a) Fie $m \subset I$ un ideal maximal regulat al idealului I, gîndit ca inel și fie $e_m \in I$ un element unitate modulo m, adică astfel încît $e_m x - x \in m$, pentru orice $x \in I$. Atunci, în virtutea teoremei 1.6, avem și $xe_m - x \in m$, pentru orice $x \in I$. Fie $M = \{x;\ x \in A,\ e_m x \in m\}$. Dacă $x_1, x_2 \in M$, atunci avem $e_m x_1 \in m$, $e_m x_2 \in m$, deci $e_m(x_1 - x_2) \in m$, deci $x_1 - x_2 \in M$, ceea ce arată că M este subgrup aditiv al lui A.

b) Să arătăm că $m \subset M$. Într-adevăr, dacă $x \in m$, atunci $e_m x \in m$, deci $x \in M$.

c) Să arătăm că relațiile

1) $x \in M$,

2) $xe_m \in m$,

3) $e_m xe_m \in m$,

sînt echivalente. 1) $\Rightarrow$ 3). Într-adevăr, $x \in M \Rightarrow e_m x \in m$, deci $e_m xe_m \in m$, deoarece $e_m \in I$ și m este ideal în I. 3) $\Rightarrow$ 1). Într-adevăr, dacă $e_m xe_m \in m$, din $e_m x \in I$ rezultă $(e_m x) e_m - e_m x \in m$, deci $e_m x \in m$, de unde $x \in M$. 3) $\Rightarrow$ 2). Într-adevăr, dacă $e_m xe_m \in m$, din $xe_m \in I$ rezultă $e_m(xe_m) - xe_m \in m$, deci $xe_m \in m$. 2) $\Rightarrow$ 3). Într-adevăr, dacă $xe_m \in m$, atunci $e_m xe_m \in m$, deoarece $e_m \in I$ și m este ideal în I.

d) $M \subset A$ este ideal al inelului A. Într-adevăr, ținînd seama de ceea ce am arătat la pct. a), rămîne de arătat că din $x \in M$ și $y \in A$ rezultă $xy \in M$ și $yx \in M$. În primul rînd, din $e_m x \in m$ și $ye_m \in I$ rezultă $e_m xye_m \in m$, de unde, ținînd seama de cele demonstrate la pct. c), rezultă $xy \in M$. Apoi, din $e_m y \in I$ și $xe_m \in m$ rezultă $e_m yxe_m \in m$, deci, tot cu pct. c), $yx \in M$.

e) e_m este element unitate modulo M, bilateral. Într-adevăr, din $x \in A$ rezultă $e_m x \in I$, deci $e_m(xe_m - x) = (e_m x) e_m - e_m x \in m$, de unde $xe_m - x \in M$. Apoi din $xe_m \in I$ deducem $(e_m x - x) e_m = e_m (xe_m) - xe_m \in m$, deci $e_m x - x \in M$, dacă facem apel din nou la pct. c).

f) $e_m \notin M$, deci $M \not\supset I$. Într-adevăr, dacă am avea $e_m \in M$, ar rezulta $e_m^2 \in m$, deci $e_m \in m$, deoarece $e_m^2 - e_m \in m$. Rezultatul este absurd, în virtutea teoremei 1.2.

g) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal astfel încît $M_0 \supset m$ și $M_0 \not\supset I$ atunci $M_0 \cap I = m$. Într-adevăr, $M_0 \cap I$ este, evident, un ideal în inelul I

pentru care $M_0 \cap I \neq I$, deoarece $M_0 \not\supset I$ şi $M_0 \cap I \supset m$, deoarece $M_0 \supset m$. Dar m fiind ideal maximal în I, rezultă că $M_0 \cap I = m$.

h) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal, astfel încît $M_0 \not\supset I$ şi $M_0 \supset m$, atunci $e_m \notin M_0$. Rezultă din pct. *g*), ţinînd seama că $e_m \notin m$, în virtutea teoremei 1.2.

i) Există ideale maximale $M_0 \subset A$, astfel încît $M_0 \not\supset I$ şi $m \subset M_0$. Într-adevăr, idealul M, construit mai sus, este un ideal bilateral regulat, în virtutea celor demonstrate la pct. *e*), iar e_m este element unitate modulo M, bilateral. Din teorema 1.11 rezultă că există un ideal maximal $M_0 \subset A$, astfel încît $M \subset M_0$. Dar e_m fiind, evident, element unitate modulo M_0, din teorema 1.2 deducem $e_m \notin M_0$, deci $M_0 \not\supset I$. Din $M \supset m$, ceea ce s-a demonstrat la pct. *b*), rezultă $M_0 \supset m$.

j) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal maximal, astfel încît $M_0 \supset m$ şi $M_0 \not\supset I$, atunci $M = M_0$. Într-adevăr, dacă $x \in M_0$, atunci $e_m x \in M_0$ şi $e_m x \in I$, deci, ţinînd seama de pct. *g*), avem $e_m x \in M_0 \cap I = m$, deci $x \in M$. Prin urmare $M_0 \subset M$. Dar M_0 fiind maximal, deducem $M_0 = M$.

k) Idealul $M \subset A$, construit mai sus, este ideal maximal regulat. Rezultă din *e*), *i*) şi *j*).

l) $M \cap I = m$. Rezultă din *b*), *f*) şi *g*).

m) Există un singur ideal maximal $M \subset A$, astfel încît $M \supset m$ şi $M \not\supset I$. Idealul M este regulat, iar e_m este element unitate modulo M în A.

Rezultă din *j*), *k*) şi *e*).

n) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal maximal regulat şi dacă $M_0 \not\supset I$, atunci $m_0 = M_0 \cap I$ este un ideal în inelul I, bilateral regulat. Deoarece M_0 este ideal maximal regulat în A şi $M_0 \not\supset I$, deducem din teorema 1.22 că există $e_{m_0} \in I$, element unitate modulo M_0. Deci $e_{m_0} x - x \in M_0$, pentru orice $x \in A$ şi, în particular, dacă $x \in I$, rezultă $e_{m_0} x - x \in M_0 \cap I = m_0$, deci e_{m_0} este element unitate modulo m_0 la stînga. În mod analog, ţinînd seama de teorema 1.6, se demonstrează că e_{m_0} este element unitate modulo m_0 şi la dreapta, deci bilateral. Rezultă că m_0 este un ideal bilateral regulat în I.

o) $m_0 = M_0 \cap I$, în condiţiile de la pct. *n*), este un ideal maximal regulat al inelului I. Într-adevăr, idealul $m_0 = M_0 \cap I$ fiind un ideal regulat, în virtutea teoremei 1.11, există un ideal maximal regulat $m \subset I$, astfel încît $m_0 \subset m$, iar elementul e_{m_0}, despre care a fost vorba la pct. *n*), este element unitate modulo m. Din pct. *m*) deducem că există un ideal maximal $M \subset A$, astfel încît $M \supset m$, $M \not\supset I$, e_{m_0} fiind în acelaşi timp şi element unitate modulo M în A. Din $f \in M_0$ rezultă $e_{m_0} f \in I$ şi $e_{m_0} f \in M_0$, deci $e_{m_0} f \in I \cap M_0 = m_0$, deci $e_{m_0} f \in M$. Din $e_{m_0} f - f \in M$ rezultă $f \in M$. Prin urmare, avem $M_0 \subset M$, deci $M_0 = M$, deoarece M_0 este maximal. Dar atunci rezultă $m_0 = M_0 \cap I = M \cap I = m$, ţinînd seama de pct. *l*). Deducem că m_0 este ideal maximal regulat al inelului I. Teorema este demonstrată.

B) Fie A o algebră peste corpul C şi $I \subset A$ un ideal al algebrei A. Atunci şi I poate fi gîndit ca algebră peste acelaşi corp C. Legătura dintre idealele maximale regulate ale idealului I, gîndit ca algebră, şi idealele maximale regulate ale algebrei A este descrisă de teorema următoare :

TEOREMA 2.2. *Fie A o algebră peste corpul C și $I \subset A$ un ideal al algebrei A. Dacă $m \subset I$ este un ideal maximal regulat al algebrei I, atunci există un singur ideal maximal regulat M al algebrei A, astfel încît $M \supset m$ și $M \not\supset I$. Dacă $e_m \in I$ este un element unitate modulo m, atunci idealul M este dat de*

$$M = \{x;\ x \in A,\ e_m\, x \in I\}, \tag{1}$$

și avem $m = M \cap I$. Reciproc, dacă $M \subset A$ este un ideal maximal regulat al algebrei A, astfel încît $M \not\supset I$, atunci $m = M \cap I$ este un ideal maximal regulat al algebrei I, iar M este restabilit de m prin formula (1).

Demonstrație. *a*) Se demonstrează, ca și în cazul teoremei 2.1, că mulțimea M, definită prin formula (1), este subgrup aditiv al lui A.

b) $m \subset M$. Se arată la fel ca la pct. *b*) din demonstrația teoremei 2.1.

c) Relațiile următoare

1) $x \in M$,

2) $x\, e_m \in m$,

3) $e_m\, x\, e_m \in m$,

sînt echivalente. Demonstrația se face ca în cazul punctului *c*) din demonstrația teoremei 2.1.

d) $M \subset A$ este ideal al algebrei A. Ținînd seama de pct. *a*), rămîne de arătat că din $x \in M$ și $y \in A$ rezultă $xy \in M$ și $yx \in M$, ceea ce se arată ca la pct. *d*) din demonstrația teoremei 2.1. De asemenea, mai trebuie să arătăm că din $x \in M$ și $\alpha \in C$ rezultă $\alpha x \in M$ și $x\alpha \in M$. Într-adevăr, din $x \in M$ rezultă, ținînd seama de pct. *c*), $xe_m \in m$, deci $\alpha\, xe_m \in m$, deoarece m este ideal al algebrei I. Dar atunci, ținînd seama de pct. *c*), rezultă $\alpha x \in M$. În mod analog se arată că $x\alpha \in M$.

e) e_m este element unitate modulo M, bilateral, în algebra A. Într-adevăr, ca la pct. *e*) al demonstrației teoremei 2.1 se arată că $e_m x - x \in M$ și $xe_m - x \in M$, pentru orice $x \in A$. Rămîne să arătăm că $\alpha e_m - e_m \alpha \in M$, pentru orice $\alpha \in C$. Dar aceasta rezultă din pct. *b*) și din faptul că e_m este element unitate modulo m în algebra I.

f) $e_m \notin M$. Se demonstrează ca la pct. *f*) din demonstrația teoremei 2.1.

g) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal al algebrei A, astfel încît $M_0 \supset m$ și $M_0 \not\supset I$, atunci $M_0 \cap I = m$. Se demonstrează similar cu demonstrația de la pct. *g*), din demonstrația teoremei 2.1.

h) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal al algebrei A, astfel încît $M_0 \not\supset I$ și $M_0 \supset m$, atunci $e_m \notin M_0$. Demonstrație similară aceleia din pct. *h*) al demonstrației teoremei 2.1.

i) Există ideale maximale M_0 ale algebrei A, astfel încît $M_0 \not\supset I$ și $m \subset M_0$. Se demonstrează în mod similar afirmației de la pct. *i*) din demonstrația teoremei 2.1, folosind teorema 1.33.

j) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal maximal al algebrei A, astfel încît $M_0 \supset m$ și $M_0 \not\supset I$, atunci $M = M_0$. Demonstrație similară cu aceea a afirmației de la pct. *j*) din demonstrația teoremei 2.1.

k) Idealul M al algebrei A, construit mai sus, este ideal maximal regulat. Rezultă din *e*), *i*) și *j*).

l) $M \cap I = m$. Rezultă din *b*), *f*) și *g*).

m) Există un singur ideal maximal $M \subset A$, astfel încît $M \supset m$

și $M \not\supset I$. Idealul M este regulat, iar e_m este element unitate modulo M în algebra A. Rezultă din j), k) și e).

n) Dacă $M_0 \subset A$ este un ideal maximal regulat al algebrei A, și dacă $M_0 \not\supset I$, atunci $m_0 = M_0 \cap I$ este un ideal al algebrei I, bilateral regulat. Demonstrația similară cu aceea a afirmației de la pct. n) din demonstrația teoremei 2.1, folosind teorema 1.44. Mai trebuie demonstrat că $\alpha e_{m_0} - e_{m_0}\alpha \in m_0$, pentru orice $\alpha \in C$. Dar $\alpha e_{m_0} - e_{m_0}\alpha \in M_0$, pentru orice $\alpha \in C$, și, deoarece $e_{m_0} \in I$, rezultă $\alpha e_{m_0} - e_{m_0}\alpha \in m_0$, pentru orice $\alpha \in C$. (Aici e_{m_0} este un element unitate modulo M_0, oarecare, conținut în I).

o) În condițiile de la pct. n), $m_0 = M_0 \cap I$ este un ideal maximal regulat al algebrei I. Se demonstrează în mod similar demonstrației de la pct. o) din demonstrația teoremei 2.1. Cu aceasta teorema 2.2 este demonstrată.

§ 3. CONEXIUNEA GALOISIANĂ

A) Cazul inelelor. Vom considera un inel A și mulțimea $\mathfrak{M}(A)$ a idealelor maximale regulate ale inelului A. Vom arăta că între părțile acestor două mulțimi se poate stabili o conexiune galoisiană [1], [2], [3], [5].

Într-adevăr, pentru orice $E \subset A$, să notăm cu $h(E)$ mulțimea tuturor idealelor maximale regulate ale inelului A, care conțin pe E: $h(E) = \{M;\ M \in \mathfrak{M}(A),\ M \supset E\}$. Mulțimea $h(E)$ se numește *înfășurătoarea* mulțimii E.

Pentru orice $F \subset \mathfrak{M}(A)$, să notăm cu $k(F)$ intersecția tuturor idealelor maximale regulate ale mulțimii F: $k(F) = \bigcap\limits_{M \in F} M$. Idealul $k(F)$ se numește *nucleul* mulțimii F. Notînd cu $R(A)$ și numind *radical* al inelului A idealul $\bigcap\limits_{M \in \mathfrak{M}(A)} M$, avem următoarea teoremă:

TEOREMA 3.1. a) *Dacă $E_1 \subset E_2 \subset A$, atunci $h(E_1) \supset h(E_2)$; dacă $F_1 \subset F_2 \subset \mathfrak{M}(A)$, atunci $k(F_1) \supset k(F_2)$.*

b) $h(R(A)) = \mathfrak{M}(A)$, $h(A) = \emptyset$; $k(\mathfrak{M}(A)) = R(A)$, $k(\emptyset) = A$.

c) *Pentru orice $F \subset \mathfrak{M}(A)$, avem $F \subset h(k(F))$.*

Pentru orice $E \subset A$, avem $E \subset k(h(E))$.

d) *Dacă $F = h(E)$, unde $E \subset A$, atunci $h(k(F)) = F$.*

Dacă $E = k(F)$, unde $F \subset \mathfrak{M}(A)$, atunci $k(h(E)) = E$.

Demonstrație. a) Dacă $M \in h(E_2)$, atunci $M \supset E_2$, deci $M \supset E_1$ deci $M \in h(E_1)$; prin urmare, $h(E_1) \supset h(E_2)$. Dacă $x \in k(F_2)$, atunci $x \in M$, pentru orice $M \in F_2$, deci $x \in M$, pentru orice $M \in F_1$, deci $x \in k(F_1)$; prin urmare $k(F_1) \supset k(F_2)$.

b) $h(R(A)) = \mathfrak{M}(A)$, deoarece $R(A)$ este inclus în orice ideal maximal regulat; $h(A) = \emptyset$, deoarece nici un ideal maximal regulat nu conține pe A. Apoi $k(\mathfrak{M}(A)) = R(A)$, tocmai în virtutea definiției radicalului $R(A)$, iar $k(\emptyset) = A$ deoarece, în mod convențional, intersecția mulțimii vide de părți ale lui A coincide cu A.

c) Dacă $M \in F$, atunci $M \supset k(F)$ și deci $M \in h(k(F))$.

Dacă $x \in E$, atunci $x \in M$, pentru orice $M \in h(E)$, deci $x \in k(h(E))$.

d) Ținînd seama de c), avem $E \subset k(h(E))$ și, deci, din a) obținem $h(E) \supset h(k(h(E)))$, adică $F \supset h(k(F))$. Din c) rezultă atunci$F = h(k(F))$, dacă $F = h(E)$, $E \subset A$.

Din c) obținem $F \subset h(k(F))$, pentru orice $F \subset \mathcal{M}(A)$ și deci, din a), $k(F) \supset k\,(h(k(F)))$, adică $E \supset k(h(E))$, unde $E = k(F)$. Din c) rezultă atunci $E = k(h(E))$, îndată ce $E = k(F)$, unde $F \subset \mathcal{M}(A)$. Teorema este demonstrată.

Afirmațiile a) și c) din enunțul teoremei precedente arată că aplicațiile h și k stabilesc o conexiune galoisiană între mulțimea părților lui A și mulțimea părților lui $\mathcal{M}(A)$.

TEOREMA 3.2. a) *Pentru orice familie de părți* $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *ale mulțimii* $\mathcal{M}(A)$ *avem* $k(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} k(F_\alpha)$.

b) *Pentru orice familie* $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *de ideale ale inelului* A *avem* $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} h(I_\alpha) = h(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha)$.

c) *Dacă* I_1 *și* I_2 *sînt două ideale ale inelului* A, *atunci* $h(I_1 \cap I_2) = h(I_1) \cup h(I_2)$.

Demonstrație. a) Avem $k(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha) = \bigcap\limits_{M \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha} M = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \bigcap\limits_{M \in F_\alpha} M = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} k(F_\alpha)$.

b) Dacă $M \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} h(I_\alpha)$, atunci $M \in h(I_\alpha)$, pentru orice $\alpha \in A$, deci $M \supset I_\alpha$, pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$, deci $M \supset \bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$, de unde rezultă $M \in h(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha)$. Reciproc, dacă $M \in h(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha)$, atunci $M \supset \bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$, deci $M \supset I_\alpha$, pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$, deci $M \in h(I_\alpha)$, pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$, deci $M \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} h(I_\alpha)$.

c) Dacă $M \in h(I_1 \cap I_2)$, atunci $M \supset I_1 \cap I_2$. Dacă am avea $M \not\supset I_1$ și $M \not\supset I_2$, atunci din teorema 1.15 am deduce că există $i_1 \in I_1$, element unitate modulo M, și $i_2 \in I_2$, de asemenea element unitate modulo M. Dar atunci $i_1 i_2$ este element unitate modulo M și $i_1 i_2 \in I_1 \cap I_2$. Din teorema 1.2 rezultă atunci $i_1 i_2 \notin M$, ceea ce implică $M \not\supset I_1 \cap I_2$, contrar ipotezei. Prin urmare sau $M \supset I_1$, deci $M \in h(I_1)$, sau $M \supset I_2$, deci $M \in h(I_2)$. În orice caz $M \in h(I_1) \cup h(I_2)$, deci $h(I_1 \cap I_2) \subset h(I_1) \cup h(I_2)$.

Reciproc, dacă $M \in h(I_1) \cup h(I_2)$, atunci $M \in h(I_1)$ sau $M \in h(I_2)$ deci, în orice caz, $M \in h\,(I_1 \cap I_2)$, prin urmare $h(I_1) \cup h\,(I_2) \subset h\,(I_1 \cap I_2)$. Teorema este demonstrată.

B) Cazul algebrelor. Vom considera o algebră A peste un corp C și mulțimea $\mathcal{M}(A)$ a idealelor maximale regulate ale algebrei A. Vom stabili o conexiune galoisiană între mulțimea părților lui A și mulțimea părților lui $\mathcal{M}(A)$.

Într-adevăr, pentru orice $E \subset A$ să notăm cu $h\,(E)$ mulțimea tuturor idealelor maximale regulate ale algebrei A, care conțin pe E: $h(E) = \{M;\ M \in \mathcal{M}(A),\ M \supset E\}$. Mulțimea $h(E)$ se numește *înfășurătoarea* mulțimii E.

Pentru orice $F \subset \mathfrak{M}(A)$, să notăm cu $k(F)$ intersecția tuturor idealelor maximale regulate ale mulțimii F : $k(F) = \bigcap\limits_{M \in F} M$. Idealul $k(F)$ al algebrei A se numește *nucleul* mulțimii F.

Notînd cu $R(A)$ și numind *radical* al algebrei A idealul $\bigcap\limits_{M \in \mathfrak{M}(A)} M$, avem următoarea teoremă :

TEOREMA 3.3. a) *Dacă* $E_1 \subset E_2 \subset A$, *atunci* $h(E_1) \supset h(E_2)$; *dacă* $F_1 \subset F_2 \subset \mathfrak{M}(A)$, *atunci* $k(F_1) \supset k(F_2)$.

b) $h(R(A)) = \mathfrak{M}(A)$, $h(A) = \emptyset$; $k(\mathfrak{M}(A)) = R(A)$, $k(\emptyset) = A$.

c) *Pentru orice* $F \subset \mathfrak{M}(A)$, *avem* $F \subset h(k(F))$.

Pentru orice $E \subset A$, *avem* $E \subset k(h(E))$.

d) *Dacă* $F = h(E)$, *unde* $E \subset A$, *atunci* $h(k(F)) = F$.

Dacă $E = k(F)$, *unde* $F \subset \mathfrak{M}(A)$, *atunci* $k(h(E)) = E$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 3.1.

Afirmațiile a) și c) din enunțul teoremei precedente arată că aplicațiile h și k stabilesc o conexiune galoisiană între mulțimea părților lui A și mulțimea părților lui $\mathfrak{M}(A)$.

TEOREMA 3.4. a) *Pentru orice familie de părți* $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *ale mulțimii* $\mathfrak{M}(A)$ *avem* $k(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} k(F_\alpha)$.

b) *Pentru orice familie* $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *de ideale ale algebrei* A, *avem* $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} h(I_\alpha) = h(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha)$.

c) *Dacă* I_1 *și* I_2 *sînt două ideale ale algebrei* A, *atunci* $h(I_1 \cap I_2) = h(I_1) \cup h(I_2)$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 3.2.

§ 4. SPAȚIUL STRUCTURAL

Oricărui inel A, sau oricărei algebre A, peste un corp C, i se asociază un spațiu topologic, numit spațiul structural [2], [3], [5], [8]. Vom expune în acest paragraf proprietățile principale ale spațiului structural, din care unele sînt cunoscute, proprietăți de care ne vom folosi în cele ce urmează.

A) Cazul inelelor. 1. Fie A un inel și $\mathfrak{M}(A)$ mulțimea idealelor maximale regulate ale inelului A. Vom defini un operator de închidere $F \to \overline{F}$ în mulțimea părților lui $\mathfrak{M}(A)$, punînd $\overline{F} = h(k(F))$.

TEOREMA 4.1. *Operatorul* $F \to \overline{F} (F \subset \mathfrak{M}(A))$, *definit mai sus, are următoarele proprietăți* :

a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ și $F \subset \overline{F}$, *pentru orice* $F \subset \mathfrak{M}(A)$.

b) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow \overline{F}_1 \subset \overline{F}_2$, *pentru oric* $F_1, F_2 \subset \mathfrak{M}(A)$.

c) $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$, *pentru orice* $F \subset \mathfrak{M}(A)$.

d) $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2$, *pentru orice* $F_1, F_2 \subset \mathfrak{M}(A)$.

Demonstrație. a) În baza definiției, $\overline{\emptyset} = h(k(\emptyset)) = h(A) = \emptyset$, ținînd seama și de teorema 3.1, pct. b). Incluziunea $F \subset \overline{F}$ rezultă din teorema 3.1, pct. c).

b) Din teorema 3.1, pct. a), rezultă $F_1 \subset F_2 \Rightarrow k(F_1) \supset k(F_2) \Rightarrow \Rightarrow h(k(F_1)) \subset h(k(F_2))$, deci $F_1 \subset F_2 \Rightarrow \overline{F}_1 \subset \overline{F}_2$.

c) Din teorema 3.1, pct. d), rezultă $\overline{\overline{F}} = h(k(\overline{F})) = \overline{F}$, deoarece $\overline{F} = h(k(F))$.

d) Din teorema 3.2, pct. a) şi c) rezultă $\overline{F_1 \cup F_2} = h(k(F_1 \cup F_2)) = h(k(F_1) \cap k(F_2)) = h(k(F_1)) \cup h(k(F_2)) = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2$, pentru orice $F_1, F_2 \subset \mathfrak{M}(A)$. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Din teorema 4.1 rezultă că definind drept mulţimi închise în $\mathfrak{M}(A)$ acele mulţimi $F \subset \mathfrak{M}(A)$, pentru care $F = \overline{F}$, introducem pe $\mathfrak{M}(A)$ o topologie [2], [3], [5], în care toate mulţimile de forma $\overline{F}$ sînt închise, iar $\overline{F}$ este chiar aderenţa mulţimii $F \subset \mathfrak{M}(A)$.

Vom numi *spaţiu structural* al inelului A, mulţimea $\mathfrak{M}(A)$ topologizată în modul indicat mai sus.

TEOREMA 4.2. a) *Spaţiul* $\mathfrak{M}(A)$ *este un spaţiu* (T_1).

b) *Dacă* A *are element unitate la stînga (sau la dreapta), atunci* $\mathfrak{M}(A)$ *este compact.*

c) *Dacă* $\mathfrak{M}(A)$ *este compact, atunci din orice familie* $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *de ideale regulate la stînga (sau la dreapta) ale inelului* A, *astfel încît* $\bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha = A$, *se poate extrage o subfamilie finită* $\{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_n}\} \subset (I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, *astfel încît* $\bigvee\limits_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} = A$.

Demonstraţie. a) Dacă $F = \{M_0\}$, unde $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, atunci $k(F) = M_0$ şi deci $\overline{F} = h(k(F)) = h(M_0) = \{M_0\}$, ceea ce arată că $\overline{F} = F$, dacă mulţimea F se reduce la un singur punct. Prin urmare, orice mulţime formată dintr-un singur punct este închisă, deci spaţiul $\mathfrak{M}(A)$ este un spaţiu care verifică axioma de separare (T_1).

b) Fie e' un element unitate la stînga al inelului A. Atunci în baza corolarului 1.13, orice ideal al inelului A este regulat, la stînga. Fie $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ o familie de părţi închise ale lui $\mathfrak{M}(A)$, astfel încît $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \emptyset$ şi fie $I_\alpha = k(F_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$. Din teorema 3.2, pct. b), deducem, ţinînd seama că în baza teoremei 3.1, pct. d), avem $h(I_\alpha) = F_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$: $\emptyset = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} h(I_\alpha) = h(\bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha)$. Idealul $I = \bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$ fiind regulat la stînga, din teorema 1.11 rezultă că $I = A$, deoarece, dacă $I \neq A$, atunci în baza acestei teoreme am avea $h(I) \neq \emptyset$. Prin urmare avem $e' \in \bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$ şi deci există un număr finit de ideale $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_n}$ din familia $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ şi cîte un element $x_i \in I_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît $e' = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Dar atunci vom avea $\bigvee\limits_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} = A$ şi deci $\emptyset = h(A) = h(\bigvee\limits_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} h(I_{\alpha_i}) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$. Cu aceasta am arătat că este satisfăcută axioma Borel-Lebesgue şi deci spaţiul $\mathfrak{M}(A)$ este compact (eventual neseparat).

c) Să presupunem că $\mathfrak{M}(A)$ este compact şi că $(I_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ este o familie de ideale regulate la stînga ale inelului A, astfel încît $\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha = A$. Fie $F_\alpha = h(I_\alpha)$, $\alpha\in\mathcal{A}$. Atunci F_α este o mulţime închisă în $\mathfrak{M}(A)$, în baza teoremei 3.1, pct. d). Din teorema 3.1, pct. b) şi teorema 3.2, pct. b), deducem $\emptyset = h(A) = h(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} h(I_\alpha)$. $\mathfrak{M}(A)$ fiind compact, şi mulţimile $F_\alpha \subset \mathfrak{M}(A)$ fiind închise, deducem că există o familie finită $\{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2},\dots, F_{\alpha_n}\} \subset (F_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de astfel de mulţimi, cu proprietatea $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Dar atunci, din teorema 3.2, pct. b), deducem $\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} h(I_{\alpha_i}) = h(\bigvee_{i=1}^{n} I_{\alpha_i})$. Idealul $\bigvee_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}$ fiind regulat la stînga, în baza teoremei 1.1, pct. d), din teorema 1.11 rezultă că $\bigvee_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} = A$. Teorema este demonstrată.

Vom vedea prin exemple, ulterior, că este posibil ca spaţiul $\mathfrak{M}(A)$ să fie chiar compact, fără a fi totuşi separat. De aceea este indicat, să dăm un criteriu pentru a recunoaşte dacă spaţiul $\mathfrak{M}(A)$, asociat unui inel A, este sau nu separat. În acest scop, vom spune că două elemente x_0, $y_0 \in A$ sînt *disjuncte*, dacă pentru orice $M\in\mathfrak{M}(A)$ avem $x_0\in M$ sau $y_0\in M$.

TEOREMA 4.3. *Dacă inelul* A *este semisimplu şi dacă elementele* x_0, $y_0\in A$ *sînt disjuncte, atunci* $x_0 y_0 = 0$.

Demonstraţie. Într-adevăr, avem $x_0 y_0 \in M$, pentru orice $M\in\mathfrak{M}(A)$.

TEOREMA 4.4. *Pentru ca spaţiul structural* $\mathfrak{M}(A)$ *al inelului* A *să fie separat, este necesar şi suficient ca pentru orice* M_1, $M_2\in\mathfrak{M}(A)$, *cu* $M_1 \neq M_2$, *să existe două elemente disjuncte* e_1, $e_2 \in A$, *respectiv element unitate modulo* M_1 *şi element unitate modulo* M_2.

Demonstraţie. *a*) Să presupunem că $\mathfrak{M}(A)$ este separat. Atunci pentru orice M_1, $M_2\in\mathfrak{M}(A)$, cu $M_1\neq M_2$, există două vecinătăţi deschise U_1 şi U_2, respectiv ale lui M_1 şi M_2, astfel încît $U_1\cap U_2 = \emptyset$. Atunci $\complement U_1$ şi $\complement U_2$ sînt mulţimi închise, astfel încît $(\complement U_1)\cup(\complement U_2) = \mathfrak{M}(A)$, $M_1\notin\complement U_1$ şi $M_2\notin\complement U_2$. $\complement U_1$ şi $\complement U_2$ fiind închise, avem $\complement U_1 = h(I_1)$ şi $\complement U_2 = h(I_2)$, unde I_1 şi I_2 sînt ideale ale inelului A, astfel încît $I_1 = k(\complement U_1)$ şi $I_2 = k(\complement U_2)$. Din $h(I_1)\cup h(I_2) = \mathfrak{M}(A)$, ţinînd seama de teorema 3.2, pct. c), deducem $h(I_1\cap I_2) = \mathfrak{M}(A)$, deci $I_1\cap I_2\subset M$, pentru orice ideal maximal regulat $M\in\mathfrak{M}(A)$. Dar din $M_1\notin h(I_1)$ şi $M_2\notin h(I_2)$ deducem $M_1\not\supset I_1$ şi $M_2\not\supset I_2$. Din teorema 1.15, deducem că există $e_1\in I_1$, element unitate modulo M_1 şi $e_2\in I_2$, element unitate modulo M_2.

După cum am arătat mai sus, pentru orice $M_0\in\mathfrak{M}(A)$, avem $M_0\in h(I_1)$ sau $M_0\in h(I_2)$, prin urmare $M_0\supset I_1$, sau $M_0\supset I_2$. Rezultă că pentru orice $M_0\in\mathfrak{M}(A)$, avem $e_1\in M_0$ sau $e_2\in M_0$, deci elementele e_1 şi e_2 sînt disjuncte.

b) Reciproc, să presupunem că pentru orice M_1, $M_2\in\mathfrak{M}(A)$, cu $M_1\neq M_2$, există două elemente e_1, $e_2\in A$, disjuncte, respectiv element unitate modulo M_1 şi element unitate modulo M_2. Atunci vom avea $h(\{e_1\})\cup h(\{e_2\}) = \mathfrak{M}(A)$.

Punînd $U_1 = \complement h(\{e_1\})$ şi $U_2 = \complement h(\{e_2\})$, avem $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, iar mulţimile U_1 şi U_2 sînt deschise. e_i fiind element unitate modulo M_i, $i = 1, 2$, avem $e_i \notin M_i$, după cum rezultă din teorema 1.2 şi deci $M_i \notin h(\{e_i\})$, $i = 1, 2$, ceea ce arată că $M_i \in U_i$, $i = 1, 2$, şi deci U_1 şi U_2 sînt vecinătăţi deschise disjuncte, respectiv ale lui M_1 şi M_2. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 4.5. *Dacă $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$ şi $x_0 \in A$, dar $x_0 \notin M_0$, atunci există o vecinătate U a lui M_0, astfel încît $x_0 \notin M$ pentru orice $M \in U$.*

Demonstraţie. Fie $U = \complement h(\{x_0\})$. U este, evident, o mulţime deschisă în $\mathfrak{M}(A)$, după cum rezultă din teorema 3.1, pct. d). Din $x_0 \notin M_0$ deducem $M_0 \notin h(\{x_0\})$, deci $M_0 \in U$, ceea ce arată că U este o vecinătate a lui M_0. Dacă $M \in U$, atunci $M \notin h(\{x_0\})$, deci $M \not\supset \{x_0\}$, ceea ce arată că $x_0 \notin M$. Teorema este demonstrată.

2. Pentru orice $x_0 \in A$, vom numi *suport* al elementului x_0 mulţimea $\overline{\complement h(\{x_0\})}$, pe care o vom nota cu $s(x_0)$. De asemenea, vom nota cu $I(x_0)$ idealul $k(h(\{x_0\}))$.

TEOREMA 4.6. a) *Pentru orice $x \in I(x_0)$ avem $s(x) \subset s(x_0)$.*

b) *Pentru orice $x_1, x_2 \in A$ avem*

i) $s(x_1) = s(-x_1)$, ii) $s(x_1 + x_2) \subset s(x_1) \cup s(x_2)$ *şi* iii) $s(x_1 x_2) \subset s(x_1) \cap s(x_2)$.

Demonstraţie. a) Să presupunem, prin absurd, că există $M_0 \in s(x)$, astfel încît $M_0 \notin s(x_0)$. Atunci, ţinînd seama de definiţia mulţimii $s(x)$, avem $M_0 \supset k(\complement h(\{x\}))$, iar din $M_0 \notin s(x_0)$ rezultă $M_0 \not\supset k(\complement h(\{x_0\}))$. Din teorema 1.15 deducem că există $e_0 \in k(\complement h(\{x_0\}))$, element unitate modulo M_0. Dar, în baza teoremei 3.1, pct. d), avem $h(\{x_0\}) = h(I(x_0))$ şi deci $e_0 \in k(\complement h(I(x_0)))$. Din $x \in I(x_0)$ deducem $h(\{x\}) \supset h(I(x_0))$, de unde $\complement h(\{x\}) \subset \complement h(I(x_0))$ şi deci, în baza teoremei 3.1, pct. a), $k(\complement h(\{x\})) \supset k(\complement h(I(x_0)))$. Deducem de aici $e_0 \in M_0$, ceea ce este absurd.

b) i) Evident, $h(\{x_1\}) = h(\{-x_1\})$, de unde rezultă imediat $s(x_1) = s(-x_1)$ şi prima egalitate de la pct. b) este demonstrată. ii) Este uşor de văzut că $x_1 + x_2 \in I(x_1) \vee I(x_2)$. Prin urmare, ţinînd seama de teorema 3.1, pct. a) şi de teorema 3.2, pct. b), obţinem

$$h(\{x_1 + x_2\}) \supset h(I(x_1) \vee I(x_2)) = h(I(x_1)) \cap h(I(x_2)) =$$
$$= h(\{x_1\}) \cap h(\{x_2\}).$$

De aici, trecînd la complementară, găsim

$$\complement h(\{x_1 + x_2\}) \subset \{\complement h(\{x_1\})\} \cup \{\complement h(\{x_2\})\}$$

şi deci, în baza teoremei 3.1, pct. a) şi a teoremei 3.2, pct. a)

$$k[\complement h(\{x_1 + x_2\})] \supset k(\{\complement h(\{x_1\})] \cup \{\complement h(\{x_2\})\}) = k(\complement h(\{x_1\})) \cap k(\complement h(\{x_2\})),$$

de unde, în baza teoremei 3.2, pct. c) şi a teoremei 3.1, pct. a) :

$$h[k(\complement h(\{x_1 + x_2\}))] \subset h[k(\complement h(\{x_1\})) \cap k(\complement h(\{x_2\}))] =$$
$$= h[k(\complement h(\{x_1\}))] \cup h[k(\complement h(\{x_2\}))],$$

ceea ce este echivalent cu

$$s(x_1 + x_2) \subset s(x_1) \cup s(x_2),$$

și a doua relație de la pct. b) este demonstrată. iii) Pentru a demonstra ultima relație de la pct. b), să observăm că din $M \in h(\{x_1\})$ rezultă $x_1 \in M$, deci $x_1 x_2 \in M$. Deducem de aici că $x_1 x_2 \in k(h(\{x_1\})) = I(x_1)$. Ținînd seama de pct. a) al teoremei, deducem $s(x_1 x_2) \subset s(x_1)$. În mod analog demonstrăm că $s(x_1 x_2) \subset s(x_2)$ și deci $s(x_1 x_2) \subset s(x_1) \cap s(x_2)$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 4.7. *Pentru orice* $E \subset \mathfrak{M}(A)$ *mulțimea*

$$I(E) = \{x;\ x \in A,\ s(x) \subset E\}$$

este un ideal al inelului A.

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 4.6.

3. Vom spune că elementul $e_0 \in A$ este *unitate locală* în $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, dacă există o vecinătate U_0 a lui M_0, astfel încît e_0 să fie element unitate modulo M pentru orice $M \in U_0$.

Pentru orice $x_0 \in A$, vom nota cu $u(x_0)$ mulțimea tuturor idealelor maximale regulate $M \in \mathfrak{M}(A)$, pentru care x_0 este element unitate modulo M.

TEOREMA 4.8. a) *Pentru orice* $x_0 \in A$ *avem* $u(x_0) \subset s(x_0)$.

b) *Pentru orice* $x_0 \in A$, *mulțimea* $u(x_0)$ *este închisă și compactă în* $\mathfrak{M}(A)$.

c) $x_0 \in A$ *este unitate locală în* M_0 *dacă și numai dacă* $M_0 \in \in \operatorname{int} u(x_0)$.

Demonstrație. a) În baza teoremei 1.2, din $M_0 \in u(x_0)$ deducem $x_0 \notin M_0$, deci $M_0 \notin h(\{x_0\})$, de unde $M_0 \in \complement h(\{x_0\})$ și deci $M_0 \in s(x_0)$.

b) Dacă $M_0 \in u(x_0)$, atunci avem $x_0 x - x \in M_0$ și $x x_0 - x \in M_0$, pentru orice $x \in A$. Prin urmare $x_0 x - x \in k(u(x_0))$ și $x x_0 - x \in k(u(x_0))$ pentru orice $x \in A$, deci x_0 este element unitate modulo $k(u(x_0))$, bilateral. Deducem că dacă $M \in h(k(u(x_0)))$, atunci $M \supset k(u(x_0))$, deci x_0 este element unitate modulo M; în baza definiției mulțimii $u(x_0)$, obținem $M \in u(x_0)$. Prin urmare, $h(k(u(x_0))) \subset u(x_0)$. Deoarece în baza teoremei 3.1, pct. c), incluziunea opusă are loc întotdeauna, deducem $u(x_0) = h(k(u(x_0)))$, ceea ce arată că mulțimea $u(x_0)$ este închisă.

Să arătăm că $u(x_0)$ este compactă. Pentru aceasta, să considerăm o familie centrală oarecare $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de mulțimi închise din $u(x_0)$. Punînd $I_\alpha = k(F_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, avem $F_\alpha = h(I_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, în baza teoremei 3.1, pct. d).

Deoarece x_0 este element unitate modulo M, pentru orice $M \in u(x_0)$, ca mai sus, deducem că x_0 este element unitate, bilateral, modulo I_α, pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$. Notînd $I = \bigvee_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$, deducem că x_0 este element unitate modulo I, bilateral. Dacă am avea $I = A$, atunci ar exista o familie finită de indici $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathcal{A}$ și cîte un element $x_i \in I_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_0$. Dar atunci am deduce $\bigvee_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} = A$, în baza teoremei 1.2, și deci, ținînd seama de teorema 3.1, pct. b), și de teorema 3.2, pct. b),

$$\emptyset = h(A) = h\left(\bigvee_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} h(I_{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i},$$

contrar ipotezei că familia $(F_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ este centrată.

Prin urmare, idealul I este propriu, şi atunci, în baza teoremei 1.11, deducem că $h(I) \neq \emptyset$, deci există $M_0 \in h(I_\alpha)$, pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$. Dar de aici rezultă $M_0 \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} h(I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$, ceea ce arată că ultima intersecţie este nevidă. De aici rezultă compacitatea mulţimii $u(x_0)$.

c) Să presupunem că x_0 este unitate locală în M_0. Atunci există o vecinătate U_0 a lui M_0, astfel încît x_0 să fie element unitate modulo M, pentru orice $M \in U_0$, deci $U_0 \subset u(x_0)$, ceea ce arată că $M_0 \in \operatorname{int} u(x_0)$. Reciproc, dacă $M_0 \in \operatorname{int} u(x_0)$, atunci $U_0 = u(x_0)$ este o vecinătate a lui M_0 şi x_0 este element unitate modulo M, pentru orice $M \in U_0$, în baza definiţiei mulţimii $u(x_0)$.

Teorema este demonstrată.

4. La acest punct vom studia legătura dintre spaţiul structural al inelului A şi spaţiile structurale ale inelului I şi inelului A/I, unde $I \subset A$ este un ideal oarecare al inelului A.

TEOREMA 4.9. *Fie I un ideal al inelului A şi $\mathcal{M}(I)$ spaţiul structural al inelului I. Atunci $\mathcal{M}(I)$ este omeomorf cu $\mathcal{M}(A) - h(I)$.*

Demonstraţie. Fie $m \in \mathcal{M}(I)$ un ideal maximal regulat, oarecare, al inelului I. În baza teoremei 2.1, există un singur ideal maximal regulat $M \in \mathcal{M}(A)$, astfel încît $M \supset m$ şi $M \not\supset I$. Vom nota cu $\varphi(m)$ idealul M astfel determinat. În acest mod am definit o aplicaţie $\varphi : \mathcal{M}(I) \to \mathcal{M}(A)$, care are următoarele proprietăţi:

a) $\varphi(\mathcal{M}(I)) \subset \mathcal{M}(A) - h(I)$.

Într-adevăr, chiar prin modul în care a fost definit $\varphi(m)$, avem $\varphi(m) \in \mathcal{M}(A)$ şi $\varphi(m) \not\supset I$, deci $\varphi(m) \notin h(I)$.

b) $\varphi(\mathcal{M}(I)) = \mathcal{M}(A) - h(I)$.

Ţinînd seama de a), este suficient să demonstrăm că pentru orice $M \in \mathcal{M}(A) - h(I)$, există $m \in \mathcal{M}(I)$, astfel încît $\varphi(m) = M$.

Într-adevăr, dacă $M \in \mathcal{M}(A) - h(I)$, atunci $M \not\supset I$. În baza teoremei 2.1, deducem că $m = M \cap I \in \mathcal{M}(I)$ şi că $\varphi(m) = M$.

c) φ este biunivocă.

Într-adevăr, dacă $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(I)$ şi $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$, atunci, în baza teoremei 2.1, avem $m_1 = I \cap \varphi(m_1) = I \cap \varphi(m_2) = m_2$.

d) Pentru orice $E \subset \mathcal{M}(I)$, fie $k_I(E) = \bigcap_{m \in E} m$. Atunci $k_I(E) = I \cap \cap\, k(\varphi(E))$.

Într-adevăr, $k_I(E) = \bigcap_{m \in E} m = \bigcap_{M \in \varphi(E)} (M \cap I) = I \cap (\bigcap_{M \in \varphi(E)} M) = I \cap \cap\, k(\varphi(E))$.

e) Pentru orice $F \subset I$, să punem $h_I(F) = \{m;\ m \in \mathcal{M}(I), m \supset F\}$. Atunci $\varphi(h_I(F)) = h(F) - h(I)$.

Într-adevăr, $M \in \varphi(h_I(F)) \Leftrightarrow M = \varphi(m), m \in h_I(F) \Leftrightarrow M = \varphi(m), m \in \mathcal{M}(I), m \supset F \Leftrightarrow m = \varphi^{-1}(M), M \not\supset I, M \supset F, M \in \mathcal{M}(A) \Leftrightarrow M \notin h(I), M \in h(F), M = \varphi(m) \Leftrightarrow M \in h(F) - h(I)$.

f) Pentru orice $E \subset \mathcal{M}(I)$, avem

$$\varphi(h_I(k_I(E))) = h(I \cap k(\varphi(E))) - h(I).$$

Rezultă din d) şi e).

g) Dacă $E \subset \mathcal{M}(I)$ este închisă, atunci $\varphi(E)$ este închisă în $\mathcal{M}(A) - h(I)$.

Într-adevăr, dacă $E \subset \mathcal{M}(I)$ este închisă, atunci $E = h_I(k_I(E))$ deci, din f) :

$$\varphi(E) = h(I \cap k(\varphi(E))) - h(I),$$

de unde rezultă imediat că $\varphi(E)$ este închisă în $\mathcal{M}(A) - h(I)$.

b) Pentru orice $P \subset I$ avem

$$h_I(P) = \varphi^{-1}(h(P)).$$

Într-adevăr, $m \in h_I(P) \Leftrightarrow m \in \mathcal{M}(I)$, $m \supset P \Leftrightarrow \varphi(m) \supset P$, $m \in \mathcal{M}(I) \Leftrightarrow \varphi(m) \in h(P)$, $m \in \mathcal{M}(I) \Leftrightarrow m \in \varphi^{-1}(h(P))$.

i) Dacă $F_0 \subset \mathcal{M}(A) - h(I)$ este închisă în $\mathcal{M}(A) - h(I)$, atunci $\varphi^{-1}(F_0)$ este închisă în $\mathcal{M}(I)$.

Într-adevăr, dacă $F_0 \subset \mathcal{M}(A) - h(I)$ este închisă în $\mathcal{M}(A) - h(I)$, atunci, notînd $F = h(I)$, $F \cup F_0$ este închisă în $\mathcal{M}(A)$, deci $F \cup F_0 = h(k(F \cup F_0)) = h(k(F)) \cup h(k(F_0)) = F \cup h(k(F_0)) = h(I) \cup h(k(F_0)) = h(I \cap k(F_0))$, după cum rezultă din teorema 4.1, pct. d) şi teorema 3.2, pct. c). Din h) rezultă atunci

$$\varphi^{-1}(F_0) = \varphi^{-1}(F \cup F_0) = \varphi^{-1}(h(I \cap k(F_0)) = h_I(I \cap k(F_0)),$$

iar $h_I(I \cap k(F_0))$ este închisă în $\mathcal{M}(I)$, după cum rezultă din teorema 3.1, pct. d).

Din b), c), g) şi i) rezultă că φ este un omeomorfism al spaţiului $\mathcal{M}(I)$ pe spaţiul $\mathcal{M}(A) - h(I)$.

Teorema este demonstrată.

În cele ce urmează, vom identifica spaţiul $\mathcal{M}(I)$ cu subspaţiul $\mathcal{M}(A) - h(I)$ al spaţiului $\mathcal{M}(A)$ prin omeomorfismul φ, introdus în demonstraţia teoremei precedente, şi pe care îl vom numi *omeomorfismul canonic*.

TEOREMA 4.10. *Dacă $I \subset A$ este un ideal al inelului A și dacă $\mathcal{M}(A/I)$ este spațiul structural al inelului $A/1$, atunci $\mathcal{M}(A/I)$ este omeomorf cu $h(I)$.*

Demonstrație. În baza teoremei 1.3, pct. d), e). f), și g), pentru orice $M \in h(I)$, $\varphi_I(M)$ este un ideal maximal regulat al inelului A/I. Obţinem în acest mod o aplicaţie $\varphi_I : h(I) \to \mathcal{M}(A/I)$. În baza aceleiași teoreme, φ_I este biunivocă şi $\varphi_I(h(I)) = \mathcal{M}(A/I)$. Vom arăta că φ_I este un omeomorfism.

a) Pentru orice $\hat{E} \subset \mathcal{M}(A/I)$, fie $\hat{k}(\hat{E}) = \bigcap\limits_{\hat{M} \in \hat{E}} \hat{M}$. Atunci $\hat{k}(\varphi_I(E)) = \varphi_I(k(E))$, pentru orice $E \subset h(I)$. Într-adevăr, dacă $\hat{x} = \varphi_I(x)$, atunci $\hat{x} \in \hat{k}(\varphi_I(E)) \Leftrightarrow \hat{x} \in \hat{M}$, $\hat{M} \in \varphi_I(E) \Leftrightarrow \hat{x} \in \varphi_I(M)$, $M \in E \Leftrightarrow x \in M$, $M \in E \Leftrightarrow x \in k(E) \Leftrightarrow \hat{x} \in \varphi_I(k(E))$.

b) Pentru orice $\hat{E} \subset A/I$, fie $\hat{h}(\hat{E}) = \{\hat{M};\ \hat{M} \in \mathcal{M}(A/I),\ \hat{M} \supset \hat{E}\}$. Atunci pentru orice $E \subset A$, pentru care $\varphi_I^{-1}(\varphi_I(E)) = E$, avem $\hat{h}(\varphi_I(E)) = \varphi_I(h(E))$. Într-adevăr, $\hat{M} \in \hat{h}(\varphi_I(E)) \Leftrightarrow \hat{M} \supset \varphi_I(E)$, $\hat{M} \in \mathcal{M}(A/I) \Leftrightarrow M = \varphi_I^{-1}(\hat{M}) \supset \varphi_I^{-1}(\varphi_I(E)) = E$, $M \in h(1) \Leftrightarrow M \in h(E) \Leftrightarrow \hat{M} \in \varphi_I(h(E))$.

c) Dacă $F \subset h(I)$, atunci $\varphi_I^{-1}(\varphi_I(k(F))) = k(F)$. Într-adevăr, dacă $x \in \varphi_I^{-1}(\varphi_I(k(F)))$, atunci $\varphi_I(x) \in \varphi_I(k(F))$, deci există $y \in k(F)$, astfel încît $x - y \in I$. Dar $F \subset h(I) \Rightarrow k(F) \supset k(h(I)) \supset I$, în baza teoremei 3.1, pct. a) şi c), deci $x = y + i \in k(F)$. Prin urmare $\varphi_I^{-1}(\varphi_I(k(F))) \subset k(F)$. Incluziunea opusă fiind evidentă, afirmaţia este demonstrată.

d) Dacă $F \subset h(I)$ este închisă, atunci $\varphi_I(F)$ este închisă în $\mathfrak{M}(A/I)$. Într-adevăr, $F \subset h(I)$ fiind închisă în $h(I)$, iar $h(I)$ fiind închisă în $\mathfrak{M}(A)$, în baza teoremei 3.1, pct. d), deducem că F este închisă în $\mathfrak{M}(A)$, deci $F = h(k(F))$. Dar atunci din *b*) şi *c*) deducem

$$\varphi_I(F) = \varphi_I(h(k(F))) = \hat{h}(\varphi_I(k(F))) = \hat{h}(\hat{k}(\varphi_I(F))),$$

ceea ce arată că $\varphi_I(F)$ este închisă în $\mathfrak{M}(A/I)$.

e) Fie acum $\hat{F} \subset \mathfrak{M}(A/I)$, închisă, şi $F = \varphi_I^{-1}(\hat{F})$. Avem $F \subset h(I)$. Din *b*) şi *c*) deducem

$$\varphi_I(h(k(F))) = \hat{h}(\varphi_I(k(F))) = \hat{h}(\hat{k}(\varphi_I(F))),$$

ţinînd seama şi de *a*). Rezultă de aici, $\hat{F}$ fiind închisă,

$$h(k(F)) = \varphi_I^{-1}(\hat{h}(\hat{k}(\varphi_1(F)))) = \varphi_I^{-1}(\hat{h}(\hat{k}(\hat{F}))) = \varphi_I^{-1}(\hat{F}) = F,$$

ceea ce arată că $\varphi_I^{-1}(\hat{F})$ este închisă.

Din *d*) şi *e*) rezultă că φ_I este bicontinuă şi deci φ_I este un omeomorfism. Teorema este demonstrată.

În cele ce urmează vom identifica pe $\mathfrak{M}(A/I)$ cu $h(I)$ prin omeomorfismul φ_I, introdus în demonstraţia teoremei precedente, pe care îl vom numi *omeomorfismul canonic*.

TEOREMA 4.11. *Dacă inelul A este semisimplu şi dacă $I \subset A$ este un ideal al inelului A, atunci şi inelul I este semisimplu. Dacă $I = k(F)$ şi dacă inelul I este semisimplu, atunci şi inelul A este semisimplu.*

Demonstraţie. În baza teoremei 2.1, avem

$$R(I) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A) - h(I)} (M \cap I) = I \cap \Big(\bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A) - h(I)} M\Big) \subset k(h(I)) \cap \Big(\bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A) - h(I)} M\Big) =$$

$$= \Big(\bigcap_{M \in h(I)} M\Big) \cap \Big(\bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A) - h(I)} M\Big) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A)} M = R(A),$$

deci $R(I) = \{0\}$, dacă $R(A) = \{0\}$.

Dacă $I = k(F)$, atunci $I = k(h(I))$, în baza teoremei 3.1, pct. d); prin urmare

$$R(I) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A) - h(I)} (M \cap I) = I \cap \Big(\bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A) - h(I)} M\Big) = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}(A)} M = R(A).$$

În particular, de aici rezultă că $R(A) = \{0\}$, dacă $R(I) = \{0\}$. Teorema este demonstrată.

B) Cazul algebrelor. 1. Fie A o algebră peste corpul C şi $\mathfrak{M}(A)$ mulţimea idealelor maximale regulate ale algebrei A. Vom defini un operator de închidere $F \to \overline{F}$ în mulţimea părţilor lui $\mathfrak{M}(A)$, punînd $\overline{F} = h(k(F))$.

TEOREMA 4.12. *Operatorul* $F \to \overline{F}$ $(F \subset \mathcal{M}(A))$, *definit mai sus, are următoarele proprietăți* :

a) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ *și* $F \subset \overline{F}$, *pentru orice* $F \subset \mathcal{M}(A)$.

b) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow \overline{F}_1 \subset \overline{F}_2$, *pentru orice* $F_1, F_2 \subset \mathcal{M}(A)$.

c) $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$, *pentru orice* $F \subset \mathcal{M}(A)$.

d) $\overline{F_1 \cup F_2} = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2$, *pentru orice* $F_1, F_2 \subset \mathcal{M}(A)$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.1.

Din teorema 4.12 rezultă că definind drept mulțimi închise în $\mathcal{M}(A)$ acele mulțimi $F \subset \mathcal{M}(A)$, pentru care $F = \overline{F}$, introducem pe $\mathcal{M}(A)$ o topologie ([1], [2], [3], [5], [8], [12]), în care toate mulțimile de forma $\overline{F}$ sînt închise, iar $\overline{F}$ este tocmai aderența mulțimii $F \subset \mathcal{M}(A)$.

Vom numi *spațiu structural* al algebrei A, mulțimea $\mathcal{M}(A)$, topologizată în modul indicat mai sus.

TEOREMA 4.13. a) *Spațiul* $\mathcal{M}(A)$ *este un spațiu* (T_1).

b) *Dacă* A *are element unitate la stînga* (*sau la dreapta*), *atunci* $\mathcal{M}(A)$ *este compact.*

c) *Dacă* $\mathcal{M}(A)$ *este compact, atunci din orice familie* $(I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *de ideale regulate la stînga* (*sau la dreapta*) *ale algebrei* A, *astfel încît* $\bigvee\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha = A$, *se poate extrage o subfamilie finită* $\{I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}, \ldots, I_{\alpha_n}\} \subset (I_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, *astfel încît* $\bigvee\limits_{i=1}^{n} I_{\alpha_i} = A$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.2.

Și în cazul algebrelor este posibil ca spațiul structural să fie neseparat, după cum vom arăta prin exemple. De aceea este indicată cunoașterea unui criteriu cu ajutorul căruia să putem recunoaște dacă spațiul structural al algebrei A este, sau nu, separat. În acest scop, vom spune că două elemente $x_0, y_0 \in A$ sînt *disjuncte*, dacă pentru orice $M \in \mathcal{M}(A)$ avem $x_0 \in M$ sau $y_0 \in M$.

TEOREMA 4.14. *Dacă algebra* A *este semisimplă și dacă elementele* $x_0, y_0 \in A$ *sînt disjuncte, atunci* $x_0 y_0 = 0$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.3.

TEOREMA 4.15. *Pentru ca spațiul structural* $\mathcal{M}(A)$ *al algebrei* A *să fie separat este necesar și suficient ca pentru orice* $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(A)$, *cu* $M_1 \neq M_2$, *să existe două elemente disjuncte* $e_1, e_2 \in A$, *respectiv element unitate modulo* M_1 *și element unitate modulo* M_2.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.4.

TEOREMA 4.16. *Dacă* $M_0 \in \mathcal{M}(A)$ *și* $x_0 \in A$, *dar* $x_0 \notin M_0$, *atunci există o vecinătate* U *a lui* M_0, *astfel încît* $x_0 \notin M$, *pentru orice* $M \in U$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.5.

2. Pentru orice $x_0 \in A$, vom numi *suport* al elementului x_0 mulțimea $\overline{\complement h(\{x_0\})}$, pe care o vom nota cu $s(x_0)$. De asemenea, vom nota cu $I(x_0)$ idealul $k(h(\{x_0\}))$.

TEOREMA 4.17. a) *Pentru orice* $x \in I(x_0)$ *avem* $s(x) \subset s(x_0)$.

b) *Pentru orice* $x_1, x_2 \in A$ *și* $\alpha \in C$, *avem*

i) $s(\alpha x_1) = s(x_1 \alpha) = s(x_1)$, *dacă* $\alpha \neq 0$, $s(x_1 \alpha) = s(\alpha x_1) = \emptyset$, *dacă* $\alpha = 0$.

ii) $s(x_1 + x_2) \subset s(x_1) \cup s(x_2)$.

iii) $s(x_1 x_2) \subset s(x_1) \cap s(x_2)$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.6, cu excepția pct. b), i). Dacă $\alpha = 0$, atunci $\alpha x_1 = x_1 \alpha = 0$, deci $h(\{\alpha x_1\}) = h(\{x_1 \alpha\}) = \mathfrak{M}(A)$, de unde rezultă imediat $s(\alpha x_1) = s(x_1 \alpha) = \emptyset$, în baza teoremei 4.12, pct. a). Dacă $\alpha \neq 0$, atunci $h(\{\alpha x_1\}) = h(\{x_1 \alpha\}) = h(\{x_1\})$, de unde rezultă imediat $s(x_1) = s(\alpha x_1) = s(x_1 \alpha)$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 4.18. *Pentru orice* $E \subset \mathfrak{M}(A)$, *mulțimea*

$$I(E) = \{x\,;\, x \in A,\ s(x) \subset E\}$$

este un ideal al algebrei A.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.6.

3. Vom spune că elementul $e_0 \in A$ este *unitate locală*, în $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, dacă există o vecinătate U_0 a lui M_0, astfel încît e_0 să fie element unitate modulo M pentru orice $M \in U_0$.

Pentru orice $x_0 \in A$, vom nota cu $u(x_0)$ mulțimea tuturor idealelor maximale regulate $M \in \mathfrak{M}(A)$, pentru care x_0 este un element unitate modulo M.

TEOREMA 4.19. a) *Pentru orice* $x_0 \in A$, *avem* $u(x_0) \subset s(x_0)$.

b) *Pentru orice* $x_0 \in A$, *mulțimea* $u(x_0)$ *este închisă și compactă în* $\mathfrak{M}(A)$.

c) $x_0 \in A$ *este unitate locală în* M_0 *dacă și numai dacă* $M_0 \in \operatorname{int} u(x_0)$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.8.

4. La acest punct vom studia legătura dintre spațiul structural al algebrei A și spațiile structurale al algebrei I și al algebrei A/I, unde $I \subset A$ este un ideal oarecare al algebrei A.

TEOREMA 4.20. *Fie* I *un ideal al algebrei* A și $\mathfrak{M}(I)$ *spațiul structural al algebrei* I. *Atunci* $\mathfrak{M}(I)$ *este omeomorf cu* $\mathfrak{M}(A) - h(I)$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.9, utilizînd însă teorema de prelungire 2.2.

Și în cazul algebrelor, vom identifica spațiul $\mathfrak{M}(I)$ cu subspațiul $\mathfrak{M}(A) - h(I)$ al spațiului $\mathfrak{M}(A)$, prin omeomorfismul φ dat de corespondența $m \to M$, descrisă în teorema 2.2. Și aici vom spune că φ este *omeomorfismul canonic* al lui $\mathfrak{M}(I)$ pe $\mathfrak{M}(A) - h(I)$.

TEOREMA 4.21. *Dacă* $I \subset A$ *este un ideal al algebrei* A, *și dacă* $\mathfrak{M}(A/I)$ *este spațiul structural al algebrei* A/I, *atunci* $\mathfrak{M}(A/I)$ *este omeomorf cu* $h(I)$.

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.10, utilizînd însă teorema 1.26.

Vom identifica în cele ce urmează pe $\mathfrak{M}(A/I)$ cu subspațiul $h(I)$ al spațiului $\mathfrak{M}(A)$ prin *omeomorfismul canonic* corespunzător φ_I.

TEOREMA 4.22. *Dacă algebra* A *este semisimplă și dacă* $I \subset A$ *este un ideal al algebrei* A, *atunci și algebra* I *este semisimplă. Dacă* $I = k(F)$ *și dacă algebra* I *este semisimplă, atunci și algebra* A *este semisimplă.*

Demonstrație. Similară cu a teoremei 4.11.

§ 5. ADJUNCŢIUNEA UNUI ELEMENT UNITATE

În acest paragraf vom arăta cum se poate adjuncţiona unui inel, sau unei algebre, A un element unitate, chiar dacă inelul, sau algebra, A are element unitate. Construcţia, însă, diferă în cele două cazuri şi, din acest motiv, paralelismul dintre teoria construită pentru cazul inelului şi teoria construită pentru cazul algebrei, care a avut loc pînă aici, încetează. Construcţia pe care o facem în cazul algebrelor, este o extindere a construcţiei făcute în [3], [4], [5]. Construcţia de mai jos, a inelului A^+, se găseşte în [17].

A) Cazul inelelor. 1. Fie A un inel oarecare şi Z inelul intregilor raţionali. Fie $A^+ = A \times Z$. Vom introduce pe A^+ o structură de inel punînd următoarele definiţii pentru adunarea şi înmulţirea din A^+ :

Dacă $(x, m) \in A^+$ şi $(y, n) \in A^+$, unde $x, y \in A$ şi $m, n \in Z$, atunci :

$$\alpha) \quad (x, m) + (y, n) = (x + y, m + n),$$

$$\beta) \quad (x, m) \cdot (y, n) = (xy + my + nx, mn).$$

În cazul înmulţirii, definită în β), produsele my şi nx trebuie înţelese interpretînd pe m şi n drept adiţionatori.

Vom defini o aplicaţie $\psi : A \rightarrow A^+$ punînd $\psi(x) = (x, 0)$, pentru orice $x \in A$.

TEOREMA 5.1. a) *Mulţimea A^+, înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite la pct. α) şi β) de mai sus, este un inel cu element unitate.*

b) *Aplicaţia ψ, definită mai sus, este un izomorfism al inelului A pe un subinel A° al inelului A^+.*

c) *A° este un ideal al inelului A^+, iar A^+/A° este izomorf cu Z.*

d) *Orice ideal $I^\circ \subset A^\circ$ al inelului A° este ideal şi în inelul A^+.*

Demonstraţie. a) Este uşor de verificat că, definind adunarea şi înmulţirea în A^+ ca la pct. α) şi β), axiomele inelului sînt îndeplinite. În plus, observăm că

$$(x, m)(0, 1) = (0, 1)(x, m) = (x, m),$$

pentru orice $(x, m) \in A^+$. Deci $(0, 1)$ este elementul unitate al inelului A^+.

b) Este evident că $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$, $\psi(xy) = \psi(x) \times \psi(y)$, pentru orice $x, y \in A$ şi că $\psi(x) = \psi(y) \Rightarrow x = y$. $A^\circ = \psi(A) = \{(x, 0) ; x \in A\}$ este subinelul lui A^+ cu care A este izomorf prin izomorfismul ψ.

c) Dacă $(x, 0) \in A^\circ$ şi $(y, m) \in A^+$, atunci $(x, 0)(y, m) = (xy + mx, 0) \in A^\circ$ şi $(y, m)(x, 0) = (yx + mx, 0) \in A^\circ$, deci A° este ideal al inelului A^+.

$(x, m) - (y, n) \in A^\circ$ dacă şi numai dacă $m = n$. Prin urmare, orice clasă din A^+/A^0 are aceeaşi componentă în Z pentru fiecare reprezentant al ei. Dacă $\xi \in A^+/A^\circ$, punînd $\theta(\xi) = n$, unde n este determinat de relaţia : există $x \in A$, astfel încît $(x, n) \in \xi$, obţinem o aplicaţie $\theta : A^+/A^\circ \rightarrow Z$, care se dovedeşte a fi un izomorfism al lui A^+/A° pe Z.

d) Fie $I^\circ \subset A^\circ$ un ideal al inelului A°. Dacă $(x, m) \in I^\circ$ şi $(y, n) \in A^+$, atunci, în primul rînd, avem $m = 0$. Rezultă

$$(x, 0)(y, n) = (xy + nx, 0) = (xy, 0) + n(x, 0) = (x, 0)(y, 0) + n(x, 0) \in I^\circ$$

şi

$$(y, n)(x, 0) = (yx + nx, 0) = (yx, 0) + n(x, 0) = (y, 0)(x, 0) + n(x, 0) \in I^\circ$$

şi teorema este demonstrată.

Vom utiliza mai jos următoarea lemă (v. [2]).

LEMA 5.2. *Spaţiul structural* $\mathcal{M}(Z)$ *al inelului* Z *este compact neseparat.*

Demonstraţie. Faptul că $\mathcal{M}(Z)$ este compact rezultă imediat din teorema 4.2, pct. b). Rămîne să arătăm că $\mathcal{M}(Z)$ nu este separat. Pentru aceasta, să observăm, în primul rînd, că orice ideal în Z, deci şi orice ideal maximal, este un ideal principal [6]. În al doilea rînd, mulţimea idealelor maximale ale inelului Z, care sînt toate regulate, deoarece inelul Z are element unitate, poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor prime $\geqslant 2$, prin

$$p \to (p),$$

unde cu (p) am notat idealul principal generat de numărul p.

Aderenţa oricărei mulţimi finite din $\mathcal{M}(Z)$ coincide, evident, cu ea însăşi, deoarece $\mathcal{M}(Z)$ este un spaţiu (T_1), după cum ştim din teorema 4.2, pct. a).

Să arătăm că aderenţa oricărei mulţimi infinite din $\mathcal{M}(Z)$ coincide cu $\mathcal{M}(Z)$.

Într-adevăr, fie $E = \{p_1, p_2, \ldots\}$ o mulţime, infinită, de elemente din $\mathcal{M}(Z)$, reprezentate prin numere prime $p_i \geqslant 2$, $i = 1, 2, \ldots$ Atunci $k(E) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} (p_i) = \{0\}$, deoarece nici un număr nenul din Z nu are o infinitate de divizori primi distincţi. Din teorema 3.1, pct. b), deducem $\overline{E} = h(\{0\}) = \mathcal{M}(Z)$. De aici deducem că singurele mulţimi închise din $\mathcal{M}(Z)$ sînt mulţimile finite şi mulţimea $\mathcal{M}(Z)$ însăşi. Prin urmare, orice mulţime deschisă nevidă din $\mathcal{M}(Z)$ este complementară unei mulţimi finite. De aici rezultă că pentru orice $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(Z)$ şi orice vecinătăţi U_1, U_2, respectiv a lui M_1 şi M_2, avem $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

Cu aceasta lema este demonstrată.

COROLARUL 5.3. *Spaţiul* $\mathcal{M}(A^+)$ *nu este separat.*

Demonstraţie. În baza teoremei 4.10, $h^+(A^\circ)$ este omeomorf cu $\mathcal{M}(A^+/A^\circ)$, care în baza teoremei 5.1, pct. c), poate fi identificat cu $\mathcal{M}(Z)$ (cu h^+ am notat operatorul h corespunzător inelului A^+). Deoarece, în baza lemei 5.2, $\mathcal{M}(Z)$ nu este separat, deducem că $h^+(A^\circ)$, care este un subspaţiu al lui $\mathcal{M}(A^+)$, nu este separat; deci nici $\mathcal{M}(A^+)$ nu este separat. Corolarul este demonstrat.

2. Un caz particular interesant este acela în care inelul A are caracteristică finită m. Cu alte cuvinte, există un număr natural $m > 0$, astfel încît să avem $mx = 0$, pentru orice $x \in A$, unde factorul m este interpretat ca adiţionator. În acest caz putem adjuncţiona lui A un element unitate în modul următor.

Fie $A_m^+ = A \times Z_m$, unde Z_m este inelul claselor de resturi modulo m din inelul Z al întregilor raţionali.

Introducem pe A_m^+ o structură de inel definind adunarea şi înmulţirea în modul următor

$$\alpha') \; (x,\; C_k) + (y,\; C_l) = (x + y,\; C_k + C_l)$$

$$\beta') \; (x,\; C_k) \,.\, (y,\; C_l) = (xy + lx + ky,\; C_kC_l),$$

unde C_k este clasa din Z_m de reprezentant k, iar factorii l şi k, care înmulţesc pe x şi y în β'), sînt interpretaţi ca adiţionatori.

Vom defini o aplicaţie $\psi_m : A \to A_m^+$, punînd $\psi_m(x) = (x,\; 0)$, pentru orice $x \in A$.

TEOREMA 5.4. a) *Mulţimea* A_m^+, *înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire, definite la pct.* α') *şi* β') *de mai sus, este un inel cu element unitate.*

b) *Aplicaţia* ψ_m *definită mai sus, este un izomorfism al inelului* A *pe un subinel* A° *al inelului* A_m^+.

c) A° *este un ideal al inelului* A_m^+, *iar* A_m^+/A° *este izomorf cu* Z_m.

d) *Orice ideal* $I^\circ \subset A^\circ$ *al inelului* A° *este ideal şi în inelul* A_m^+.

Demonstraţie. Similară cu a teoremei 5.1.

Deoarece inelul Z_m este finit, spaţiul $\mathcal{M}(Z_m)$ este finit şi deci separat. De aceea, pentru anumite inele A, de caracteristică $m > 0$, este posibil ca spaţiul $\mathcal{M}(A_m^+)$ să fie separat. De aceea, ţinînd seama de rezultatele pe care le obţinem mai departe pentru cazul algebrelor peste un corp, socotim că prezintă interes studiul acelor inele A, de caracteristică $m > 0$, pentru care spaţiul structural $\mathcal{M}(A_m^+)$ este separat. În cazul în care m este un număr prim, C_m este corp, iar A poate fi interpretat ca algebră peste corpul C_m. Acest caz particular se încadrează, de aceea, în teoria pe care o dezvoltăm ulterior.

B) Cazul algebrelor. Fie A o algebră peste corpul C şi $A^* = A \times C$. Putem introduce pe A^* o structură de algebră peste corpul C, punînd următoarele definiţii pentru adunarea şi înmulţirea din A^* şi pentru înmulţirile cu scalari:

$$\alpha'') \; (x,\; \alpha) + (y,\; \beta) = (x + y,\; \alpha + \beta),$$

$$\beta'') \; (x,\; \alpha) \,.\, (y,\; \beta) = (xy + \alpha y + x\beta,\; \alpha\beta),$$

$$\gamma'') \; \lambda\,(x,\; \alpha) = (\lambda x,\; \lambda\alpha),$$

$$(x,\; \alpha)\,\lambda = (x\lambda,\; \alpha\lambda),$$

pentru orice $x,\; y \in A$ şi orice $\alpha,\; \beta,\; \lambda \in C$.

Vom defini o aplicaţie $\theta : A \to A^*$ punînd $\theta(x) = (x, 0)$, pentru orice $x \in A$.

TEOREMA 5.5. a) *Mulţimea* A^*, *înzestrată cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite la pct.* α''), β'') *şi* γ'') *de mai sus, este o algebră cu element unitate, peste corpul* C.

b) *Aplicaţia* θ, *definită mai sus, este un izomorfism al algebrei* A *pe o subalgebră* A° *a algebrei* A^*.

c) A° *este un ideal maximal al algebrei* A^*, *iar* A^*/A° *este izomorfă cu corpul* C.

d) *Orice ideal $I^\circ \subset A^\circ$ al algebrei A° este ideal şi în algebra A^*.*

Demonstraţie. a) Este uşor de verificat că definind operaţiile de adunare şi înmulţire în A^*, aşa cum am arătat la pct. α), β'') şi γ'') de mai sus, mulţimea A^* devine o algebră peste corpul C şi că $(0, 1)$ este elementul unitate al algebrei A^*.

b) θ aplică algebra A izomorf pe subalgebra A° a algebrei A^*, dată de $A^\circ = \{(x, 0)\,;\ x \in A\}$.

c) Dacă $(x, 0) \in A^\circ$ şi $(y, \lambda) \in A^*$, atunci $(x, 0)\ (y, \lambda) = (xy + x\lambda, 0) \in A^\circ$ şi $(y, \lambda)\ (x, 0) = (yx + \lambda x, 0) \in A^\circ$, ceea ce este suficient pentru a stabili că A° este ideal al algebrei, ţinînd seama şi de faptul că pentru orice $\alpha \in C$, avem $\alpha\,(x, 0) = (\alpha x, 0)$ şi $(x, 0)\ \alpha = (x\alpha, 0)$, oricare ar fi $x \in A$.

Să arătăm că A° este ideal maximal al algebrei A^*. Acest lucru va rezulta din faptul că în orice corp idealul $\{0\}$ este ideal maximal, şi din teorema 1.26, pct. g), dacă demonstrăm că algebra A^*/A° este izomorfă cu C.

Într-adevăr, fie $\xi \in A^*/A^\circ$. Deoarece $(x, \lambda) \in \xi$ şi $(y, \mu) \in \xi$ numai dacă $(x - y, \lambda - \mu) \in A^\circ$, deducem că pentru orice doi reprezentanţi, (x, λ) şi (y, μ), ai lui ξ, avem $\lambda = \mu$. Reciproc, dacă $\lambda = \mu$, atunci reprezentanţii (x, λ) şi (y, μ) definesc aceeaşi clasă. Punînd $\Pi\,(\xi) = \lambda$, unde $\lambda \in C$ este astfel încît (x, λ) să fie un reprezentant al lui ξ, definim o aplicaţie $\Pi : A^*/A^\circ \to C$ despre care putem afirma că este un izomorfism al algebrei A^*/A° pe corpul C (pe care îl putem gîndi chiar algebră peste el însuşi).

d) Fie $I^\circ \subset A^\circ$ un ideal al algebrei A°. Să arătăm că I° este şi ideal al algebrei A^*. Pentru aceasta este suficient să observăm că din $(x, 0) \in I^\circ$ şi $(y, \lambda) \in A^*$ rezultă :

$$(x, 0)\,(y, \lambda) = (xy + x\lambda, 0) = (xy, 0) + (x\lambda, 0) = (x, 0)\,(y, 0) + (x, 0)\,\lambda \in I^\circ$$

şi

$$(y, \lambda)\,(x, 0) = (yx + \lambda x, 0) = (yx, 0) + (\lambda x, 0) = (y, 0)\,(x, 0) + \lambda\,(x, 0) \in I^\circ.$$

Teorema este demonstrată.

COROLARUL 5.6. *Pentru orice algebră A peste corpul C, spaţiul structural $\mathfrak{M}\,(A)$ este omeomorf cu un spaţiu compact, care verifică axioma de separare (T_1) şi din care s-a scos un punct.*

Demonstraţie. Deoarece A^* are element unitate, din teorema 4.13, pct. a) şi b), rezultă că $\mathfrak{M}\,(A^*)$ este un spaţiu compact care verifică axioma de separare (T_1). Deoarece, în baza teoremei 5.5, pct. c), A° este un ideal maximal, evident regulat, al algebrei A^*, deducem că $h^*\,(A^\circ) = \{A^\circ\}$, unde cu h^* am notat operatorul h pentru algebra A^*. În baza teoremei 4.20, $\mathfrak{M}\,(A^\circ)$ este omeomorf cu $\mathfrak{M}\,(A^*) - h^*\,(A^\circ) = \mathfrak{M}\,(A^*) - \{A^\circ\}$. Dar A şi A° fiind izomorfe, spaţiile lor structurale sînt, evident, omeomorfe. Corolarul este demonstrat.

În cele ce urmează vom identifica algebra A cu imaginea ei A° în A^* prin izomorfismul θ.

TEOREMA 5.7. *Dacă $I \subset A$ este un ideal al algebrei A, atunci algebra $(A/I)^*$ este izomorfă cu A^*/I.*

Demonstrație. Într-adevăr, în primul rînd observăm că orice $x \in A^*$ se poate scrie în mod unic sub forma $x = x_0 + \lambda e$, unde $x_0 \in A$, $\lambda \in C$ și $e = (0, 1)$. În mod similar, orice $\xi \in (A/I)^*$ se poate scrie în mod unic sub forma $\xi = \xi_0 + \lambda \varepsilon$, unde $\xi_0 \in A/I$ și $\varepsilon = (0, 1) \in (A/I) \times C$. Apoi, dacă

$$x' = x'_0 + \lambda' e \in A^*,\ x'' = x''_0 + \lambda'' e \in A^*,$$

unde

$$x'_0,\ x''_0 \in A \text{ și } \lambda',\ \lambda'' \in C \text{ și } x' - x'' \in I, \text{ avem } \lambda' = \lambda'' \text{ și } x'_0 - x''_0 \in I.$$

Să asociem lui $\xi \in (A/I)^*$ pe $x_0 + \lambda e$, unde $x_0 \in \xi_0$. Atunci aplicația $\xi \to \{x_0 + \lambda e;\ x_0 \in \xi_0\}$ este un izomorfism al lui $(A/I)^*$ pe A^*/I. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 5.8. *Pentru orice* $x_0 \in A$, *mulțimea* $u(x_0)$ *este închisă în* $\mathfrak{M}(A^*)$.

Demonstrație Fie $x_0 \in A$ și $M_0 \in h^*(k^*(u(x_0)))$. Atunci $M_0 \supset k^*(u(x_0))$. Dar x_0 fiind element unitate modulo M, pentru orice $M \in u(x_0)$, avem $xx_0 - x \in M$ și $x_0x - x \in M$, pentru orice $x \in A^*$ și orice $M \in u(x_0)$, după cum rezultă din teorema 2.2 și din faptul că din $x_0 \in A$ rezultă $A \notin u(x_0)$. Prin urmare, $xx_0 - x \in k^*(u(x_0))$ și $x_0x - x \in k^*(u(x_0))$, pentru orice $x \in A^*$.

Rezultă de aici că x_0 este element unitate modulo $k^*(u(x_0))$ bilateral, în A^*, deci x_0 este element unitate modulo M_0, după cum rezultă din teorema 1.32. Prin urmare, $M_0 \in u(x_0)$, ceea ce arată că $h^*(k^*(u(x_0))) \subset u(x_0)$, de unde, cu teorema 3.3, pct. c), rezultă $h^*(k^*(u(x_0))) = u(x_0)$, ceea ce arată că mulțimea $u(x_0)$ este închisă în $\mathfrak{M}(A^*)$. Teorema este demonstrată.

Observație. În cursul demonstrației s-a folosit faptul că dacă $x_0 \in A$, atunci $u(x_0) = u^*(x_0)$, unde $u^*(x_0)$ este mulțimea corespunzătoare algebrei A^*.

§ 6. ALGEBRE REGULATE

În acest paragraf vom dezvolta teoria algebrelor regulate, generalizînd teoria algebrelor Banach regulate [3], [4], [5], [8], [9], [11], [12], [13].

Vom spune că algebra A este *regulată* dacă spațiul structural $\mathfrak{M}(A^*)$ al algebrei A^* este separat.

TEOREMA 6.1. *Dacă A este o algebră regulată și dacă spațiul structural $\mathfrak{M}(A)$ este compact, atunci radicalul $R(A)$ al algebrei A este bilateral regulat.*

Demonstrație. *a*) Să observăm, în primul rînd, că radicalul $R(A)$ al algebrei A coincide cu radicalul $R(A^*)$ al algebrei A^*, după cum rezultă imediat, ținînd seama de teorema 2.2 și de teorema 5.5, pct. c).

b) În baza teoremei 4.21, spațiul structural $\mathfrak{M}(A^*/R(A))$ este omeomorf cu $h^*(R(A))$, unde cu h^* am notat operatorul h corespunzător algebrei A^*. Dar, în baza teoremei 3.3, pct. b), ținînd seama și de pct. a) de mai sus, deducem că $h^*(R(A)) = \mathfrak{M}(A^*)$, care este separat prin ipoteză. În baza teoremei 5.7, $\mathfrak{M}(A^*/R(A))$ este omeomorf cu spațiul structural $\mathcal{M}((A/R(A))^*)$. Rezultă că algebra $A/R(A)$ este regulată. Ținînd seama de teorema 1.46 și de teorema 1.24, pct. a), deducem că teorema 6.1 va fi demonstrată dacă demonstrăm

TEOREMA 6.2. *Dacă A este o algebră semisimplă regulată și dacă spațiul $\mathcal{M}(A)$ este compact, atunci A are element unitate.*

Demonstrație. A fiind ideal maximal regulat în algebra A^*, din teorema 4.20 deducem că $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A^*) - \{A\}$.

Deoarece $\mathcal{M}(A^*)$ este, prin ipoteză, separat, iar $\mathcal{M}(A)$ compact, deducem că $\mathcal{M}(A)$ este submulțime închisă a lui $\mathcal{M}(A^*)$. Prin urmare există un ideal $I \subset A^*$, astfel încît $h^*(I) = \mathcal{M}(A)$ și $I = k^*(\mathcal{M}(A))$, unde h^* și k^* sînt operatorii h și k, gîndiți în A^*. Rezultă că $I = \bigcap\limits_{M\in\mathcal{M}(A)} M$, de unde, ținînd seama că A este semisimplă prin ipoteză, $I \cap A = A \cap (\bigcap\limits_{M\in\mathcal{M}(A)} M) = \bigcap\limits_{M\in\mathcal{M}(A)} (M \cap A) = \{0\}$, avînd în vedere și teorema 2.2.

Dacă am avea $I = \{0\}$, ar rezulta $h^*(I) = \mathcal{M}(A^*) \neq \mathcal{M}(A)$, ceea ce este contradictoriu. Prin urmare $I \neq \{0\}$. Deducem că există $(x_0, \alpha_0) \in I$, cu $(x_0, \alpha_0) \neq 0$. Dar atunci $\alpha_0 \neq 0$, deoarece în caz contrar am avea $(x_0, \alpha_0) \in A$, de unde, ținînd seama de rezultatul obținut mai sus, ar rezulta $x_0 = 0$, deci $(x_0, \alpha_0) = 0$, ceea ce este, din nou, contradictoriu. Deducem că $\alpha_0^{-1}(x_0, \alpha_0) \in I$, deci există un element de forma $(u_0, 1) \in I$, unde $u_0 = \alpha_0^{-1} x_0$ aparține, evident, lui A.

Dacă $(x, \alpha) \in I$, atunci $(x, \alpha) - \alpha(u_0, 1) \in I \cap A$, deci $x - \alpha u_0 = 0$, ceea ce arată că $x = \alpha u_0$. Rezultă că orice element din I este de forma $(\alpha u_0, \alpha)$, $\alpha \in C$ și că, reciproc, orice element de această formă aparține lui I.

I fiind ideal în A^*, deducem că pentru orice $(x, \lambda) \in A^*$ avem $(x, \lambda) \times \times (u_0, 1) \in I$ și $(u_0, 1)(x, \lambda) \in I$, prin urmare $(xu_0 + x + \lambda u_0, \lambda) \in I$ și $(u_0 x + u_0 \lambda + x, \lambda) \in I$, de unde deducem că $(xu_0 + x + \lambda u_0, \lambda) = (\lambda u_0, \lambda)$ și $(u_0 x + u_0\lambda + x, \lambda) = (\lambda u_0, \lambda)$. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} xu_0 + x &= 0, \\ u_0 x + u_0 \lambda + x &= \lambda u_0, \end{aligned} \tag*{1)}$$

pentru orice $x \in A$ și orice $\lambda \in C$. În particular, făcînd $x = 0$, obținem din a doua egalitate de mai sus

$$u_0 \lambda = \lambda u_0, \tag{2}$$

pentru orice $\lambda \in C$. Egalitățile (1) devin

$$\begin{aligned} xu_0 + x &= 0, \\ u_0 x + x &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

pentru orice $x \in A$. Punînd $e = - u_0$, din (2) și (3) deducem

$$\begin{aligned} &\lambda e = e\lambda, &&\text{pentru orice } \lambda \in C, \\ &ex = xe = x, &&\text{pentru orice } x \in A. \end{aligned} \tag{4}$$

Egalitățile (4) arată, tocmai, că e este element unitate al lui A. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.3. *Pentru ca algebra A să fie regulată, este necesar și suficient ca următoarele două condiții să fie îndeplinite:*

a) *Spațiul structural $\mathfrak{M}(A)$ este separat.*

b) *Pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$ există două elemente unitate modulo M, e_0 și e_1, astfel încît $s(e_0) \subset u(e_1)$.*

Demonstrație. I) Să presupunem, în primul rînd, că A este algebră regulată. Atunci $\mathfrak{M}(A^*)$ este separat, și deci, în baza teoremei 5.5, pct. c) și a teoremei 4.20 și spațiul $\mathfrak{M}(A)$ este separat.

a) $x_0 + e$, unde $x_0 \in A$ și $e = (0,1)$, este forma generală a elementelor unitate modulo A din A^*. Într-adevăr, în baza teoremei 1.31, e fiind element unitate al algebrei A^*, orice element unitate modulo A este de forma indicată.

b) Pentru orice $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, în baza teoremei 1.38, există un element unitate modulo M_0 (în A^*), cuprins în A; fie el $e_0' \in A$. Ținînd seama de demonstrația teoremei 2.2, e_0' fiind și element unitate modulo $M_0 \cap A$ în A, avem $x + \lambda e \in M_0$ dacă și numai dacă $e_0'x + e_0'\lambda \in M_0 \cap A$.

c) Deoarece $\mathfrak{M}(A^*)$ este separat prin ipoteză, în baza teoremei 4.15 rezultă că există un element unitate $e_0' + m_0$ modulo M_0, în A^*, unde $m_0 \in M_0$, și un element unitate $x_0 + e$, modulo A, în A^*, unde $x_0 \in A$, astfel încît pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A^*)$ să avem $e_0' + m_0 \in M$, sau $x_0 + e \in M$. În particular, dacă $M = A$, trebuie să avem $e_0' + m_0 \in A$, sau $x_0 + e \in A$. Deoarece ultima apartenență nu poate avea loc, deducem că $e_0' + m_0 \in A$. Prin urmare $m_0 \in A$, ceea ce arată că $e_0 = e_0' + m_0 \in A$ este un element unitate modulo M_0, aflat în A.

Deducem că există un element unitate $e_0 \in A$, modulo M_0, în A^*, și un element $x_0 \in A$, astfel încît pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A^*)$ să avem $e_0 \in M$ sau $x_0 + e \in M$. Dar $x_0 + e \in M$ dacă și numai dacă $e_1 = -x_0$ este element unitate modulo M, în A^*, după cum rezultă din teorema 1.31.

Rezultă că există un element unitate $e_0 \in A$, modulo $M_0 \cap A$, în A, și un element $e_1 \in A$, astfel încît pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$ să avem $e_0 \in M$ sau e_1 este element unitate modulo M în A.

d) Fie $M \in \complement h(\{e_0\})$. Atunci $M \notin h(\{e_0\})$, deci $M \not\ni e_0$. Prin urmare pentru orice astfel de M avem $M \in u(e_1)$. Deci $\complement h(\{e_0\}) \subset u(e_1)$. Deoarece, în baza teoremei 4.19, mulțimea $u(e_1)$ este închisă, din incluziunea precedentă deducem $s(e_0) \subset u(e_1)$. Cu aceasta necesitatea condițiilor din enunțul teoremei este demonstrată.

II) Reciproc, să presupunem că condițiile a) și b), din enunțul teoremei sînt îndeplinite. Fie $M_1 \in \mathfrak{M}(A)$, $M_2 \in \mathfrak{M}(A)$, $M_1 \neq M_2$. Deoarece $\mathfrak{M}(A)$ este separat prin ipoteză, din teorema 4.15 deducem că există un element unitate $e_1 \in A$, modulo M_1 și un element unitate $e_2 \in A$, modulo M_2, astfel încît pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$ să avem $e_1 \in M$ sau $e_2 \in M$. Dar atunci, în baza teoremei 2.2, e_1 este element unitate modulo M_1 în A^* și e_2 este element unitate modulo M_2 în A^*. Pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A^*)$ avem $e_1 \in M$, sau $e_2 \in M$, deoarece e_1, $e_2 \in A$.

Să presupunem acum că $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$. În baza condiției b) din enunțul teoremei, deducem că există două elemente unitate modulo $M_0 \cap A$, fie ele e_0, $e_1 \in A$, astfel încît să avem $s(e_0) \subset u(e_1)$. Atunci e_0, în baza teoremei 2.2, este element unitate modulo M_0 în A^*, conținut în A, iar $e - e_1$ este element unitate modulo A în A^*. Evident, $e_0 \in M$, dacă

$M = A$. Dacă $M \in \mathfrak{M}(A^*)$, $M \neq A$ și dacă $e_0 \notin M$, ceea ce este echivalent cu $e_0 \notin M \cap A$, atunci $M \cap A \notin h(\{e_0\})$, deci $M \cap A \in s(e_0)$. Rezultă $M \cap A \in u(e_1)$, deci e_1 este element unitate modulo $M \cap A$. Din teorema 2.2 deducem că e_1 este element unitate modulo M în A^*, deci $e - e_1 \in M$, în baza teoremei 1.31.

Rezultă de aici că pentru orice pereche de elemente M_1, $M_2 \in \mathfrak{M}(A^*)$, $M_1 \neq M_2$, este îndeplinită condiția din enunțul teoremei 4.15 și deci spațiul $\mathfrak{M}(A^*)$ este separat, ceea ce înseamnă că algebra A este regulată. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.4. *Dacă algebra A are element unitate și dacă spațiul structural $\mathfrak{M}(A)$ este separat, atunci algebra A este regulată.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă e este elementul unitate al algebrei A, atunci avem $u(e) = \mathfrak{M}(A)$. Prin urmare, condiția b) din enunțul teoremei 6.3 este îndeplinită, luînd un element unitate e_0 modulo M_0, oarecare și $e_1 = e$. Condiția a) este îndeplinită prin ipoteză. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.5. *Dacă algebra A este regulată, atunci $\mathfrak{M}(A)$ este un spațiu separat, local compact.*

Demonstrație. Rezultă din teorema 5.5, pct. b) și c), teorema 4.20 și teorema 4.13, pct. b).

TEOREMA 6.6. *Dacă algebra A este regulată, atunci pentru orice parte compactă $K \subset \mathfrak{M}(A)$ există $e_1 \in A$, astfel încît $K \subset u(e_1)$.*

Demonstrație. Din teorema 6.3 și din teorema 4.16, ținînd seama că $e_0 \notin M_0$, deducem că e_1 este unitate locală în M_0, unde e_0 și e_1 sînt elementele care se asociază lui $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$ în enunțul teoremei 6.3. Vom nota $e_0 = e_0(M_0)$, $e_1 = e_1(M_0)$.

Pentru fiecare $M_0 \in K$ să considerăm vecinătatea int $u(e_1)$ corespunzătoare. K fiind compact, există un număr finit de astfel de vecinătăți $U_i = \operatorname{int} u(e_1(M_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, care acoperă pe K.

Fie $e'_1 = e_1(M_1)$, $e'_2 = e_1(M_1) + e_1(M_2) - e_1(M_1)\, e_1(M_2)$ și, în general, $e'_i = e'_{i-1} + e_1(M_i) - e'_{i-1}\, e_1(M_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Este ușor de văzut că e'_2 este element unitate modulo M, pentru orice $M \in U_1 \cup U_2$, e'_3 este element unitate modulo M, pentru orice $M \in U_1 \cup U_2 \cup U_3$, ș.a.m.d. e'_n este element unitate modulo M pentru orice $M \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, deci $K \subset u(e'_n)$, deoarece $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.7. *Dacă A este o algebră regulată, atunci pentru orice ideal $I \subset A$ și orice $M_0 \in \mathfrak{M}(I)$ există $i_0 \in I$, astfel încît $u(i_0)$ să fie o vecinătate a lui M_0.*

Demonstrație. *a*) Din teorema 5.5, pct. c) și d) și teorema 4.20 deducem că $h^*(I) = h(I) \cup \{A\}$.

b) A fiind regulată, $\mathfrak{M}(A^*)$ este compact și separat, deci spațiu regulat. Dacă $M_0 \in \mathfrak{M}(I)$, atunci $M_0 \notin h^*(I)$. Această mulțime fiind închisă în $\mathfrak{M}(A^*)$, deducem că există o vecinătate deschisă $U \supset h^*(I)$ și o vecinătate deschisă $V \ni M_0$, astfel încît $U \cap V = \emptyset$. Atunci $\complement U$ și $\complement V$ sînt închise în $\mathfrak{M}(A^*)$ și avem $(\complement U) \cup (\complement V) = \mathfrak{M}(A^*)$, $M_0 \notin \complement V$, $h^*(I) \cap \cap \complement U = \emptyset$. $\complement U$ și $\complement V$ fiind închise, există două ideale $J_0 \subset A^*$ și $J_1 \subset A^*$, astfel încît $\complement U = h^*(J_0)$ şi $\complement V = h^*(J_1)$. Aceste ideale au, prin urmare, următoarele proprietăţi:

1) $h^*(J_0) \cup h^*(J_1) = \mathfrak{M}(A^*)$.

2) $M_0 \notin h^*(J_1)$.

3) $h^*(I) \cap h^*(J_0) = \emptyset$.

c) Din 2) rezultă $M_0 \not\supset J_1$ şi deci, ţinînd seama de teorema 1.38, deducem că există $j_1 \in J_1$, astfel încît j_1 să fie element unitate modulo M_0.

Din 3), ţinînd seama de teorema 3.4, pct. b), deducem că $h^*(I \vee J_0) = \emptyset$. Dar A^* avînd element unitate, din teorema 1.34 deducem că $I \vee J_0 = A^*$, deci există $i_0 \in I$ şi $j_0 \in J_0$, astfel încît $i_0 + j_0 = e$, unde e este elementul unitate al algebrei A^*. Dar de aici deducem că $i_0 \in I$ este element unitate modulo J_0, ţinînd seama şi de teorema 1.24, pct. b).

d) Să arătăm că $V \subset u(i_0)$. Într-adevăr, dacă $M \in V$, atunci $M \notin \complement V = h^*(J_1)$, deci $M \not\supset J_1$. Din 1) rezultă atunci $M \supset J_0$, deci i_0 este element unitate modulo M, fiind element unitate modulo J_0 (ţinem seama de teorema 1.32). Prin urmare $M \in u(i_0)$. Deci $V \subset u(i_0)$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.8. *Dacă A este o algebră regulată, atunci orice ideal $I \subset A$ este algebră regulată.*

Demonstraţie. Într-adevăr, din teorema 6.7 rezultă că pentru orice $M_0 \in \mathfrak{M}(I)$ există $i_0 \in I$, astfel încît $u(i_0)$ să fie o vecinătate a lui M_0. Pe de altă parte, în baza teoremei 6.5 şi a teoremei 4.20, $\mathfrak{M}(I)$ este un spaţiu separat, local compact.

Dacă $K \subset \mathfrak{M}(I)$ este o mulţime compactă, atunci, în baza celor stabilite mai sus, există un număr finit de elemente $i_k \in I$, $k = 1, 2, \ldots, n$, astfel încît $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} u(i_k)$. Dar în baza teoremei 5.8, mulţimea $\bigcup_{k=1}^{n} u(i_k)$ este închisă în $\mathfrak{M}(I^*)$, de unde rezultă că $\complement K$ este o vecinătate a lui I în $\mathfrak{M}(I^*)$, dat fiind că din $i_k \in I$ rezultă $I \notin u(i_k)$.

Prin urmare, spaţiul $\mathfrak{M}(I^*)$, obţinut prin adăugarea unui punct, şi anume a lui I, la spaţiul $\mathfrak{M}(I)$, are proprietatea că orice complementară de mulţime compactă $K \subset \mathfrak{M}(I)$ este vecinătate a lui I. $\mathfrak{M}(I)$ fiind separat, local compact, din teorema de compactificare a lui P. S. Aleksandrov rezultă că $\mathfrak{M}(I^*)$ este omeomorf cu spaţiul obţinut prin compactificarea lui $\mathfrak{M}(I)$ cu un punct, deci este un saptiu separat. Dar de aici, în baza definiţiei, rezultă că algebra I este regulată. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.9. *Dacă A este o algebră regulată, atunci pentru orice ideal $I \subset A$ şi orice mulţime compactă $K \subset \mathfrak{M}(I)$ există un element $i_0 \in I$, astfel încît $K \subset u(i_0)$.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema 6.6 şi teorema 6.8.

TEOREMA 6.10. *Dacă A este o algebră semisimplă regulată şi dacă $I \subset A$ este un ideal, atunci pentru orice $x_0 \in A$ cu suport $s(x_0) \subset \mathfrak{M}(I)$, compact, avem $x_0 \in I$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, să presupunem că $s(x_0)$ este compact şi că $s(x_0) \subset \mathfrak{M}(I) = \mathfrak{M}(A) - h(I)$. Din teorema 6.9 rezultă că există $i_0 \in I$, astfel încît $s(x_0) \subset u(i_0)$. Deducem de aici că $i_0 x_0 - x_0 \in M$, pentru orice $M \in s(x_0)$. Dacă $M \in \mathfrak{M}(A) - s(x_0)$, atunci $M \notin s(x_0)$, deci $M \notin \complement h(\{x_0\})$, deci $M \in h(\{x_0\})$, ceea ce arată că $x_0 \in M$. Rezultă că

$i_0 x_0 - x_0 \in M$, pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A) - s(x_0)$. Prin urmare $i_0 x_0 - x_0 \in M$, pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$. Algebra A fiind semisimplă, prin ipoteză, de aici rezultă că $i_0 x_0 = x_0$. Dar din $i_0 \in I$ rezultă $i_0 x_0 \in I$, deci $x_0 \in I$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.11. *Pentru ca algebra A să fie regulată, este necesar și suficient ca următoarele condiții să fie îndeplinite:*

a) *$\mathfrak{M}(A)$ este un spațiu separat local compact.*

b) *Pentru orice $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$ există o unitate locală în M_0.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă algebra A este regulată, atunci $\mathfrak{M}(A)$ este separat, local compact, în baza teoremei 6.5.

Dacă $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, din teorema 6.3 rezultă că există $e_1 \in A$, astfel încît $u(e_1)$ să fie o vecinătate a lui M_0, deci e_1 este unitate locală în M_0.

Reciproc, să presupunem că sînt îndeplinite condițiile a) și b) din enunțul teoremei. Să arătăm că, în aceste condiții, spațiul $\mathfrak{M}(A^*)$ este separat.

În acest scop, să observăm că pentru orice vecinătate deschisă U a lui A în $\mathfrak{M}(A^*)$, $\complement U$ este o mulțime compactă în $\mathfrak{M}(A)$, deci vecinătățile lui A în $\mathfrak{M}(A^*)$ se află printre complementarele mulțimilor compacte din $\mathfrak{M}(A)$.

Fie acum $K \subset \mathfrak{M}(A)$ o mulțime compactă, oarecare, din $\mathfrak{M}(A)$. Prin ipoteză, pentru orice $M_0 \in K$ există un element $e(M_0) \in A$, astfel încît $u(e(M_0))$ să fie vecinătate a lui M_0. Mulțimea K fiind compactă, există un număr finit de puncte $M_1, M_2, \ldots, M_n \in K$, astfel încît $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} u(e(M_i))$. Din teorema 5.8 rezultă că mulțimea $\bigcup_{i=1}^{n} u(e(M_i))$ este închisă în $\mathfrak{M}(A^*)$, și, evident, $A \notin \bigcup_{i=1}^{n} u(e(M_i))$. Prin urmare, $\complement K$ este o vecinătate a lui A în $\mathfrak{M}(A^*)$. Deducem că mulțimea complementarelor de mulțimi compacte $K \subset \mathfrak{M}(A)$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui A în $\mathfrak{M}(A^*)$. Dar $\mathfrak{M}(A)$ fiind, prin ipoteză, local compact și separat, din teorema de compactificare a lui P. S. Aleksandrov deducem că $\mathfrak{M}(A^*)$ este separat, deci algebra A este regulată. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.12. *Fie A o algebră semisimplă regulată, și $I \subset A$ un ideal al algebrei A. Fie $F = h(I)$. Atunci $I_0 = \{x;\ x \in A,\ s(x) \cap F = \emptyset,\ s(x)$ compact$\}$ este cel mai mic ideal I_0 al algebrei A, pentru care $h(I_0) = F$.*

Demonstrație. Din teorema 4.17 rezultă că mulțimea I_0, definită în enunțul teoremei, este ideal al algebrei A. Din teorema 6.10, ținînd seama că $\mathfrak{M}(I) = \mathfrak{M}(A) - h(I)$, în baza teoremei 4.20, deducem că $I_0 \subset I$. Rămîne să arătăm că $h(I_0) = F$.

În primul rînd, din $I_0 \subset I$ rezultă $F_0 = h(I_0) \supset h(I) = F$, dacă ținem seama de teorema 3.3, pct. a). Să presupunem, prin absurd, că $F_0 \neq F$. Atunci există $M_0 \in F_0$, cu $M_0 \notin F$.

Deoarece, în virtutea teoremei 6.8, algebra I este regulată și deoarece $M_0 \in \mathfrak{M}(A) - F = \mathfrak{M}(I)$, din teorema 6.3 rezultă că există două elemente $e_0, e_1 \in I$, astfel încît amîndouă să fie elemente unitate modulo M_0 și $s(e_0) \subset u(e_1)$. Dar $u(e_1)$ este compactă și conținută în $\mathfrak{M}(I) = \mathfrak{M}(A) - F$, deci $s(e_0)$ este compactă și $s(e_0) \cap F = \emptyset$. Deci $e_0 \in I_0$, de unde $e_0 \in M_0$, deoarece $M_0 \supset I_0$, ceea ce este absurd. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.13. *Pentru orice ideal maximal, regulat* M_0 *al algebrei regulate semisimple* A *există un singur ideal primar minimal* $P(M_0) \subset M_0$.

Demonstrație. Să luăm $I = M_0$, ținînd seama de teorema 6.12. Atunci $F = h(I) = \{M_0\}$. Pentru idealul $P(M_0) = I_0$, construit ca în teorema 6.12, avem $h(P(M_0)) = \{M_0\}$, deci P_0 este primar. Pe de altă parte, I_0 este cel mai mic ideal al algebrei A, astfel încît $h(I) = F$, deci cel mai mic ideal primar divizibil cu M_0. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.14. *Dacă* I *este un ideal al algebrei regulate* A, *atunci* A/I *este o algebră regulată.*

Demonstrație. Într-adevăr, în baza teoremei 5.5, pct. d), I este ideal și în algebra A^*, iar în baza teoremei 5.7, algebra A^*/I este izomorfă cu $(A/I)^*$. În baza teoremei 4.21, spațiul $\mathfrak{M}(A^*/I)$ este omeomorf cu $h^*(I)$, ceea ce arată că este un spațiu separat, compact. Prin urmare, $\mathfrak{M}((A/I)^*)$, care este omeomorf cu $\mathfrak{M}(A^*/I)$, este separat, ceea ce arată că algebra A/I este regulată. Teorema este demonstrată.

2. Vom spune că două elemente x, y ale algebrei A *coincid la infinit*, dacă există o mulțime compactă $K \subset \mathfrak{M}(A)$, astfel încît să avem $x-y \in M$ pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A) - K$.

Vom spune că elementele $x, y \in A$ *coincid local* în punctul $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, dacă există o vecinătate U a lui M_0, astfel încît să avem $x - y \in M$, pentru orice $M \in U$.

Fie $I \subset A$ un ideal al algebrei A. Vom spune că $x_0 \in A$ *aparține la infinit* idealului I, dacă există un element $y_0 \in I$ cu care x_0 coincide la infinit. Vom spune că $x_0 \in A$ *aparține local idealului* I în punctul $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, dacă există un element $y_0 \in I$, cu care x_0 coincide local în M_0. Vom spune că $x_0 \in A$ *aparține local* idealului I dacă x_0 aparține local idealului I în fiecare punct $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$ și dacă x_0 aparține idealului I și la infinit.

TEOREMA 6.15. *Fie* I *un ideal al algebrei semisimple, regulate* A. *Dacă* $x_0 \in A$ *aparține local idealului* I, *atunci* $x_0 \in I$.

Demonstrație. Prin ipoteză, există o mulțime compactă $K \subset \mathfrak{M}(A)$ și un element $y_0 \in I$, astfel încît $x_0 - y_0 \in M$, pentru orice $M \in \complement K$. Pentru orice $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, există apoi un element $x_{M_0} \in I$ și o vecinătate deschisă U_{M_0} a lui M_0, astfel încît să avem $x_0 - x_{M_0} \in M$ pentru orice $M \in U_{M_0}$. Deducem că există un număr finit de puncte $M_1, M_2, \ldots, M_n$, printre care se poate afla și A, și un număr finit de vecinătăți deschise $U_1, U_2, \ldots, U_n$, ale lor ($M_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$), printre care se poate afla și $\complement K$, astfel încît să avem $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = \mathfrak{M}(A^*)$. Fie $x_i \in I$, $i = 1, 2, \ldots, n$, elementele corespunzătoare, astfel încît $x_0 - x_i \in M$, pentru orice $M \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Fie $F_i = \complement U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Avem $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$ și $F_i = h^*(I_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, unde I_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sînt ideale din A^*, deoarece mulțimile F_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sînt închise. (De exemplu, $I_i = k^*(F_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$)). Din egalitatea $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$ și din teorema 3.4, pct. b), deducem $h^*(\bigvee_{i=1}^{n} I_i) = \emptyset$, ceea ce arată, ținînd seama de teorema

1.34, că $e \in \bigvee_{i=1}^{n} I_i$, unde e este elementul unitate al algebrei A^*. Prin urmare, există $e_i \in I_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ astfel încît să avem $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

Însă din $M \notin U_i$ rezultă $M \in F_i$, deci $M \supset I_i$, de unde rezultă $e_i \in M$. Deducem că $e_i(x_0 - x_i) \in M$, pentru orice $M \notin U_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Apoi, din $M \in U_i$ rezultă $x_0 - x_i \in M$, deci $e_i(x_0 - x_i) \in M$, pentru orice $M \in U_i \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Rezultă că $e_i(x_0 - x_i) \in M$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ și orice $M \in \mathfrak{M}(A^*)$. Prin urmare, $\sum_{i=1}^{n} e_i(x_0 - x_i) \in M$, pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A^*)$. A fiind semisimplă, deducem că avem $\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i$. Însă $\sum_{i=1}^{n} e_i = e$, iar $\sum_{i=1}^{n} e_i x_i \in I$. Prin urmare $x_0 \in I$ și teorema este demonstrată.

TEOREMA 6.16. *Fie I un ideal al algebrei regulate A. Atunci $y \in A$ aparține local lui I în orice $M_0 \in \complement h(I)$ și în orice $M_0 \in \operatorname{int} h(\{y\})$.*

Demonstrație. Dacă $M_0 \in \complement h(I)$, atunci, din teorema 6.7 rezultă că există $i_0 \in I$, astfel încît $u(i_0)$ să fie vecinătate a lui M_0. Dar atunci $yi_0 - y \in M$ pentru orice $M \in u(i_0)$, iar $yi_0 \in I$. Prin urmare, y aparține local lui I în M_0.

Dacă $M_0 \in \operatorname{int} h(\{y\})$, atunci $h(\{y\})$ este o vecinătate a lui M_0 și pentru orice $M \in \operatorname{int} h(\{y\})$ avem $y \in M$, ceea ce arată că y coincide local cu 0 în M_0. Deoarece $0 \in I$, y aparține local lui I în M_0 și teorema este demonstrată.

3. Fie $P = \{x;\ x \in A,\ s(x)$ compactă$\}$, unde A este o algebră semisimplă, regulată. Din teorema 6.12 rezultă că P este cel mai mic ideal I al algebrei A, pentru care $h(I) = \emptyset$.

Fie acum I un ideal al algebrei semisimple regulate A. Vom spune că idealul $I \subset A$ este *algebric închis la stînga* dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :

a) Dacă $x_0 \in A$ are proprietatea că $\xi x_0 \in I$ pentru orice $\xi \in P$, atunci $x_0 \in I$.

b) Dacă $x_0 \in M_0$, unde $M_0 \in h(I)$, are proprietatea că $\xi x_0 \in I$ pentru orice $\xi \in P(M_0)$, atunci $x_0 \in I$.

În mod similar se definesc idealele algebric închise la dreapta.

TEOREMA 6.17. *Fie A o algebră semisimplă, regulată și $I \subset A$ un ideal algebric închis la stînga. Atunci I conține orice element $x \in k(h(I))$ pentru care mulțimea $(\mathrm{Fr}\, h(\{x\})) \cap h(I)$ nu conține nici o submulțime perfectă nevidă.*

Demonstrație. Fie $\Delta = \{M;\ M \in \mathfrak{M}(A^*),\ x$ nu aparține local lui I în $M\}$. Deoarece mulțimea punctelor din $\mathfrak{M}(A^*)$ în care x aparține local lui I este, evident, deschisă, Δ este o mulțime închisă. Din teorema 6.16 rezultă că $\Delta \subset h(I) \cup \{A\}$.

Să arătăm că mulțimea Δ este perfectă. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că Δ nu are puncte izolate.

Prin absurd, fie $M_0 \in \Delta$ un punct izolat al acestei mulțimi. Să presupunem mai întîi că $M_0 \in h(I)$. Există atunci o vecinătate deschisă U a lui M_0, astfel încît să avem

$$(\overline{U} - \{M_0\}) \cap \Delta = \emptyset.$$

Atunci

a) x aparține local lui I în orice $M \in \overline{U} - \{M_0\}$.

b) Fie $\xi \in P(M_0)$. Atunci $M_0 \notin s(\xi)$, deci ξx aparține local lui I în M_0.

c) Din teorema 6.7 rezultă că există $z \in A$, astfel încît $z \in M$ pentru orice $M \in \complement U$ și z să fie element unitate modulo M pentru orice $M \in V$, unde V este o vecinătate deschisă a lui M_0, cuprinsă în U. Este suficient, pentru aceasta, să luăm în teorema 6.7, $I = k(\complement U)$.

Din *a*) rezultă că ξxz aparține local lui I, în orice $M \in \overline{U} - \{M_e\}$. Din *b*) rezultă că ξxz aparține local lui I în M_0. Din *c*) rezultă că ξxz aparține local lui I în orice $M \notin \overline{U}$. Deoarece $s(\xi xz) \subset s(\xi)$, iar $s(\xi)$ este compact, rezultă că $s(\xi xz)$ este compact și deci ξxz aparține lui I la infinit. Prin urmare ξxz aparține local lui I în orice $M \in \mathfrak{M}(A)$ și la infinit. Din teorema 6.15 rezultă că $\xi xz \in I$. Deoarece $x \in k(h(I))$ și $M_0 \in h(I)$, deducem că $x \in M_0$, deci $xz \in M_0$. Prin urmare, avem $xz \in I$, deoarece, după, cum am văzut mai sus, $\xi xz \in I$ pentru orice $\xi \in P(M_0)$, iar I este algebric închis la stînga, prin ipoteză. Dar din $xz \in I$ rezultă că x aparține local lui I și în M_0, ceea ce este absurd.

Să presupunem acuma că $M_0 = A$, acesta fiind un punct izolat al lui Δ. Urmează că există o mulțime compactă $C_0 \subset \mathfrak{M}(A)$, astfel încît x aparține local lui I în orice $M \in \mathfrak{M}(A) - C_0$, dar x nu aparține lui I la infinit. Fie U o vecinătate deschisă relativ compactă, a lui C_0. Deoarece $C_0 \cap \complement U = \emptyset$, din teorema 6.9 rezultă că există $e_0 \in k(\complement U)$, astfel încît int $u(e_0) \supset C_0$. Atunci, pentru orice $\xi \in P$, $\xi(x - xe_0)$ aparține local lui I în orice $M \in \mathfrak{M}(A) - C_0$, deoarece x are această proprietate. Apoi, tot $\xi(x - xe_0)$ aparține local lui I în orice $M \in C_0$, deoarece $x - xe_0$ are această proprietate. De asemenea, $\xi(x - xe_0)$ aparține lui I la infinit, deoarece ξ are această proprietate. Din teorena 6.15 rezultă că $\xi(x - xe_0) \in I$ pentru orice $\xi \in P$. Deoarece I este algebric închis la stînga, prin ipoteză, deducem că $x - xe_0 \in I$. Dar din $e_0 \in k(\complement U)$ rezultă $s(e_0) \subset \overline{U}$, deci $e_0 \in P$, ceea ce arată că e_0 aparține lui I la infinit. Din $x - xe_0 \in I$ deducem că și x aparține lui I la infinit, ceea ce este absurd. Cu aceasta am demonstrat că mulțimea Δ este perfectă.

Din $x \in k(h(I))$ rezultă $h(\{x\}) \supset h(I)$. Prin urmare, $\Delta \subset h(\{x\}) \cup \{A\}$. Din teorema 6.16 rezultă $\Delta \subset (\mathrm{Fr}\, h(\{x\})) \cup \{A\}$, deci $\Delta \subset [(\mathrm{Fr}\, h(\{x\})) \cap \cap h(I)] \cup \{A\}$. Dar dacă Δ este perfectă și nevidă, atunci $\Delta \cap [\mathrm{Fr}\, h(\{x\})) \cap \cap h(I)]$ este perfectă și nevidă, ceea ce este absurd, în virtutea ipotezei teoremei. Prin urmare $\Delta = \emptyset$. Deci x aparține local lui I. Din teorema 6.15 rezultă $x \in I$. Teorema este demonstrată.

§ 7. ALGEBRE REGULATE TOPOLOGICE

Vom presupune că C este un corp topologic și că A este o algebră topologică peste corpul C. Aceasta înseamnă că C este înzestrat cu o topologie, astfel încît aplicațiile $(\alpha, \beta) \to \alpha + \beta$, $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$, $\alpha \to -\alpha$ și $\alpha \to \alpha^{-1}$ $(\alpha \neq 0)$ să fie continue. De asemenea, A este înzestrată cu o topologie, astfel încît aplicațiile $(x, y) \to x + y$, $(x, y) \to xy$, ale lui $A \times A$ în A, și aplicațiile $(\alpha, x) \to \alpha x$, $(\alpha, x) \to x\alpha$, ale lui $C \times A$ în A.

să fie continue. Este ușor de arătat că dacă $I \subset A$ este un ideal, atunci aderența $\bar{I}$ este, de asemenea, un ideal al algebrei A.

Fie acuma A o algebră regulată, semisimplă, topologică, peste corpul topologic C.

Vom spune că algebra A *satisface condiției* (D) *la infinit* dacă pentru orice $x_0 \in A$ există un șir generalizat $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset P$, astfel încît $\lim\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha x_0 = x_0$, unde P este idealul lui A format din toate elementele $x \in A$, pentru care $s(x)$ este compact.

De asemenea, vom spune că algebra A *satisface condiției* (D) *în* $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, dacă pentru orice $x_0 \in M_0$ există un șir generalizat $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset P(M_0)$ astfel încît să avem $\lim\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha x_0 = x_0$.

Vom spune că algebra A *satisface condiției* (D), dacă ea satisface condiției (D) la infinit și în orice punct $M_0 \in \mathfrak{M}(A)$, în sensul definițiilor de mai sus.

TEOREMA 7.1. *Dacă A este o algebră regulată, semisimplă, topologică, care satisface condiției (D), atunci orice ideal închis $I \subset A$ este algebric închis la stînga.*

Demonstrație. Va trebui să arătăm că în ipotezele teoremei, idealul I satisface condițiile a) și b) de la § 6, pct. 3.

a) Să presupunem că $\xi x_0 \in I$ pentru orice $\xi \in P$. Deoarece A satisface condiției (D) prin ipoteză, rezultă că există un șir generalizat $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, ale cărui elemente se află în P, astfel încît $\lim\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha x_0 = x_0$. Dar atunci din $x_\alpha x_0 \in I$ pentru orice $\alpha \in \mathcal{A}$ și din faptul că I este închis, rezultă $x_0 \in I$.

b) Să presupunem că $M_0 \in h(I)$ și că $x_0 \in M_0$ este astfel încît $\xi x_0 \in I$ pentru orice $\xi \in P(M_0)$. Ca și mai sus, deducem că $x_0 \in I$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 7.2. *Fie A o algebră regulată, semisimplă, topologică, care satisface condiției (D). Fie I un ideal închis al algebrei A. Atunci I conține orice element $x \in k(h(I))$ care are proprietatea că mulțimea $(Fr\, h(\{x\})) \cap h(I)$ nu conține nici o mulțime perfectă nevidă.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema 6.17 și din teorema 7.1.

Vom spune că algebra A este o *algebră tauberiană* dacă A este o algebră regulată, semisimplă, topologică, astfel încît $\bar{P} = A$. Atunci avem

TEOREMA 7.3. *Dacă A este o algebră tauberiană și dacă $x_0 \in A$ are proprietatea că $x_0 \notin M$ pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$, atunci idealul închis generat de x_0 în A coincide cu A.*

Demonstrație. Fie I idealul închis generat de x_0 în A. Avem $x_0 \notin M$ pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$, deci $I \not\subset M$, pentru orice $M \in \mathfrak{M}(A)$. Prin urmare, $h(I) = \emptyset$. Din teorema 6.12 rezultă că $I \supset P$, deci $I = \bar{I} \supset \bar{P} = A$, ceea ce arată că $I = A$. Teorema este demonstrată.

TEOREMA 7.4. *Dacă A este o algebră tauberiană, atunci orice ideal propriu, închis, $I \subset A$ este conținut în cel puțin un ideal maximal regulat.*

Demonstrație. Dacă, prin absurd, admitem contrariul, atunci am avea $h(I) = \emptyset$, deci, în baza teoremei 6.12, am avea $I \supset P$. Dar I fiind închis prin ipoteză, am deduce de aici $I = A$, ceea ce contrazice ipoteza teoremei. Teorema este demonstrată.

§ 8. EXEMPLE ŞI APLICAŢII

1. Fie A algebra polinoamelor de o variabilă peste corpul C al numerelor complexe. După cum se ştie (v. [6]), orice ideal $I \subset A$ este ideal principal; prin urmare, este de forma $I = (p(x))$, unde $p(x)$ este un polinom cu coeficienţi în C. Idealul M este maximal dacă şi numai dacă $p(x)$ este un polinom de gradul 1, deci de forma $a_0(x - a_M)$ cu $a_0 \neq 0$. Se observă de aici că mulţimea $\mathfrak{M}(A)$ a idealelor maximale regulate ale algebrei A poate fi pusă în corespondenţă biunivocă $M \to a_M$ cu corpul numerelor complexe. Să vedem care este topologia corespunzătoare a lui C. Evident, orice mulţime finită $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ este închisă, deoarece $\mathfrak{M}(A)$ este un spaţiu (T_1).

Fie $E \subset C$ o mulţime infinită (am identificat pe $\mathfrak{M}(A)$ cu C prin corespondenţa indicată mai sus). Atunci $k(E) = \{0\}$, deoarece polinomul identic nul este singurul care are o infinitate de rădăcini. Prin urmare, $h(k(E)) = \mathfrak{M}(A)$, ceea ce arată că aderenţa oricărei mulţimi infinite coincide cu $\mathfrak{M}(A)$. De aici rezultă că singurele mulţimi deschise din $\mathfrak{M}(A)$ sînt mulţimea vidă şi complementarele de mulţimi finite. $\mathfrak{M}(A)$ fiind o mulţime infinită, deducem că spaţiul $\mathfrak{M}(A)$ nu este separat. Prin urmare algebra A nu este regulată.

2. Fie E un spaţiu separat compact şi $C_Q(E)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue, definite pe E, cu valori în corpul Q al cuaternionilor. Cu operaţiile obişnuite, $A = C_Q(E)$ devine o algebră cu element unitate peste corpul Q al cuaternionilor, în care este definită şi o involuţie $f \to \bar{f}$.

Teorema 8.1. *Orice ideal maximal M al algebrei $C_Q(E)$ este format din mulţimea tuturor funcţiilor $f \in C_Q(E)$, care se anulează într-un punct $p_M \in E$. Reciproc, pentru orice punct $p \in E$, mulţimea M_p a tuturor funcţiilor $f \in C_Q(E)$, care se anulează în p, este un ideal maximal al algebrei $C_Q(E)$.*

Demonstraţie. Fie M un ideal maximal al algebrei $C_Q(E)$. Să presupunem, prin absurd, că nu există nici un punct în care se anulează toate funcţiile din M. Atunci oricărui punct $p \in E$ îi corespunde o funcţie $f_p \in M$, cu $f_p(p) \neq 0$. Dar atunci, în baza continuităţii, $f_p(q) \neq 0$ pentru orice punct q dintr-o vecinătate deschisă U_p a lui p. Fie $\{U_{p_1}, U_{p_2}, \ldots, U_{p_n}\}$ o acoperire finită extrasă din acoperirea $\{U_p\}_{p \in E}$ a spaţiului E. Notînd, în general, cu $\bar{f}$ funcţia cuaternionic conjugată funcţiei f, avem $f_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \bar{f}_i \in M$ şi $f_0(p) > 0$ pentru orice $p \in E$. Rezultă de aici $\dfrac{1}{f_0} \in C_Q(E)$ şi deci $1 = f_0 \dfrac{1}{f_0} M$, ceea ce este absurd. Prin urmare, există cel puţin un punct p_M, astfel încît $f(p_M) = 0$ pentru orice $f \in M$. Deoarece $M_{p_M} = \{f;\ f \in C_Q(E),\ f(p_M) = 0\}$ este, evident, un ideal maximal al algebrei $C_Q(E)$, din $M \subset M_{p_M}$ deducem $M = M_{p_M}$. Teorema este demonstrată.

Teorema 8.2. *Spaţiul structural $\mathfrak{M}(C_Q(E))$ este omeomorf cu E.*

Demonstraţie. Prin teorema 7.1 am stabilit o corespondenţă biunivocă $\varphi : M \to p_M$ între $\mathfrak{M}(C_Q(E))$ şi E. Să arătăm că această corespondenţă este un omeomorfism.

1) Fie $F \subset \mathfrak{M}(C_Q(E))$, închisă. Atunci există un ideal $I \subset C_Q(E)$, astfel încît $F = h(I)$. Să arătăm că $\varphi(F) = \{p;\ p \in E,\ f(p) = 0,\ f \in I\}$.

De aici va rezulta imediat că $\varphi(F)$ este închisă, deoarece funcțiile f sînt continue.

Într-adevăr, dacă $p \in \varphi(F)$ și $f \in I$, atunci există $M_p \in F$ astfel încît $p = \varphi(M_p)$. Dar din $M_p \in F$ rezultă $M_p \supset I$, deci $f \in M_p$. De aici rezultă $f(\varphi(M_p)) = f(p) = 0$. Prin urmare, am arătat că $\varphi(F) \subset \subset \{p\,;\ p \in E,\ f(p) = 0,\ f \in I\}$.

Reciproc, fie $p_0 \in \{p\,;\ p \in E,\ f(p) = 0,\ f \in I\}$. Atunci $f(p_0) = 0$, pentru orice $f \in I$. Rezultă $M_{p_0} \supset I$, deci $M_{p_0} \in F$. Prin urmare, $p_0 = \varphi(M_{p_0}) \in \varphi(F)$. Deci $\{p\,;\ p \in E,\ f(p) = 0,\ f \in I\} \subset \varphi(F)$ și cu aceasta, egalitatea de mai sus este demonstrată.

2) Fie acum $E_0 \subset E$, închisă și fie $I(E_0)$ mulțimea tuturor funcțiilor din $C_Q(E)$ care se anulează în orice punct din E_0. $I(E_0)$ este, evident, un ideal al algebrei $C_Q(E)$.

Să arătăm că $\varphi^{-1}(E_0) = h(I(E_0))$. Într-adevăr, dacă $M_0 \in \varphi^{-1}(E_0)$ și $f \in I(E_0)$, atunci $\varphi(M_0) \in E_0$ și deci $f(\varphi(M_0)) = 0$, ceea ce arată că $f \in M_0$. Prin urmare, $M_0 \supset I(E_0)$, deci $M_0 \in h(I(E_0))$. Deci am arătat că $\varphi^{-1}(E_0) \subset h(I(E_0))$.

Reciproc, să presupunem că $M_0 \in \varphi^{-1}(E_0)$. Atunci, $\varphi(M_0) \notin E_0$ de unde rezultă că există o funcție $f_0 \in I(E_0)$, astfel încît $f_0(\varphi(M_0)) \neq 0$. Dar atunci $f_0 \notin M_0$, deci $M_0 \not\supset I(E_0)$, de unde obținem $M_0 \notin h(I(E_0))$. Cu aceasta am arătat că avem și $\varphi^{-1}(E_0) \supset h(I(E_0))$ și egalitatea de mai sus este demonstrată.

Dar $h(I(E_0))$ fiind o mulțime închisă în $\mathfrak{M}(C_Q(E))$, deducem că $\varphi^{-1}(E_0)$ este închisă în $\mathfrak{M}(C_Q(E))$, dacă E_0 este închisă în E.

În acest mod am demonstrat că φ este un omeomorfism. Teorema este demonstrată.

În cele ce urmează vom identifica pe $\mathfrak{M}(C_Q(E))$ cu E prin omeomorfismul φ de mai sus.

Deoarece spațiul E este separat prin ipoteză și deoarece algebra $C_Q(E)$ are element unitate, din teorema 6.4 rezultă

TEOREMA 8.3. *Algebra* $C_Q(E)$ *este regulată, semisimplă.*

Demonstrație. Evidentă.

Bazîndu-ne pe acest rezultat vom demonstra acum următoarea teoremă, care ne dă forma generală a idealelor închise (în sensul convergenței uniforme pe E) din $C_Q(E)$.

TEOREMA 8.4. *Orice ideal închis* $I \subset C_Q(E)$ *verifică egalitatea* $I = k(h(I))$. *Cu alte cuvinte, orice ideal închis este intersecția idealelor maximale care îl conțin.*

Demonstrație. Fie $F = h(I)$ și I_0 idealul minimal corespunzător, descris în teorema 6.12. Avem $I \supset I_0$. Evident, pentru orice $f_0 \in k(h(I))$, avem $f_0(p) = 0$, oricare ar fi $p \in F$. Fie $\varepsilon > 0$ și $G_\varepsilon = \{p\,;\ p \in E,\ |f_0(p)| < \varepsilon\}$. G_ε este o vecinătate deschisă a lui F. Punînd $F_\varepsilon = \complement G_\varepsilon$, F_ε este o mulțime închisă și $F_\varepsilon \cap F = \emptyset$. În baza lemei lui Urîson, deducem că există o funcție continuă $f_\varepsilon : E \to [0, 1]$, astfel încît $f_\varepsilon(p) = 1$, pentru orice $p \in F_\varepsilon$ și $f_\varepsilon(p) = 0$, pentru orice $p \in G_{3/2}$. Evident, putem considera că $f_\varepsilon \in C_Q(E)$. Deoarece $s(f_\varepsilon) \subset F_{\varepsilon/2}$, deducem $s(f_\varepsilon) \cap F = \emptyset$, deci în baza teoremei 6.12, avem $f_\varepsilon \in I_0$. Dar atunci deducem $f_\varepsilon f_0 \in I_0 \subset I$. Însă $|f_\varepsilon f_0 - f_0| < \varepsilon$, după cum se poate observa imediat. I fiind închis prin ipoteză (în raport cu convergenţa uniformă), deducem $f_0 \in I$. Teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 29 aprilie 1966

Institutul Pedagogic de 3 ani Piteşti

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, *Lattice theory*. New York, 1948.
2. N. Jacobson, *Structure of rings*. Providence, 1956.
3. М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*. Москва, 1956.
4. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца*. Москва, 1960.
5. L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*. Toronto, New York, London, 1953.
6. O. Haupt, *Einführung in die Algebra*. Leipzig, 1956.
7. Л. А. Скорняков, *Дедекиндовы структуры и регулярные кольца*. Москва, 1961.
8. C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*. Van Nostrand, Princeton, Toronto, London, New York, 1960.
9. A. B. Willcox, *Some structure theorems for a class of Banach algebras*. Pacific J. Math. **6**, 177—192 (1956).
10. R. Godement, *Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens de N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling*. C. R. Acad. Sci. Paris, **223**, 16—18 (1946).
11. R. Godement, *Théorèmes taubériens et théorie spectrale*. Ann. Sci. Ecole Normale Sup., **64**, 119—138 (1948).
12. Г. Е. Шилов, *О регулярных нормированных кольцах*. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова **21**, 1—181 (1947).
13. В. А. Диткин, *Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах*. Учен. зап. Моск. ун-та, **30**, 83—130 (1939).
14. И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*. Мат. сб. (Н.С.), **12**(**54**), 197—213 (1943).
15. J. v. Neumann, *On regular rings*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22**, 707—713 (1936).
16. N. Wiener, *Tauberian Theorems*. Ann. of Math. (2), **33**, 1—100 (1932).
17. N. Bourbaki, *Algèbre*. Ch. I. Hermann et Cie. Paris.
18. N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*. Dover Publications, inc. New-York.
19. I. E. Segal, *The group algebra of a locally compact group*. Trans. Am. Math. Soc., **61**, 69—105 (1947).
20. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. Part. II. Interscience publischers*. New York, London, Sydney, 1963.

TEOREME SUPRARELATIVISTE

DE

ANDREI POPOVICI

I. Pe baza metricii proiective (cayleyene) a spațiului relativist Ω_3 al vitezelor de tip Lobacevski, se demonstrează invarianța legilor einsteiniene de compunere a vitezelor față de înlocuirea vitezelor cu „vitezele reciproce”. Pătratele valorilor absolute ale vitezelor relativiste (spațiale și temporale, cosmice și proprii, directe și reciproce) constituie un grup proiectiv D_6.

II. Se stabilește identitatea geometriei și cinematicii relativiste în varietățile E_8 coordonate-durată și $\overline{E}_8$ impuls-energie (generalizarea legii reciprocității); potențialul cinetic (lagrangeanul relativist restrîns) e o componentă a vectorului impuls-energie de gen spațial. Viteza de fază a lui L. de Broglie (caz particular al vitezei reciproce) rezultă automat din cinematica relativistă; de asemenea, mărimile ondulatorii în E_8 și $\overline{E}_8$. Fuziunea unui număr par (impar) de viteze supraluminoase dă o viteză inferioară (superioară) vitezei luminii în cîmp. Fuziunea vitezelor (supraluminoase) în Ω_3 se arată a fi identică cu fuziunea stărilor izofermionice în E_4, $\overline{E}_4$ și deci legată de fuziunea stărilor de izospin. Stările de cîmp cu viteza infinită corespund unui număr izofermionic infinit.

III. Se deduce o clasificare a particulelor elementare în funcție de semnul intervalului relativist în cele două mase de repaus, în particular existența a două tipuri de particule (de spin și izospin dat) mișcate cu viteza luminii. Tranziția de la viteze subluminoase la viteze supraluminoase sau tranziția inversă e echivalentă în E_8 sau $\overline{E}_8$ cu permutarea variabilelor cosmice și a celor proprii; ea implică variația naturii particulei (a numărului izofermionic) și permutarea mărimilor corpusculare și ondulatorii (a vitezei corpusculare și de fază). Se păstrează astfel ireversibilitatea timpului și cauzalitatea.

IV. Teoremele valabile pentru viteze supraluminoase se extind la interacțiuni (forțe, cîmpuri) superioare „interacțiunii maxime“ (principiul corespondenței dintre teoria relativității și teoria reciprocității; în particular, corespondența dintre fuziunea stărilor izofermionice și leptonice, a celor de izospin și spin). Se generalizează relațiile de inversiune valabile pentru coordonate și impulsuri. Sub o formă generalizată se deduc din structura de grup proiectiv a vitezelor relativiste, relațiile de imprecíziune.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1479–1509, BUCUREȘTI, 1966

A. BAZE MATEMATICE

I. VITEZE OARECARI

În spaţiul Ω_3 al vitezelor proprii spaţiale relativiste $\overline{v}$ de componente v^{α} $(\alpha = 1, 2, 3)$ este valabilă geometria neeuclidiană a lui Lobacevski-Bolyai [1]. Pentru valoarea absolută $\beta \equiv \frac{v}{c}$ distanţa neeuclidiană în Ω_3 este :

$$\psi \equiv -i\varphi = \frac{1}{2} L\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right), \text{ unde } \beta \equiv \frac{e^{2\psi}-1}{e^{2\psi}+1} = \operatorname{th} \psi = i \operatorname{tg} \varphi. \tag{1}$$

Notînd $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, $\overline{w} = \frac{d\overline{r}}{dt}$ de componente w^{α}, $\overline{w}\,' = \frac{d\overline{r}\,'}{dt'}$ de componente w'^{α} $(\alpha = 1, 2, 3)$, $w_1 = w \cos \gamma$, $w'_1 = w' \cos \gamma'$, $(\overline{v}\,\overline{w}\,')$ produsul scalar, $E = 1 + \frac{(\overline{v}\,\overline{w}\,')}{c^2}$, rezultanta vitezelor $\overline{v}$, $\overline{w}\,'$, formula valorilor absolute şi relaţia dintre unghiurile γ, γ' sînt :

$$\overline{w} = \frac{1}{E}\left[\alpha\,\overline{w}\,' + \overline{v} + (1-\alpha)\, v \cdot \frac{(\overline{v}\,\overline{w}\,')}{v^2}\right] \tag{2}$$

$$\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} = \frac{1}{E} \cdot \sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,, \tag{2'}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\alpha \sin \gamma'}{\frac{v}{w'} + \cos \gamma'}. \tag{2''}$$

Transformările Lorentz reduse $(v = v_1 = \beta c)$ au forma :

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{x'_1 - i\,\beta x'_4}{\alpha}, \quad x_4 = \frac{x'_4 + i\,\beta\, x'_1}{\alpha}, \quad x_{2,3} = x'_{2,3} \\ \left(x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\alpha}, \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\alpha}, \quad x_{2,3} = x'_{2,3} \right) \end{gathered} \tag{2'''}$$

iar transformarea inversă :

$$\begin{gathered} x'_1 = \frac{x_1 + i\,\beta\, x_4}{\alpha}, \quad x'_4 = \frac{x_4 - i\,\beta\, x_1}{\alpha}, \quad x'_{2,3} = x_{2,3}, \\ \left(x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\alpha}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\alpha}, \quad x'_{2,3} = x_{2,3} \right). \end{gathered} \tag{2^{IV}}$$

1. *Teoreme de invarianţă.* Fie[1]

$$(3)\qquad \alpha \equiv \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\ \alpha_1 \equiv \sqrt{1-\frac{v_{1\parallel}^2}{c^2}},\ \alpha_1' \equiv \sqrt{1-\frac{v_{1\parallel}'^2}{c^2}},$$
$$\alpha_2 \equiv \sqrt{1-\frac{v_{2\parallel}^2}{c^2}},\ \alpha_2' \equiv \sqrt{1-\frac{v_{2\parallel}'^2}{c^2}}.$$

Transformările :

$$(3')\qquad \overline{v}_1 = (\overline{v},\ \overline{v}_1'),\ \overline{v}_{1\parallel} = \frac{\overline{v}_{1\parallel}' + \overline{v}}{1+\dfrac{(\overline{v}\,\overline{v}_1')}{c^2}},\ \overline{v}_{1\perp} = \frac{\alpha \overline{v}_{1\perp}'}{1+\dfrac{(\overline{v}\,\overline{v}_1')}{c^2}}$$
$$\overline{v}_2 = (-\overline{v},\ \overline{v}_2'),\ \overline{v}_{2\parallel} = \frac{\overline{v}_2' - \overline{v}}{1-\dfrac{(\overline{v}\,\overline{v}_2')}{c^2}},\ \overline{v}_{2\perp} = \frac{\alpha\, v_{2\perp}'}{1-\dfrac{(\overline{v}\,\overline{v}_2')}{c^2}}$$

sînt transformări inverse de tip Einstein (formule de compunere a vitezelor).

$\overline{v}_{1\parallel}(\overline{v}_{2\parallel})$ sînt transformări proiective (omografice) în $\overline{v}_{1\parallel}'$ (sau $\overline{v}_{2\parallel}'$) sau $\overline{v}$ deci de forma :

$$(4)\qquad y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (a = d,\ b = c).$$

$\overline{v}_{1\parallel}$, $\overline{v}_{2\parallel}$ deci $\overline{v}_{1\parallel}'$, $\overline{v}_{2\parallel}'$ şi $\overline{w}_{\parallel}$ (v. jos) sînt paralele între ele (ca fiind paralele cu $\pm\,\overline{v}$), iar $\overline{v}_{1\perp}$, $\overline{v}_{2\perp}$ deci $\overline{v}_{1\perp}'$, $\overline{v}_{2\perp}'$ şi $\overline{w}_{\perp}$ ortogonală la $\pm\,\overline{v}$) deci la cele paralele.

Avem produsele scalare :

$$(\overline{v}\,\overline{v}_1') \equiv (\overline{v}\,\overline{v}_{1\parallel}),\ (\overline{v}\,\overline{v}_2') \equiv (v_1\ v_{2\parallel}'),$$
$$(\overline{v}_1'\,\overline{v}_2') \equiv (\overline{v}_{1\parallel}'\,\overline{v}_{2\parallel}'),\ (\overline{v}_1\,\overline{v}_2) \equiv (\overline{v}_{1\parallel}\,\overline{v}_{2\parallel}).$$

Din teorema compunerii valorilor absolute ale vitezelor scrise sub forma

$$(4')\qquad \alpha_1 = \frac{\alpha\,\alpha_1'}{1+\dfrac{(\overline{v}_1'\,\overline{v})}{c^2}}$$

rezultă : transformările de tip invers (T), (T^{-1}) invariază legea einsteiniană de compunere a vitezelor ; avem :

$$(5)\qquad \overline{w} = (\overline{v}_1,\ \overline{v}_2) = (\overline{v}_1',\ \overline{v}_2')$$

deci

$$(5')\quad \overline{w}_{\parallel} \equiv \frac{\overline{v}_{2\parallel} + \overline{v}_{1\parallel}}{1+\dfrac{(\overline{v}_1\,\overline{v}_2)}{c^2}} = \frac{\overline{v}_{2\parallel}' + \overline{v}_{1\parallel}'}{1+\dfrac{(\overline{v}_1'\,\overline{v}_2')}{c^2}},\ \overline{w}_{\perp} \equiv \frac{\alpha_1\,\overline{v}_{2\perp}}{1+\dfrac{(\overline{v}_1\,\overline{v}_2)}{c^2}} \equiv \frac{\alpha_1'\,\overline{v}_{2\perp}'}{1+\dfrac{(\overline{v}_1'\,\overline{v}_2')}{c^2}}.$$

---

[1] $\parallel$, $\perp$ vor simboliza direcţiile paralele şi ortogonale cu $\overline{v}$, iar $(\overline{v},\ \overline{v}_1)$, rezultanta vitezelor $\overline{v}$, $\overline{v}_1$.

Aceeaşi teoremă rezultă pentru $\overline{w} = (\overline{v}_2, \overline{v}_1)$; $(T) : \overline{v}_1 = (\overline{v}, \overline{v}_1')$, $(T^{-1}) : \overline{v}_2 = (-\overline{v}, \overline{v}_2')$.

Luînd transformările inverse lui (3), (3′), (5),

$$\overline{v}_1' = (\overline{v}_1, -\overline{v}),\ \overline{v}_2' = (\overline{v}_2, -\overline{v})\ ;\ \overline{w}' = (-\overline{v}, \overline{w})$$

avem

$$\overline{w}' = (-\overline{v}, \overline{w}) = (\overline{v}_2, \overline{v}_1') = (\overline{v}_2', \overline{v}_2) \tag{6}$$

deci :

$$\overline{w}_{\parallel}' = \frac{\overline{v}_{2\parallel} + \overline{v}_{1\parallel}'}{1 + \frac{(\overline{v}_2\,\overline{v}_1)}{c^2}} \equiv \frac{\overline{v}_{2\parallel}' + \overline{v}_{1\parallel}}{1 + \frac{(\overline{v}_2'\,\overline{v}_1)}{c^2}},\ \overline{w}_{\perp}' = \alpha_1' \frac{\overline{v}_{2\perp}}{1 + \frac{(\overline{v}_2\,\overline{v}_1')}{c^2}} \equiv \alpha_2' \frac{\overline{v}_{1\perp}}{1 + \frac{(\overline{v}_2'\,\overline{v}_1)}{c^2}}. \tag{6′}$$

(6) rezultă din teorema (5) aplicînd vitezelor $\overline{v}_2$, $\overline{v}_1'$ respectiv transformarea $(\overline{v}_2, -\overline{v})$ şi transformarea de tip invers $(\overline{v}_1', \overline{v})$; rezultă $\overline{v}_2'$ şi $\overline{v}_1$.

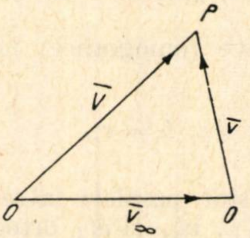


Fig. 1

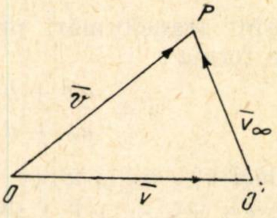


Fig. 2

2. *Viteze reciproce.* v_∞ fiind o viteză de valoare absolută infinit şi de direcţie oarecare dată, vom defini „vitezele reciproce" de speţa I şi II în raport cu o viteză spaţială relativistă proprie $\overline{v}$:

$$\overline{V} = (\overline{v}_\infty, \overline{v})\ ;\ \overline{\mathcal{V}} = (\overline{v}, \overline{v}_\infty)\ \text{sau}\ \overline{v} = (-\overline{v}_\infty, \overline{V})\ ;\ \overline{v} = (\overline{\mathcal{V}}, -\overline{v}_\infty). \tag{7}$$

În figura 1, $\overline{V}$, $\overline{v}$ sînt respectiv vitezele faţă de sistemele inerţiale O, O' ale mobilului P (O' mişcat faţă de O cu viteza relativă $\overline{v}_\infty$; $\overline{V} = (\overline{v}_\infty, \overline{v})$, e rezultanta lui $\overline{v}_\infty$, $\overline{v}$). Invers, $\overline{v}$ e „viteza relativă" a lui P faţă de O', în funcţie de vitezele „absolute" $\overline{v}_\infty$, $\overline{V}$ ale lui O', P faţă de O. Analog în figura 2, $\parallel$ şi $\perp$ simbolizînd respectiv componentele paralele şi ortogonale cu $\overline{v}_\infty$ iar $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

(2) dă :

$$\overline{V} = (\overline{v}_\infty, \overline{v}) = c^2 \frac{\overline{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}^2} + ic \frac{\overline{v}_{\perp}}{v_{\parallel}}\ \text{sau}\ \overline{V}_{\parallel} = c^2 \frac{\overline{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}^2},\ \overline{V}_{\perp} = i\,c \frac{\overline{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} \tag{8}$$

sau formule inverse

$$\overline{v} = (-\overline{v}_\infty, \overline{V}) = c^2 \frac{\overline{V}_{\parallel}}{V_{\parallel}^2} - ic \frac{\overline{V}_{\perp}}{V_{\parallel}}\ \text{sau}\ \overline{v}_{\parallel} = c^2 \frac{\overline{V}_{\parallel}}{V_{\parallel}^2},\ \overline{v}_{\perp} = -ic \frac{\overline{V}_{\perp}}{V_{\parallel}}. \tag{8′}$$

(2) dă de asemenea :

$$(9)\quad \overline{\mathcal{V}} = (\overline{v},\ \overline{v}_\infty) = c^2\left[\alpha\frac{\overline{v}_{\parallel}}{v_{\parallel}^2} + \frac{\overline{v}}{v^2}(1-\alpha)\right] \text{ sau } \begin{array}{l} \overline{\mathcal{V}}_{\parallel} = c^2\,\overline{v}_{\parallel}\left(\dfrac{\alpha}{v_{\parallel}^2} + \dfrac{1-\alpha}{v^2}\right). \\ \overline{\mathcal{V}}_{\perp} = \dfrac{c^2}{v^2}(1-\alpha)\,\overline{v}_{\perp} \end{array}$$

Formulele (8) sau (8′) fiind simetrice față de permutarea $\overline{v}_{\parallel} \leftrightarrow V_{\parallel}$, $\overline{v}_{\perp} \to \overline{V}_{\perp}$, $\overline{V}_{\perp} \to -\overline{v}_{\perp}$, viteza $\overline{v}$ e în raport cu $\overline{V}$ la rîndul ei viteză reciprocă, de tip complex conjugat ($i \leftrightarrow -i$). Avem pentru valorile absolute

$$(10)\qquad \text{(a)}\,\frac{V^2}{c^2} = \frac{\mathcal{V}^2}{c^2} = \frac{c^2 - v_{\perp}^2}{v_{\parallel}^2},\qquad \text{(b)}\,\frac{v^2}{c^2} = \frac{c^2 - V_{\perp}^2}{V_{\parallel}^2}$$

sau notînd

$$A = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},\ \xi = \sqrt{1 - \frac{v^2 V^2}{c^4}},\ \mathcal{A} = \sqrt{1 - \frac{\mathcal{V}^2}{c^2}}$$

avem

$$(10')\qquad \text{(a)}\ A\ (= \mathcal{A}) = -i\,\frac{c\alpha}{v_{\parallel}},\ \text{(b)}\ \alpha = i\,c\,\frac{A}{V_{\parallel}}\left(= ic\,\frac{\mathcal{A}}{V_{\parallel}}\right).$$

Din (10′) rezultă :

$$(11)\qquad v_{\perp} = \frac{c\,\xi}{A},\quad V_{\perp} = c\,\frac{\xi}{\alpha};$$

avem deci

$$(11')\qquad \frac{i\,v_{\parallel}}{c} = \frac{i\,c}{V_{\parallel}} = -\frac{v_{\perp}}{V_{\perp}} = \frac{\alpha}{A}\left(= \frac{\alpha}{\mathcal{A}}\right).$$

Luînd $\overline{v}_\infty \parallel Ox$, (8), (8′), (9) iau forma

$$(12)\quad \text{(a)}\ V_1 = \frac{c^2}{v_1},\ \text{(b)}\ \ V_{2,3} = ic\,\frac{v_{2,3}}{v_1}\ \text{ sau }(a')\ \ v_1 = \frac{c^2}{V_1},\ \text{(b}')\ v_{2,3} = -\frac{icV_{2,3}}{V_1}$$

și :

$$(13)\qquad \mathcal{V}_1 = c^2\,v_1\left(\frac{\alpha}{v_1^2} + \frac{1-\alpha}{v^2}\right),\ \ \mathcal{V}_{2,3} = \frac{c^2}{v^2}(1-\alpha)\,v_{2,3}$$

care rezultă și direct din (2) pentru $v \to \infty$. Vitezele V_α, $\mathcal{V}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) sînt atunci respectiv rezultantele compunerii unei viteze de direcție și valoare absolută oarecare cu o viteză infinită paralelă cu axa OX. Formulele (10′), (11), (11′) iau forma :

$$(14)\qquad A\ (= \mathcal{A}) = -i\,\frac{c\alpha}{v_1},\qquad \alpha = ic\,\frac{A}{V_1}\left(= ic\,\frac{\mathcal{A}}{V_1}\right)$$

$$(14')\qquad \sqrt{v_2^2 + v_3^2} = c\,\frac{\xi}{A},\quad \sqrt{V_2^2 + V_3^2} = c\,\frac{\xi}{\alpha}$$

$$(14'')\qquad \frac{i\,v_1}{c} = \frac{i\,c}{V_1} = -\frac{v_{2,3}}{V_{2,3}} = \frac{\alpha}{A}\left(= \frac{\alpha}{\mathcal{A}}\right).$$

Punînd

$$i\beta = i\,\frac{v}{c} = \operatorname{tg}\varphi\left(\frac{1}{\alpha} = \cos\varphi\,;\, i\,\frac{\beta}{\alpha} = \sin\varphi\right);\ iB = i\,\frac{V}{c} =$$

$$= \operatorname{tg}\Phi\left(\frac{1}{A} = \cos\Phi\,;\, i\,\frac{B}{A} = \sin\Phi\right) \tag{15}$$

$$v_1 = v\cos\gamma,\ \sqrt{v_2^2 + v_3^2} = v\sin\gamma\,;\ V_1 = V\cos\Gamma,\ \sqrt{V_2^2 + V_3^2} = V\sin\Gamma,$$

(14′) sau trecerea directă la limită $v \to \infty$ în (2″) dau

$$\text{(a)}\quad \cos\gamma\cos\Gamma = \frac{1}{B\beta} \qquad \text{(b)}\quad \operatorname{tg}\Gamma = i\,\beta\sin\gamma\ \ (= \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma)$$

$$\text{(16)}\quad \text{(b}'\text{)}\quad \operatorname{tg}\gamma = -\,i\,B\sin\gamma \qquad \text{(c)}\quad \frac{\operatorname{tg}\Gamma}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\alpha}{A}\left(= i\,\frac{v_1}{c} = \frac{i\,c}{V_1}\right)$$

$$\text{(d)}\quad -\,\frac{\sin\gamma}{\xi} = i\,\frac{\cos\gamma}{\alpha}\left(= \frac{1}{\beta A}\right) \quad \text{(d}'\text{)}\quad \frac{\sin\gamma}{\xi} = \frac{-\,i\cos\Gamma}{A}\left(= \frac{1}{\beta\alpha}\right)$$

(16 a) şi (12 a′) sînt echivalente, de asemenea (15 d, d′) şi (14, 14′); (12 b, b′) şi (16 c) rezultă din (16 b, b′) şi (16 d, d′).

3. *Transformările Lorentz în viteze reciproce.* Conform lui (14) transformările Lorentz reduse (2‴) iau în vitezele reciproce $V = \frac{c^2}{v}$ (v. jos (30″), (32)) forma :

$$x_1 = -\,\frac{1}{A}\,(x_4' + iBx_1'),\ \ x_4 = \frac{1}{A}\,(x_1' - iBx_4'),\ \ x_{2,3} = x_{2,3}',$$

sau :

$$x_1 = -\,\frac{i\,c}{A}\left(t' + \frac{Vx_1'}{c^2}\right),\quad t = -\,\frac{i}{cA}\,(x_1' + Vt'),\ \ x_{2,3} = x_{2,3}'.$$

$\mathscr{L} \equiv \overline{\mathscr{L}}\,\bar{l}$ e produsul transformărilor Lorentz reduse $\overline{\mathscr{L}}$ (rotaţii cu unghiul $\varphi = \frac{\pi i}{2}$) corespunzător lui tg $\varphi = \frac{iv}{c} \to \infty$

$$(\overline{\mathscr{L}})\quad \begin{aligned} &x_1 = -\,X_4,\ x_4 = X_1,\ x_{2,3} = -\,X_{2,3} \\ &x_1 = -\,ic\,T,\ ict = X_1,\ x_{2,3} = -\,X_{2,3} \end{aligned}$$

şi al transformării Lorentz reduse $\bar{l}$ în viteza reciprocă V izomorfă cu (2‴)

$$X_1 = \frac{x_1' - iBx_4'}{A},\ \ X_4 = \frac{x_4' + iBx_1'}{A},\ \ X_{2,3} = x_{2,3}'$$

sau

$$X_1 = \frac{x_1' + Vt'}{A},\quad T = \frac{t' + \dfrac{V\,x_1'}{c^2}}{A},\quad X_{2,3} = x_{2,3}'.$$

Transformarea Lorentz inversă $\mathcal{L}' = \overline{\mathcal{L}'}\,\overline{l'}$ (2^{IV}) sau

$$(\mathcal{L}') \qquad x_1' = \frac{1}{A}(x_4 - iB\,x_1),\ x_4' = -\frac{1}{A}(x_1 + iBx_4),\ x_{2,3}' = x_{2,3}$$

sau

$$x_1' = \frac{ic}{A}\left(t - \frac{Vx_1}{c^2}\right),\ t' = \frac{i}{cA}(x - Vt),\ x_{2,3}' = x_{2.3}$$

e produsul transformărilor

$$(\overline{\mathcal{L}'}) \qquad x_1 = X_4',\ x_4' = -X_1',\ x_{2,3}' = -X_{2,3}'$$

$$x_1' = ic\,T',\ ict' = -X_1,\ x_{2,3}' = -X_{2,3}'$$

$$(\overline{l'}) \qquad X_1' = \frac{x_1 + iBx_4}{A} = \frac{x_1 - Vt}{A},\ X_4' = \frac{x_4 - iBx_1}{A} =$$

$$= \frac{t - Vx_1/c^2}{A}.\ X_{2,3}' = x_{2,3}$$

inversele transformărilor $(\overline{\mathcal{L}})$, $(\overline{l})$. În notațiile (2^{V}), $(\overline{\mathcal{L}})$, $(\overline{l})$ iau forma

$$(\overline{\mathcal{L}}) \qquad r_{\parallel} = -X_4,\ x_4 = R_{\parallel},\ \overline{r}_{\perp} = -\overline{R}_{\perp}$$

$$(\overline{l}) \qquad \overline{R}_{\parallel} = \frac{\overline{r}_{\parallel}' - \overline{V}\,t'}{A},\quad T = \frac{t' - (\overline{r}'\,\overline{V})/c^2}{A},\ \overline{R}_{\perp} = \overline{r}_{\perp}'.$$

Pentru $v > c$ ($\beta > 1$) avem $V < c$ ($B < 1$, A real); pentru $v < c$ ($\beta < 1$) dimpotrivă $B > 1$, α real). Transformarea $\overline{\mathcal{L}}$ rezultă de asemenea direct din transformarea Lorentz obișnuită pentru limita $v \to \infty$.

Punînd $\varphi = i\psi$, $\Phi = i\Psi$, (ψ, Ψ reali) transformarea Lorentz $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}\,\overline{l}$ corespunde respectiv unghiului de rotație a axelor spațio-temporale $\varphi = \frac{\pi i}{2} + \Phi$, $\psi = \frac{\pi}{2} + \Psi$, transformarea inversă $\mathcal{L}' = \overline{\mathcal{L}'}\ \overline{l'}$ rotației spațio-temporale de unghi $\Phi = \frac{\pi i}{2} + \varphi$, $\left(\Psi = \frac{\pi i}{2} + \psi\right)$. Conform lui $(\overline{\mathcal{L}})$ rotației φ de viteză supraluminoasă v (în particular pentru $\varphi = \frac{\pi i}{2}$ vitezei v infinite) — deci trecerii de la S. C. Ox, t la Ox'/t' (în particular la X, T) îi corespunde schimbarea de semn (reflecția) timpului (fig. 3). Rotației Φ de viteză supraluminoasă V îi corespunde, de asemenea, schimbarea de semn a timpului.

Dacă pe axa Ot, A_1 e anterior lui A_2, atunci pe axa t', A_1' e posterior lui A_2'.

4. *Vitezele cosmice reciproce* se definesc în analogie cu vitezele u_i și radicalii Lorentz

$$(17) \qquad \alpha = \frac{1}{z} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}}$$

radicalii Lorentz

$$A = \frac{1}{Z} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{U^2}{c^2}}} \cdot \tag{17'}$$

De asemenea, în analogie cu vitezele proprii şi cosmice cvadridimensionale

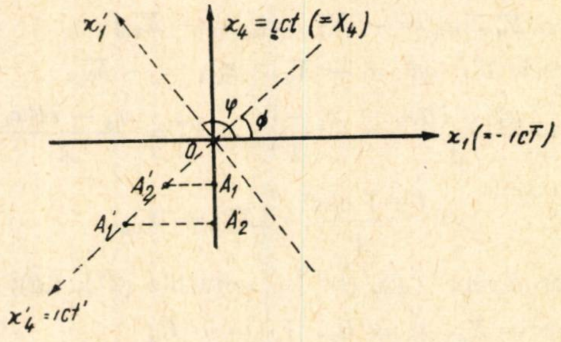


Fig. 3

$$\text{(18)}\quad \text{(a)}\ v_i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{u_i}{z}\left(= \frac{u_i}{\sqrt{1+u^2/c^2}}\right),\quad \text{(b)}\ u_i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t'} = \frac{v_i}{\alpha}\left(\frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

vitezele cosmice şi proprii cvadridimensionale reciproce :

$$\text{(18')}\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ V_i = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{U}_i}{Z}\left(\equiv \frac{\mathcal{U}_i}{\sqrt{1+\frac{U^2}{c^2}}}\right); \\ &\text{(b)}\ \mathcal{U}_i = \frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}T'} = \frac{V_i}{A}\left(\equiv \frac{V_i}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) \end{aligned}$$

$t = \frac{t'}{\alpha}$, $T = \frac{T'}{A}$ fiind durate cosmice, iar t', T' durate proprii. În E_3, v_α, u_α, V, $\mathcal{U}$ sînt respectiv componentele lui $\overline{v}, \overline{u}, \overline{V}, \overline{U}$. Pentru rotaţia $(\overline{\mathcal{L}})$ orice vector în E_4 se transformă după legea $(\overline{\mathcal{L}})$ sau $(\overline{\mathcal{L}}')$. u_i, U_i fiind cvadrivectori în E_4 avem deci

$$\text{(19)}\quad \begin{gathered} u_{\parallel} = -\,\mathcal{U}_4,\ u_4 = \mathcal{U}_{\parallel};\ \overline{u}_{\perp} = -\,\overline{\mathcal{U}}_{\perp}\ \text{sau}\ \mathcal{U}_{\parallel} = u_4, \\ \mathcal{U}_4 = -\,u_{\parallel},\ \mathcal{U}_{\perp} = -\,u_{\perp}. \end{gathered}$$

sau (luînd $\overline{v}_\infty \| Ox_1$)

$$u_1 = -\mathcal{U}_4,\ u_4 = \mathcal{U}_1,\ u_{2,3} = -\mathcal{U}_{2,3},$$
$$\mathcal{U}_1 = u_4,\ \mathcal{U}_4 = -u_1,\ \mathcal{U}_{2,3} = -u_{2,3}. \tag{20}$$

(10′a) şi $\mathcal{U}_4 = -u_1$, (10′b) şi $u_4 = \mathcal{U}_1$ sînt echivalente. (20) dau

$$\text{(a) } \mathcal{U}^2 + \mathcal{U}_4^2 = u^2 + u_4^2\ (= -c^2) \text{ sau } \mathcal{U}^2 - u^2 = u_4^2 - \mathcal{U}_4^2\ (= \mathcal{U}_1^2 - u_1^2),$$
$$\text{(b) } \mathcal{U}^2 + c^2 = -u_1^2 \left(= -\mathcal{U}_4^2 = \frac{1}{A^2}\right) \text{ sau } u^2 + c^2 = -u_4^2 \left(= \mathcal{U}_1^2 = \frac{1}{\alpha^2}\right). \tag{21}$$

Legile de transformare (10), (14″) ale componentelor V^α sau v^α sînt echivalente cu (20). Într-adevăr, (20) se scriu

$$\text{(a) } \frac{v_1}{\alpha} = -\frac{ic}{A}, \quad \text{(b) } \frac{ic}{\alpha} = \frac{V_1}{A}, \quad \text{(c) } \frac{v_{2,3}}{\alpha} = -\frac{V_{2,3}}{A}. \tag{20′}$$

(20′a, b) se scriu $-\dfrac{v_1}{ic} = \dfrac{ic}{V_1} = \dfrac{A}{\alpha}$, de unde $v_1 V_1 = c^2$, care dă împreună cu (20′c) :

$$\frac{v_{2,3}}{V_{2,3}} = \frac{v_1}{ic} = -\frac{ic}{V_1}, \quad \text{deci } V_{2,3} = ic\frac{v_{2,3}}{v_1} \text{ sau } v_{2,3} = -ic\frac{V_{2,3}}{V_1}.$$

Ridicînd la pătrat şi sumînd, avem

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = c^2 \frac{c^2 - (v_2^2 + v_3^2)}{v_1^2}$$

deci

$$\frac{V^2}{c^2} = \frac{c^2 - v_\perp^2}{v_\|^2} \quad \text{sau } \frac{v^2}{c^2} = c^2 - \frac{V_\perp^2}{V_\|^2} \tag{20″}$$

Formulele (20″) coincid cu (10), (14″). Legile de transformare (10), (14″) ale componentelor V^α, v^α rezultă deci fie din legile de transformare ale vitezelor cosmice u^i, v^i, fie conform definiţiilor lui (18 a) (18′ a), din transformările Lorentz ($\mathcal{L}$) sau Herglotz ($\overline{\mathcal{L}}$) sau din formulele generale (2), (2′) prin trecere la limită $v \to \infty$.

5. *Legea generală de compunere a vitezelor.* Transformările inverse (8) şi (8′) $\left(\text{în particular pentru } \overline{v}_\infty \| \overline{v}, \text{ transformările } V = \dfrac{c^2}{v} \text{ şi } v = \dfrac{c^2}{V}\right)$ fiind de acelaşi tip (pînă la semnul lui i), conform teoremei generale (5), legile einsteiniene (2), (2′), (2″) de compunere a vitezelor sînt invariante faţă de permutările w'^α, $v \leftrightarrow W'^\alpha$, V (sau W_3, $\mathcal{V}$) în Ω_3 (înlocuirea vitezelor componente $\overline{w}'$, $\overline{v}$ prin vitezele reciproce $\overline{W}'$, $\overline{V} = \dfrac{c^2}{v^2}\,\overline{v}$ (sau $\overline{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$), $\overline{W}$, $\overline{W}'$, $\overline{V}$ fiind obţinute prin compunerea vitezelor $\overline{w}$, $\overline{w}'$, $\overline{v}$ cu viteza $\overline{v}_\infty$ paralelă cu axa $OX_1 \| \overline{v}$).

Fie în spaţiul tridimensional euclidian E_3 în conformitate cu notaţiile din § 1, γ, γ', Γ, Γ' respectiv unghiurile vitezelor $\overline{w}$, $\overline{w}'$, $\overline{W}$, $\overline{W}'$, cu axa $OX_1 \parallel OX_1'$, deci cu viteza $\overline{v}$ deci și cu reciproca $V = \frac{c^2}{v^2}\,\overline{v}$ a lui $\overline{v}$ de valoare absolută $V = \frac{c^2}{v}\cdot$ Avem atunci

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad w_1 \left(= \frac{c^2}{W_1} = \frac{w_1' + v}{1 + \frac{\overline{v}\,\overline{w}'}{c^2}} \right) = \frac{W_1' + V}{1 + \frac{(\overline{V}\,\overline{W}')}{c^2}} \\
&\text{(a}'\text{)} \quad w_{2,3} \left(= -\,ic\,\frac{W_{2,3}}{W_1} \right) = \alpha\,\frac{w_{2,3}'}{1 + \frac{(\overline{v}\,\overline{w}')}{c^2}} = \frac{A\,W_{2,3}'}{1 + \frac{(\overline{V}\,\overline{W}')}{c^2}} \\
&\text{b)} \quad \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} \equiv \frac{\alpha\sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}}}{1 + \frac{v\,w'}{c^2}} = \frac{A\sqrt{1 - \frac{\overline{W}'^2}{c^2}}}{1 + \frac{(\overline{V}\,\overline{W}')}{c^2}} \\
&\text{(c)} \quad \operatorname{tg}\gamma \equiv \frac{\alpha \sin\gamma'}{\frac{w'}{v} + \cos\gamma'} = \frac{A \sin\Gamma'}{\frac{\overline{W}'}{V} + \cos\Gamma'}\,\cdot
\end{aligned}
\tag{22}
$$

În conformitate cu teorema (5), formulele de compoziție corespunzătoare pentru vitezele reciproce W^α sînt invariante față de permutarea w'^α, $V \to W'^\alpha$, v (sau W'^α, $v \to -\,w'^\alpha$, V). Avem deci formulele analoge lui (22):

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad W_1 = \frac{w_1' + V}{1 + \frac{(\overline{V}\,\overline{w}')}{c^2}} = \frac{W_1' + v}{1 + \frac{(\overline{v}\,\overline{W}')}{c^2}} \\
&\text{(a}'\text{)} \quad W_{2.3} = -\,\frac{A\,w_{2,3}'}{1 + \frac{(\overline{V}\,\overline{w}')}{c^2}} = \frac{\alpha\,W_{2,3}'}{1 + \frac{(\overline{v}\,\overline{W}')}{c^2}} \\
&\sqrt{1 - \frac{W^2}{c^2}} = \frac{A\sqrt{1 - \frac{w'^2}{c^2}}}{1 + \frac{(\overline{w}'\,\overline{V})}{c}} \equiv \frac{\alpha\sqrt{1 - \frac{W'^2}{c^2}}}{1 + \frac{(\overline{W}'\,\overline{v})}{c^2}} \\
&\operatorname{tg}\,\Gamma = -\,\frac{A \sin\gamma'}{\frac{w'}{V} + \cos\gamma'} \equiv \frac{\alpha \sin\Gamma'}{\frac{W'}{V} + \cos\gamma'}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

echivalente respectiv cu (22 a, a′, b, c). Formulele (22) și (23) se verifică și direct.

6. *Grupul proiectiv al vitezelor*. Distanța proiectivă (cayleyană) φ_1 fiind valoarea semilogaritmului natural (1) al raportului anarmonic $\xi = \xi_1$

(cvadriraportul) al punctelor (vitezelor) $P\,(B)$, $O\,(0)$, $I\,(-1)$, $U\,(1)$ în spaţiul relativist Ω_3 al vitezelor $\beta^\alpha = \dfrac{v^\alpha}{c}$ de valoare absolută $\beta = \dfrac{1}{B}$

$$\xi \equiv \xi_1 \equiv (P,\, O,\, I,\, U) \equiv (B,\, O,\, -1,\, 1) \equiv \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{B+1}{B-1} \tag{23}$$

iar ξ luînd 6 valori $\xi_a \equiv \xi_a(\xi) \equiv \xi_a(\xi_1)$ $(a,\, b = 1, \ldots, 6)$ reprezentînd elementele grupului diedric cubic (proiectiv) D_6, avem de fapt 6 măsuri ale distanţei proiective $\varphi = \varphi_a = \dfrac{1}{2} L\,(\xi_a)$ în spaţiul Ω_3 al vitezelor proprii spaţiale relativiste. În funcţie de $\beta^2 \equiv \omega_1$, elementele $\omega_a \equiv \xi_a(\beta^2)$ iau forma:

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \beta^2 \;,\quad \omega_6 = \alpha^2 = 1 - \beta^2 = -\frac{1}{u_4^2} \\
\omega_3 = -\frac{1}{u^2} = 1 - \frac{1}{\beta^2} \;,\quad \omega_2 = B^2 = \frac{1}{\beta^2} \\
\omega_5 = -u_4^2 = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{1-\beta^2} \;,\quad \omega_4 = -u^2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}
\end{gathered} \tag{24}$$

(pătratele vitezelor relativiste proprii şi cosmice, spaţiale şi temporale, directe şi reciproce, normate în unităţi c şi cu semnele $\pm$: $+$ pentru $a = 1,\, 2,\, 6$; $-$ pentru $3,\, 4,\, 5$) (pentru $v = v_1$, avem $\beta = \beta_1$, $u = u_1$).

Alegerea unui element $\omega_b = \xi_b^2$ oarecare ca variabilă independentă permută elementele ω_a ale grupului între ele; se permută totodată polii (infiniţii), zerourile şi unităţile

$$\begin{gathered}
B = 0 \quad (\omega_{1.\,4} = 0 \;;\; \omega_{2.\,3} = \pm\infty \;;\; \omega_{5.\,6} = 1) \\
B = 1 \quad (\omega_{3.\,6} = 0 \;;\; \omega_{5.\,4} = \pm\infty \;;\; \omega_{1.\,2} = 1) \\
B = \infty \quad (\omega_{2.\,5} = 0 \;;\; \omega_{1.\,6} = \pm\infty \;;\; \omega_{3.\,4} = 1)
\end{gathered} \tag{23'}$$

În particular, conform identităţilor (17), (17′), în funcţie de pătratul negativ $\omega_4 = -u^2$ al vitezei cosmice spaţiale $u = \dfrac{v}{\alpha}$, ω_a devin

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \beta^2 = \frac{u^2}{u^2+1} (= \omega_4') \;;\quad \omega_6 = \alpha^2 = -\frac{1}{u_4^2} = \frac{1}{1+u^2} (\equiv \omega_5') \\
\omega_3 = -\frac{1}{u^2} (\equiv \omega_2') \;;\quad \omega_2 = \frac{u^2+1}{u^2} (\equiv \omega_3') \;; \\
\omega_5 = 1 + u^2 = -u_4^2 (\equiv \omega_6') \;;\quad \omega_4 = -u^2 (\equiv \omega_1').
\end{gathered} \tag{24'}$$

Se permută deci în raport cu (24) vitezele cosmice şi proprii spaţiale $\omega_{1.\,4}$; reciprocele corespunzătoare $\omega_{2.\,3}$ şi vitezele cosmice temporale directe şi inverse $\omega_{5.\,6}$.

În funcție de pătratul vitezelor reciproce $\omega_2 = B^2 = \frac{1}{\beta^2}$, ω_a devin:

$$\omega_1 = \beta^2 = \frac{1}{B^2}(= \omega_2'') \quad ; \; \omega_6 = \alpha^2 = -\frac{1}{u_4^2} = -\frac{1}{U^2}(\equiv \omega_3''),$$

$$(24'') \; \omega_3 = -\frac{1}{u^2} \equiv -\frac{1}{u_4^2} = A^2 = 1 - B^2 (\equiv \omega_6') \quad ; \; \omega_2 = \frac{1}{\beta^2} = B^2 (\equiv \omega_1');$$

$$\omega_5 = -u_4^2 = -\mathcal{U}^2 = \frac{B^2}{B^2 - 1}(\equiv \omega_4'); \; \omega_4 = -u^2 = \frac{1}{1 - B^2} = -\mathcal{U}_4^2(\equiv \omega_5').$$

Se permută deci în raport cu (24), vitezele proprii spațiale directe și reciproce $\omega_{1,2}$; vitezele cosmice spațiale și temporale $\omega_{5,4}$ și inversele lor $\omega_{3,6}$. Notînd

$$(25) \quad \begin{aligned} &\pm \beta = \beta_1^{\pm}, \; z = \frac{1}{\alpha} = \frac{j+1}{j-1} = \frac{1+j}{1-j}, \; j = \frac{1}{j} = \\ &= \frac{z+1}{z-1} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}; \; \pm z \equiv z_1^{\pm} = \pm \frac{1}{\alpha_1}, \; j_1^{\pm} \equiv \pm j, \end{aligned}$$

elementele

$$\xi_{a-} = \xi_a(-\beta), \; z_{a+} = z_a \equiv \xi_a(z) \equiv \xi_a\left(\frac{1}{\alpha}\right), \; z_{a-} \equiv \xi_a(-z) \equiv \xi_a\left(-\frac{1}{\alpha}\right).$$

$$(25') \quad j_{a+} \equiv j_a = \xi_a(j) = \xi_a\left(\frac{1}{j}\right), \; j_{a-} \equiv \xi_a(-j) \equiv \xi_a\left(-\frac{1}{j}\right):$$

$$z_{a^2} = \xi_a(z^2); \; j_{a^2} = \xi_a(j^2)$$

formate din $\xi_a = \xi_a(\xi)$ prin înlocuirea scalarului ξ prin scalarii

$$-\beta; \pm z, \; \pm j; \; z^2, \; j^2$$

constituie de asemenea reprezentări ale grupului D_6.

II. VITEZE PARALELE

7. *Grupul continuu de viteze.* În cazul unor viteze $v_{1,2}$ paralele între ele, transformările (rezultantele) v devin

$$(26) \quad (T) \; V = (v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2 + 1} = \frac{1 + \frac{v_1}{v_2}}{v_1 + \frac{1}{v_2}}, \text{ sau } (T^{-1}) \; v_1 = (v, -v_2) =$$

sau

$$= \frac{v - v_2}{-w_2 + 1} = \frac{\frac{v}{v_2} - 1}{-\frac{v}{v_2} + 1},$$

$$(26') \quad \begin{aligned} &F(v, v_1; v_2) = v v_1 v_2 + v - v_1 - v_2 = 0, \\ &\text{sau } \left(v_1 + \frac{1}{v_2}\right)\left(v \pm \frac{1}{v_2}\right) = 1 \pm \frac{1}{v_2^2}. \end{aligned}$$

În raport cu v_1 (sau v_2 sau v), T, T^{-1} sînt transformări proiective inverse de tip (4) de determinant

$$(26'') \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \pm v_2 \\ \pm v_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - v_2^2 \text{ sau } \begin{vmatrix} \frac{1}{v_2} & \pm 1 \\ \pm 1 & \frac{1}{v_2^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{v_2^2} - 1.$$

F definește o familie de hiperbole echilatere în planul Ovv_1 cu parametrul v_2, de centru $-\frac{1}{v_2}$, $\frac{1}{v_2}$ și semiaxă $\left(1 - \frac{1}{v_2^2}\right)^{1/2} = a$ (în coordonate complexe, cercuri) v_1 (în T) sau v (în T^{-1}) dat, T sau T^{-1} constituie un grup continuu cu un parametru v_2 sau v cuprinzînd deci transformarea identică $I = I^{-1} \ldots v = (v, 0)$ și transformarea prin inversiune

$$(27) \qquad (J) \quad V = \frac{c^2}{v} = (v_\infty, v) \equiv (v, v_\infty) \text{ sau } (J^{-1}) \quad v = \frac{c^2}{V} = \\ = (-\infty, V) \equiv (V, -\infty)$$

de determinanți $\Delta = 0$, $\Delta = 1$ corespunzători respectiv parametrilor $v_1 = 0$, $v_2 = \pm\infty$. În raport cu $v_1 = w$, (T) sau (T^{-1}) se compune respectiv dintr-o translație $(\tau) \ldots w_1 = w + 1/v_2$, o inversiune $(J) \ldots w_2 = \frac{1}{w_1}$, o asemănare (dilatare conformă constantă) $(\theta) \ldots w_3 = \Delta w_2 = aw_2$ și o translație $(\tau') \ldots v = w_3 + \frac{1}{v_2}$. Avem deci

$$(26'') \qquad T = \tau'\theta J \tau \equiv \frac{1}{v^2} + \left(1 - \frac{1}{v_2^2}\right) \Big/ \left(w + \frac{1}{v_2}\right).$$

8. *Teoreme de invarianță.* Fie

$$(28) \qquad \begin{gathered} \varphi_{1,2} = \varphi'_{1,2} + \alpha_{1,2}, \quad i\frac{w}{c} = \operatorname{tg}\Phi, \quad i\frac{v_{1,2}}{c} = \operatorname{tg}\varphi_{1,2}, \; i\frac{v'_{1,2}}{c} = \operatorname{tg}\varphi'_{1,2} \\ i\frac{v}{c} = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad i\frac{v'}{c} = \operatorname{tg}\alpha_2. \end{gathered}$$

Conform lui (5), formulele de compunere (transformările) einsteiniene ale vitezelor paralele sînt atunci invariante pentru $v' = -v$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = k\pi$, $\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 = 0)$. Avem atunci (punînd $c = 1$)

$$(28') \qquad \begin{aligned} &(a) \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}(\varphi'_1 + \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi'_1 + \operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \operatorname{tg}\varphi'_1 \operatorname{tg}\alpha_1} \text{ sau } v_1 = (v, v'_1) = \frac{v'_1 + v}{1 + v'_1 v} \\ &(b) \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}(\varphi'_2 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi'_2 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi'_2 \operatorname{tg}\alpha_2}, \text{ sau } v_2 = (-v, v'_2) = \frac{v'_2 - v}{1 - v'_2 v} \end{aligned}$$

deci

$$\text{tg}\,\Phi = (v_1,\, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} = \frac{v_1' + v_2'}{1 + v_1' v_2'} \quad \text{sau} \tag{28''}$$

$$\text{tg}\,\Phi = \text{tg}\,(\varphi_1 + \varphi_2) = \text{tg}\,(\varphi_1' + \varphi_2')$$

(28 a, b) fiind transformări proiective inverse de tip Einstein. (28″) constituie forma lui (5) pentru viteze paralele. Notînd

$$w_1' = (v',\, v_1) = \frac{v' + v_1}{1 + v' v_1},\quad w_2' = (v,\, v_2) = \frac{v' + v_2}{1 + v' v_2},\, w = (v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2},$$

transformarea (compunerea)

$$w' = (v',\, w) = \frac{v' + w}{1 + v' w}$$

a vitezelor paralele v, w' ia formele echivalente

$$w' = (v_1',\, w) \equiv (v_1,\, v_2') = (v_1',\, v_2) = \frac{v_1 + w_2'}{1 + v_1 w_2'} = \frac{w_1' + v_2}{1 + w_1' v_2}. \tag{29}$$

(29) e forma lui (6) pentru viteze paralele. În cazurile particulare: $v' = \pm\, v$, avem (în notațiile (28))

$$\begin{aligned} w' &= (v,\, w) = \frac{v_1 + v_2'}{1 + v_1 v_2'} = \frac{w_1' + v_2}{1 + w_1' v_2} \\ w' &= (-\, v,\, w) = \frac{v_1 + w_2'}{1 + v_1 w_2'} = \frac{v_1' + v_2}{1 + v_1' v_2}. \end{aligned} \tag{29'}$$

9. *Viteze reciproce paralele.* În cazul compunerii vitezei $\overline{v}$ cu o viteză infinită $\overline{v}_\infty$ paralelă, într-o ordine oarecare, vitezele reciproce $\overline{V}$, $\overline{\mathcal{V}}$ se identifică între ele, fiind paralele cu viteza $\overline{v}$ dată, iar valorile absolute corespunzătoare sînt „reciprocele" lui v : $V = \mathcal{V} = \dfrac{c^2}{v}$, $v \cdot V = c^2$ e simetrică. Avem, într-adevăr, în (8) (sau (9)) și (10) pentru componente și valori absolute în cazurile vitezelor $\overline{v}$, $\overline{v}_\infty$ (de unghi γ) paralele (sau antiparalele) respectiv ortogonale

$$\begin{aligned} \gamma = \left\{\begin{smallmatrix} 0 \\ \pi \end{smallmatrix}\right. (\overline{v} = \pm\, \overline{v}_{\parallel} \parallel \overline{v}_\infty,\ \overline{v}_{\perp} = 0) :\ \overline{V}_{\parallel} = \overline{\mathcal{V}}_{\parallel} = \pm\, c^2 \frac{\overline{v}}{v^2} = \\ = \overline{V} = \overline{\mathcal{V}},\ \overline{V}_{\perp} = \overline{\mathcal{V}}_{\perp} = 0,\ vV = \pm\, c^2 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} (\overline{v} = \overline{v}_{\perp} \perp \overline{v}_\infty,\ \overline{v}_{\parallel} = 0) :\ \overline{V}_{\parallel} = -\, i\overline{V}_{\perp} = \overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{V}}_{\perp} = \overline{v}_\infty. \tag{31}$$

În cazul $\gamma = 0$ ($\overline{v} \parallel \overline{v}_\infty$), unghiurile Γ_α ale vitezelor reciproce $\overline{v}$ și $\overline{V}$ cu axele coincid deci; inversiunea

$$V^\alpha = \frac{c^2\, v^\alpha}{v^2} \left(= \frac{v^\alpha}{\beta^2}\right) \quad \text{sau}\ v^\alpha = \frac{c^2\, V^\alpha}{V^2} \left(= \frac{V^\alpha}{B^2}\right) \tag{30'}$$

e echivalentă cu $\cos \Gamma_\alpha = \cos \gamma_\alpha$ ($\Gamma_\alpha = \gamma_\alpha$). În E_3 avem atunci $\overline{V} \parallel \overline{v}$, iar în spațiul-timp pseudoeuclidian relativist restrîns E_4 (conform § 3) $\overline{V} \perp \overline{v}$ (fig. 3 și 4). Transformările de inversiune

$$(30'') \qquad vV = c^2 \quad \text{sau} \quad \beta B = 1$$

sau (pentru $c = 1$)

$$vV = 1$$

constituie un caz particular (corespunzător lui $v_2 = \pm \infty$) al formulei de compunere (26) a vitezelor paralele (în particular, pentru $v = c$, v_0, v_∞ avem $V = c$, v_∞, v_0). Compunerea relativistă a vitezelor paralele $\overline{v}$, $\overline{v}_\infty$ se scrie conform lui (27), (28″)

$$(30''') \qquad V \left(= \frac{c^2}{v}\right) = (v_\infty,\ v) = (v,\ v_\infty) = (v_0,\ V) \equiv (V,\ v_0)$$

sau

$$v \left(= \frac{c^2}{V}\right) = (v_\infty,\ V) = (V,\ v_\infty) = (v_0,\ v) = (v,\ v_0).$$

Avem încă în notațiile (28), notînd acum $\left(\text{în loc de } i\dfrac{v'}{c} \operatorname{tg} \alpha_2\right)$:

$$(31) \qquad i\frac{V}{c} = \operatorname{tg} \alpha_2,$$

pentru $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{cotg} \alpha_1$, $vV = -c^2$, $\beta B = -1$, $\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = -\operatorname{cotg}(\varphi_1' + \varphi_2')$,

$$(31') \quad v_1 = (v_2,\ v_1') = \frac{v_1' + v}{1 + v_1 v_1'}, \quad v_2 = (v,\ v_2') = \frac{v_2' - \dfrac{1}{v}}{1 - \dfrac{v_2'}{v}} = \frac{v_2' v - 1}{v - v_2'}$$

$$w = (v_1,\ v_2) = \frac{1}{W} = \frac{1}{(V_1',\ V_2')} \quad \text{sau} \quad \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} = \frac{1 + v_1' v_2'}{v_1' + v_2'}.$$

Transformarea identică $I = I^{-1} (\overline{V} = \overline{v})$ și inversiunea $\bar{\mathrm{J}} = \dot{\mathrm{J}}^{-1}$ ($Vv = 1$) constituie singurele involuții (= subgrupuri ciclice) de ordin 1 respectiv 2 ale grupului continuu de transformări (26). Transformarea identică ($V^2 = v^2$) și inversiunea $V^2 v^2 = 1$ constituie singurele subgrupuri finite ale grupului de transformări (24) în v^2 ($c = 1$) și al grupului de transformări

$$v^2 = (v_1^2 + v_2^2)/(1 + v_1^2 v_2^2)$$

cu parametrul $v_2^2 \cdot v v_1 = 1$ e înfășurătoarea curbelor (26′) [deci respectiv $w_2 = 1$, $v_1 v_2 = -1$ e înfășurătoarea curbelor (26′) cu parametrul v_1 respectiv v]. Permutarea $\beta \longleftrightarrow B$ ($v \longleftrightarrow V$) dă

$$(32) \qquad \alpha = i\frac{A}{B}, \quad A = -i\frac{\alpha}{\beta};$$

ea permută deci elementele grupului D_6 conform lui (24″).

10. *Viteze cosmice.* Relația dintre vitezele cosmice directe și reciproce rezultă în cazul de față ($\overline{v} \parallel \overline{V} \parallel \overline{v}_\infty$, $\overline{v}_\perp = V_\perp = 0$) din (30″) și (32) sau din (19).

Avem

$$\mathcal{U}_\alpha = i\,\frac{u_\alpha}{\beta},\ \mathcal{U}_4 = -\,u\left(= -\,\frac{v}{\alpha}\right)$$

sau

$$u_\alpha = -\,i\mathcal{U}_\alpha/B,\ u_4 = \mathcal{U}\left(= \frac{V}{A}\right)$$

echivalente cu (30′) sau (30″). Avem deci pentru $\overline{V}_\infty \parallel Ox_1$ (deci și $\overline{v} \parallel Ox_1$, $\overline{V} \parallel Ox_1$), deci pentru $v = v_1\,(v_2 = v_3 = 0)$, formulele

$$(32')\qquad \mathcal{U}_1 = \mathcal{U} = u_4,\quad \mathcal{U}_4 = -\,u_1\,(= -\,\mathcal{U}),\ \mathcal{U}_{2,\,3} = u_{2,\,3} = 0$$

[caz particular al lui (20)].

11. *Legea compunerii vitezelor.* Conform notațiilor din § 2, $\gamma = 0$ dă $\Gamma = 0$ iar $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ dă $\operatorname{tg}\Gamma = i\left(\Gamma = -\,\dfrac{\pi i}{4}\right)$; invers, $\Gamma = \dfrac{\pi}{2}$ dă $\operatorname{tg}\gamma = -\,i\left(\gamma = -\,\dfrac{\pi i}{4}\right)$.

În cazul vitezei $\overline{w}' \parallel \overline{v}$ ($\gamma' = \gamma = 0$), deci $\overline{W}' \parallel \overline{w}' \parallel \overline{v} \parallel \overline{w} \parallel \overline{W} \parallel \overline{v}_\infty$ deci $W' = c^2/w'$, $W = c^2/w$, (22) iau în notațiile (26) forma simplă:

$$(a)\ v = \frac{c^2}{V} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \dfrac{V_1 V_2}{c^2}}\ \text{sau}\ V = \frac{v_1 + V_2}{1 + \dfrac{v_1 V_2}{c^2}} = \frac{V_1 + v_2}{1 + \dfrac{V_1 v_2}{c^2}}$$

$$(33)\qquad \alpha = \alpha_1\,\alpha_2\Big/\left(1 + \frac{v_1\,v_2}{c^2}\right) \equiv -\,A_1 A_2\Big/\left(1 + \frac{V_1\,V_2}{c^2}\right)$$

sau

$$(b)\ A = \alpha_1\,A_2\Big/\left(1 + \frac{V_1\,v_2}{c^2}\right) \equiv A_1\,\alpha_2\Big/\left(1 + \frac{v_1\,V_2}{c^2}\right).$$

În (15), $vV = c^2$, $\beta B = 1$ e echivalent cu

$$(33')\qquad \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\Phi = 1,\quad \operatorname{tg}\varphi = -\,\operatorname{cotg}\Phi.$$

III. TEORIA RELATIVIST RESTRÎNSĂ 8-DIMENSIONALĂ (CONFORMĂ)

Covarianța conformă a legilor fizice în spațiul-timp cvadridimensional e echivalentă unei teorii relativiste 6-(mai general 8-) dimensionale. Transformările conforme relativist-restrînse leagă corpurile uniform accelerate; transformările Lorentz (legînd corpuri în translație uniformă = de accelerație nulă) constituie un subgrup (L. Hill). Ecuațiile lui Maxwel, cele mezonice cît și ecuațiile de tip Dirac cu densități de masă variabilă și ecuațiile generalizate ale gravitației sînt conform invariante.

12. *Intervalul coordonate-durată.* În varietatea coordonate-durată relativist restrînsă pseudoeuclidian E_4, intervalul cvadridimensional cosmic $\mathrm{d}s^2$ sau propriu $\mathrm{d}s'^2$ este

$$(34)\quad ds^2 = \Sigma\,(\mathrm{d}x^i)^2 = \mathrm{d}l^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}l'^2 - c^2\,\mathrm{d}t'^2 \equiv \Sigma\,(\mathrm{d}x'^i)^2 = \mathrm{d}s'^2 \quad (i = 1, \ldots, 4).$$

$\mathrm{d}l = (\Sigma\,(\mathrm{d}x^\alpha)^2)^{1/2}$ este distanța spațială cosmică, $\mathrm{d}t = -\,ix^4/c$ timpul cosmic, $\mathrm{d}l' = (\Sigma\,(\mathrm{d}x'^\alpha)^2)^{1/2}$ distanța spațială proprie, $\mathrm{d}t'$ timpul propriu. Punînd $x^5 = ct'$, $x^{\alpha'} = ix'^\alpha$, $(\alpha' = 6, 7, 8)$, metrica $\mathrm{d}s^2$ ia forma conform covariantă a ecuației 8-dimensionale a unui con luminos în varietatea conform euclidiană H_8 sau pseudoeuclidiană E_8 de signatură $+++-+---$ (determinată doar pînă la un factor arbitrat ρ^2 funcție de coordonate). Ea realizează simetria deplină în variabilele de gen spațiu și timp (4 pătrate pozitive și 4 negative) și cosmice-proprii (cîte 4), și deci formularea adecvată a teoriei izospinorilor (= teoria spinorilor cu 8 componente unificînd izodubleții de particule în transformare reciprocă : proton-neutron, probabil electron-neutrino etc. și antiparticulele respective. Distanța (metrica = intervalul) a două evenimente în E_8 este

$$\mathrm{d}\tau^2 = 0 \quad \text{sau} \quad \mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}s'^2 = 0 \quad \text{sau} \quad \Sigma\,(\mathrm{d}x^a)^2 = 0$$

sau

$$(35)\qquad \Sigma\,(\mathrm{d}x^\alpha)^2 - c^2\,\mathrm{d}t^2 + c^2\,\mathrm{d}t'^2 - \Sigma\,(\mathrm{d}x'^\alpha)^2 = 0$$

sau

$$\mathrm{d}l' - c^2\,\mathrm{d}t^2 + c^2\,\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}l'^2 = 0 \qquad (a, b = 1, \ldots, 8).$$

Luînd x^6 în direcția mișcării momentane ($x^6 = il' = ix'^1$; $x^7 = x^8 = 0$), (35) se reduce la conul de signatură $+++-+-$ a coordonatelor conforme hexasferice.

Fie $v^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}$ componentele vitezei spațiale, $\alpha = \dfrac{1}{z} = \sqrt{1 - \beta^2}$ radicalul lui Lorentz. Presupunem sistemele de referință cosmic (fix) C și propriu (mobil) C' avînd axele spațiale paralele în E_3 sau E_3' și în translație uniformă de-a lungul axei $ox_1 \parallel o'x_1'$,

$$(35')\quad (v = v^1;\ v^2 = v^3 = 0;\ \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}x^3 = 0;\ v^7 = v^8 = 0,\ \mathrm{d}x^7 = \mathrm{d}x^8 = 0),$$

$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$ este de gen temporal (T), spațial (S) sau izotrop (luminos) (i) după cum $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2 \lesseqgtr 0$.

În cazul (T) există un sistem de coordonate astfel ca $\mathrm{d}l' = 0$, deci

$$(36)\qquad \mathrm{d}l = v\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{\alpha},\ \ \mathrm{d}x^1 = v\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}s = ic\,\mathrm{d}t' = i\alpha\, c\mathrm{d}t$$

sau

$$(T)\quad \mathrm{d}x^6 = 0,\quad \mathrm{d}x^1 = -\,i\beta\,\mathrm{d}x^4,\quad \mathrm{d}s = i\mathrm{d}x^5 = \alpha\,\mathrm{d}x^4;$$

intervalul $\mathrm{d}s$ este atunci identic cu timpul propriu $ic\,\mathrm{d}t'$.

În cazul (S) există un sistem de coordonate astfel ca $\mathrm{d}t = 0$, deci

$$(37)\quad \mathrm{d}t' = -\,\frac{v}{c^2}\,\mathrm{d}l'\left(= -\,v\,\frac{\mathrm{d}x'^1}{c^2}\right);\ \mathrm{d}l = \alpha\mathrm{d}l'\ (\mathrm{d}x^1 = \alpha\,\mathrm{d}x'^1);\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}l = \alpha\mathrm{d}l'$$

sau

$$(S)\ \mathrm{d}x^4 = 0,\ \mathrm{d}x^5 = i\beta\,\mathrm{d}x^6;\ i\mathrm{d}s = i\mathrm{d}x^1 = \alpha\mathrm{d}x^6.$$

Intervalul ds este atunci identic cu lungimea cosmică d$x' =$ dl. În cazul (i) avem

$$\mathrm{d}l = c\mathrm{d}t;\ \ \mathrm{d}l' = c\mathrm{d}t';\ \ (\mathrm{d}x' = c\mathrm{d}t;\ \ \mathrm{d}x'^1 = c\mathrm{d}t')$$

deci

$$(i)\ \mathrm{d}x^1 = -\,i\,\mathrm{d}x^4,\ \ \mathrm{d}x^6 = i\,\mathrm{d}x^1;\ \ \mathrm{d}s = 0.$$

Relaţiile (S) derivă din relaţiile (T) şi, invers, prin permutarea simultană a variabilelor x^4 şi x^6, x^1 şi x^5 şi $\beta \longleftrightarrow -\beta$, d$s \longleftrightarrow ids$. Metrica şi toate legile fizice devin invariante în variabilele spaţiale şi temporale, cosmice şi proprii.

13. *Intervalul impuls-energie.* Intervalul relativist restrîns cvadridimensional şi impuls-energie în varietatea corespunzătoare pseudoeuclidiană impuls-energie cosmic d$\bar{s}^2$ sau propriu d$\bar{s}'^2$ este

$$(38)\quad \mathrm{d}\bar{s}^2 \equiv \Sigma\,(\mathrm{d}p_i)^2 = \mathrm{d}p^2 - \frac{1}{c^2}\mathrm{d}W^2 = \mathrm{d}p'^2 - \frac{1}{c^2}\mathrm{d}W'^2 = \Sigma\,(\mathrm{d}p_i)^2 = \mathrm{d}\bar{s}'^2,$$

p_a fiind impulsurile corespunzătoare coordonatelor x^α:

$$p_\alpha,\ p_4 = i\frac{W}{c},\ \ p_5 = cm' = \frac{W'}{c},\ p_\alpha = ip'_\alpha = icm''_\alpha.$$

d$p = [\,\Sigma\,(dp_\alpha)^2]^{1/2}$ e impulsul tridimensional cosmic, dW energia cosmică, d$W' = c^2\,m'$ energia proprie, m', m''_α masele proprii scalare şi pseudoscalare, d$p' \equiv [\,\Sigma\,(\mathrm{d}p'_\alpha)^2]^{1/2} = c\,[\,\Sigma\,(\mathrm{d}m''_\alpha)^2]^{1/2}$ impulsul propriu total. În varietatea conform-euclidiană impuls-energie H_8 sau cea pseudoeuclidiană E_8 (canonic conjugate lui H_8, E_8), intervalul total impuls-energie este

$$\mathrm{d}\bar{\tau}^2 = 0 \ \text{ sau } \ \Sigma\,(\mathrm{d}p_\alpha)^2 = 0 \ \text{ sau } \ \mathrm{d}\bar{s}^2 - \mathrm{d}\bar{s}'^2 = 0$$

sau

$$\Sigma\,(\mathrm{d}p_\alpha)^2 - \frac{1}{c^2}\,\mathrm{d}W^2 + \frac{1}{c^2}\mathrm{d}W'^2 - \Sigma\,(\mathrm{d}p'_\alpha)^2 = 0$$

sau

$$\Sigma\,(\mathrm{d}p_\alpha)^2 - \frac{1}{c^2}\mathrm{d}W^2 + c^2\,\mathrm{d}m'^2 - c^2\,\Sigma\,(\mathrm{d}m''_\alpha)^2$$

sau

$$\mathrm{d}p^2 - \frac{1}{c^2}\mathrm{d}W^2 + \frac{1}{c^2}\mathrm{d}W'^2 - \mathrm{d}p'^2 = 0.$$

Pentru $x^7 = x^8 = 0$, $\overline{E}_8$ se reduce la $\overline{E}_6$. Fie din nou presupusă formula (35′), deci $p = p_1$; p_2, $p_3 = 0$; $p_7 = p_8 = 0$ ($p'_2 = p'_3 = 0$). d$\bar{s}^2 =$ d$\bar{s}'^2$ e de gen „temporal" (energie) W sau spaţiul („impuls") (p) sau izotrop („luminos") (i) după cum d$\bar{s}^2 =$ d$\bar{s}'^2 \lesseqgtr 0$. În cazul (W) [singurul considerat de teoria relativistă uzuală], există un sistem de coordonate astfel ca $\mathrm{d}p' = 0$, deci

$$(40) \qquad \mathrm{d}p = \frac{v}{c^2}\,\mathrm{d}W \left(\mathrm{d}p_1 = \frac{v}{c^2}\,\mathrm{d}W\right), \quad \mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}W'}{\alpha}, \quad \mathrm{d}\bar{s} = \frac{i}{c}\,\mathrm{d}W' = \frac{i\alpha}{c}\,\mathrm{d}W$$

sau

$$(W) \qquad \mathrm{d}p_6 = 0, \ \mathrm{d}p_1 = -\,i\beta\,\mathrm{d}p_4\ , \quad \mathrm{d}\bar{s} = i\mathrm{d}p_5 = \alpha\,\mathrm{d}p_4\,;$$

intervalul impuls-energie $\mathrm{d}\bar{s}^2$ e atunci identic (pînă la factorul ic) cu masa proprie scalară m' (sau energia proprie W'). În cazul (p) există un sistem de coordonate astfel ca $\mathrm{d}W = 0$ deci

$$(41) \qquad \mathrm{d}W' = -\,v\,\mathrm{d}p'\ (\mathrm{d}W' = -\,v\,\mathrm{d}p_1'), \quad \mathrm{d}p = \alpha\,\mathrm{d}p'\ (\mathrm{d}p_1 = \alpha\,\mathrm{d}p_1'),$$

$$\mathrm{d}\bar{s} \equiv \mathrm{d}p = \alpha'\,\mathrm{d}p'$$

sau

$$(p) \quad \mathrm{d}p_4 = 0, \ \mathrm{d}p_5 = i\beta\,\mathrm{d}p_6\ , \ i\mathrm{d}\bar{s} = i\,\mathrm{d}p_1 = \alpha\,\mathrm{d}p_6\,.$$

$pc = p_1c = \alpha c^2 m''$ e potențialul cinetic (lagrangeanul mecanicii relativiste clasice). Intervalul $\mathrm{d}\bar{s}$ este atunci identic cu potențialul cinetic (cosmic).

În cazul (i) avem

$$\mathrm{d}p = \frac{1}{c}\,\mathrm{d}W\ , \ \mathrm{d}p' = \frac{1}{c}\,\mathrm{d}W' \left(\mathrm{d}p_1 = \frac{1}{c}\,\mathrm{d}W, \ \mathrm{d}p_1' = \frac{1}{c}\,\mathrm{d}W'\right)$$

deci

$$(i')\ \mathrm{d}p_1 = -\,i\,\mathrm{d}p_4\ , \ \mathrm{d}p_6 = i\,\mathrm{d}p_1\ , \ \mathrm{d}\bar{s} = 0.$$

(T) și (W), (S) și (p), (i) și (i') sînt izomorfe $(x^\alpha \longleftrightarrow p_\alpha)$.

14. *Coordonate cosmice și proprii.* Opoziția dintre coordonate (sau impulsuri) proprii și cosmice (deci dintre varietățile E_8 și E_8') (sau E_8, $\overline{E}_8'$) e relativă, varietățile unificate E_8, $\overline{E}_8$ prezentînd simetria cantitativă în variabilele cosmice și proprii și asimetria calitativă. Coordonatele și impulsurile proprii $x^{i'}, p_i'$ ale lui E_4, $\overline{E}_4$ (pînă la factorul $\pm\, i$) respectiv coordonatele și impulsurile cosmice x'^i, p_i' în $E_4, \overline{E}_4'$. Invers, coordonatele și impulsurile cosmice $(x'^i)'$, $(p_i')'$ ale lui E_4, $\overline{E}_4$ sînt respectiv (pînă la factorul $\pm i$) coordonatele și impulsurile proprii ale lui E_4', $\overline{E}_4'$. Avem:

$$(42) \qquad x^{i'} = \pm\, ix'^i, \ p_i' = \pm\, i\,p_i'\,; \ \ x^i = \pm\,(x'^i)', \ \ p_i = \pm\, i\,(p_i')'$$

sau

$$x^a = \pm\, ix'^{a'}, \ p_a = \pm\, ip_{a'}', \ (i = 1, \ldots, 4\,;$$

$$i' = i + 4 = 5, \ldots, 8\,; \ a = 1, \ldots, 8\,; \ a' = 8 - a)$$

deci

$$x^\alpha = -\,ix'^\alpha, \ x^4 = ix'^5, \ x^5 = -\,ix'^4, \ x^{\alpha'} = ix'^\alpha$$

$$(42') \qquad x'^\alpha = -\,ix^{\alpha'}, \ x'^4 = ix^5, \ x'^5 = -\,ix^4, \ x'^{\alpha'} = ix^\alpha$$

($\pm$ după cum x^α, p_a e imaginar sau real). Formulele (42') sînt valabile pentru $x^{\alpha,5}$ reali; $x^{4,\alpha'}$ imaginari și $x'^{\alpha,5}$ reali, $x'^{4,\alpha'}$ imaginari. Analog în $\overline{E}_8$, $\overline{E}'_8$. Varietăţile E_8 (de metrică $\mathrm{d}\tau^2 = \Sigma\,(\mathrm{d}x^a)^2 = 0$ şi E'_8 (de metrică $\mathrm{d}\tau^2 = \Sigma\,(\mathrm{d}x'^a)^2$) au deci signatura opusă.

$$\begin{array}{ll} & (1\;2\;3\quad 4\;5\;6\;7\;8)\\ (E_8) & +++\quad -+---\\ (E'_8) & ---\quad +-+++\\ & (8\;7\;6\quad 5\;4\;3\;2\;1)\end{array}$$

Analog varietatea E_8 (de metrică $\mathrm{d}\bar{\tau}^2 = \Sigma\,(\mathrm{d}p_a)^2$ şi E'_8 (de metrică $-\,\mathrm{d}\bar{\tau}^2 = \Sigma\,(\mathrm{d}p'_a)^2$).

Transformarea Lorentz ($\overline{\mathcal{L}}$) a variabilelor cosmice x^i (pag. 6) şi transformarea inversă $\overline{\mathcal{L}}'$ a variabilelor proprii x'^i (pag. 7) corespunzătoare unei rotaţii $\dfrac{\pi i}{2}$ cu viteza $\bar{v} = \bar{v}_\infty \parallel OX$, iau în E_8 respectiv E'_8 (şi analog în $\overline{E}_8$, $\overline{E}'_8$) forma

$$(\overline{\overline{\mathcal{L}}}')\quad x'^1 = X'^4 = x^6,\ x'^4 = -\,X'^1 = x^5,\ x'^5 = -\,X'^6 = -\,x^4,\ x'^6 = \\ = X'^5,\ = x^1$$

sau

$$x'^1 = icT' = il',\ ic\bar{t}' = -\,X'^1 = ct'\,;\ ct = -\,iL = -\,ict\,;\ il = c\,T = x^1$$

valabilă (în opoziţie cu (42′) ($\overline{\overline{\mathcal{L}}}$)) pentru $x^{\alpha,5}$ imaginari, $x^{4,\alpha'}$ reali ($X^{\alpha,5}$ reali, $X^{4,\alpha'}$ imaginari şi $x'^{\alpha,5}$ reali, $x'^{4,\alpha'}$ imaginari) şi

$$(\overline{\overline{\mathcal{L}}})\quad x^1 = -\,X^4 = -\,x'^6,\ x^4 = +\,X^1 = x'^5\,;\ x^5 = X^6 = x'^4\,;\\ x^6 = -\,X^5 = -\,x'^1$$

sau

$$x^1 = -\,icT = -\,il,\ ict = X^1 = ct\,;\ ct' = iL' = ict',\ il' = -\,cT' = -\,x'^1$$

valabile (în opoziţie cu (42′, $\overline{\overline{\mathcal{L}}}$)) pentru $x'^{\alpha,5}$ imaginari, $x'^{4,\alpha'}$ reali ($X'^{\alpha,5}$ reali, $X'^{4,\alpha'}$ imaginari şi $x^{\alpha,5}$ reali, $x^{4,\alpha'}$ imaginari).

15. *Intervalul în coordonate proprii.* Intervalul de gen spaţial (s) se scrie

$$(43)\quad \mathrm{d}x'^\alpha = -\,V^\alpha \mathrm{d}t' = \frac{V^\alpha}{V}\,\mathrm{d}l' = \frac{v^\alpha}{v}\,\mathrm{d}l'\,(\mathrm{d}l' = -\,V\,\mathrm{d}t'),\ i\mathrm{d}s = i\mathrm{d}x^1 = c\alpha\mathrm{d}t',$$

lungimea proprie $\mathrm{d}l'$ e deci parcursă cu viteza reciprocă $-\,V = -\,\dfrac{c^2}{v}$, $-\,V^\alpha = -\,c^2\,v^\alpha/v$ antiparalelă lui v. Conform formulei (t), dimpotrivă, lungimea cosmică $\mathrm{d}l$ e parcursă cu viteza $v = c^2/V$ (reciproca lui V) şi paralelă cu ea (v de componente $v^\alpha = c^2 V^\alpha$).

a. *Pentru* $v > c$ ($V < c$, A real, α imaginar) şi $v \parallel Ox$, ($\mathrm{d}l = \mathrm{d}x^1$), conform formulei ($t$), $\mathrm{d}l$ e parcurs cu viteza supraluminoasă v în timpul $\mathrm{d}t = -\,i\,\mathrm{d}x^4$, iar l, t sînt imaginari. Avem atunci, conform notaţiilor ($\overline{\overline{\mathcal{L}}}$)

(pag. 20), în cazul (t) pentru X^a (L, T reali), formulele izomorfe cu (t) (schimbînd $\beta \leftrightarrow - B$, $\mathrm{d}s \leftrightarrow i\,\mathrm{d}s$)

$$\begin{gathered}\mathrm{d}X^6 = 0,\ \mathrm{d}X^1 = iB\mathrm{d}X^4,\ i\mathrm{d}s = i\mathrm{d}X^5 = A\mathrm{d}X^4\\ \mathrm{d}L' = 0,\ \mathrm{d}X^1 = \mathrm{d}L = - v\mathrm{d}t,\ i\mathrm{d}s = ic\mathrm{d}T' = icA\mathrm{d}T\end{gathered}\tag{T}$$

și formulele analoge în impulsurile P_a.

În E_8 al variabilelor x^a, (T) ia atunci forma echivalentă

$$\begin{gathered}\mathrm{d}x^5 = 0,\ \mathrm{d}x^4 = - iB\mathrm{d}x^1,\ i\mathrm{d}s = - i\mathrm{d}x^6 = A\mathrm{d}x^1\\ \mathrm{d}t' = 0,\ \mathrm{d}t = - \frac{V}{c^2}\mathrm{d}x^1,\ i\mathrm{d}s = \mathrm{d}l' = - A\mathrm{d}l\end{gathered}\tag{44}$$

și forma analogă în impulsurile p_a, deci în E'_8 al variabilelor x'_a

$$\mathrm{d}x'^4 = 0,\ \mathrm{d}x'^5 = iB\,\mathrm{d}x'^6,\ i\mathrm{d}s = i\mathrm{d}x'^1 = A\,\mathrm{d}x'^6\tag{S'}$$

și formulele analoge în $E_8(p'\ a)$, izomorfe respectiv cu (s) și (p).

În cazul (s) avem, conform notațiilor, $\mathscr{L}$ formulele izomorfe cu (S) pentru variabilele X^a (L, T reali) (schimbînd $\beta \leftrightarrow - \beta$, $\mathrm{d}s \leftrightarrow - i\mathrm{d}s$)

$$\begin{gathered}\mathrm{d}X^{4,2,3} = 0,\ \mathrm{d}X^5 = - iB\,\mathrm{d}X^6,\ - i\mathrm{d}s = \mathrm{d}X^1 = A\mathrm{d}X^6\\ (\mathrm{d}T = \mathrm{d}X^{2,3} = 0),\ \mathrm{d}T' = \frac{V}{c^2}\mathrm{d}L',\ \mathrm{d}s = i\mathrm{d}x^1 = A\mathrm{d}L')\end{gathered}\tag{S}$$

și formulele analoge în P_a.

În E_8 (x^a) (s) ia atunci forma echivalentă

$$\mathrm{d}x^\alpha = 0, \mathrm{d}x^{\alpha'} = iB^\alpha\mathrm{d}x^5 (= iV^\alpha\mathrm{d}t'), \mathrm{d}s = i\mathrm{d}x^4 = - c\mathrm{d}t = cA\mathrm{d}t' = A\mathrm{d}x^5\tag{45}$$

și forma analogă în p_a deci în $E'_8(x'^a)$ forma

$$\mathrm{d}x'^{\alpha'} = 0,\ \mathrm{d}x'^\alpha = - iB^\alpha\mathrm{d}x'^4,\ \mathrm{d}s = i\mathrm{d}x'^5 = A\,\mathrm{d}x'^4\tag{T'}$$

și forma analogă în $\overline{E}_8(p_a)$, izomorfe respectiv cu (t) și (w).

b. *Pentru* $v < c$ ($V > c$, A imaginar, α real) și $v \parallel Ox_1$ ($\mathrm{d}l' = \mathrm{d}x'^1$) în E'_8 conform lui (43), lungimea proprie $\mathrm{d}l' = - i\mathrm{d}x^6$ e parcursă în timpul $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}x^5/c$ cu viteza supraluminoasă $- V = - c^2/v$.

Conform notațiilor $\overline{\overline{\mathscr{L}}}'$ (pag. 20) în *cazul* (t) pentru variabilele X^a (L, T reali), avem formulele

$$\mathrm{d}X'^{4,7,8} = 0,\ \mathrm{d}X'^5 = - i\beta\mathrm{d}X'^6,\ i\mathrm{d}s = i\mathrm{d}X'^1 = \alpha\mathrm{d}X'^6\tag{s'}$$

și cele analoge în P'_a izomorfe respectiv cu (s) și (p). Formulele (s') iau deci în $E'_8(x'^a)$ forma echivalentă

$$\mathrm{d}x'^\alpha = 0,\ \mathrm{d}x'^6 = i\beta\mathrm{d}x'^5,\ i\mathrm{d}s = i\mathrm{d}x'^4 = \alpha\mathrm{d}x'^5\tag{46}$$

și cea analogă în $\overline{E}_8(p'_a)$.

În cazul (s) avem conform notațiilor $\overline{\overline{\overline{\mathscr{L}}}}'$ în variabilele X^a (L, T reali), formulele

$$\mathrm{d}X'^{\alpha'} = 0,\ \mathrm{d}X'^1 = i\beta\mathrm{d}X'^4,\ \mathrm{d}s = i\mathrm{d}X'^5 = \alpha\mathrm{d}X'^5\tag{t'}$$

și cele analoge în P_a izomorfe respectiv cu (t) și (w) (permutînd $\beta \to - \beta$).

(t') ia deci în $E'_8(x'^a)$ forma echivalentă

$$\mathrm{d}x'^{5,7,8} = 0,\ \mathrm{d}x'^4 = - i\beta x'^1,\ \mathrm{d}s = - i\mathrm{d}x'^6 = - i\alpha\mathrm{d}x'^1\tag{47}$$

și forma analogă în $\overline{E}'_8$ (p'_a). Formulele (t), (T), (T'), (t') sînt izomorfe. De asemenea, (s), (S), (S'), (s'). Ele se exprimă respectiv în mărimile:

	gen spațial	gen temporal				
(48)	(s)	$(t):$	x^a	β	$\mathrm{d}s$	$(v < c,\ V > c)$
	(S)	$(T):$	x'^a	B	$\mathrm{d}S$	$(v > c,\ V < c)$
	(t')	$(s'):$	X'^a	$-\beta$	$i\mathrm{d}s$	$(v < c,\ V > c)$
	(T)	$(S):$	X^a	$-B$	$i\mathrm{d}S$	$(v > c,\ V < c)$

(toate variabilele de indici α, 5 reale, cele de indici 4, α' imaginare).

16. *Viteze subluminoase și supraluminoase.* Formulele (t), (t') și (S), (S') corespund vitezelor v subluminoase (V supraluminoase); (T), (T') și (S), (S') corespund vitezelor v supraluminoase (V subluminoase).

$\leftrightarrow$ simbolizînd echivalența, avem deci:

$$v < c\ (V > c) : (t) \leftrightarrow (s')\,;\ (s) \leftrightarrow (t')$$

$$v > c\ (V < c) : (S) \leftrightarrow (T')\,;\ (T) \leftrightarrow (S')$$

și deci mai general

$$\begin{aligned} &(t) \leftrightarrow (T') \leftrightarrow (s') \leftrightarrow (S) \quad \text{(vectori de gen temporal)} \\ &(s) \leftrightarrow (S') \leftrightarrow (t') \leftrightarrow (T) \quad \text{(vectori de gen spațial).} \end{aligned} \tag{49}$$

Pentru viteze supraluminoase, intervalul cosmic de gen spațial (respectiv temporal) se identifică deci cu intervalul propriu de gen temporal (respectiv spațial).

Aceste concluzii valabile în E_8, E'_8 sau $\overline{E}_8$, $\overline{E}'_8$ se confirmă în E_4, E'_4 (sau $\overline{E}_4$, $\overline{E}'_4$) cvadridimensional. Într-adevăr, pentru $v = v_1$ $(v_2 = = v_3 = 0)$, conform lui $Vv = c^2$ în transformările Lorentz $(\overline{\mathscr{L}})$, $(\overline{\mathscr{L}}')$, (§ 3) (pentru $\mathrm{d}x'_1 = 0$), $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$ și $\mathrm{d}X = V\mathrm{d}t$ sînt echivalente; de asemenea, (pentru $\mathrm{d}t = 0$), $\mathrm{d}t' = -v\ \mathrm{d}x'_1/c^2$ și $\mathrm{d}T' = -\dfrac{V}{c^2}\ \mathrm{d}L'$ sînt echivalente. În formulele (t) și (s) avem respectiv

$$\begin{aligned} &(t)\ \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 - c^2\mathrm{d}t^2 \equiv (V^2 - c^2)\,\mathrm{d}t^2 \left[= \mathrm{d}X_1^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\right] = \\ &\qquad = \mathrm{d}X_1'^2 - c^2\mathrm{d}T'^2 = \mathrm{d}X_1'^2 \equiv \mathrm{d}x_1'^2\,(\mathrm{d}t' = 0,\ \mathrm{d}X'_1 = 0)\,; \\ &(s)\ \mathrm{d}s^2 = -\,c^2\,\mathrm{d}t'^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \mathrm{d}X^2 - c^2\mathrm{d}T^2 = \\ &\qquad = \mathrm{d}x_1^2 - c^2\,\mathrm{d}T^2\,(\mathrm{d}t = 0,\ \mathrm{d}X = 0)\,; \end{aligned} \tag{50}$$

genul intervalului cvadridimensional se schimbă deci pentru tranziții de la viteze subluminoase la cele supraluminoase sau invers. (50) sînt respectiv formulele variației cu viteza a lungimii și duratei pentru $v > c$, $V < c$. Variabilele X_1, T joacă aici rolul lungimii și duratei proprii, iar x'_1, t' rolul lungimii și duratei cosmice. Se inversează deci rolul variabilelor cosmice și proprii, temporale și spațiale.

În concluzie, în spațiul proiectiv lobacevskian Ω_3 al vitezelor proprii relativiste spațiale $v^\alpha = ic\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}x^4 = ic\mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}t$, viteza supraluminoasă revine la compunerea unei viteze subluminoase cu o viteză infinită (trecerea la ,,vitezele reciproce''). În spațiul timp pseudo-euclidian E_4 sau $\overline{E}_4$ (sau în varietatea proiectivă U_4 a vitezelor cosmice relativiste $u^i = c\mathrm{d}x^i / \mathrm{d}x^5 = \mathrm{d}x^i(\mathrm{d}t')$, viteza supraluminoasă revine la o rotație Lorentz de unghi $\frac{\pi i}{2}$ (intervetirea spațiului și timpului). În varietatea conformă E_8 sau $\overline{E}_8$ (în particular în E_6, $\overline{E}_6$), viteza supraluminoasă revine la intervetirea timpului propriu și timpului cosmic și de asemenea a lungimii proprii și lungimii cosmice :

$$x^4 \leftrightarrow x^5,\ x^\alpha \leftrightarrow x^{\alpha'}\ (it \leftrightarrow t',\ x^\alpha \leftrightarrow ix'^\alpha). \tag{50'}$$

Ea e automat realizată prin schimbarea signaturii tuturor coordonatelor x^a sau impulsurilor p_a prin trecerea de la varietatea E_8 a variabilelor cosmice la cea E'_8 a variabilelor proprii (sau de la $\overline{E}_8$ la $\overline{E}'_8$) (v. § 14).

17. *Vitezele în* E_8, $\overline{E}_8$. Definim în E_8 (sau E_6) ca și în $\overline{E}_8$ (sau $\overline{E}_6$) pentru $\mathrm{d}s = \mathrm{d}s' \neq 0$, $(\mathrm{d}\overline{s} = \mathrm{d}\overline{s}' \neq 0)$ versorii ,,vitezei cosmice'' u^a, u'^a prin derivatele coordonatelor x^a sau impulsurilor p_a în raport cu elementul de arc, iar ,,vitezele proprii'' v^a, v'^a prin derivatele coordonatelor x^a sau p_a în raport cu timpul cosmic t' respectiv coordonata proprie l'. Ele revin la definirea unor varietăți proiective ale vitezelor relativiste $\mathcal{U}_4$ respectiv $\mathcal{V}_4$ de coordonate omogene x^i, x^5 respectiv x^i, x^6 (generalizarea coordonatelor omogene x^i ale spațiului tridimensional Ω_3 al vitezelor relativiste proprii v^α). Avem astfel respectiv pentru vectorii de gen temporal (t), (w) și spațial (s), (p) pentru $v_1 = v$, $v_2 = v_3 = = v_7 = v_8 = 0$, $a = 1, \ldots, 8$ definițiile

$$(t)\left|\begin{array}{l} u_a \equiv \dfrac{v_a}{\alpha} = zv_a = ic\cos\varphi_a = c\dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x^5} = \dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t'} = \\ \quad = ic\dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}s}\left(= c\dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}p^5} = ic\dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}\overline{s}} = \dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}m'}\right) \\ v_a = \dfrac{u_a}{z} = \alpha u_a = \alpha ic\cos\varphi_a = ic\dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x^4} = \\ \quad = \dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t}\left(= ic\dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}p^4} = c^2\dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}W} = \dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}m}\right) \\ (\mathrm{d}s = i\mathrm{d}x^5 = ic\mathrm{d}t' = i\alpha c\mathrm{d}t = \alpha\mathrm{d}x^4) \end{array}\right.$$

(51)

$$(S)\left\{\begin{array}{l} u'_a = \dfrac{v'_a}{\alpha} = zv'_a = ic\cos\varphi'_a = c\dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x^1} = c\dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}s}\left(= c\dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}p^1} = c\dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}\overline{s}}\right) \\ v'_a = \dfrac{u'_a}{z} = \alpha u'_a = ic\alpha\cos\varphi'_a = ic\dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x^6} = c\dfrac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}l'}\left(= ic\dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}p^6} = \dfrac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}m''}\right) \\ (\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}l = \alpha\,\mathrm{d}l' = -\,i\alpha\,\mathrm{d}x^6). \end{array}\right.$$

Rezultă

$$(52)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ \frac{u_l}{(\Sigma u_i^2)^{1/2}} = \frac{v_i}{(\Sigma v_i^2)^{1/2}},\quad \frac{u_i'}{(\Sigma u_i'^2)^{1/2}} = \frac{v_i}{(\Sigma v_i'^2)^{1/2}},\\ &\text{(b)}\ (\Sigma u_i^2)^{1/2} = ic,\ (\Sigma v_i^2)^{1/2} = ic\alpha,\ [\Sigma (u'^i)^2]^{1/2} = c,\ [\Sigma (v'^i)^2]^{1/2} = \alpha c. \end{aligned}$$

Notînd cu a, a' permutările simultane ale indicilor spațiali și temporali, cosmici și proprii corespunzători respectiv coordonatelor reale $x^{\alpha,5}$ și imaginare $x^{4,\alpha'}$ deci permutările formulelor (t), (s) § 12, pag. 17).

$$(53)\quad \begin{array}{rl|l|l|l} a & = 1,\ 5 & 4,\ 6 & 2,\ 3 & 7,\ 8 \\ a' & = 5,\ 1 & 6,\ 4 & 8,\ 7 & 3,\ 2. \end{array}$$

rezultă pentru $v = v_1$ $(v_{2,3,7,8} = 0)$ identitățile

$$(54)\quad u'_{a'} = \pm u_a,\quad v'_{a'} = \pm v_a$$

(luînd semnul — pentru $a = 1$ corespunzător permutării $\beta \longleftrightarrow -\beta$ (v. § 12) și semnul + pentru restul indicilor). Avem explicit

$$(55)\quad \begin{aligned} u_\alpha &= \frac{v_\alpha}{\alpha},\quad u_4 = \frac{ic}{\alpha},\quad u_5 = c,\quad u_{\alpha'} = 0\\ v_\alpha &= v_\alpha,\quad v_4 = ic,\quad v_5 = \alpha c,\quad v_{\alpha'} = 0 \end{aligned}$$

deci pentru $v = v_1$

$$(55')\quad \begin{aligned} &u_1' = u_5 = c,\ u_{2,3}' = u_{7,8} = 0,\ u_4' = u_6 = 0,\ u_5' = -u_1,\ u_6' = u_4,\ u_{7,8}' = u_{2,3} = 0\\ &v_1' = v_5 = \alpha c,\ v_{23}' = v_{7,8} = 0,\ v_4' = v_6 = 0,\ v_5' = -v_1 = v,\ v_6' = v_4 = ic,\ v_{7,8}' = v_{2,3} = 0. \end{aligned}$$

Pentru viteze supraluminoase $v > c$ ($V < c$, α imaginar, A real), (t), (s) iau respectiv formele echivalente (S'), (T') (v. pag. 21, 22) în variabilele x'^a și vitezele reciproce $\mathcal{U}^a$, V^a ($\mathcal{U}'^a$, V'^a) (formulele derivă din (51) prin permutarea $v \to V$ $\left(\beta \to B,\ \alpha = \dfrac{1}{z} \to A = \dfrac{1}{Z}\right)$)

$$(S) = (t)\left\{\begin{aligned} \mathcal{U}'^a &= \frac{V'^a}{A} = ZV'^a = ic\cos\Phi'^a = c\,\frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}x'^1} =\\ &= c\,\frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}s}\left(= c\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}p^1} = c\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}\bar{s}'}\right)\\ V'^a &= \frac{\mathcal{U}'^a}{Z} = A\mathcal{U}'^a = icA\cos\Phi'^a = ic\,\frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}x'^6} =\\ &= c\,\frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}l}\left(= ic\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}p'^6} = c\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}p^1}\right) \end{aligned}\right.$$

$$(51')$$

$$(T') = (S)\left\{\begin{aligned} \mathcal{U}^a &= \frac{V^a}{A} = ZV^a = ic\cos\Phi^a = c\,\frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}x'^5} = \frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}t} =\\ &= ic\,\frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}s}\left(= \frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}p'^5} = ic\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}\bar{s}} = c\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}m}\right)\\ V^a &= \frac{\mathcal{U}^a}{Z} = AU^a = icA\cos\Phi^a = ic\,\frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}x'^4} =\\ &= \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t'}\left(= ic\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}p'^4} = c^2\,\frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}w'} = \frac{\mathrm{d}p'^a}{\mathrm{d}m'}\right) \end{aligned}\right.$$

şi identităţile izomorfe cu (54)

$$(54') \qquad \mathcal{U}'_{a'} = \pm \mathcal{U}_a ; \quad V'_{a'} = \pm V_a .$$

Pe baza formulelor (54), (54′), identităţile (51, t) şi (51, S) (51′, S') şi (51′, T') sînt echivalente. În varietăţile E_4, E'_4 ($\overline{E}_4$, $\overline{E}'_4$), vitezele cosmice u_i, $\mathcal{U}^i$ şi u'_i, $\mathcal{U}'^i$ sînt vectori de valori absolute ic şi c. Vitezele proprii v_i, V_i şi v'_i, V'_i au, dimpotrivă, în E_4, E'_4 ($\overline{E}_4$, $\overline{E}'_4$) valorile absolute $i\alpha c$, iAc şi αc, Ac dependente de SC. În varietăţile E_8, E'_8 ($\overline{E}_8$, $\overline{E}'_8$) u^a, v^a (echivalente din punct de vedere conform) sînt vectori de valoare absolută nulă. Analog pentru u'^a, v'^a; $\mathcal{U}^a$, V^a; $\mathcal{U}'^a$, V'^a.

Avem în total

$$(51'') \quad \begin{aligned}
&(\mathrm{a}) \begin{cases} u_1 = -\mathcal{U}_4 = -u'_5 = -\mathcal{U}'_6 (= -ic\sqrt{\omega_4}) \\ u_4 = \mathcal{U}_1 = -\mathcal{U}'_5 = u'_6 (= -ic\sqrt{\omega_5}) \end{cases} \\
&(\mathrm{b}) \begin{cases} v_1 = -v'_5 (= c\sqrt{\omega_1}) \\ v_5 = v'_1 \left(= c\alpha = -i\dfrac{c^2}{u_4} = c\sqrt{\omega_6} \right) \end{cases} \\
&(\mathrm{c}) \begin{cases} V_1 = -V'_5 \left(= \dfrac{c^2}{v_1} = c\sqrt{\omega_2} \right) \\ V_5 = V'_1 \left(= cA = -\dfrac{ic^2}{u_1} = -c\sqrt{\omega_3} \right) \end{cases} \\
&(\mathrm{d}) \quad iu_5 = v_4 = i\mathcal{U}_5 = iu'_1 = v'_6 = i\mathcal{U}'_1 = V'_6 = V_4 (= ic).
\end{aligned}$$

18. *Coordonate de gen spaţial şi temporal.* Fie

$$(56\mathrm{a}) \qquad a' (= l' = -x^6)_0 = \underset{(s)}{x}, \quad b'_0 \left(= t' = \frac{x^5}{c} \right) = \underset{(t)}{x/c}$$

razele proprii (spaţiale şi temporale) ale particulei ,,elementare”

$$(56\mathrm{b}) \qquad m'' \left(= \frac{p'}{c} = i\,\frac{p^6}{c} \right) = \underset{(s)}{p}, \quad m' \left(= \frac{w'}{c^2} = \frac{p^5}{c} \right) = \underset{(t)}{p/c}$$

masele proprii corespunzătoare. În cazurile (t) respectiv (S) sau (w) [respectiv (p)] conform formulelor (51), (51′), coordonatele şi impulsurile cosmice x^a, p_a sau proprii x'^a, p'_a sau diferenţialele $\mathrm{d}x^a$, $\mathrm{d}p_a$, $\mathrm{d}x'^a$, $\mathrm{d}p'_a$ sau diferenţele Δx^a, Δp_a, $\Delta x'^a$, $\Delta p'_a$ de gen temporal şi spaţial corespunzătoare razelor şi impulsurilor proprii de mai sus, au respectiv forma

$$(56') \qquad \underset{(t)}{x^a} = cb'_0 u^a, \ \underset{(t)}{p^a} = m' c u^a ; \ \underset{(s)}{x^a} = \frac{a'}{c} v'^a, \ \underset{(s)}{p_a} = m'' c v'_a$$

$$(56'') \qquad \underset{(t)}{x'_5} = -\frac{a'}{c} V_1 = \frac{a'}{c} V'_5 (= -a'\sqrt{\omega_2}).$$

Rezultă (pentru $v_1 = v$, $v_{2,3,7,8} = 0$)

$$\underset{(t)}{p_1} = m'u_1 - m'u'_5 = m'\frac{v}{\alpha}\left(= -im'c\sqrt{\omega_4}\right), \quad \underset{(t)}{x_1} \equiv$$

$$\equiv b'_0 u_1 = -b'_0 u'_5 = b'_0 \frac{v}{\alpha}\left(= -ib'_0 c\sqrt{\omega_4}\right)$$

$$\underset{(s)}{p'_1} = m''V_5 = -i\frac{m''}{u_1} = m''V'_1 = cm''A\left(= -m'c\sqrt{\omega_3}\right), \quad \underset{(s)}{x'_1} =$$

$$= \frac{a'}{c}V_5 = -i\frac{a'}{cm} = \frac{a'}{c}V'_1 = a'A\left(\equiv a'\sqrt{\omega_3}\right)$$

$$\underset{(t)}{p^4} = m'\mathcal{U}_1 = m'u_4\left(= -icm'\sqrt{\omega_5}\right); \quad \underset{(t)}{x^4} = b'_0\mathcal{U}_1 = b'_0 u_4\left(= -icb'_0\sqrt{\omega_5}\right)$$

$$\underset{(s)}{p^1} = m''v_5 = m''v' = cm''\alpha\left(= m''c\sqrt{\omega_6}\right); \quad \underset{(s)}{x^1} = \frac{a'}{c}v_5 =$$

$$= \frac{a'}{c}v'_1 = a'\alpha\left(= a'\sqrt{\omega_6}\right)$$

$$\underset{(s)}{p^5} = -m'v_1 = m'v'_5\left(= -m'c\sqrt{\omega_1}\right); \quad \underset{(s)}{x^5} = -b'_0 v_1 = b'_0 v'_5\left(= -b'_0\sqrt{\omega_1}\right).$$

Dintre coordonatele și impulsurile (56″), $\underset{(t)}{p_1} = m'u_1$ este impulsul relativist, $\underset{(t)}{x^1} = b'_0 u_1$ coordonata spațială analogă; $\underset{(t)}{p_4} = m'u_4 = i\frac{w}{c}$ energia relativistă, $\underset{(t)}{x^4} = b'_0 u_4 = ict$ coordonata cosmică; $\underset{(s)}{p_1} = m''v_5 = \frac{L}{c}$ potențialul cinetic (lagrangeanul) corespunzător vitezei v, $\underset{(s)}{x^1} = \frac{a'}{c}v_5 = \alpha a'$ lungimea cosmică; $\underset{(s)}{p'_4} = cm''A = \frac{\mathcal{L}}{c}$ lagrangeanul (potențial cinetic) corespunzător vitezei reciproce $V = \frac{c^2}{v}$; $\underset{(s)}{x'_1} = a'A$ lungimea analogă; $\underset{(s)}{p'_5} = m'v_1$ impulsul clasic corespunzător vitezei v; $\underset{(s)}{x^5} = a'v_1$ coordonata analogă; $\underset{(t)}{p'_5} = m''V_1$ impulsul clasic corespunzător vitezei reciproce $V = \frac{c^2}{v}$, $\underset{(t)}{x'^5} = \frac{a'}{c}v_1$ coordonata analogă; $\underset{(t)}{x^a}$, $\underset{(t)}{p^a}$ și $\underset{(s)}{x^a}$, $\underset{(s)}{p_a}$ constituie 8— (sau 6—) vectori în E_8, $\overline{E}_8$ (deci $\underset{(t)}{x^i}$, $\underset{(t)}{p_i}$, și $\underset{(s)}{x^i}$, $\underset{(s)}{p_i}$ cvadrivectori în E_4, $\overline{E}_4$); analog $\underset{(t)}{x'^a}$, $\underset{(t)}{p'_a}$; $\underset{(s)}{x'^a}$, $\underset{(s)}{p'_a}$ în E'_8 ($\overline{E}'_8$).

Elementele grupului proiectiv al coordonatelor spațiale ρ_a și temporale σ_a — soluții ale ecuațiilor gravifice conforme de tip Einstein (vezi [2], pag. 424, 439)

$$\mu^{ik} - \frac{1}{4}\mu' g^{ik} = 0, \tag{57}$$

sînt respectiv de tipul

$$\frac{v'_a}{c} = i\,\frac{\mathrm{d}\,x^a}{\mathrm{d}x^6} \quad \text{și} \quad \frac{u_a}{c} = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x^5}$$

deci $r_a = a_a \rho_a$ de tipul $\underset{(s)}{x^a}$, $\underset{(s)}{p^a}$ iar $q_a = b_a \sigma_a$ de tipul $\underset{(t)}{x^a}$, $\underset{(t)}{p_a}$.

B. CONSECINȚE FIZICE

I. MĂRIMI ONDULATORII ȘI CORPUSCULARE

19. *Cîmpuri de viteze.* Dată fiind invarianța formulei de compunere (2) a vitezelor față de transformările proiective generale de tip Einstein a celor două componente, unei particule de viteză corpusculară (spațială proprie) dată $\overline{w}$ i se asociază automat un cîmp de viteze

$$\overline{v} = (\overline{w}, \overline{w}') \tag{58}$$

(elementele unui grup continuu (inclusiv vitezele $v = 0, \infty, c$) $\overline{w}'$ arbitrar cuprinzînd pentru fiecare element (viteza corpusculară) $\overline{v}$ și elementul ,,invers'' (viteza reciprocă V, în particular viteza de fază de tip L. de Broglie c^2/v paralelă cu viteza corpusculară v). Particulei i se asociază atunci un cîmp de coordonate-durate și impulsuri-energii de tipul (56), deci un cîmp de frecvențe $\nu = \frac{1}{c}$ și vectori de undă $k = \frac{1}{\lambda}$; e valabilă atunci legea de dispersie generală și legea lui Rayleigh corespunzătoare

$$\nu = c\left(\frac{m'^2 c^2}{h^2} + k^2\right)^{1/2}, \quad \frac{\partial \nu}{\partial k} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = V = \frac{c^2}{v}. \tag{58'}$$

20. *Mărimile ondulatorii.* Punînd

$$\frac{a'}{c} = b'_0\left(a' = cb'_0 = \lambda' = c\,\tau' = \frac{h}{m'c}\right), \ m'' = m' = \frac{h}{b'_0 c} \tag{59}$$

(λ' = lungimea de undă Compton)

în varietatea coordonate-durată E_8, lungimea de undă $\lambda = 1/k$ și perioada de vibrație $\tau = 1/\nu$ sînt definite atunci automat, pentru microobiecte, pe baza formulelor (56) prin relațiile

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \underset{(s)}{x'^5} \equiv \frac{a'}{c}\,V_5(\equiv a'A) \\ ic\tau &\equiv \underset{(t)}{x^5} \equiv \frac{a'}{c}\,v_5\,(\equiv a'\alpha). \end{aligned} \tag{60}$$

Lungimea de undă $\bar{\lambda} = 1/\bar{k}$ și perioada de vibrație $\bar{\tau} = 1/\bar{\nu}$ din varietatea impuls-energie $\bar{E}_8$ se definesc de asemenea automat pe baza lui (56), prin relațiile izomorfe cu (60)

$$\text{(60')} \qquad \begin{aligned} \bar{\lambda} &\equiv \underset{(s)}{p'_5} \equiv m'' V_5 (\equiv m'' cA) \\ ic\tau &\equiv \underset{(t)}{p_5} \equiv m'' v_5 (\equiv m'' c\alpha). \end{aligned}$$

Avem

$$\text{(61)} \qquad \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\tau}} \equiv ic\frac{A}{\alpha} = \frac{c^2}{v} = V.$$

Rezultă definițiile generale ale 8—(sau 6—) vectorilor λ_a, τ_a

$$\text{(62)} \qquad \lambda^a = \frac{a'}{c} V'^a = ia' \frac{\mathrm{d}x'^a}{\mathrm{d}x'^6}, \quad \tau_a \equiv \frac{a'}{c} v'_a = i\frac{a'}{c}\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}x^6} \; (\Sigma(\lambda_a)^2 = \Sigma(\tau^a)^2 = 0)$$

și definițiile analoge pentru $\bar{\lambda}^a$, $\bar{\tau}^a$. Explicit

$$\text{(62')} \qquad \begin{aligned} &\lambda^1 = a'A, \; \lambda_4 = 0, \; \lambda_5 = -a'B, \; \lambda_6 = ia' \, (= i\lambda') \\ &\tau^1 = a'\frac{\alpha}{c}, \; \tau_4 = 0, \; \tau_5 = -\frac{a'}{c}\beta, \; \tau_6 = i\frac{a'}{c} \, (= i\tau'). \end{aligned}$$

21. *Mărimi ondulatorii și corpusculare.* Fie Λ^a, $\mathcal{T}^a$, $\bar{\Lambda}^a$, $\bar{\mathcal{T}}^a$ mărimile relativiste de tip (62) corespunzătoare vitezei reciproce $V = \dfrac{c^2}{v}$. Din (62) $(\alpha \longleftrightarrow A)$, $(a \longleftrightarrow a')$, $(v^a \longleftrightarrow v^{a'})$, $(u^a \longleftrightarrow u^{a'})$ rezultă

$$\text{(63)} \qquad \Lambda^a = c\tau^{a'} \, (\lambda^a = c\mathcal{T}^{a'}), \quad \bar{\Lambda}^a = c\bar{\tau}^{a'} \, (\bar{\lambda}^a = c\bar{\mathcal{T}}^{a'}).$$

Prin permutarea vitezelor reciproce v, V (viteza corpusculară v și de fază V), se permută deci λ^a și $c\tau^a$, Λ^a și $\mathcal{T}^a$. Perioadele de vibrație τ, $\bar{\tau}$ (sau $\mathcal{T}$, $\bar{\mathcal{T}}$) se identifică deci în varietățile E_8, $\bar{E}_8$ ale variabilelor x^a, p_a cu timpul (respectiv energie proprie), transformîndu-se după legea

$$\text{(64)} \qquad \tau = \tau'\alpha, \; \bar{\tau} = \bar{\tau}'\alpha \; \text{sau} \; \mathcal{T} = \mathcal{T}'A, \; \bar{\mathcal{T}} = \bar{\mathcal{T}}'A.$$

Lungimile de undă λ, $\bar{\lambda}$ sau Λ, $\bar{\Lambda}$ se identifică deci în varietățile E_8, $\bar{E}_8$ ale variabilelor x^a, p_a cu lungimile (respectiv impulsurile proprii), transformîndu-se după legea

$$\text{(64')} \qquad \lambda = \beta\alpha\lambda' \left(= \frac{u}{c}\lambda'\right), \; \bar{\lambda} = \beta\alpha\bar{\lambda}' \; \text{sau} \; A = BA\Lambda' \left(= \frac{\mathcal{U}}{c}\Lambda'\right), \; \bar{\Lambda} = BA\bar{\Lambda}'.$$

Date fiind identitățile

$$\text{(65)} \qquad \underset{(s)}{x'^5} = \underset{(t)}{x'^1}, \; \underset{(t)}{x^5} = \underset{(s)}{x^1}; \; \underset{(s)}{p'_5} = \underset{(t)}{p'_1}, \; \underset{(t)}{p_5} = \underset{(s)}{p_1}$$

(consecințe ale lui (56)) echivalente cu (b, c), mărimile ondulatorii $\bar{\tau}$, τ și $\bar{\lambda}$, λ se identifică deci *cantitativ* cu mărimile corpusculare $\underset{(s)}{u_1} = \mathscr{L}/c = m'c\alpha$, $\underset{(s)}{x^1} = a'\alpha$ (potențialul cinetic și coordonata analogă în viteza v) respectiv cu $\underset{(t)}{p'_1} = m'cA$, $\underset{(t)}{x'^1} = a'A$ (potențialul cinetic și coordonata analogă, corespunzătoare vitezei reciproce $V = c^2/v$).

În conformitate cu ($\bar{\mathscr{L}}$) (pag. 6), transformarea L. de Broglie a fazei de undă

$$(66) \qquad \Phi = \nu' t' = \nu' \frac{t - vx/c^2}{\alpha} = \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

se exprimă — în funcție de viteza reciprocă $V = c^2/v$ și $\mathrm{d}X'^1$:

$$(66') \qquad \Phi = i\nu' \frac{X}{c}.$$

II. FUZIUNEA VITEZELOR

22. *Fuziunea vitezelor în* Ω_3 *și* $\mathscr{U}_4$. Fie (conform lui (7)) $\overline{V}_{1.2}$ și $\overline{V}$ reciprocele lui $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, și $\overline{v}$.

În cazul (Ia), ($|v_1| < c$, $|v_2| < c$, $|V_1| > c$, $|V_2| > c$) sau (Ib), ($|v_1| > c$, $|v_2| > c$, $|v_1| < c$, $|V_1| < c$, $|V_2| < c$), α_1, α_2 sînt ambii reali sau imaginari, deci α real ($|v| < c$, $|V| > c$). Identitățile (33) dau atunci

$$(67) \qquad -\alpha = \frac{A_1 A_2}{1 + B_1 B_2}.$$

În cazul (II) ($|v_1| > c$, $|v_2| < c$; $|V_1| < c$, $|V_2| > c$), α este imaginar deci $|v| > c$, $|V| < c$.

În cazul (III), ($|v_1| = c$ sau $|v_2| = c$, deci $|V_1| = c$ sau $|V_2| = c$), $\alpha = 0$ ($|v| = |V| = c$).

Formulele de transformare ale componentelor vitezei (în particular formulele (26) ale vitezelor paralele) duc la același rezultat. Conform teoremei (30‴) a valorilor absolute $|v| \lesseqgtr c$ sînt respectiv echivalente cu $V \gtreqless c$ și invers. În spațiul tridimensional relativist Ω_3 al vitezelor proprii spațiale, compunerea lui c cu orice viteză dă din nou c; rezultanta a două viteze subluminoase sau supraluminoase e o viteză subluminoasă; rezultanta unei viteze subluminoase și a unei viteze supraluminoase e supraluminoasă.

În particular, vitezele $\overline{w}_0 = 0$, $\overline{w}_\infty = \infty$ sînt rezultante ale unor viteze de sens opus (respectiv ale unei viteze directe sau reciproce de sens opus antiparalele) sau de același semn:

$$(68) \qquad w = \frac{c^2}{W} = (v, -v) = \frac{v - v}{1 - v^2/c^2} = 0$$

sau

$$W = \frac{c^2}{w} = (v, V) = \frac{v - V}{1 - vV/c^2} = \infty$$

$$(68') \qquad w = \frac{c^2}{W} = \lim_{n \to \infty} (nv, nv) = \lim_{n \to \infty} \frac{nv + nv}{1 + n^2 v^2/c^2} = 0$$

sau

$$W = \frac{c^2}{w} \lim_{n \to \infty} \left(nv, \frac{V}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(nv + \frac{1}{nv}\right) = \infty.$$

În consecință, compunerea unui număr impar $p = 2p' + 1$ de viteze supraluminoase dă o viteză supraluminoasă; compunerea unui număr *par* $p = 2p'$ *de viteze supraluminoase dă o viteză subluminoasă.*

Invers, orice viteză supraluminoasă (subluminoasă) e rezultanta unui număr impar (par) de viteze supraluminoase. În algebra de rang infinit asociată lui Ω_3, vitezele supraluminoase constituie deci elemente generatoare. Compunerea vitezelor în Ω_3 e deci echivalentă cu „fuziunea" unui număr de p stări de mişcare ale materiei (p întreg pozitiv).

În E_8 ($\overline{E}_8$), conform formulelor (51″ b) şi (51″ c), avem

$$-\frac{ic^2}{u_1} = V_5 = V_1', \quad -\frac{ic^2}{u_4} = v_5 = v_1', \quad \frac{ic^2}{u_5} = v_4;$$

vitezele relativiste cosmice şi proprii se unifică în cadrul grupului proiectiv D_6.

Compunerea (fuziunea) vitezelor relativiste spaţiale proprii v^α şi spaţio-temporale cosmice u^i (în varietăţile proiective Ω_3, respectiv $\mathcal{U}_4$) îşi corespund biunivoc. În particular, teorema (2′)sau (33) a compunerii (fuziunii) valorilor absolute v_1, v_2 din Ω_3 e echivalentă legii de transformare (fuziune) a componentelor temporale cosmice $u^4 = ic/\alpha = icz$ din $\mathcal{U}_4$. În particular, formula (33) aplicată pentru vitezele ortogonale v_1, v_2

$$\text{(69)} \qquad \alpha = \alpha_1\, \alpha_2 \quad \text{sau} \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}$$

dă în cazul fuziunii succesive a p' viteze egale, de rezultantă finală $v_{p'}$, (fiecare fiind ortogonală pe rezultanta celor anterioare), pentru $\alpha_{p'} \equiv \sqrt{1 - v_{p'}^2/c^2}$:

$$\text{(69′)} \qquad \frac{1}{\alpha_{p'}} = \frac{1}{\alpha^{p'}} = z^{p'} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^{p'}$$

(p' întreg).

23. *Numerele cuantice* p, q. Definind $y = 1/\overline{y}$ prin

$$\text{(69″)} \qquad y \equiv \frac{1}{\overline{y}} = \frac{z+1}{z-1}$$

avem identităţile inverse

$$\text{(69‴)} \qquad z = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{y+1}{y-1}.$$

Transformarea proiectivă (69″) sau (69‴) e deci o involuţie conform lui $vV = c^2$. Există deci două singularităţi ale vitezelor

$$\text{(70)} \qquad \begin{gathered} v = 0,\ v = \infty\ (\alpha = z = 1,\ y = \infty,\ \overline{y} = 0) \text{ sau } v = \infty\ (v = \infty, \\ -i\alpha = \infty,\ z = 0,\ y = -\overline{y} = -1) \text{ sau } v = c\ (V = c,\ \alpha = 0, \\ z = \infty,\ y = \overline{y} = 1). \text{ (vezi [2], pag. 428, 443),} \end{gathered}$$

p, $q \gtreqless 0$ fiind „numere cuantice" întregi caracterizînd respectiv „formele de mişcare" (cosmice, proprii etc.) şi „stările de concentrare" ale materiei (leptonice, inclusiv cîmpul material — barionice etc.). În [2] s-au definit vitezele generalizate $\underset{p\varphi}{v}$, $\underset{p\varphi}{f'}$ corespunzătoare numerelor cuantice p, q:

$$(71) \qquad \underset{pq}{v} = \underset{00}{v}\, y^{-q/4} z^{p/4}, \quad \underset{pq}{f'} = \underset{00}{f'}\, y^{-q/4} z^{p/4}.$$

Particula de stare (p, q) e formată prin fuziunea separată a p și respectiv q stări fundamentale corespunzătoare lui $p/4, = 1/2$, $q/4 = 1/2$ $(p = 2,\ q = 2)$ [2]. Avem [2]

$$(72) \qquad z = \frac{1}{\alpha} = (1 - \underset{qp}{v^2} / \underset{qp}{f'^2})^{-1/2}, \quad y = \frac{1}{\overline{y}} = (1 - 4 \underset{q+2,\, p-2}{f'^2} / \underset{qp}{v^2})^{-1/2}$$

z, y sînt reali pentru

$$(72') \qquad 2 \underset{q+2,\, p-2}{f'} \leqslant \underset{qp}{v} \leqslant \underset{qp}{f'}$$

deci $\underset{qp}{f'}$ e viteza maximă, iar $2 \underset{q+1, p-1}{f'}$ viteza minimă corespunzătoare stării (p, q) (viteza maximă și minimă fiind, în acest sens, ambele relative și variabile în spațiu-timp și în varietatea impuls-energie). Raportul

$$(72'') \qquad \underset{qp}{v} / \underset{qp}{f'} = \underset{00}{v} / \underset{00}{f'}\ (\equiv v/c)$$

e independent de numerele cuantice p, q; de asemenea și singularitățile (70) corespunzătoare. Independent de natura fizică a vitezelor $\underset{qp}{v}$, $\underset{qp}{f'}$, singularitățile (70) (definind centrul particulei, ,,raza'' ei și infinitul spațial) caracterizează particula ca stare a unui cîmp *unic* de viteze. Pentru $q = 0$, (72″) ia forma

$$(71') \qquad \underset{p}{v} / \underset{0}{v} = \underset{p}{f'} / \underset{0}{f} = 1/\alpha^{p/4}\ (= z^{p/4}).$$

Pentru q fix, în (71) starea $p = 0$ definește valoarea absolută a vitezei proprii spațiale $\underset{0}{v} = v$, iar starea $p = 4$ viteza cosmică spațială $\underset{4}{v} = v/\alpha = u$, $\underset{0}{if} = ic = v_4$ este viteza relativist-restrînsă a luminii în cîmp față de sisteme inerțiale) iar $\underset{4}{if'} = \dfrac{ic}{\alpha} = u_4$ (viteza cosmică temporală corespunzătoare). Starea $\underset{8}{v} = v_0/\alpha^2 (= v/\alpha^2)$ de componente $\underset{8}{v^i} = v^i/\alpha^2 = -\dfrac{c^2\, v^i}{\sum (v^i)^2}$ definește o inversiune în v^i.

În lucrarea [2] numerele cuantice $p/2$ și $q/2$ se identifică respectiv cu numărul izofermionic și leptonic ale lui Heisenberg. Numerele cuantice $p/2$ și $m/2$ (izospinul) sînt simultan semiîntregi sau întregi; de asemenea, numerele cuantice $q/2$ și $n/2 =$ (spinul modul n', n' întreg).

24. *Transformarea particulelor.* Pentru $p > 0$ suficient de mare, viteza corespunzătoare $\underset{pq}{v}$ e supraluminoasă $(\underset{pq}{v} > c)$. Fuziunii vitezelor supraluminoase în Ω_3(§ 22) îi corespunde deci, conform lui (71) sau

(71′) în $\mathcal{U}_4$, fuziunea stărilor izofermionice fundamentale $p/4=1/2$ $(p=2)$, deci ($p/2$, m/2 fiind simultan întregi sau semiîntregi) și fuziunea stărilor de izospin. În particular, pentru $p \to +\infty$ avem $\underset{pq}{v} = \underset{pq}{f} \to v_\infty \ (=\infty)$, iar pentru $p \to -\infty$, $\underset{pq}{v} = \underset{pq}{f} \to v_0 (=0)$. Vitezele infinite v_∞ și nule v_0 rezultă deci ca stări de număr izofermionic infinit de semn opus; stările corespunzătoare de cîmp au deci sensul „rotației interne izofermionice” opus — în analogie cu izospinul și spinul infinit postulat de Heisenberg pentru cîmpul material (pe baza teoriei lui Dirac). Stările de cîmp (particulele) de viteză spațială proprie infinită sînt rezultanta fuziunii unui număr infinit de particule de viteză supraluminoasă finită.

În notațiile din § 18, prin definiție, în E_8 sau $\overline{E}_8$, starea de cîmp (= particula dată) e de gen „temporal” (t), „spațial”, (s) sau „izotrop” (i) după cum

$$a'^2 - c^2 b_0'^2 \lesseqgtr 0, \quad (m''^2 - m'^2 \lesseqgtr 0). \tag{73}$$

Particulele de gen (t) în E_8, $\overline{E}_8$ sînt particule de gen (s) în E_8', $\overline{E}_8'$ și invers (v. §§ 15, 16).

Pentru particulele obișnuite ale substanței cu $v < c$, viteza de fază $V = c^2/v$ e supraluminoasă ($V > c$). E valabilă și teorema inversă. Într-adevăr, particulele mișcate în cîmp (în E_4 și $\overline{E}_4$) cu viteza luminii (particule „izotrope” (i)) constituie stări de tranziție dintre particulele (s) și particulele (t), dintre particulele substanței și cîmpului material. O viteză supraluminoasă e deci o „viteză de cîmp” (= viteză ondulatorie = de fază).

Fuziunea fiind un efect neliniar, iar efectele neliniare fiind în esență efecte de transformare reciprocă a particulelor (cîmpurilor), tranziția de la vitezele subluminoase la viteze supraluminoase sau tranziția inversă implică schimbarea naturii particulei: în E_4 permutarea variabilelor spațiale și temporale (în $\overline{E}_4$ permutarea impulsului și energiei), iar în E_8 ($\overline{E}_8$) permutarea variabilelor cosmice și proprii $x^4 \leftrightarrow x^5$, $x^1 \leftrightarrow x^6$ (v. (50′)) [schimbarea semnului lui (73)].

Viteza de fază $V = c^2/v$ trece atunci de la valori supraluminoase la valori subluminoase (sau invers). Se permută deci viteza ondulatorie (de fază) $V = c^2/v$ și viteza corpusculară $v = c^2/V$. Pentru $v > c$, noua viteză corpusculară $v' = V$ e subluminoasă; noua viteză de fază $V' = v$ supraluminoasă. *Ireversibilitatea timpului și principiul cauzalității rămîn deci valabile atît pentru viteze subluminoase cît și pentru viteze supraluminoase.*

25. *Particulele de gen izotrop.* Din simetria intervalului 8-dimensional în variabilele spațiale și temporale, cosmice și proprii rezultă existența (pentru fiecare stare de spin $n/2$ și izospin $m/2$) a cîte două particule mișcate cu viteza luminii în cîmp („particule I'') ($v = V = c$, $\alpha = A = 0$, $ds = ds' = d\overline{s} = d\overline{s}' = 0$); ele sînt respectiv limita unor particule (și antiparticule corespunzătoare) de gen (t) (W) (temporal) și de gen (s)(p) (spațial) pentru particulele de spin $\pm\dfrac{1}{2}$ și izospin $\pm\dfrac{1}{2}$ două particule de tip neutrino ν sau antineutrino $\overline{\nu}$); pentru spinul 1 două particule de tipul fotonului, pentru spinul nul două particule de tipul particulelor $\varkappa$

ale lui I. B. Rumer [3]; pentru spinul 2 două particule de tipul gravitonului. Coordonatele corespunzătoare x^a în E_8, p_a în $\overline{E}_6$, (v. §§ 12, 13) $(a = 1, 4, 5, 6\,;\; x^{2,3,7,8} = p_{2,3,7,8} = 0)$ sînt

$$(74)\quad \begin{aligned}
&(c)\begin{cases} x^a = (ct, ict\,;\, 0, 0)\,;\ \mathrm{d}x = c\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}t' = \alpha = 0,\ \mathrm{d}s = ic\mathrm{d}t'(= ic\,\alpha\,\mathrm{d}t) = 0 \\ p_a = (mc, imc\,;\, 0{,}0)\,;\ \mathrm{d}p = \dfrac{\mathrm{d}W}{c},\ \mathrm{d}W' = \alpha\,;\ \mathrm{d}\bar{s} = i\,\dfrac{\mathrm{d}W'}{c}\left(= i\alpha\,\dfrac{\mathrm{d}W}{c}\right) = 0 \end{cases} \\
&(\pi)\begin{cases} x^a = (0{,}0\,;\, ct', ict')\,;\ \mathrm{d}x' = c\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x = \alpha = 0,\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}x(= \alpha\,\mathrm{d}x') = 0 \\ p_\alpha = (0{,}0\,;\, m'c, im'c)\,;\ \mathrm{d}p' = \mathrm{d}W'/c,\ \mathrm{d}W = \alpha = 0,\ \mathrm{d}\bar{s} = \mathrm{d}p(= \alpha\mathrm{d}p') = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Fie

$$\overline{m} = m' + m'',\ \overline{\overline{m}} = m' - m''\ (2m' = \overline{m} + \overline{\overline{m}},\ 2m'' = \overline{m} - \overline{\overline{m}}).$$

$$M = (m'^2 + m''^2)^{1/2},\ M_0 = (m'^2 - m''^2)^{1/2}.$$

Particulele (i) de tipul (c) („cosmic”) au ambele mase proprii nule $(m' = m'' = 0)$ deci $\overline{m} = \overline{\overline{m}} = M = 0$; impulsul şi energia cosmică, lungimea şi durata cosmică $(mc,\ mc^2,\ x = ct,\ t)$ sînt în general nenule; timpul propriu = intern $t' = 0$ şi coordonata proprie = internă $x' = 0$. Particulele i de tipul (π) („propriu”) au ambele mase proprii egale $(m' = m''$, $M_0 = 0$, $\overline{\overline{m}} = 0$, $\overline{m} = 2m'$, $M = m'\sqrt{2}\,)$, lungimea proprie $l' = ct'$ şi durata proprie t', potenţialul cinetic propriu $m'c$ şi energia proprie $m'c^2$ în general nenule; lungimea şi durata cosmică l, $t = 0$, potenţialul cinetic cosmic şi energia cosmică $p = W = 0$. Pentru spinul 1, particulele (c), (π) sînt respectiv fotoni şi mezoni vectoriali de mase proprii egale.

Particula de tipul (c) în E_8, $\overline{E}_8$ este de tip (π) în E'_8, $\overline{E}'_8$ şi invers. Cele 2 tipuri de particule izotrope (C, π) se identifică pentru $m' = m'' = m = 0$ $(t' = l' = t = l = 0)$. Dintre particulele de acelaşi spin şi izospin, particulele (π) constituie stările mai concentrate ale materiei în comparaţie cu particulele (c).

III. LEGEA RECIPROCITĂŢII

26. *Enunţul legii.* Legea clasică a reciprocităţii stabilită de Max Born [4], aplicată de H. Yukawa, J. Raisky ş.a., enunţă simetria legilor fizice în cele patru variabile geometrice = cinematice (coordonate-durată) şi în cele patru variabile fizice = dinamice (impuls energie). Legea clasică, a reciprocităţii constituie deci, o extindere a simetriei relativiste a legilor fizice în cele patru variabile coordonate-durată (sau spaţiu-timp). Legea reciprocităţii este valabilă pentru ecuaţiile fundamentale ale mecanicii analitice clasice (ecuaţiile lui Hamilton), pentru relaţiile de impreciziune $\Delta x^i \quad \Delta p^i = 0$ pentru faza undei $x^i\, p_i/h$ etc. Ea rezultă de asemenea din corespondenţa biunivocă a distanţelor (intervalelor) cvadridimensionale (sau 8-dimensionale) coordonate-durată şi impuls-energie (în teoria clasică, pentru cele de gen temporal; conform §§ 12, 13 şi pentru cele gen spaţial).

Legea generalizată a reciprocităţii (Andrei Popovici) [5], [6] enunţă simetria legilor fizice faţă de toate perechile de variabile canonic conjugate: (A) atribute ale materiei = variabile cinematice şi dinamice; (B) formele de existență ale materiei: spațiale și temporale; (A') forme de interacțiune; „cvasielectrice" și „cvasimagnetice"; (B') formele de mișcare: cosmice și proprii. Ea enunță, de asemenea, simetria legilor fizice față de stările contrarii ale materiei: (a) stările de spin, (b) stări de concentrare, (a') stări de izospin, (b') stări de mișcare; variabilele $ABA'B'$ și stările $aba'a'$ își corespund biunivoc.

Legea clasică a reciprocității a constituit un postulat verificat pentru principalele domenii ale fizicii, în fiecare caz în parte. Dimpotrivă, din caracterul conform al legilor fizice (independența lor de unitățile de măsură), legea generalizată a reciprocității rezultă automat (1953) [5], rezultat regăsit, pe baze relativist restrînse, de R. Ingraham (1954) [7].

27. *Principiul de corespondență.* Este valabil un principiu de corespondență dintre teoria relativității și teoria reciprocității [5], [6], relația dintre variabilele dinamice (impuls-energie) și variabilele cinematice (coordonate-durată) — deci metrica polidimensională totală a spațiului reciprocității probabil de 8^2 dimensiuni, reproduce pe scară superioară relația dintre spațiu (reversibil) și timp (ireversibil) (deci unitatea relativistă a coordonatelor și duratei în E_4 și a impulsului și energiei în $\overline{E}_4$).

Viteza cosmică (discontinuă) $u = v/\sqrt{1 - v^2/c^2}\,(= v/\alpha)$ și proprie (continuă) v, legînd distanțele, spațiale și temporale, corespund respectiv cîmpului (sau forței interacțiunii) discontinue („cvasielectrice") $\Phi = \psi/\sqrt{1 - \psi^2/\Delta^2}\,(= \psi\varepsilon)$ și continue („cvasimagnetice") ψ de tip Born-Infeld, legînd distanțele impuls-energie și coordonate-durată. Neliniaritatea (neaditivitatea) cîmpurilor corespunde neliniarității (neaditivității) relativiste a vitezelor; cîmpul maxim Δ (forța sau interacțiunea maximă) vitezei maxime c (viteza luminii). Contracția distanței energie-impuls (defectul de masă nuclear) și dilatarea corespunzătoare a distanței coordonată-durată datorită cîmpului (interacțiunii) corespund contracției Lorentz a lungimilor și dilatării Lorentz a duratelor, datorită vitezei (mișcării).

Legea reciprocității și principiul de corespondență reflectă simetria cantitativă și asimetria calitativă a legilor fizice în variabilele și stările materiei.

Polarizarea cîmpului înseamnă existența unor mărimi dielectrice $\varepsilon_0\varepsilon$ și permeabilități magnetice $\bar{\varepsilon}_0\bar{\varepsilon}$ în regiunile cîmpului, variabile în spațiu și timp [2] și a unei constante grafivice variabile ks(ε_0, $\bar{\varepsilon}_0$ constantele lui Faraday, k constanta gravifică einsteiniană), în analogie cu viteza relativist-generală variabilă a luminii $f = cf'$. Relația proiectivă dintre $\varepsilon = 1/\bar{\varepsilon}$ și $s = 1/\bar{s}$ e izomorfă relației dintre $z = 1/\alpha$ și $y = 1/\bar{y}$. Cîmpurile (curburile) scalare corespunzătoare au forma [2]

$$\psi = \psi_0\, s^{-n/4}\, \varepsilon^{m/4}\, y^{-q/4}\, z^{p/4}.$$

În spațiile proiective ale vitezelor Ω_3 și ale forțelor, $\mathcal{F}_3$, $\varepsilon = 1/\bar{\varepsilon}$, $z = 1/\alpha$ definesc lungimi proiective, iar $s = 1/\bar{s}$, $y = 1/\bar{y}$ dimpotrivă unghiuri proiective.

Fuziunea (neliniară) a stărilor de spin $n/2$ (fuziunea de tip L. de Broglie) și fuziunea stărilor de izospin $m/2$ corespund biunivoc respectiv fuziunii stărilor leptonice $q/2$ și izofermionice $p/2$ (§§23, 24). Ele rezultă automat din structura transformărilor conforme în $\overline{H}_4$ (și Ω_3, $\mathcal{F}_3$), conținînd pe cele proiective, iar ecuațiile corespunzătoare fuziunii sînt tocmai ecuațiile conforme ale cîmpului [2]. Numerele cuantice $n/2$, $m/2$; $q/2$, $p/2$ corespund respectiv variabilelor $AA'BB'$ și totodată stărilor $aa'bb'$ ale materiei.

28. *Cîmpuri maxime și minime.* Interacțiunea (cîmpul, forța, deci și accelerația) maximă și cele minime analoge vitezei minime (§ 23) sînt relative și variabile. În reciprocitatea restrînsă, analogă relativității restrînse, conform principiului de corespondență , forța maximă [2] e

$$(75)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \Delta = \frac{1}{\delta^2} = \frac{c^2}{k}(= c^2\,\mathfrak{M}_0/R = W_0/R) \approx 10^{46}\ \text{dyne}\left(\delta = \frac{\sqrt{k}}{c}\right)\\ &\text{sau (b)}\quad \frac{k}{c^2}\Delta = \frac{M}{R} \approx 1. \end{aligned}$$

Potențialul gravific corespunzător e

$$(75')\quad \text{(a)}\quad \frac{1}{k} = \frac{\mathfrak{M}_0}{R} = \Phi_0 \approx 10^{27}\ \text{g/cm}\ \text{ sau (b)}\quad \frac{k\,\mathfrak{M}_0}{R} = \frac{M}{R} \equiv k\,\Phi_0 = \Phi \approx 1.$$

Cîmpul gravific corespunzător e

$$(75'')\quad \text{(a)}\quad C_0 = \frac{c^2\,\mathfrak{M}_0}{R^2} \approx 1\ \text{g/cm}^2\ \text{ sau (b)}\quad R = C = k\,C_0 \approx 10^{-27}\ \text{cm}^{-1}.$$

Accelerația grafivică rezultă din legea relativist restrînsă (de forma newtoniană) $A_0\,\mathfrak{M}_0 = 1/\delta^2$:

$$(75''')\quad \text{(a)}\quad A_0 = \frac{c^2}{M} = \frac{c^2}{R} \approx 10^{-6}\ \text{cm. s}^{-2}\ \text{ sau (b)}\quad c^2A_0 \approx \frac{1}{R} \approx 10^{-27}\ \text{cm}^{-1}.$$

[(75‴ b) identic cu (75′ b)]. A_0 e deci accelerația relativistă constantă (în SC propriu = mobil al particulei) corespunzătoare liniei cosmice

$$(76)\qquad \sum (x^\alpha)^2 - c^2t^2 = R^2,\ x^5 = 0$$

în spațiul metagalaxic al lui de Sitter, $\sum (x^\alpha)^2 + (x^5)^2 - c^2t^2 = R^2$.

(75b, 75′b, 75″b, 75‴b) constituie respectiv forța, potențialul, cîmpul, accelerația aduse la dimensiunea lungimii (la puterea 0 și —1). Conform lui (75′ b), Φ_0 e potențialul grafivic corespunzător metagalaxiei de masă $M = k\,\mathfrak{M}_0$ (adusă la dimensiunea lungimii) : masa ei M fiind de ordinul de mărime a razei $R\,(M \approx R)$.

Forța maximă $1/\delta^2$ e energia metagalaxiei $W_0 = c^2\,\mathfrak{M}_0$ pe unitatea de rază R.

Cîmpurile (forțele, interacțiunile, accelerațiile) reciproce F, $\mathcal{F} = 1/\delta^2 F$ și cîmpurile reciproce generalizate de direcții diferite oarecari se definesc prin formele izomorfe cu cele corespunzătoare vitezelor. $\overline{\mathcal{F}}$ este rezultanta $\overline{\mathcal{F}} = [\overline{F}_\infty, \overline{F}]$ compunerii lui $\overline{F}$ cu o forță infinită $\overline{F}_\infty$ de direcție arbitrară dată. Rezultanta $\overline{F} = [\overline{F}_1, \overline{F}_2]$ a două forțe e în valoare absolută $F \overset{<}{\geqslant} 1/\delta^2$ după cum F_1, F_2 sînt ambele inferioare (sau superioare) forței maxime $1/\delta^2$ sau $F_1 > 1/\delta^2$, $F_2 < 1/\delta^2$ respectiv $F_1 = 1/\delta^2$, F_2 arbitrari. Compunerea unui număr impar (par) de forțe superioare lui $1/\delta^2$

dă forțe superioare (inferioare) lui $1/\delta^2$ (fuziunea neliniară a forțelor, interacțiunilor, cîmpurilor) corespunzătoare numerelor cuantice $q/2$ și deci $n/2$ ($q/2$ și $n/2$ sînt simultan întregi sau semiîntregi). Depășirea interacțiunii maxime $1/\delta^2$ implică : 1) în spațiul proiectiv $\mathcal{F}_3$ al forțelor corespunzător varietății impuls-energie, compunerea forței date cu o forță infinită ; 2) în varietatea impuls-energie-coordonate-durată $\mathcal{E}_{8^2}$, o rotație $\pi i/2$ (intervertirea variabilelor cinematice = coordonate durată și dinamice = = impuls energie) ; 3) în varietatea totală $\overline{\mathcal{E}}_{8^2}$ a reciprocității, o intervertire a variabilelor ,,cvasielectrice'' și ,,cvasimagnetice'' (analoge celor proprii și cosmice), fiind echivalentă variației naturii particulei.

29. *Relații de inversiune coordonată-impulsuri* (56 a) (vezi mai sus) sînt razele cuantice proprii (spațiale și temporale) ale particulei ,,elementare'', (56 b) masele cuantice proprii corespunzătoare. În cazurile (t) respectiv (s) coordonatele și impulsurile (cosmice x^a, p_a sau proprii x'^a, p'_a) sau diferențialele $\mathrm{d}x^a$, $\mathrm{d}p_a$, $\mathrm{d}x'^a$, $\mathrm{d}p'_a$ sau diferențele Δx^a, Δp_a, $\Delta x'^a$, $\Delta p'_a$ corespunzătoare razelor și maselor proprii (56 a, b), au forma (56′).

(56 a, b) reprezintă valorile absolute $\underset{(t)}{x}$, $\underset{(s)}{x}$ și $\underset{(t)}{p}$, $\underset{(s)}{p}$ ale intervalelor *proprii* coordonată-durată și impuls-energie de gen (t) și (s) · $\alpha = 1/z$ fiind radicalul lui Lorentz,

$$cb_0 = \frac{cb'_0}{\alpha}, \quad a = a'\alpha\,; \quad m_c = \frac{m'_c}{\alpha}\,; \quad \frac{L}{c} = m''\,c\,\alpha \tag{77}$$

sînt mărimile cosmice corespunzătoare. Avem

$$x^2 = \sum (x^{a'})^2, \; p^2 = \sum (p_{a'})^2 \tag{78}$$

($a' \neq 5$ în cazul (t), $a' \neq 6$ în cazul (s)). Mărimile

$$u = (\underset{(t)}{x}\,\underset{(s)}{x})^{1/2} = (b'_0\,a'c)^{1/2} = (b_0\,ac)^{1/2}, \; \overline{u} = (\underset{(t)}{p}\,\underset{(s)}{p})^{1/2} = (m'\,m''\,c^2)^{1/2} = \left(\frac{pL}{c}\right)^{1/2} \tag{79}$$

sînt raze eficace de tip Bogoliubov-Tiablikov ; avem

$$\frac{m''\,c}{\overline{u}} = \frac{\overline{u}}{m'\,c} = \frac{a'}{u} = \frac{u}{c\,b'_0} \; (= \sqrt{\sigma}) \tag{79'}$$

($\sigma = \alpha/2\overline{u}$, $\alpha = 2\overline{u}e_0^2/hc$ constanta structurii fine) și de asemenea

$$a' = \frac{e_0^2}{m''\,c^2}$$

(e_0 = sarcina electrică elementară).

Fie

$$k^a = x^a/x^2, \tag{80}$$

$$\overline{k}^a = p^a/p^2 \; (x^a = k^a/k^2, \; p_a = \tilde{k}^a/\overline{k}^2) \tag{80'}$$

$$k^2 = \sum (k^{a'})^2, \; \overline{k}^2 = \sum (\overline{k}^{a'})^2 \tag{78'}$$

($a' \neq 5$ în cazul (t), $a' \neq 6$ în cazul (s)).

(80) admit soluții de tipul

$$(79'') \qquad \underset{(s)}{x}\,\underset{(t)}{p} = \underset{(t)}{x}\,\underset{(s)}{p} = h(x^5\,p_6 = x^6\,p_5 = ih)\,(m'\,a'\,c' = m''\,b_0'\,c^2 = h)$$

$$(81) \qquad \underset{(t)}{p_a} = m'\,u_a = \frac{h}{\underset{(t)}{x}} = \frac{\underset{(t)}{x^a}}{\underset{(t)}{x}} = \frac{h}{\sigma}\cdot\frac{\underset{(t)}{x^a}}{\underset{(t)}{x^2}},\ \underset{(s)}{p_a} = m''V_a = \frac{h}{\underset{(t)}{x}}\cdot\frac{\underset{(s)}{x^a}}{\underset{(s)}{x}} = h\,\sigma\,\frac{\underset{(s)}{x^a}}{\underset{(s)}{x^2}}$$

și relațiile inverse

$$(81') \qquad \underset{(t)}{x^a} = b_0'\,u^a = \frac{h}{\underset{(s)}{p}}\cdot\frac{\underset{(t)}{p^a}}{\underset{(t)}{p}} = \frac{h}{\sigma}\,\frac{\underset{(t)}{p^a}}{\underset{(t)}{p^2}},\quad \underset{(s)}{x^a} = \frac{a'}{c}\,v_a = \frac{h}{\underset{(t)}{p}}\,\frac{\underset{(s)}{p^a}}{\underset{(s)}{p}} = h\sigma\,\frac{\underset{(s)}{p^a}}{\underset{(s)}{p^2}}.$$

Deci în toate cazurile

$$(82) \qquad p_a = hk_a,\quad x^a = h\bar{k}^a\left(k\tilde{k} = \frac{1}{h}\right),$$

(80), (81) sînt atunci echivalente și dau:

$$\underset{(t)}{p}\,\underset{(t)}{x}\,(= \underset{(t)}{p^{a'}}\,\underset{(t)}{x^{a'}}) = \frac{h}{\sigma^2},\quad \underset{(s)}{p}\,\underset{(s)}{x}\,(= \underset{(s)}{p^{a'}}\,\underset{(s)}{x^{a'}}) = h\,\sigma^2$$

sau

$$\frac{p_a}{x_a} = \frac{k_a}{\tilde{k}_a} = \frac{\bar{\lambda}_a}{\lambda_a} \equiv \frac{h\,\sigma}{x^2} = \frac{p^2}{h\,\sigma} \quad \text{în cazul } (s)$$

$$\frac{p_a}{x_a} = \frac{k_a}{\bar{k}_a} = \frac{\bar{\lambda}_a}{\lambda_a} \equiv \frac{h}{\sigma x^2} = \frac{p^2\,\sigma}{h} \quad \text{în cazul } (t)$$

echivalente cu (79″).

(80) sau (80′), (81) sau (81′) sînt inversiuni (caz particular al transformărilor conforme relativist restrînse) și dau

$$kx = \bar{k}p\ (= k^{a'}\,x^{a'} = \bar{k}^{a'}\,x^{a'}) = 1.$$

(78) sau (78′) sînt echivalente cu

$$\sum \underset{(s,t)}{(x^a)^2} = \sum \underset{(s,t)}{(p_a)^2}\ (= \sum (k_a)^2 = \sum (\bar{k}_a)^2) = 0.$$

Pentru $e_0^2/hc = 1$, deci $\sigma = 1$, (81), (81′), (83) iau în ambele cazuri (t), (s) forma simplă

$$(84) \qquad p_a = \frac{hx^a}{x^2},\quad x^a = \frac{hp^a}{p^2}\,(px = h)$$

sau

$$(84') \qquad \frac{p^a}{x^a} = \frac{k_a}{\bar{k}_a} = \frac{\bar{\lambda}_a}{\lambda_a} = \frac{h}{x} = \frac{p}{h}.$$

$k_a = 1/\lambda_a$, $\bar{k}_a = 1/\bar{\lambda}_a$ sînt vectori de undă în E_8 și $\overline{E}_8$ (sau E_6, $\overline{E}_6$).

În notațiile diferențiale $\mathrm{d}\bar{\bar{s}}^2 = \mathrm{d}s\,\mathrm{d}\bar{s}$, în (84) se înlocuiesc x^a, p_a prin $\mathrm{d}x^a$, $\mathrm{d}p_a$. Avem

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p_a &= \mathrm{d}\bar{s}\,\frac{u_a}{ic} = \mathrm{d}\bar{s}\,\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}s} = \mathrm{d}\bar{\bar{s}}^2\,\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}s^2} = \mathrm{d}\bar{\bar{s}}^2\,\frac{\mathrm{d}x^a}{\sum(\mathrm{d}x^a)^2},\\ \mathrm{d}x^a &= \mathrm{d}s\,\frac{u^a}{ic} = \mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}p^a}{\mathrm{d}\bar{s}} = \mathrm{d}\bar{\bar{s}}^2\,\frac{\mathrm{d}p^a}{\sum(\mathrm{d}p^a)^2}\end{aligned} \tag{85}$$

30. *Relații de imprecizíune.* Din relațiile de structură (24) ale grupului proiectiv D_6 și ale vitezelor relativiste rezultă relațiile de imprecizíune

$$\omega_4\,\omega_3 = \omega_5\,\omega_6 = \omega_1\,\omega_2 = 1 \tag{86}$$

sau (în funcție de vitezele u_a, v_a, U_a, V_a):

$$\begin{gathered}\{43\}\ u_1V_5 = -iu_1V_1'(=iV_5u_5') = c^2, \quad \{56\}\ -iv_5U_5' = iu_1'u_1 = iu_4v_5 = c^2,\\ \{12\}\ v_1V_1 = v_5'V_5' = c^2\end{gathered} \tag{86'}$$

și (conform lui (51″)) ca produse de constante

$$u_5U_5\,(= -v_4V_4 = iu_1'U_1' = -v_6'V_6) = c^2. \tag{87}$$

Relațiile de imprecizíune (86) sau (86′) corespunzătoare celor trei perechi de indici (43), (56), (12) de elemente reciproce ω_a, $\omega_{\bar{a}}$ se exprimă în coordonate-impulsuri (sau diferențiale sau diferențe Δ)

$$\begin{gathered}\{43\}\ \underset{(t)}{p_1}\,\underset{(s)}{x_1'} = \underset{(t)}{x_1}\,\underset{(s)}{p_1'} = h, \quad \{56\}\ -i\,\underset{(t)}{p_4}\,\underset{(s)}{x_1} = -i\,\underset{(t)}{x_4}\,\underset{(s)}{p_1} = h;\\ \{12\}\ \underset{(s)}{p_5}\,\underset{(t)}{x_5'} = \underset{(s)}{x_5}\,\underset{(t)}{p_5'} = h\end{gathered} \tag{86''}$$

$$\underset{(t)}{p_5}(-ix_6) = x_5(-ip_6) = h \quad \left(cm'a' = c^2m''b_0' = h;\ \frac{wl}{c} = \frac{tL}{c} = h\right). \tag{87'}$$

impulsurile proprii corespunzătoare celor două mase de repaus și razele proprii (spațială = clasică și temporală = cuantică = lungimea de undă) sînt constante în raport cu transformările din $\bar{E}_4$, E_4 dar variabile în $\bar{E}_4'$, E_4' în funcție de structura materiei. Relațiile de imprecizíune de tip {12} din relațiile (80) sau (86) sau (86″) nu figurează în teoria uzuală. (86″), (87′) rezultă de asemenea din (81) sau (81′) și (83).

Notînd formal

$$k = \frac{i\beta}{c},\ \lambda_4 = ict,\ \bar{k}_4 = \frac{i\bar{\nu}}{c},\ \bar{\lambda}_4 = ic\bar{\tau}, \tag{88}$$

primele patru relații de imprecizíune iau în E_4, E_4', $\bar{E}_4$, $\bar{E}_4'$ forma corpusculară-ondulatorie (în coordonate și vectori de undă k^i, $\bar{k}^i$ impulsuri $\underset{(p,w)}{p_i}$ sau lungimi de undă λ^i, $\bar{\lambda}^i$

$$x^i\,k^i = p_i\,\bar{k}_i = 1;\ p_i\,\lambda_i = x_i\,\bar{\lambda}_i = h \tag{86'''}$$

Deci

$$
lh = ph = 1 \quad\text{sau}\quad x\bar{\lambda} = p\lambda = h
$$
$$
t\nu = w\nu = 1 \qquad\qquad t\bar{\tau} = w\tau = h. \tag{89}
$$

Sub toate formele (86), (86′), (86″) sau (86‴), relațiile de imprecizinne verifică legea generalizată a reciprocității în E_8. Variabilele canonic conjugate sînt deci opuse în cadrul fiecărui cuplu de variabile $AA'BB'$ (și a stărilor $aa'bb'$). Mărimile dinamice p_a (sau cinematice x_a) în $\bar{E}_8$ sînt cinematice (dinamice) în $\bar{E}_8$. Mărimile cosmice (proprii) de gen $t(s)$ din E_8 sînt proprii (cosmice) de gen $s(t)$ în E'_8. Se permută deci totodată mărimile corpusculare x^a, p_a și ondulatorii λ^a, $\bar{\lambda}_a$.

Primită la redacție la 3 februarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. Fock, *Teoria spațiului, timpului și gravitației*. București, 1962.
2. A. Popovici, Revue de math. pures et appl., **V**, *2*, 411 (1960).
3. I. B. Rumer, *Cercetări asupra 5-opticii*. București. 1958.
4. M. Born, Proc. London, **165**, 219 (1937); Proc. Eddinburg, **59**, 219 (1939); M. Born, K. Fuchs, Proc. Eddinburg, **141**, 147 (1940).
5. A. Popovici, Revista Univ. „C. I. Parhon", *3*, 78 (1953); Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, *6*, 65 (1959).
6. A. Popovici, Revista Univ. „C. I. Parhon" și a Politehnicii din București, *6–7*, 105 (1955); Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe matematice și fizice, **VIII**, *1*, 121 (1956); D.A.N., S.S.S.R., **111**, *1* 74 (1956); JETE, **32**, 4, 781 (1957).
7. R. Ingraham, Nuovo Cimento, *2*, 825 (1954).

SOLUȚIA GENERALĂ NENEGATIVĂ A UNUI SISTEM LINIAR DE m ECUAȚII CU n NECUNOSCUTE $(m < n)$

DE

I. DRĂGHICI

În această lucrare se stabilește o condiție necesară și suficientă de existență a mulțimii soluțiilor nenegative pentru un sistem liniar de ecuații, avîndu-se în vedere structura matricii sistemului. Demonstrarea existenței soluției generale nenegative se face cu o metodă constructivă a poliedrului convex al soluțiilor nenegative, care apare ca intersecția unui con poliedric convex, în spațiul $n + 1$-dimensional, cu un hiperplan ortogonal pe una din axe.

Procedeul folosit la construirea soluției generale nenegative, pune în evidență toate soluțiile de bază nenegative ale sistemului considerat.

I. INTRODUCERE

Se cunosc, din [1] și [2], definițiile și proprietățile poliedrelor și conurilor convexe. Totuși, pentru o bună înțelegere a lucrării, vom reda mai jos unele definiții și proprietăți ale acestora.

Notații : în cele ce urmează vom folosi pentru notarea unui vector litere cu indici sus, iar pentru notarea unui scalar, litere cu indici jos, dacă nu se menționează altfel. De asemenea, vom nota cu „( )" un vector linie, iar prin „$< >$", un vector coloană.

Fie R_n un spațiu liniar real n-dimensional și $x^1, \ldots, x^n, \ldots$ elemente ale sale pe care le vom numi vectori sau puncte.

DEFINIȚIA 1. Se numește segment de extremități x^1 și x^2, în R_n, mulțimea punctelor definite prin relația :

$$\zeta = \alpha x^1 + \beta x^2 \quad \text{cu} \quad \alpha + \beta = 1 \quad \text{și} \quad \alpha, \beta \geqslant 0.$$

DEFINIȚIA 2. Se numește mulțime convexă în R_n, orice mulțime $M \subset R_n$ care o dată cu două elemente ale sale, x^1 și x^2, conține și segmentul de extremități x^1 și x^2.

ST . CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1511 – 1524, BUCUREȘTI, 1966

TEOREMĂ. *Dacă* $x^1, x^2, \ldots, x^n$ *este un sistem de* n *vectori în* R_n, *diferiți între ei, atunci mulțimea punctelor de forma*:

$$x = \sum_1^n \lambda_i x^i \quad \text{cu} \quad \sum_1^n \lambda_i = 1 \quad \text{și} \quad \lambda_i \geqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

formează o mulțime convexă. Se spune că sistemul $x^1, \ldots, x^n$ *generează această mulțime convexă.*

Demonstrația acestei teoreme este dată în [2]. Menționăm că relația (1) cu condițiile impuse, poartă numele de combinație convexă a vectorilor $x^1, \ldots, x^n$.

DEFINIȚIA 3. Sistemul de vectori $x^1, \ldots, x^n$ se numește saturat, dacă cel puțin unul din vectori se poate exprima printr-o combinație convexă de ceilalți $n - 1$. În caz contrar, sistemul se numește nesaturat.

DEFINIȚIA 4. Se numește poliedru convex, mulțimea convexă generată de un sistem finit nesaturat de vectori $x^1, \ldots, x^n$. Vectorii $x^1, \ldots, x^n$ se numesc vîrfuri sau puncte extreme ale poliedrului.

În legătură cu această definiție, dată în [2], facem precizarea că și un sistem finit saturat de vectori generează, prin (1), tot un poliedru convex. În acest caz însă nu mai putem preciza vîrfurile acestui poliedru.

DEFINIȚIA 5. Se numește con convex în R_n mulțimea K de puncte ale spațiului, cu următoarele proprietăți:

1) Dacă $x \in K$, atunci $\alpha x \in K$ pentru orice $\alpha \geqslant 0$.

2) Dacă $x^1, x^2 \in K$, atunci $x^1 + x^2 \in K$.

Cel mai simplu con este conul generat de un singur punct a și anume: mulțimea punctelor de forma αa cu $\alpha \geqslant 0$. Acest con se numește rază sau semidreaptă și se notează:

$$(x) = \{\alpha a \mid \alpha \geqslant 0\}.$$

Dacă K_1 și K_2 sînt două conuri convexe, se verifică imediat proprietățile:

1) $K_1 \cap K_2$ este con convex

2) $K_1 + K_2 = \{x^1 + x^2 \mid x^1 \in K_1, x^2 \in K_2\}$ este de asemenea con convex.

DEFINIȚIA 6. Fie K un con convex. Se numește dualul său și se notează cu K^*, mulțimea vectorilor y, pentru care avem:

$$yx \geqslant 0 \text{ pentru orice } x \in K.$$

Se verifică imediat că mulțimea K^* este con convex. Între conurile convexe și dualele lor există următoarele proprietăți [2]:

1) Dacă $K_1 \subset K_2$, atunci $K_1^* \supset K_2^*$.

2) Dualul sumei $K_1 + K_2$ este egal cu intersecția dualelor lui K_1 și K_2, adică:

$$(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*. \tag{2}$$

DEFINIȚIA 7. Se numește con poliedric convex, o sumă a unui număr finit de raze (x^i); adică mulțimea:

$$K = \sum_1^n (x^i). \tag{3}$$

În baza acestei definiţii, conul poliedric se reprezintă ca mulţimea punctelor de forma :

$$(4) \qquad x = \sum_{1}^{n} a_i x^i, \; a_i \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $x^1, x^2, \ldots, x^n$ îi presupunem ca fiind pozitiv liniar independenţi [2]. Sistemul de vectori $x^1, \ldots, x^n$ se numeşte scheletul sau baza conului poliedric. Matricial, relaţia (4) se scrie astfel :

$$(5) \qquad x = B \cdot a, \quad a \geqslant 0,$$

unde B este matricea $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, iar $a = < a_1 a_2 \ldots a_n >$.

Dacă notăm cu $K_i = (x^i)$, conul pe care l-am numit rază, atunci (3) se scrie :

$$(3') \qquad K = \sum_{1}^{n} K_i,$$

şi trecînd la dual, în baza relaţiei (2), avem :

$$(6) \qquad K^* = \bigcap_{1}^{n} K_i^*.$$

Ştim despre K^* că este con convex. Se demonstrează, [2], că el este con poliedric. Ţinînd seama că dualul K_i^* este, conform definiţiei 6, semispaţiul :

$$yx^i \geqslant 0,$$

rezultă că conul poliedric (6) este definit prin intersecţia semispaţiilor :

$$(7) \qquad yx^i \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ceea ce constituie o nouă definiţie a conului poliedric.

Aşadar, mulţimea soluţiilor sistemului de inegalităţi (7), formează un con poliedric.

★

Plecînd de la cele două definiţii ale conului poliedric convex, rezultă că dacă este dat un sistem compatibil de inegalităţi liniare, omogen, există un sistem de vectori pozitiv liniar independenţi, aşa fel încît conul generat de acest sistem, să fie tocmai mulţimea soluţiilor sistemului de inegalităţi şi reciproc ; fiind dat un con poliedric printr-un sistem de vectori pozitiv liniar independenţi, există un sistem omogen de inegalităţi astfel încît mulţimea soluţiilor sale să fie tocmai conul poliedric dat. Evident, problema este de a construi efectiv baza conului, în cazul sistemului de inegalităţi şi cu aceasta soluţia generală a sistemului şi, de asemenea, construirea sistemului de inegalităţi cînd se dă baza conului soluţiilor.

Problema construirii bazei conului poliedric în cazul sistemului de inegalităţi dat, este rezolvată în [1].

Folosind ideile de mai sus, ne vom ocupa de mulţimea soluţiilor nenegative ale unui sistem de ecuaţii liniare.

Fie sistemul liniar omogen de m ecuaţii cu n necunoscute :

$$\sum_1^n a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots m) \; m < n$$

sau, sub forma matricială :

$$(8) \qquad Ax = 0.$$

TEOREMA 1. *Mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului* (8) *este un con convex.*

Demonstraţie. Fie K mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului (8). Atunci, dacă $x^1 \in K$, avem :

$$A\alpha x^1 = \alpha A x^1 = 0$$

deci şi $\alpha x^1 \in K$, pentru orice $\alpha \geqslant 0$.

Mai departe, dacă $x^1, x^2 \in K$, atunci :

$$A(x^1 + x^2) = Ax^1 + Ax^2 = 0,$$

deci şi $x^1 + x^2 \in K$ şi teorema este demonstrată.

Am dat această teoremă simplă pentru motivul că ea pune întrebarea firească : dacă nu cumva conul convex al soluţiilor nenegative, a cărui existenţă am demonstrat-o, este con poliedric?

În continuare, răspundem afirmativ la această întrebare, dînd o metodă de construire efectivă a bazei conului poliedric, deci a soluţiei generale nenegative a sistemului (8).

2. MATRICEA $B(a)$

Fie $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un vector în spaţiu real R_n şi să notăm :

$$I_0 = \{k \mid a_k = 0\} ; \quad I_+ = \{i \mid a_i > 0\} ; \quad I_- = \{j \mid a_j < 0\}.$$

Definim, în continuare, vectorii :

$$(9) \qquad e^k = \left| \begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{linia } k - a \\ \\ \\ \\ k \in I_0 \end{array} ; \qquad e^{ij} = \left| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_i} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{-a_j} \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \text{linia } i - a \\ \\ \text{linia } j - a \\ \\ i \in I_+, j \in I_- \end{array}$$

Se constată uşor că aceşti vectori sînt pozitiv liniar independenţi, deoarece mulţimile I_0, I_+, I_- sînt disjuncte două cîte două.

Cu vectorii definiţi astfel, construim matricea :

$$(10) \qquad B(a) = (e^{k_1}, \dots, e^{k_p} ; e^{i_1 j_1}, \dots e^{i_r j_s}),$$

în care numărul de coloane este egal cu $p + rs = h$.

Se constată cu uşurinţă următoarele proprietăţi ale matricei $B(a)$:

1) $B(a) \geqslant 0$.

2) $a \cdot B(a) = 0$.

3) În fiecare linie şi în fiecare coloană a matricei $B(a)$, există cel puţin un element diferit de zero.

Cu acestea, vom demonstra:

TEOREMA 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca vectorul nenegativ* $x = < x_1, \ldots, x_n >$ *să fie o soluţie a ecuaţiei* $ax = 0$, *unde* $a = (a_1, \ldots, a_n)$, *este ca* x *să fie de forma*:

$$x = B(a) \cdot C, \tag{11}$$

în care $C = < c_1, c_2, \ldots, c_h >$ *este un vector nenegativ.*

Demonstraţie. Suficienţa rezultă imediat din proprietăţile 1) şi 2) ale matricei $B(a)$. Pentru necesitate vom stabili mai întîi următoarea:

LEMĂ. *Dacă* M *şi* N *sînt două mulţimi disjuncte de indici, iar mărimile* $z_i > 0$ *şi* $z_j > 0$ *sînt astfel încît*:

$$\sum_{i \in M} z_i = \sum_{j \in N} z_j, \tag{12}$$

atunci există mărimile $\alpha_{ij} > 0$, *pentru care să avem*:

$$z_i = \sum_{j \in N} \alpha_{ij}, \quad i \in M$$

$$z_j = \sum_{i \in M} \alpha_{ij}, \quad j \in N$$

Demonstraţie: Să observăm, de la început, simetria relaţiilor în indici i şi j şi să presupunem că:

$$\min \{z_i, z_j\} = z_{j_p} \tag{13}$$

ceea ce nu afectează generalitatea.

Pentru $N = \{1\}$, se verifică uşor că lema este adevărată. Să presupunem că ea este adevărată pentru $N = \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ şi să o demonstrăm pentru $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Să scriem relaţia (12) astfel:

$$\sum_{i \in M} \left(z_i - \frac{z_{j_p}}{m} \right) = \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq j_p}} z_j, \tag{14}$$

unde am notat cu m numărul de elemente din mulţimea M. În baza relaţiei (13), rezultă că:

$$z_i - \frac{z_{j_p}}{m} > 0 \text{ pentru orice } i \in M,$$

şi conform presupunerii făcute, există numerele $\alpha_{ij} > 0$, astfel încît:

$$z_i - \frac{z_{j_p}}{m} = \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq j_p}} \alpha_{ij} \text{ pentru orice } i \in M, \tag{15}$$

$$z_j = \sum_{i \in M} \alpha_{ij} \text{ pentru orice } j \in N,\ j \neq j_p. \tag{16}$$

Notînd $\alpha_{ij_p} = \frac{z_{j_p}}{m}$, relaţiile (15) şi (16) devin :

$$z_i = \sum_{j\in N} \alpha_{ij} \quad \text{pentru orice } j \in N$$

$$z_j = \sum_{i\in N} \alpha_{ij} \quad \text{pentru orice } j \in N$$

şi lema este demonstrată.

Să demonstrăm acum necesitatea condiţiei din teorema 2. Fie $x = < x_1, \ldots, x_n >$ un vector nenegativ pentru care $ax = 0$ şi să arătăm că x este de forma (11), adică :

$$x = \sum_{k\in I_0} \alpha_k \mathrm{e}^k + \sum_{i\in I_+} \sum_{j\in I_-} \lambda_{ij} e^{ij}, \qquad \alpha_k \geqslant 0,\ \lambda_{ij} \geqslant 0. \tag{17}$$

Observăm că din (9) putem scrie :

$$e^{ij} = \frac{1}{a_i} e^i - \frac{1}{a_j} e^j$$

şi luînd $\alpha_k = x_k$, deci $\alpha_k \geqslant 0$, (17) devine :

$$x = \sum_{k\in I_0} x_k e^k + \sum_{i\in I_+} \frac{1}{a_i}\left(\sum_{j\in I_-} \lambda_{ij}\right) e^i + \sum_{j\in I_-} \frac{1}{-a_j}\left(\sum_{i\in I_+} \lambda_{ij}\right) e^j,$$

ceea ce reprezintă scrierea lui x în baza unitară ; va trebui deci să avem :

$$x_i = \frac{1}{a_i} \sum_{j\in I_-} \lambda_{ij},\ (\forall)\, i \in I_+ \quad \text{şi} \quad x_j = \frac{1}{-a_j} \sum_{i\in I_+} \lambda_{ij},\ (\forall)\, j \in I_- ;$$

sau

$$a_i x_i = \sum_{j\in I_-} \lambda_{ij},\ (\forall)\, i \in I_+, \quad -a_j x_j = \sum_{i\in I_+} \lambda_{ij},\ (\forall)\, j \in I_- \tag{18}$$

Ţinînd seamă că din condiţia $ax = 0$ putem scrie :

$$\sum_{i\in I_+} a_i x_i = \sum_{j\in I_-} (-a_j x_j)$$

şi că I_+ şi I_- sînt mulţimi disjuncte, în baza lemei de mai sus, rezultă existenţa mărimilor $\lambda_{ij} > 0$ pentru care (18) să aibă loc, astfel încît relaţia (17) este de forma (11) şi teorema 2 este complet demonstrată.

Din teorema demonstrată deducem :

COROLARUL 1. *Soluţia generală nenegativă a execuţiei $ax = 0$ este de forma* (11).

COROLARUL 2. *Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia $ax = 0$ să aibă soluţii nenegative este ca să existe matricea $B(a)$, deci ca vectorul a să aibă atît componente pozitive cît şi componente negative.*

COROLARUL 3. *Mulţimea formată de soluţiile nenegative ale ecuaţiei $ax = 0$ este un con poliedric convex. Aceasta rezultă în baza definiţiei 7.*

3. MATRICEA $\mathcal{B}$ (A) ŞI SOLUŢIA GENERALĂ NENEGATIVĂ A UNUI SISTEM LINIAR OMOGEN DE m ECUAŢII CU n NECUNOSCUTE $(m < n)$

Fie sistemul omogen

$$(19) \qquad \sum_{1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad m < n.$$

Pentru cele ce urmează vom nota : $\alpha_i^1 = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$ şi $x = < x_1, \ldots$ $\ldots, x_n >$, astfel încît sistemul (19) îl vom scrie sub forma :

$$(19') \qquad \alpha_i^1 x = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Vom mai folosi de asemenea şi forma matricială a sistemului (19) ; adică :

$$(20) \qquad Ax = 0,$$

unde $A = (a_{ij})_{mn}$ este matricea sistemului.

Ne vom ocupa, în continuare, cu determinarea soluţiilor nenegative ale sistemului (19). Să observăm, de la început, că o condiţie necesară ca sistemul (19) să aibă soluţii nenegative este ca toţi vectorii α_i^1 să aibă atît componente pozitive cît şi negative. Se verifică uşor, pe un exemplu, că această condiţie nu este şi suficientă.

Pentru găsirea mulţimii soluţiilor nenegative ale sistemului (19) vom da o metodă constructivă, stabilind în acelaşi timp :

TEOREMA 3. *Mulţimea soluţiilor nenegative ale unui sistem liniar omogen de m ecuaţii cu n necunoscute* $(m < n)$, *formează un con poliedric convex în* R_n.

Demonstraţie. Să observăm că dacă $\mathcal{B} \geqslant 0$ este o matrice de dimensiune $n \times h$, astfel ca $A\mathcal{B} = 0$, atunci

$$(21) \qquad x = \mathcal{B}C.$$

unde $C = < c_1, c_2, \ldots, c_h >$, va fi o soluţie nenegativă a sistemului (20), pentru orice $C \geqslant 0$.

Matricea $\mathcal{B}$, pe care o vom construi mai jos cu ajutorul matricii A, o vom numi matricea $\mathcal{B}(A)$.

Să presupunem că sistemul (19) are soluţii nenegative ; atunci putem construi pentru vectorul α_1^1 matricea $B(\alpha_1^1)$.

Să facem în (20) transformarea :

$$(22) \qquad x = B(\alpha_1^1)\, y^1$$

şi să scriem rezultatul sub forma :

$$(23) \qquad A_1 y^1 = 0,$$

unde $A_1 = AB(\alpha_1^1)$ este o matrice cu elementele primei linii egale cu zero, deci sistemul (23) are numai $m - 1$ ecuaţii.

Să notăm liniile matricei A_1 prin vectorii $\alpha_i^2 (i = 1, \ldots, m)$ şi să presupunem că sistemul (23) are soluţii nenegative. Atunci putem construi matricea $B(\alpha_2^2)$ şi făcînd în (23) transformarea :

$$(24) \qquad y^1 = B(\alpha_2^2)\, y^2,$$

obţinem sistemul

$$(25) \qquad A_2 y^2 = 0,$$

unde $A_2 = AB(\alpha_1^1)\ B(\alpha_2^2)$ este o matrice cu elementele primelor două linii egale cu zero, deci sistemul (25) are numai $m - 2$ ecuaţii.

Făcînd aceleaşi presupuneri pentru sistemul (25), transformîndu-l cu ajutorul matricei $B(\alpha_3^3)$ şi aplicînd acest procedeu de $m - 2$ ori, vom obţine sistemul:

$$A_{m-2}y^{m-2} = 0 \tag{26}$$

care, în ipoteza că admite soluţii nenegative, prin transformarea:

$$y^{m-2} = B(\alpha_{m-1}^{m-1})\,y^{m-1} \tag{27}$$

ne conduce la sistemul:

$$A_{m-1}y^{m-1} = 0, \tag{28}$$

unde $A_{m-1} = A \cdot B\ (\alpha_1^1)\ \ldots\ B(\alpha_{m-1}^{m-1})$ este o matrice care are în primele $m - 1$ linii toate elementele nule, astfel încît sistemul (28) are o singură ecuaţie corespunzătoare ultimei linii din matricea A_{m-1}. Notînd această ultimă linie cu α_m^m şi presupunînd în sfîrşit că ecuaţia (28) are soluţii nenegative, putem scrie soluţia generală nenegativă, în baza teoremei 2, sub forma:

$$y^{m-1} = B(\alpha_m^m)\cdot C, \tag{29}$$

unde $C \geqslant 0$ este un vector coloană cu un număr oarecare, finit, de componente.

Dacă facem acum produsul transformărilor efectuate, obţinem:

$$x = B(\alpha_1^1)\cdot B(\alpha_2^2)\ \ldots\ B(\alpha_m^m)\cdot C = \mathcal{B}(A)\cdot C, \tag{30}$$

unde matricea:

$$\mathcal{B}(A) = B(\alpha_1^1)\cdot B(\alpha_2^2)\ \ldots\ B(\alpha_m^m) \tag{31}$$

satisface, evident, condiţiile: $\mathcal{B}(A) \geqslant 0$ şi $A\mathcal{B}(A) = 0$. De aici rezultă că orice soluţie nenegativă a ecuaţiei (28), corespunde unei soluţii nenegative a sistemului (20), această corespondenţă fiind univocă în baza relaţiei (30). Reciproc, vom arăta că orice soluţie nenegativă a sistemului (20), este de forma (30).

Într-adevăr, dacă x este o soluţie nenegativă a sistemului (20), el va fi, se înţelege, o soluţie a ecuaţiei $\alpha_1^1 x = 0$ şi în baza teoremei 2, există vectorul $y^1 \geqslant 0$ astfel ca x să fie de forma (22), deci corespunzător unei soluţii nenegative a sistemului (23). Dar y^1 este, în acest caz, soluţie a ecuaţiei $\alpha_2^2 y^1 = 0$ şi în baza aceleiaşi teoreme 2, există vectorul $y^2 \geqslant 0$ astfel încît y^1 să fie de forma (24), deci corespunzător unei soluţii nenegative a sistemului (25). Continuînd în acelaşi mod raţionamentul, rezultă că x corespunde unei soluţii nenegative a sistemului (28), adică a ecuaţiei $\alpha_m^m\, y^{m-1} = 0$ şi deci x este de forma (30). Ţinînd seamă că mulţimea vectorilor definiţi prin relaţia (30) formează, prin definiţie, un con poliedric convex şi că vectorii coloană ai matricei $\mathcal{B}(A)$ au n componente, teorema este complet demonstrată.

DEFINIŢIA 8. Vom numi orice sistem de forma (26), adică

$$A_k y^k = 0, \tag{32}$$

transformatul succesiv al sistemului (20), prin matricea $B(\alpha)$. Cu această definiţie, din teorema de mai sus rezultă :

COROLARUL 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul (20) să aibă soluţii nenegative, este ca atît sistemul, cît şi transformatele sale succesive prin matricea* $B(\alpha)$, *să aibă matricile respective* $A_i\ (i = 0, 1, 2, \ldots, m - 1)$, $(A_0 = A)$, *aşa fel încît toate liniile acestor matrici să aibă atît elemente pozitive cît şi elemente negative, exceptînd liniile în care toate elementele sînt nule.*

Tot din demonstraţia teoremei, rezultă :

COROLARUL 2. *Soluţia generală nenegativă a sistemului* (20) *este de forma* (30).

COROLARUL 3. *Matricea* $\mathcal{B}(A)$ *are exact* $n - m$ *coloane liniar independente. Într-adevăr, este uşor de observat că* (32) *reprezintă, pentru* C *arbitrar, soluţia generală a sistemului* (20). *Se ştie, însă,* [3], *că soluţia generală a sistemului* (20) *se scrie cu ajutorul unui sistem fundamental de soluţii şi că un astfel de sistem are exact* $n - m$ *soluţii liniar independente.*

Vom face următoarea :

Observaţie. Ţinînd seama de cele două definiţii date conului poliedric convex, rezultă, din teorema de mai sus, că pentru un sistem liniar omogen de ecuaţii cu soluţii nenegative, există un sistem liniar omogen de inegalităţi, cu toate soluţiile nenegative şi a cărui mulţime de soluţii coincide cu mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului de ecuaţii.

4. MULŢIMEA SOLUŢIILOR NENEGATIVE ALE UNUI SISTEM LINIAR NEOMOGEN DE m ECUAŢII CU n NECUNOSCUTE, $(m < n)$

Fie sistemul :

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),\ m < n. \tag{33}$$

Vom considera o dată cu acest sistem, sistemul omogen :

$$\sum_{1}^{n} a_{ij} x_j - b_i t = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{34}$$

care, evident, pentru $t = 1$, se reduce la sistemul (33). Notînd cu $\mathcal{A}$ matricea sistemului (34), soluţia generală nenegativă a acestui sistem o vom scrie sub forma :

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \mathcal{B}(\mathcal{A}) \cdot C, \qquad C \geqslant 0, \tag{35}$$

unde matricea $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ are $n + 1$ linii, ceea ce înseamnă că (35) reprezintă un con poliedric în R_{n+1}.

Dacă notăm cu α_{ij} elementele matricei $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, atunci (35) se poate scrie sub forma :

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{1}^{h} \alpha_{ij} c_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ t &= \sum_{1}^{h} \alpha_{n+1, j} c_j , \end{aligned} \tag{36}$$

unde c_j sînt componentele vectorului $C \geqslant 0$, iar h numărul acestor componente.

Făcînd în (36) pe $t = 1$, obţinem, evident, soluţia generală nenegativă a sistemului (33) şi notînd :

$$\lambda_j = \begin{cases} \alpha_{n+1,\,j}\, c_j & \text{dacă } \alpha_{n+1,\,j} \neq 0 \\ c_j & \text{dacă } \alpha_{n+1,\,j} = 0, \end{cases}$$

avem :

$$x_i = \sum_1^h \beta_{ij}\lambda_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{şi} \quad \sum_1^h \lambda_j = 1, \tag{36'}$$

unde am notat :

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}}{\alpha_{n+1,\,j}} & \text{dacă } \alpha_{n+1,\,j} \neq 0 \\ \alpha_{ij} & \text{dacă } \alpha_{n+1,\,j} = 0. \end{cases}$$

Scriind vectorial relaţia (36), adică :

$$x = \sum_1^h \lambda_j \beta^j, \quad \sum_1^h \lambda_j = 1, \tag{37}$$

unde $\beta^j = < \beta_{ij}, \ldots, \beta_{nj} >$ şi $x = < x_1, \ldots, x_n >$, sîntem conduşi la rezultatul cunoscut, [4], şi anume că mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului (33) formează un poliedru convex, deoarece $\lambda_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$ şi deci (37) reprezintă o combinaţie convexă a vectorilor $\beta^1, \ldots, \beta^h$.

Pentru cele stabilite mai sus, se poate da o interpretare geometrică interesantă. Astfel, dacă ne situăm în spaţiul R_{n+1}, atunci (35) reprezintă un con poliedric K, cu vîrful în origine. Făcînd în (36) $t = 1$, aceasta revine la a intersecta conul poliedric K, cu hiperplanul $t = 1$, ortogonal axei Ot. Dar pentru $t = 1$, obţinem mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului (33), adică un poliedru convex. Aşadar, poliedrul convex al soluţiilor nenegative ale sistemului (33), este tot una cu intersecţia conului K, prin hiperplanul $t = 1$, abstracţie făcînd de originea sistemului de referinţă.

Vom ilustra cele de mai jos cu un exemplu în R_2.

Fie de găsit mulţimea soluţiilor nenegative ale ecuaţiei :

$$2x + y = 2. \tag{38}$$

Se vede uşor că mulţimea soluţiilor nenegative ale acestei ecuaţii, este formată de segmentul AB din figură.

Să considerăm ecuaţia :

$$2x + y - 2t = 0, \tag{39}$$

pentru care să notăm $\mathcal{A} = (2, 1, -2)$ și să construim matricea $\mathcal{B}(\mathcal{A})$; avem :

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

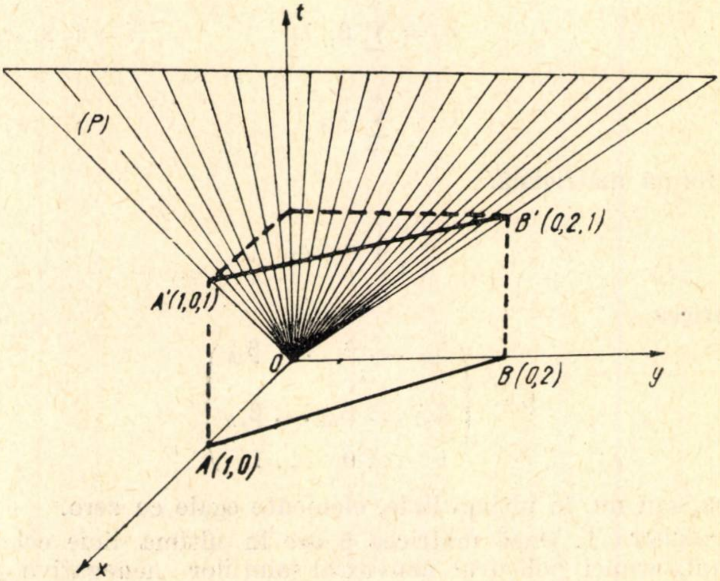


Fig. 1

cu care soluția generală a ecuației (39) se scrie :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1/_2 & 0 \\ 0 & 1 \\ {}^1/_2 & {}^1/_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

sau

$$x = \frac{1}{2} c_1, \quad y = c_2, \quad t = \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} c_2$$

Notînd $y_1 = \frac{1}{2} c_1$ și $\lambda_2 = \frac{1}{2} c_2$, obținem :

$$x = \lambda_1, \quad y = 2\lambda_2, \quad t = \lambda_1 + \lambda_2,$$

de unde soluția generală nenegativă a ecuației (38) va fi :

$$x = \lambda_1, \quad y = 2\lambda_2$$

cu condiția $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Dacă considerăm şi axa Ot, atunci ecuaţia (39) reprezintă planul P, iar mulţimea soluţiilor nenegative ale acestei ecuaţii este reprezentată de conul $A'OB'$. Secţionînd acest con cu planul $t = 1$, obţinem segmentul $A'B'$ care reprezintă mulţimea soluţiilor nenegative ale ecuaţiei (38) şi a cărui proiecţie ortogonală pe xOy este tocmai segmentul AB.

În continuare vom pune în evidenţă unele consecinţe importante care decurg din soluţia generală, (36′), a sistemului (33). Pentru aceasta să scriem din nou relaţiile :

$$x_i = \sum_1^h \beta_{ij} \lambda_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

$$1 = \sum_1^h \lambda_j, \tag{41}$$

sau, sub formă matricială,

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \lambda,$$

unde matricea

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} \ldots \beta_{1k} \ldots \beta_{1h} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \ldots \beta_{nk} \ldots \beta_{nh} \\ 1 \ \ldots \ 0 \ \ldots \ 1 \end{pmatrix},$$

poate avea, sau nu, în ultima linie, elemente egale cu zero.

CONSECINŢA 1. Dacă matricea β are în ultima linie cel puţin un element nul, atunci poliedrul convex al soluţiilor nenegative ale sistemului (33), este nemărginit.

Într-adevăr, dacă, de exemplu, în coloana k ultimul element este nul, atunci componenţa λ_k, a vectorului λ, nu intervine în relaţia (41), deci poate lua valori oricît de mari şi cum λ_k apare cu necesitate în (40), rezultă consecinţa enunţată. De asemenea este evident că dacă în ultima linie a matricei β nu există nici un element nul, atunci poliedrul soluţiilor nenegative este mărginit.

CONSECINŢA 2. Printre coloanele matricei β, în care ultimul element este egal cu unitatea, se găsesc toate soluţiile de bază nenegative ale sistemului (33). Într-adevăr, să observăm că fiecare astfel de coloană este o soluţie a sistemului (33) şi să presupunem că ar exista o soluţie de bază nenegativă şi care nu s-ar afla printre aceste coloane ; rezultă atunci că această soluţie de bază se poate exprima prin combinaţia convexă (36′), ceea ce este imposibil, deoarece, după cum se ştie, soluţia de bază este un punct extrem al poliedrului convex al soluţiilor.

În încheiere facem observaţia că în aplicaţii, la constituirea matricei $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, se vor alege, pentru matricile $B(\alpha)$, vectorii α cei mai convenabili şi anume acei vectori pentru care numărul $h = p + rs$ este minim. De asemenea se observă cu uşurinţă că vectorii coloană din matricea $B(\alpha)$, pot fi înlocuiţi cu alţii, respectivi proporţionali, deoarece prin aceasta nu se modifică conul poliedric al soluţiilor.

Dăm mai jos un exemplu în care ţinem seama de ultimele observaţii. Să se construiească soluţia generală nenegativă a sistemului :

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{2x_2 +{}} x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_6 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+4x_3} + x_4 \phantom{{}+2x_6} &= 4. \end{aligned}$$

Avem :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -8 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \qquad B(\alpha_1^1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}B(\alpha_1^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 22 & -6 & -10 & 6 \\ 12 & 1 & -4 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}; \quad B(\alpha_3^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 B(\alpha_3^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & -32 & 16 & 30 & -2 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B(\alpha_2^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 15 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 15 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{A}) = B(\alpha_1^1)\,\cdot \\ \cdot\, B(\alpha_3^2)\, B(\alpha_2^3) = \end{aligned} \begin{pmatrix} 24 & 8 & 24 & 24 & 120 & 56 & 8 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 & 0 & 64 & 64 & 32 & 0 & 64 & 4 & 32 & 12 \\ 24 & 24 & 72 & 0 & 128 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & 20 & 0 & 28 \\ 48 & 256 & 0 & 24 & 360 & 168 & 64 & 0 & 120 & 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 128 & 24 & 72 & 0 & 0 & 8 & 24 \\ 12 & 36 & 44 & 12 & 76 & 44 & 12 & 20 & 16 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Împărțind coloanele matricei $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ prin ultima lor componentă, obținem :

$$\beta = \begin{pmatrix} 2 & {}^{2}/_{9} & {}^{6}/_{11} & 2 & {}^{30}/_{19} & {}^{14}/_{11} & {}^{2}/_{3} & {}^{6}/_{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{32}/_{9} & 0 & 0 & {}^{16}/_{19} & {}^{16}/_{11} & {}^{8}/_{3} & 0 & 4 & {}^{2}/_{3} & 4 & {}^{6}/_{5} \\ 2 & {}^{2}/_{3} & {}^{18}/_{11} & 0 & {}^{32}/_{19} & 0 & 0 & 0 & {}^{1}/_{2} & {}^{4}/_{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{32}/_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{8}/_{5} & 0 & {}^{10}/_{3} & 0 & {}^{14}/_{5} \\ 4 & {}^{64}/_{9} & 0 & 2 & {}^{90}/_{19} & {}^{42}/_{11} & {}^{16}/_{3} & 0 & {}^{15}/_{2} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & {}^{32}/_{11} & 2 & {}^{18}/_{5} & 0 & 0 & 1 & {}^{12}/_{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă notăm cu $\bar{\beta}$ matricea obținută din β prin suprimarea ultimei linii, atunci soluția generală nenegativă a sistemului dat se scrie :

$$x = \bar{\beta} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{12} \end{pmatrix}$$

cu condiția $\sum_{1}^{12} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, 12)$.

Soluțiile de bază nenegative ale sistemului dat sînt coloanele 1, 3, 4, 8, 9, 10, 11 și 12 ale matricei $\bar{\beta}$ și numai acestea.

Primită la redacție la 25 martie 1966.

Institutul de construcții București

BIBLIOGRAFIE

1. Kenneth I. Arrow, Leonid Hurwicz, Hirofumi Uzawa, *Studies in linear and non-linear programming*. Stanfod University Press, Stanford California, 1958.
2. O. Onicescu, *Strategia jocurilor*. Ed. Academiei R.P.R., București, 1961.
3. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare*, vol. 3, p. I-a, Ed. tehnică, București, 1955.
4. S. L. Gass, *Linear programming* . Mc. Graw Hill, New York, 1958.

ALGORITMUL LUI BEALE PENTRU PROGRAME LINIARE PARAMETRICE RAȚIONALE[1]

DE

I. DRĂGAN

(Iași)

În Nota de față se formulează un algoritm pentru rezolvarea programelor liniare parametrice, ale căror date sînt funcții raționale de un singur parametru.

§ 1. Considerăm problema de programare liniară

$$(P) \qquad AX = b,\ X \geqslant 0,\ f = cX = \min.$$

în care A, b, c au dimensiunile $m \times n$, $m \times 1$, $1 \times n$ și elementele funcții raționale de un parametru λ, definite pe un domeniu D. Pentru diferite cazuri particulare, s-au formulat algoritmi, în lucrările [2]—[13]. Trăsătura comună a acestora, pe care o posedă și algoritmul ce va fi formulat în continuare, este mersul rezolvării :

a) se rezolvă problema parametrică, folosind un algoritm pentru programe liniare, pe un interval de forma $(0, \varepsilon)$;

b) se determină intervalul maximal pe care soluția parametrică optimală disponibilă se menține optimală ;

c) se deplasează originea valorilor parametrului în cealaltă extremitate a acestui interval ; apoi se reia ciclul de operații.

În cele ce urmează, va fi folosit algoritmul lui E. M. L. Beale (v. [1]), cu mici modificări, care îl apropie de metoda M (v. [14]). S-a folosit ideia de a se renunța la rezolvarea problemei pentru un număr finit de valori ale parametrului, cu intenția de a nu se da o formulare prea complicată algoritmului. Fără îndoială, numai experiența de calcul manual existentă, nu poate atrage concluzia că algoritmul lui Beale este cel mai potrivit pentru rezolvarea problemei (P).

---

[1] Lucrare prezentată la sesiunea Institutului Politehnic Iași (3—6 februarie 1965).

Presupunem cunoscute detaliile algoritmului lui Beale și vom trece la formularea algoritmului, apoi vom demonstra convergența și vom încheia cu o bibliografie asupra programelor parametrice (lucrările [2] — [13]).

§ 2. Pentru comoditatea limbajului, vom denumi operațiile utilizate în cursul aplicării algoritmului, după cum urmează :

(α) determinarea semnelor unui număr finit de fracții raționale, pe intervalul $(0, \varepsilon)$;

(β) determinarea unei fracții cu valoarea minimă, dintre fracțiile aparținînd unui ansamblu finit de fracții raționale, pentru $\lambda \in (0, \varepsilon)$;

(γ) înlocuirea unui ansamblu de variabile directoare prin altul, cunoscîndu-se noua variabilă directoare și cea care părăsește ansamblul ;

(δ) aflarea celei mai mici rădăcini reale și pozitive, pentru fiecare dintre fracțiile unui ansamblu finit dat ;

(λ) schimbarea originii valorilor parametrului.

Ținînd seamă de observațiile din § 1, cu privire la mersul rezolvării problemei (P), și anticipînd concluziile ce vor fi stabilite în continuare, precizăm că ansamblul $\mathcal{J}$ al iterațiilor algoritmului, necesare pentru rezolvarea problemei, este format dintr-un număr finit s de grupe de iterații $\mathcal{J}_k (k = 1, 2, \ldots, s)$. Obiectivele unui grup oarecare de iterații sînt indicate în § 1 prin a), b), c). Evident, este suficientă descrierea unui grup de iterații oarecare $\mathcal{J}_k$.

§ 3. Să presupunem că aplicînd iterațiile din grupul $\mathcal{J}_k$, s-a ajuns la o iterație care trebuie desfășurată în condițiile următoare :

a) Problema (P) se găsește sub forma

$$(P^*) \qquad \begin{cases} x_i = \sum\limits_{l \in L} u_i^l(\lambda)\, x_l\, (i \in N - L), \quad 1 = \sum\limits_{l \in L} q_l(\lambda)\, x_l, \\ x_i \geqslant 0, \quad x_l \geqslant 0 \quad (i \in N - L, \quad l \in L) \\ \qquad f = \sum\limits_{l \in L} s_l(\lambda)\, x_l = \min. ; \end{cases}$$

b) se cunoaște un număr $\bar{\lambda}$, astfel ca pentru orice $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$, rezolvarea problemei ($P$) cu ajutorul algoritmului lui Beale are același mers cu cel din iterațiile precedente aparținînd lui $\mathcal{J}_k$;

c) este disponibilă o soluție de bază parametrică determinată în cursul iterației precedente, care este dual admisibilă fără a fi admisibilă.

Atunci, urmează a se efectua operațiile :

1°. Se determină, printr-o operație (α) asupra funcțiilor $q_1(\lambda)$, mulțimea $H = \{l / q_l(\lambda) > 0, \ \lambda \in (0, \varepsilon)\}$; se determină, printr-o operație (δ) asupra ecuațiilor $q_l(\lambda) = 0 \ (l \in L)$, numerele $\lambda_l' \ (l \in L)$. Dacă $\lambda_1 = \min (\bar{\lambda}, \min \lambda_l')$, avem $q_l(\lambda) > 0 \ (1 \in H, \ \lambda \in (0, \lambda_1))$ și $q_l'(\lambda) \leqslant 0$ $(l' \in L - H)$. În cazul $H = \varnothing$, problema (P) nu are programe, pentru $\lambda \in (0, \lambda_1)$; dacă $\lambda_1 = + \infty$, $\mathcal{J}_k$ este ultimul grup de iterații, dacă $\lambda_1 < + \infty$, după o operație (λ) se trece la $\mathcal{J}_{k+1}$. În cazul $H \neq \varnothing$ se trece la operația următoare pe intervalul $(0, \lambda_1)$.

2°. Se determină, printr-o operaţie (β) asupra funcţiilor $S_l(\lambda)/q_l(\lambda)$ $(l \in H)$, indicele p al fracţiei minimale, pentru $\lambda \in (0, \varepsilon)$; se determină, printr-o operaţie (δ) asupra ecuaţiilor $\delta_p^l(\lambda) = 0$ $(1 \in H)$, în care

$$\delta_p^l(\lambda) = s_l(\lambda) - \frac{s_p(\lambda)}{q_p(\lambda)} \cdot q_l(\lambda), \tag{1}$$

numerele $\lambda_l''(l \in H)$. Dacă $\lambda_2 = \min\,(\lambda_1, \min\limits_l \lambda_l'')$, dispunem, pe intervalul $(0, \lambda_2)$, de soluţia dual admisibilă

$$x_p = \frac{1}{q_p(\lambda)},\ \ x_i = \frac{u_i^p(\lambda)}{q_p(\lambda)},\ \ x_l = 0,\ (i \in N - L,\ l \in L,\ l \neq p) \tag{2}$$

şi se trece la operaţia următoare pe intervalul $(0, \lambda_2)$.

3°. Se determină printr-o operaţie (α) asupra funcţiilor $u_i^p(\lambda)$, mulţimea $I = \{i/u_i^p(\lambda) < 0,\ \lambda \in (0, \varepsilon)\}$; se determină, printr-o operaţie (δ) asupra ecuaţiilor $u_i^p(\lambda) = 0$ $(i \in N - L)$, numerele $\lambda_i'''(i \in N - L)$. Dacă $\lambda_3 = \min\,(\lambda_2, \min\limits_i \lambda_i''')$, avem $u_i^p(\lambda) < 0$ $(i \in I,\ \lambda \in (0, \lambda_3))$ şi $u_{i'}^p(\lambda) \geqslant 0$ $(i' \in N - L - I)$. În cazul $I = \varnothing$, soluţia parametrică (2) este soluţia optimală a problemei (P), pentru $\lambda \in (0, \lambda_3)$; dacă $\lambda_3 = +\infty$, $\mathcal{J}_k$ este ultimul grup de iteraţii, dacă $\lambda_3 < +\infty$, după o operaţie (λ) se trece la $\mathcal{J}_{k+1}$. În cazul $I \neq \varnothing$ se trece la operaţia următoare pe intervalul $(0, \lambda_3)$.

4°. Se determină, printr-o operaţie (β) asupra funcţiilor $u_i^p(\lambda)$ $(i \in I)$, indicele k al funcţiei minimale, pentru $\lambda \in (0, \varepsilon)$; se determină, printr-o operaţie (δ) asupra ecuaţiilor $\bar{\delta}_k^i(\lambda) = u_i^p(\lambda) - u_k^p(\lambda) = 0$ $(i \in I)$, numerele $\lambda_i^{\mathrm{IV}}(i \in I)$. Dacă $\bar{\lambda}^* = \min\,(\lambda_3, \min\limits_i \lambda_i^{\mathrm{IV}})$, pentru a găsi o soluţie dual admisibilă mai bună, trebuie introdusă variabila x_k în ansamblul variabilelor directoare şi eliminată x_p; se trece la operaţia următoare pe intervalul $(0, \bar{\lambda}^*)$.

5°. Se execută o operaţie (γ), prin care se înlocuieşte (P^*) cu o problemă echivalentă şi de aceiaşi formă. Este clar că sînt satisfăcute condiţiile de a trece la o nouă iteraţie a lui $\mathcal{J}_k$ pentru $\lambda \in (0, \bar{\lambda}^*)$.

Precizăm că operaţiile necesare pentru determinarea unui indice p unic se execută în mod corespunzător algoritmului lui Beale.

Mai rămîne de arătat modul în care problema (P), în urma unor iteraţii din $\mathcal{J}_k$, ajunge sub forma (P^*). Pentru aceasta se scrie problema lărgită a problemei (P), aşa cum se ştie din metoda lui Beale. Iteraţiile lui $\mathcal{J}_k$ încep asupra problemei lărgite şi conţin operaţiile 1°—5°, cu deosebirile următoare: a) Dacă, în timpul operaţiei 2°, obţinem $p = 0$, soluţia dual admisibilă poate fi optimală, sau nu; în primul caz, lăsînd la o parte x_0, se găseşte soluţia optimală a problemei (P), în cazul al doilea, se va omite ecuaţia care conţine x_0, se va lua $w = 0$ şi se va continua iteraţia. b) În timpul operaţiei 3°, se obţine soluţia optimală a problemei lărgite, iar $s_p = 0$, sau $s_p \neq 0$; în primul caz problema (P) nu are programe, în cazul al doilea se va continua iteraţia ca şi cum x_0 ar fi devenit variabilă principală.

În cele precedente am numit rădăcini ale unei fracţii raţionale, atît rădăcinile numărătorului cît şi ale numitorului.

§ 5. Datorită convergenţii algoritmului lui Beale, orice grup de iteraţii conţine un număr finit de iteraţii. După fiecare grup de iteraţii se deplasează originea valorilor parametrului într-o rădăcină a cel puţin uneia dintre fracţiile ataşate soluţiilor de bază ale problemei lărgite. Cum numărul acestor rădăcini este finit, există un număr finit de grupuri de iteraţii. Din ambele observaţii rezultă că problema (P) va fi rezolvată, prin algoritmul formulat, după un număr finit de iteraţii, pe intervalul $(0, +\infty)$, cu excepţia unui număr finit de puncte, determinate în timpul aplicării procedeului.

Primită la redacţie la 25 aprilie 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste
România — Filiala Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. E. M. L. Beale, *An alternative method for linear programming.* Proc. Cambridge Phil. Soc. **50**, 513—523 (1954).
2. I. Drăgan, *Asupra unei clase de probleme de programare parametrică.* St. cerc. mat., **17**, *3*, 447—452 (1965).
3. I. Drăgan, *L'algorithme primal du simplexe, pour certains problèmes paramétriques.* Revue Roum. math. pures et appl. *4*, (1966).
4. S. I. Gass, T. L. Saaty, *The parametric objective function I*, Op. Res., **2**, 316—319 (1954).
5. S. I. Gass, T. L. Saaty, *The parametric objective function II.* Op. Res. **3**, 395—401 (1955).
6. S. I. Gass, T. L. Saaty, *The computational algorithm for the parametric objective function.* Naval Res. Log. Quart., **2**, 39—45 (1955).
7. M. Gauthier, *Paramétrisation de la fonction economique d'un programme linéaire.* Rev. Fr. Rech. Op., **6**, (*22*), 1—20 (1962).
8. R. L. Graves, *Parametric linear programming in Recent Advances in Mathematical Programming.* Mc. Graw-Hill, 201—210 (1963).
9. J. M. Kelley, *Parametric programming and the primal-dual algorithm.* Op. Res., **7**, *3*, 327—334 (1959).
10. R. Llewelyn, *Linear programming,* ed. Holt, Rinehart, Winston, New York, 1964, cap. 9.
11. H. Maurin, *Paramétrisation generale d'un programme linéaire.* Rev. Fr. Rech. Op., **8**, *32*, 277—292 (1964).
12. T. L. Saaty, *Coefficient perturbation of a constrained extremum.* Op. Res., **7**, 294—302 (1959).
13. E. Simons, *A note on parametric linear programming.* Man. Sci. **8**, *3*, 355—358 (1962).
14. S. Vaida, *The theory of games and linear programming.* John Wiley, New York, 1956, Cap. 8.

ASUPRA SPAŢIILOR A_n CARE ADMIT O OMOTETIE

DE

VIOREL DUMITRAŞ

Fie A_n un spaţiu cu conexiune afină care admite un grup de transformări de congruenţe de forma

$$d\bar{s}^a = K\, ds^a, \quad (K \neq 0).$$

Arătăm că un asemenea spaţiu admite grupul omotetiilor ca grup de mişcări, deci pe baza unei teoreme a acad. Gh. Vrănceanu [1], rezultă că spaţiul este local euclidian echivalent în mare cu spaţiul E_n.

Arătăm apoi că aceeaşi proprietate o au spaţiile care admit un grup de transformări de congruenţă de forma

$$d\bar{s}^a = K_a\, ds^a \text{ (fără sumare după } a).$$

În lucrarea [1], acad. Gh. Vrănceanu a demonstrat că grupul de stabilitate al unui spaţiu omogen A_n nu poate conţine o transformare omotetică :

$$x'^i = kx^i, \quad (k \neq 0) \tag{I}$$

decît dacă spaţiul este local euclidian.

Acest rezultat a fost întărit de autor [2], care a demonstrat că grupul de mişcări al unui spaţiu A_n care conţine drept subgrup, grupul (I) al omotetiilor, este un grup omogen. Aplicînd teorema lui Gh. Vrănceanu, rezultă că acest spaţiu este local euclidian, echivalent în mare cu întreg spaţiul E_n.

Fie într-un spaţiu A_n o transformare de congruenţe

$$d\bar{s}^a = c^a_b\, ds^b. \tag{1}$$

Componentele conexiunii γ^a_{bc} se transformă după legea

$$\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} = \bar{\gamma}^a_{pq}\, c^p_b\, c^q_c - \gamma^p_{bc}\, c^a_p. \tag{2}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1529–1532, BUCUREŞTI, 1966

Din condițiile de integrabilitate ale ecuațiilor (3), rezultă :

$$\bar{t}^a_{pq}\, c^p_b\, c^q_c - t^p_{bc} c^a_p = 0 \tag{3}$$

$$\bar{\gamma}^a_{pqr}\, c^p_b\, c^q_c\, c^r_d - \gamma^p_{bcd}\, c^a_p = 0 \tag{4}$$

în care t^a_{bc} și γ^a_{bcd} sînt componentele tensorului de torsiune respectiv ale tensorului de curbură în sistemul inițial de congruențe, iar $\bar{t}^a_{bc}$ și $\bar{\gamma}^a_{bcd}$ componentele acelorași tensori în noul sistem de congruențe.

Ne punem problema determinării spațiilor A_n care admit o omotetie, adică un grup de transformări de congruențe de forma

$$d\bar{s}^a = K\, ds^a, \quad (K \neq 0). \tag{II}$$

În acest caz avem

$$c^a_b = K\, \delta^a_b \tag{5}$$

și relațiile (3) și (4) se vor scrie

$$\bar{t}^a_{bc} K^2 - t^a_{bc} K = 0 \tag{6}$$

respectiv

$$\bar{\gamma}^a_{bcd} K^3 - \gamma^a_{bcd} K = 0 \tag{7}$$

sau după simplificarea prin K

$$\bar{t}^a_{bc} K - t^a_{bc} = 0, \tag{6'}$$

$$\bar{\gamma}^a_{bcd} K^2 - \gamma^a_{bcd} = 0. \tag{7'}$$

Cum spațiul admite grupul de transformări omotetice (II), se impune condiția ca aceste relații să nu depindă de K, de unde rezultă :

$$\bar{t}^a_{bc} = t^a_{bc} = 0, \quad \bar{\gamma}^a_{bcd} = \gamma^a_{bcd} = 0 \tag{8}$$

adică toate componentele tensorului de torsiune și toate componentele tensorului de curbură sînt nule.

În consecință spațiul este local euclidian.

Să arătăm mai mult, că spațiile considerate au toate componentele conexiunii nule în orice sistem de congruențe, ca și în orice sistem de coordonate. Pentru aceasta considerăm relațiile (2), care, ținînd seama de formulele (5), se vor scrie :

$$\delta^a_b \frac{\partial K}{\partial s^c} = \bar{\gamma}^a_{bc} K^2 - \gamma^a_{bc} K. \tag{9}$$

Dacă $a \neq b$, avem deci

$$\bar{\gamma}^c_{bc} K - \gamma^a_{bc} = 0 \tag{9'}$$

și rezultă

$$\bar{\gamma}^a_{bc} = \gamma^a_{bc} = 0, \qquad (a \neq b). \tag{10}$$

Pentru $a = b$, formulele (9) se vor scrie

(11) $$\frac{\partial K}{\partial s^c} = \overline{\gamma}^a_{ac} K^2 - \gamma^a_{ac} K \text{ (fără sumare)}$$

şi rezultă

(11′) $$\overline{\gamma}^1_{1c} K^2 - \gamma^1_{1c} K = \gamma^2_{2c} K^2 - \gamma^2_{2c} K = \ldots = \overline{\gamma}^n_{nc} K^2 - \gamma^n_{nc} K$$

de unde obţinem

(12) $$\overline{\gamma}^1_{1c} = \overline{\gamma}^2_{2c} = \ldots = \overline{\gamma}^n_{nc}\,;\ \gamma^1_{1c} = \gamma^2_{2c} = \ldots = \gamma^n_{nc}.$$

Notînd

(13) $$\overline{\sigma}_c = \overline{\gamma}^1_{1c}, \quad \sigma_c = \gamma^1_{1c}$$

relaţiile (11) capătă forma

(14) $$\frac{\partial K}{\partial s^c} = \overline{\sigma}_c K^2 - \sigma_c K$$

Pe de altă parte avem

(14′) $$w^a_{bc} = \sigma_c \delta^a_b - \sigma_b \delta^a_c$$

şi condiţiile de integrabilitate ale ecuaţiilor (14)

(15) $$\frac{\partial^2 K}{\partial s^c \partial s^d} - \frac{\partial^2 K}{\partial s^d \partial s^c} = w^p_{cd} \frac{\partial K}{\partial s^p}$$

ne vor da

(15′) $$\left(\frac{\partial \overline{\sigma}_d}{\partial \overline{s}^c} - \frac{\partial \overline{\sigma}_c}{\partial \overline{s}^d}\right) K^3 - \left(\frac{\partial \sigma_d}{\partial s^c} - \frac{\partial \sigma_c}{\partial s^d}\right) K = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_d}{\partial \overline{s}^c} - \frac{\partial \overline{\sigma}_c}{\partial \overline{s}^d} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_d}{\partial s^c} - \frac{\partial \sigma_c}{\partial s^d} = 0$$

şi prin urmare σ_c sînt componentele unui vector covariant care se transformă după legea

(17) $$\overline{\sigma}_p c^p_b - \sigma_b = 0$$

adică

(17′) $$\overline{\sigma}_b K - \sigma_b = 0$$

Rezultă

(18) $$\overline{\sigma}_c = 0, \quad \sigma_c = 0$$

precum şi

(18′) $$\frac{\partial K}{\partial s^c} = 0.$$

Deci

(19) $$\overline{\gamma}^a_{bc} = 0, \quad \gamma^a_{bc} = 0, \quad w^a_{bc} = 0.$$

Am arătat, prin urmare, că toate componentele conexiunii sînt nule în orice sistem de congruențe. Ținînd seama că avem

$$\Gamma^i_{jk} = \left(-\frac{\partial \lambda^a_j}{\partial x^k} + \gamma^a_{bc} \lambda^b_j \lambda^c_k \right) \mu^i_a, \tag{20}$$

unde Γ^i_{jk} sînt componentele conexiunii într-un sistem de coordonate față de care μ^i_a și λ^a_j sînt parametrii, respectiv momentele congruențelor, rezultă

$$\Gamma^i_{jk} = 0. \tag{21}$$

Relațiile (19) ne arată că toți covarianții biliniari ai formelor $\mathrm{d}s^a$ sînt nuli. Putem lua parametrii congruențelor $\lambda^a_i = \delta^a_i$ și atunci sistemul de congruențe (λ) coincide cu sistemul de coordonate (x). Ținînd seama de formulele (18′), rezultă K = constant ; vom pune

$$K = k$$

și rezultă :

Teorema 1. *Spațiile* A_n *care admit grupul de transformări de congruențe* $\mathrm{d}\bar{s}^{-a} = K\,\mathrm{d}s^a$ $(K \neq 0)$ *sînt spațiile care admit grupul de mișcări* $x'^i = kx^i$.

Aceste spații sînt local euclidiene echivalente în mare cu întreg spațiul euclidian E_n.

Ne punem acum problema determinării spațiilor A_n care admit *dilatări*, adică un grup de transformări de congruențe de forma

$$\mathrm{d}\bar{s}^a = K_a \mathrm{d}s^a \quad (K_a \neq 0) \tag{III}$$

(nu se sumează după a).

Evităm calculele observînd că grupul (III) admite ca subgrup grupul (II) al omotetiilor. Spațiile A_n care admit grupul de transformări de congruențe (III), admit și omotetiile (II), deci sînt local euclidiene, echivalente în mare cu întreg spațiul euclidian E_n.

Făcînd calculele va rezulta de asemenea că există un anumit sistem de congruențe în care toate componentele conexiunii sînt nule și de asemenea toți covarianții biliniari ai formelor $\mathrm{d}s^a$ sînt nuli. Rezultă de asemenea că vom putea lua pe K_a drept constante și vom pune $K_a = k_a$.

Putem enunța :

Teorema 2. *Spațiile* A_n *care admit grupuri de transformări de congruențe de forma* $\mathrm{d}\bar{s}^a = K_a\ \mathrm{d}s^a$ $(K_a \neq 0,$ *nu se sumează*) *sînt spațiile care admit grupuri de mișcări de forma* $x'^i = k_i\, x^i$ $(k_i \neq 0,$ *nu se sumează*). *Aceste spații sînt local euclidiene echivalente în mare cu întreg spațiul euclidian* E_n.

Primită la redacție la 28 martie 1966.

Institutul Politehnic
Gheorghe Gheorghiu-Dej, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Vrănceanu, *Sugli spazi omogenei a connessione affine* Reudicenti del Circolo Matematico di Palermo. Seria II, **V**, 288–296 (1956).
2. V. Dumitraş, *Asupra grupului de mişcare al unui spaţiu* A_n. Comunicările Academiei R.P.R., **IX**, *9*, 875–878 (1959).

ASUPRA TEORIEI SUBSPAŢIILOR INVARIANTE (I)

DE

VASILE ISTRĂŢESCU

Se consideră spaţiile H^p $(d\mu_m)$, μ_m fiind o măsură de reprezentare ataşată punctului $m \in \mathfrak{M}_A$, $\mathfrak{M}_A$ fiind spaţiul idealelor maximale ale unei algebre de funcţii A.

Se studiază subspaţiile invariante în cazul cînd măsura μ_m este extremală.

În partea doua a lucrării se consideră spaţiul Hilbert al funcţiilor aproape periodice pe axa reală şi se studiază de asemenea subspaţiile invariante.

Rezultatele obţinute extind unele conţinute în [5] şi [8].

A. 1. *Algebre de funcţii şi măsuri de reprezentare.* Fie X un spaţiu compact Hausdorff şi A o subalgebră a algebrei $C(X)$. Vom presupune că A satisface următoarele condiţii

1°. este uniform închisă;

2°. $1 \in A$;

3°. separă punctele lui X.

Fie $\mathfrak{M}_A$ spaţiul idealelor maximale ale algebrei A şi $m \in \mathfrak{M}_A$. Se ştie că există o măsură Baire pozitivă, astfel ca

$$f(m) = \int_{\Gamma} f(t)\, d\mu_m(t), \qquad (\forall) f \in A \tag{1}$$

aici Γ este frontiera Silov a algebrei A. Măsurile din (1) se numesc măsuri de reprezentare pentru punctul m.

Fie μ_m o măsură de reprezentare şi să considerăm spaţiile $L^p(\Gamma, d\mu_m)$. (Vom presupune că $\Gamma = X$). Acestea le vom nota $L^p(d\mu_m)$ şi să considerăm închiderea algebrei A în aceste spaţii. Vom obţine spaţiile $H^p(\Gamma, d\mu_m) = H^p$ care reprezintă analogul spaţiilor H^p pentru cazul funcţiilor analitice şi al măsurii $d\mu_0 = \frac{1}{2\pi}\, d\theta$.

Dacă $\mathcal{F}_m = \{\mu_m\}$, familia măsurilor de reprezentare pentru punctul m, atunci este evident că $\mathcal{F}_m$ este o mulţime slab compactă şi mărginită şi slab închisă. Din teorema lui Krein-Milman rezultă că există măsuri

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR 10, P. 1533–1542, BUCUREŞTI, 1966

care sînt puncte extreme. Astfel de măsuri le vom numi extremale. Se ştie că în cazul funcţiilor analitice, în spaţiile H^p nu există funcţii reale neconstante. O proprietate analoagă are loc şi pentru spaţiile H^p dar construite în raport cu măsuri extremale.

TEOREMA 1.1. *Pentru orice măsură extremală* μ_m *în spaţiul* H^p *nu există alte funcţii reale decît constantele.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra teorema vom folosi o idee a lui L. de Branges [2]. Fie f o funcţie reală pe suportul măsurii μ_m. Putem presupune că $0 < f < 1$ (aproape peste tot).

Să considerăm măsurile

$$\mu_1' = \frac{f\mu_m}{\|f\mu_m\|}, \quad \mu_2' = \frac{(1-f)\,\mu_m}{\|(1-f)\,\mu_m\|}$$

care au proprietatea că

$$\mu = \|f\,\mu_m\|\,\mu_1' + \|(1-f)\,\mu_m\|\,\mu_2'$$

şi cum

$$\|f\mu_m\| + \|(1-f)\,\mu_m\| = \int |f|\,\mathrm{d}\mu_m + \int |1-f|\,\mathrm{d}\mu_m = \int \mathrm{d}\mu_m = 1$$

şi deci este o combinaţie convexă de măsurile μ_1' şi μ_2'.

Vom arăta că μ_1' şi μ_2' sînt măsuri de reprezentare.

În adevăr, pentru orice $g \in A$ avem

$$\int g\,(t)\,\mathrm{d}\mu_1'\,(t) = \frac{1}{\int f\,\mathrm{d}\mu_m} \cdot \int fg\,\mathrm{d}\mu_m = \frac{1}{\int f\,\mathrm{d}\mu_m} \lim_{n\to\infty} \int f_n\,g\,\mathrm{d}\mu_m =$$

$$= \frac{1}{\int f\,\mathrm{d}\mu_m} \cdot g\,(m) \lim_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu_m = g\,(m)\,.$$

Aici am folosit faptul că există $f_n \in A$ astfel ca $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Analog demonstrăm că şi μ_2' este o măsură de reprezentare.

Am obţinut astfel o contradicţie şi teorema este demonstrată.

Teorema 1.1 exprimă faptul că suportul măsurii μ_m este o mulţime de antisimetrie.

O clasă de algebre pentru care măsurile de reprezentare sînt unice a fost considerată de A. M. Gleason [3].

DEFINIŢIE. (A. Gleason). *O algebră* A *este algebră Dirichlet dacă satisface condiţiile* 1—3 *şi* Re A *este dens în spaţiul funcţiilor continue reale pe* X.

Este evidentă următoarea :

PROPOZIŢIE 1.1. *Măsurile de reprezentare pentru o algebră Dirichlet sînt unice.*

Din teorema 1.1 deducem

TEOREMA 1.2. *Dacă* μ_m *este o măsură de reprezentare pentru un punct* $m \in \mathfrak{M}_A$, $\mathfrak{M}_A$ *fiind spaţiul idealelor maximale pentru o algebră Dirichlet, atunci în* $H^p\,(\Gamma, \mathrm{d}\mu_m)$ *nu există funcţii reale în afară de constante.*

Vom da acum un exemplu de algebră Dirichlet.

Fie G un grup abelian compact și Γ dualul său. Vom presupune că în Γ există un semigrup S astfel ca $s \in \Gamma$, atunci $s \in S$ or $-s \in S$.

Definim o subalgebră A_S a funcțiilor continue pe G prin

$$A_s = \{f,\ f \in C(G),\ \hat{f}(s) = 0,\ s \overline{\in} S\}.$$

Ținînd seama de definiția semigrupului S, este imediat faptul că A_S este o subalgebră Dirichlet.

2. *Subspații invariante.* Vom da mai întîi cîteva definiții [8], [5].

DEFINIȚIA 2.1. *Un subspațiu* $\mathfrak{M} \subset L^2(\Gamma, \mathrm{d}\mu_m)$ *este invariant dacă*

1° *este închis*;

2° $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ $(f \in A,\ g \in \mathfrak{M} \Rightarrow fg \in \mathfrak{M},\ (\forall f, g))$.

Să considerăm subalgebra A_0 definită prin

$$A_0 = \left\{f,\ f \in A,\ \int f \,\mathrm{d}\mu_m = 0\right\}.$$

DEFINIȚIA 2.2. *Un subspațiu* $\mathfrak{M} \subset \Gamma^2(\mathrm{L}, \mathrm{d}\mu_m)$ *este dublu invariant dacă*

1° *este închis*;

2° $(A \cup \overline{A})\,\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$.

DEFINIȚIA 2.3. *Un subspațiu* $\mathfrak{M}$ *este simplu invariant dacă*

1° *este invariant*;

2° $A_0\,\mathfrak{M} < \mathfrak{M}$

(*adică spațiul* $A_{\mathrm{c}}\,\mathfrak{M}$ *este strict inclus în* $\mathfrak{M}$).

Aceste definiții reprezintă generalizarea definițiilor din cazul algebrei A a funcțiilor analitice pe cercul $\Gamma = \{z, |z| = 1\}$ și pentru măsura de reprezentare $\mathrm{d}\mu_0 = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta$.

Are loc următoarea

TEOREMA 2.2. (T. P. Srinivasan [11]). *Orice subspațiu* $\mathfrak{M}$ *simplu invariant este de forma* qH^2, $q \in L^2(\Gamma, \mathrm{d}\mu_m)$, $|q| \equiv 1$.

Cu ajutorul acestei teoreme vom demonstra :

TEOREMA 2.3. *Dacă* $p \in [1, 2)$, *atunci orice subspațiu simplu invariant din* L^p *este de forma* qH^p, $q \in L^p$, $|q| \equiv 1$.

(Definiția subspațiilor simplu invariante este exact ca definiția 2.3). Să considerăm spațiul $\mathcal{N} = \mathfrak{M} \cap L^2(\Gamma, \mathrm{d}\mu_m)$.

Este evident că $\mathcal{N}$ este un subspațiu închis și invariant. Pentru a aplica teorema 2.2, va fi suficient să arătăm că este simplu invariant.

Fie $f \in \mathfrak{M}$ și α astfel ca $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2} = \frac{1}{p}$ iar $f \overline{\in} A_0\,\mathfrak{M}$. În acest caz există o descompunere a lui f, $f = f_1 f_2$, $f_2 \in L^2$, $f_1 \in L^\alpha$. Spațiul $f_2 H^2$ este simplu invariant (punem $f_2 = (|f|^{p/2})$ și deci, conform teoremei de mai înainte, este de forma $q_2 H^2$. Dar

$$f_1 q_2 \in f_1 q_2 H^2 = f_1 f_2 H^2 = f H^2 \subset \mathfrak{M}.$$

Cum însă $f_1 q_2 \in L^2$, rezultă $f_1 q_2 \in \mathcal{N}$ și acest element arată că $\{A_0\,\mathcal{N}\} > \mathcal{N}$. (În caz contrar deducem că $f \in A_0\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$). Deci $\mathcal{N}$ este simplu invariant şi $\mathcal{N} = qH^2$. Vrem să arătăm că $\mathcal{M} = qH^p$. Este evident că $qH^p \subset \mathcal{M}$. În acest caz, cu notaţiile de mai sus,

$$f = f_1 f_2, \quad f_2 = q_2 h$$

şi deci cum $f_1 q_2 \in \mathcal{N} = qH^2$, rezultă $f_1 q_2 = qh'$, $h' = \in H^2$ şi deci

$$f = f_1 f_2 = f_1 q_2 h = qh' h = q \cdot h' h.$$

unde h, $h' \in H^2$ şi deci h, h' trebuie să fie în H^p pentru că $f \in L^p$ şi teorema este demonstrată.

Observaţie. Este natural să se pună problema dacă folosirea operatorului de conjugare permite demonstrarea unei astfel de teoreme. Se ştie că teorema lui Wermer-Riesz permite demonstrarea teoremei de existenţă a operatorului pentru $p \in (1, \infty)$. În cazul cercului definindu-se o conjugată slabă cu ajutorul unei sumabilităţi se poate defini şi pentru $p = 1$. Dacă un asemenea procedeu s-ar găsi şi în cazul algebrelor Dirichlet, atunci am putea demonstra teorema de mai sus ca şi în cazul cercului.

3. *Cîteva observaţii pentru cazul* $p \in (2, \infty]$. Prin H^∞ vom înţelege subalgebra din L^∞ a funcţiilor care sînt analitice.

Să luăm α astfel ca $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{p} = 1$ şi să considerăm subspaţiul

$$\mathcal{N} = \left\{ f, f \in L^\alpha, \ \int fg \, \mathrm{d}\mu_m = 0, \ (\forall)\, g \in \mathcal{M} \right\}.$$

Este evident că acest spaţiu este liniar şi închis. El este însă şi invariant. Dacă $\mathcal{M}$ este simplu invariant, atunci cum

$$\int f A_0 g \, \mathrm{d}\mu_m = \int A_0 f \cdot g \, \mathrm{d}\mu_m$$

rezultă că şi $\mathcal{N}$ este simplu invariant. Conform celor de mai înainte, $N = q H^\alpha$, $|q| = 1$ (aproape peste tot).

Rezultă astfel teorema :

TEOREMA 3.1. *Orice spaţiu simplu invariant este ortogonal spaţiului* qH^α, $|q| \equiv 1$, $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{p} = 1$ *şi* q *este o funcţie determinată de spaţiu în afară de o constantă.*

Pare probabil că de aici rezultă că

$$(*) \qquad \mathcal{M} = q^* H^p,$$

dar acest lucru nu-l putem demonstra.

Dacă reprezentarea (*) ar avea loc, ar rezulta următoarea afirmaţie care ar reprezenta generalizarea unei teoreme a lui K. Hofman şi I. Singer [7] :

Algebra H^∞ este slab maximală în L^∞.

B. 1. *Subspaţii invariante şi funcţii aproape periodice.* Să considerăm spaţiul $L^2(-\infty, \infty)$ şi $\mathcal{M}$ un subspaţiu închis. Un subspaţiu $\mathcal{M}$ se va numi invariant dacă pentru orice $\lambda > 0$, $\chi_\lambda \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, unde $\chi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$.

Problema extinderii rezultatelor lui Beurling, date pentru spaţiul H^2 al funcţiilor analitice

$$f \in H^2, \quad f(z) = \sum a_n z^n \sum |a_n|^2 < \infty$$

a fost considerată şi rezolvată de către P. Lax [8].

În [6] K. Hoffman a dat o demonstraţie elegantă acestor rezultate stabilind o legătură între spaţiile H^p pentru semiplan şi în cazul cercului Γ, $\Gamma = \{z, |z| = 1\}$.

H. Helson [5] a expus aceste rezultate cu ajutorul unei teoreme a lui G. Mackey [9].

În cele ce urmează vrem să extindem aceste rezultate la cazul spaţiului Hilbert al funcţiilor aproape periodice pe dreapta reală.

2. *Spaţiul Hilbert al funcţiilor aproape periodice.* Funcţiile aproape periodice au fost introduse de Herald Bohr. Dăm definiţia funcţiilor aproape periodice : o funcţie f continuă pe axa reală este aproape periodică dacă pentru orice şir $\{f(x + \zeta_n)\}$, exista un subşir parţial uniform convergent pe axa reală.

O proprietate fundamentală a funcţiilor aproape periodice este existenţa mediei

$$\lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x + t)\, dt$$

independentă de x. Se notează aceasta cu $M(f)$.

Este evident că mulţimea funcţiilor aproape periodice formează un spaţiu vectorial $L_{p.p}$. Dacă f şi g sînt două funcţii din $L_{p.p}$ să punem

$$< f, g > = M(f\bar{g}), \quad \|f\| = < f, f >^{1/2}.$$

În acest caz, $L_{p.p}$ este un spaţiu prehilbertian. Să notăm cu $L^2_{p.p}$ spaţiu Hilbert care se obţine prin completare.

Să considerăm $\chi_\lambda(z) = e^{i\lambda x}$. Avem evident

1°. $\|\chi_\lambda\| = M(|\chi_\lambda|^2) = 1$

2°. $< \chi_\lambda, \chi_{\lambda'} > = 0, \quad \lambda \neq \lambda'$.

Numerele

$$a_\lambda(f) = < f, \chi_\lambda >$$

se numesc coeficienţii Fourier ai funcţiei f şi din inegalitatea lui Bessel se deduce că a_λ sînt diferiţi de zero pentru o mulţime de indici λ finită sau numărabilă. De aici deducem că are sens să vorbim de seria Fourier a unei funcţii aproape periodice ca fiind

$$\sum_n a_{\lambda_n} \chi_{\lambda_n}.$$

Definim acum un subspaţiu al lui $L^2_{p.p.}$ care reprezintă analogul spaţiului H^2 în cazul algebrei funcţiilor analitice pe cercul Γ.

Definiţie. *O funcţie $f \in H^2_{p.p.}$ dacă coeficienţii Fourier sînt nuli pentru* $\lambda < 0$.

Este clar că $H^2_{p.p.}$ este un spaţiu liniar închis din $L^2_{p.p}$.

3. *Subspaţii invariante în $L^2_{p.p}$.* Definiţia 3.1. *Un spaţiu închis $\mathfrak{M} \subset L^2_{p.p.}$ este invariant dacă*

$$\chi_\lambda \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M} \qquad (\forall)\ \lambda > 0$$

și dublu invariant dacă

$$\chi_\lambda \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}, \qquad (\forall)\ \lambda$$

iar simplu invariant dacă

$$\chi_\lambda \mathfrak{M} < \mathfrak{M} \text{ pentru un } \lambda > 0$$

(*este un subspațiu propriu*).

TEOREMA 3.1. *Orice spațiu $\mathfrak{M}$ dublu invariant este de forma*

$$\varphi_E \, L^2_{p.p.},$$

unde φ_E este funcția caracteristică a unei mulțimi măsurabile.

Demonstrație. Fie q proiecția funcției 1 pe subspațiu $\mathfrak{M}$.

În acest caz $(1 - q) \perp \mathfrak{M}$ ($\perp$ înseamnă ortogonalitate) și cum este dublu invariant, rezultă că pentru orice $\lambda \in R$,

$$(1 - q) \perp \chi_\lambda q \, .$$

Această relație se mai scrie

$$(q - |q|^2) \perp \chi_\lambda$$

și deci seria Fourier a funcției $(q - |q|^2)$ este nulă. Deci trebuie ca funcția să fie nulă și deci $q = |q|^2$. Este evident că $q = \varphi_E$, și că trebuie să avem chiar egalitatea : $\mathfrak{M} = \varphi_E L^2_{p.p}$.

Observație. Această teoremă reprezintă extinderea teoremei lui Wiener pentru spațiul $L^2 (R, \mathrm{d}x)$ la cazul spațiului $L^2_{p.p}$.

Pentru găsirea formei generale a subspațiilor invariante în $L^2_{p.p.}$, vom utiliza unele rezultate asupra semigrupurilor de operatori unitari în spațiul $L^2_{p.p.}$.

4. *Semigrupuri de operatori unitari.* Fie $\{u_\lambda\}$, $\{v_t\}$ două semigrupuri de operatori unitari pe spațiul Hilbert $L^2_{p.p}$.

DEFINIȚIA 4.1. *Două semigrupuri $\{u_\lambda\}$ și $\{v_t\}$ de operatori unitari satisfac relația de comutativitate a lui Weyl dacă*

$$u_\lambda \, v_t = \mathrm{e}^{it\lambda} \, v_t \, u_\lambda$$

pentru orice λ și t.

Definim acum două grupuri de operatori unitari care satisfac relația de comutativitate a lui Weyl.

DEFINIȚIA 4.2. Avem

$$S_\lambda (f) = \chi_\lambda f,$$

$$T_t (f) (x) = f (x - t) \, .$$

TEOREMA 4.1. $\{S_\lambda\}$ și $\{T_t\}$ *sînt semigrupuri de operatori unitari.*

Faptul că $\{S_\lambda\}$ este un semigrup de operatori unitari, este evident.

Pentru a demonstra că $\{T_t\}$ este un semigrup de operatori unitari, este suficient să demonstrăm că

$$\| T_t (f) \| = \| f \| \, .$$

În adevăr,

$$\| T_t (f) \|^2 = < f (x - t), f (x - t) > =$$

$$= \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} | f (x - t + s)|^2 \, \mathrm{d}s = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} | f (x' + s)|^2 \, \mathrm{d}s$$

și teorema este demonstrată.

TEOREMA 4.2. *(S_λ) și (T_t) verifică relația de comutativitate a lui Weyl.*

În adevăr,

$$(T_t\, S_\lambda)\,(f)\,(x) = T_t\,(\mathrm{e}^{i\lambda x} f\,(x)) = \mathrm{e}^{-i\lambda t}\,(\mathrm{e}^{i\lambda x} f\,(x-t)$$

şi deci

$$T_t\, S_\lambda = \mathrm{e}^{-i\lambda t}\, S_\lambda\, Tt$$

şi afirmaţia teoremei este demonstrată.

Fie u un operator unitar definit pe spaţiul $L^2_{p.p.}$

Definim

$$(**)\qquad \begin{aligned} u_\lambda &= u\, S_\lambda\, u^{-1} \\ v_t &= u\, T_t\, u^{-1} \end{aligned}$$

DEFINIȚIA 4.3. *Două semigrupuri de operatori unitari se zic ireductibile dacă nu există subspații invariante la cele două semigrupuri în afară de $\{0\}$ și $L^2_{p.p.}$*

Are loc

TEOREMA 4.3. *Semigrupurile $\{u_\lambda\}$ și $\{v_t\}$ satisfac relația de comutativitate a lui Weyl și sînt ireductibile.*

TEOREMA 4.4 (G. M. Machey). *Dacă două semigrupuri de operatori unitari satisfac relația de comutativitate a lui Weyl și sînt ireductibile, atunci ele sînt de forma* (**).

În cele ce urmează vom demonstra teorema 4.3 şi cu ajutorul acestor teoreme vom da forma subspaţiilor invariante în $L^2_{p.p.}$.

Vom observa că dacă două semigrupuri au forma (**), atunci ele satisfac relaţia lui Weyl.

Fie $\mathcal{M}$ un spaţiu invariant din $L^2_{p.p.}$. Pentru orice caracter χ_λ să considerăm spaţiul $\mathcal{M}_\lambda = x_\lambda\,\mathcal{M} = S_\lambda\,\mathcal{M}$ şi P_λ proiecţia ortogonală pe acest spaţiu. Să definim spaţiile

$$\mathcal{M}_\infty = \bigcap_{\lambda<\infty} \mathcal{M}_\lambda, \quad \mathcal{M}_{-\infty} = \overline{(\bigcup_{\lambda>-\infty} \mathcal{M}\ \lambda_\lambda)}\,.$$

Aceste spaţii au o importanţă deosebită în teoria predicţiei [5].

Să considerăm proiectorii $\{P_\lambda\}$. Familia de proiectori $\{I-P_\lambda\}$ formează o descompunere a unităţii [F. Riesz, Sz. Nagy [10]]. dacă şi numai dacă

$$\mathcal{M}_\infty = \{0\}\,, \quad \mathcal{M}_{-\infty} = L^2_{p.p.}$$

Să considerăm spaţiul Hilbert

$$(***)\qquad \mathcal{M}_{-\infty}/\mathcal{M}_\infty\,.$$

În acest caz, în spaţiul cît (***), $(\widetilde{I}-\widetilde{P}_\lambda)$ corespunzător operatorului $(I-P_\lambda)$ formează o descompunere a unităţii.

Dacă păstrăm aceleaşi notaţii pentru operatori şi imaginile lor în spaţiul cît, rezultă că, aplicînd teorema lui M. Stone,

$$V_t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}\,(I-P_\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}\,P_\lambda$$

de unde deducem că $\{V_t\}$ şi $\{S_\lambda\}$ satisfac relaţia de comutativitate a lui Weyl

$$S_\lambda\, V_t = \mathrm{e}^{i\lambda t}\, V_t\, S_\lambda\,.$$

Vom observa că $\mathcal{M}_{\infty} \subset \mathcal{M}_{-\infty}$ şi că cele două spaţii sînt dublu invariante. Conform teoremei relative la subspaţiile dublu invariante,

$$\mathcal{M}_{\infty} = \varphi_F L^2_{p.p.} \qquad \mathcal{M}_{-\infty} = \varphi_E L^2_{p.p.}$$

şi $F \subset E$ şi spaţiul $\mathcal{M}_{-\infty}/\mathcal{M}_{\infty}$ poate fi considerat ca fiind format din acele funcţii din $L^2_{p.p.}$ care sînt suportate pe $E - F$. Este evident că semigrupurile $\{S_\lambda\}$ şi $\{V_t\}$ satisfac pe acest spaţiu relaţia de comutativitate a lui Weyl. Deducem că S_λ comută cu operatorul $V_t T_{-t}$.

Să presupunem acum că este adevărată următoarea afirmaţie: Orice operator mărginit izometric care comută cu caracterele χ_λ, trebuie să fie înmulţirea cu o funcţie din $L^2_{p.p.}$, care are modulul egal cu 1 aproape peste tot. În acest caz, cum operatorul $V_t T_{-t}$ satisface ipotezele din această afirmaţie, deducem că el reprezintă înmulţirea cu o funcţie q cu modulul 1 (aproape peste tot) pe $E - F - t$ şi, ţinînd seama în ce se transformă funcţiile prin $V_t T_{-t}$, deducem că mulţimile $E - F - t$ şi $E - F$ trebuie să difere cel mult prin mulţimi de măsură nulă. Cum acest lucru este adevărat pentru orice t real, rezultă că $E - F$ trebuie să fie sau o mulţime de măsură nulă, sau toată dreapta reală. Dacă $E = F$, atunci $\mathcal{M}$ este dublu invariant şi deci trebuie să avem numai cazul $E - F = R$ şi deci $\mathcal{M}_{\infty} = \{0\}$, $\mathcal{M}_{\infty} = L^2_{p.p.}$. De aici rezultă evident afirmaţia teoremei 4.3.

Afirmaţia referitoare la forma operatorilor izometrici care comută cu caracterele χ_λ se demonstrează ţinînd seama de unicitatea seriei Fourier (pentru funcţii din $L^2_{p.p.}$).

Demonstraţia teoremei de structură necesită introducerea unor noţiuni noi şi anume aceia de cociclu şi cofrontieră.

Definiţia este aproape aceeaşi cu cea dată în cazul spaţiului $L^2(R)$.

DEFINIŢIA 4.4. *O familie de funcţii* $\{A_t\}_{t \in R}$ *este cociclu dacă*

1. $|A_t(x)| = 1$ *aproape peste tot în* x *pentru fiecare* t.
2. *aplicaţia* $t \to A_t f$ *este continuă în* $L^2_{p.p.}$ *pentru fiecare* $f \in L^2_{p.p.}$
3. *este satisfăcută ecuaţia funcţională*

$$A_{t+u} = A_t T_t A_u .$$

Observaţie. Orice cociclu defineşte o familie de operatori unitari prin

$$V_t f = A_t T_t f ,$$

care satisfac relaţia de comutativitate a lui Weyl cu grupul de operatori unitari $\{S_\lambda\}$.

5. *Subspaţii invariante şi cocicle.* DEFINIŢIA 5.1. *Dacă un cociclu are forma*

$$(\alpha) \qquad A_t = q T_t q^{-1}$$

vom spune că acest cociclu este o cofrontieră şi $|q| = 1$ *(aproape peste tot).*

Este evident că (α) defineşte un cociclu. Problema naturală este aceia a legăturii dintre cofrontiere şi cocicle.

Să considerăm funcţia

$$B(t, x) = \int_0^x A_t(y)\,\mathrm{d}y$$

care permite considerarea altui cociclu $\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right)$ care are proprietatea de a fi măsurabil pe spaţiul produs. Vom presupune că acest cociclu este chiar A_t pentru că el este egal aproape peste tot cu cociclul considerat mai înainte.

Cum avem

$$|A_t(x)| = 1\,, \quad A_{t+u}(x) = A_t(x)\,A_u(x-t)$$

adevărate pentru aproape orice x, deducem că există, conform teoremei lui Fubini, un x astfel ca $A_t(x)$ să fie măsurabilă în t şi relaţia de mai sus să aibă loc aproape pentru orice t şi u. Fie acest x fixat şi să punem

$$q(y) = A^{-1}_{x-y}(x)\,.$$

De aici rezultă că aproape pentru orice t şi y avem

$$q(y)\,A_t^{-1}(y) = A^{-1}_{x-y}(x)\,A_t^{-1}(y) = A^{-1}_{x-y+t}(x) = q(y-t)$$

şi deci

$$A_t(y) = q(y)\,T_t\,q(y)^{-1}$$

şi deci cum relaţia este adevărată pentru aproape orice t şi y, rezultă că t nu poate aparţine unei mulţimi de măsură nulă şi deci cum $A_t(y)$ este un operator continuu pentru $t \in R$ cu valori în $L^2_{p.p.}$, rezultă că q trebuie să fie o funcţie cu modulul 1 (aproape peste tot) şi deci

TEOREMA 5.1. *Orice cociclu este o cofrontieră.*

Este evident că funcţia q este determinată în afara unei constante.

6. *Forma subspaţiilor invariante.* Fie $\{V_t\}$ un grup de operatori unitari care satisfac relaţia de comutativitate a lui Weyl cu S_λ. În acest caz am arătat că $V_t\,T_{-t}$ este în fond înmulţirea cu o funcţie $A_t(x)$ de modul 1. Deci

$$V_t = A_t\,T_t f$$

şi $A_{t+u} = A_t(x)\,A_u(x-t)$ adică avem un cociclu.

Orice subspaţiu de forma qH^2 generează un cociclu. În adevăr, fie $\mathcal{M}_\lambda = \chi_\lambda\,\mathcal{M} = x_\lambda\,qH^2$ şi grupul de operatori unitari ataşat este

$$V_t = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}\,(qP_\lambda\,q^{-1}) = -\,q\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}P_\lambda\cdot q^{-1} = qTt\,q^{-1},$$

unde P_λ este proiecţia pe $\chi_\lambda\,H^2$. De aici rezultă, imediat, că putem considera cociclul $qT_t\,q^{-1}$ pe care-l vom numi cociclu ataşat subspaţiului qH^2. Am presupus că q este o funcţie măsurabilă şi $|q| = 1$ aproape peste tot.

Fie $\mathcal{M}$ un subspaţiu invariant şi $\mathcal{M}_\lambda = \chi_\lambda\,\mathcal{M}$ iar P_λ proiecţia ortogonală a lui $L^2_{p.p.}$ pe $\mathcal{M}_\lambda$.

Fie

$$V_t = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\lambda t}\,\mathrm{d}P_\lambda\,.$$

Este evident că $\{V_t\}$ este un grup continuu de operatori unitari pe spaţiul $L^2_{p.p.}$. Operatorii S_λ şi V_t satisfac relaţia de comutativitate a lui

Weyl. Conform teoremei lui G. Mackey avem

$$S_\lambda = RS_\lambda R^{-1},\ V_t = RT_t R^{-1}$$

cu R un operator unitar fix. De aici rezultă că R este înmulţirea cu o funcţie de modul 1 şi deci

$$v_t f = qTt\, q^{-1} f.$$

adică V_t este un cociclu şi deci subspaţiul invariant $\mathcal{M}$ va fi qH^2 şi teorema de structură a subspaţiilor invariante este demonstrată.

7. Dacă subspaţiul $\mathcal{M} \subset H^2$, atunci putem demonstra mai simplu că

$$\mathcal{M} = qH^2 .$$

presupunînd în plus că 1 nu este ortogonală spaţiului $\mathcal{M}$.

În adevăr, fie $\tilde{q}$ proiecţia lui 1 pe acest spaţiu. Este evident că $qH^2 \subset \mathcal{M}$, unde $q = \alpha\tilde{q}$, $|q| = 1$. În acest caz cum

$$1 - \tilde{q} \perp \chi_\lambda \tilde{q} ,$$

rezultă că

$$< \tilde{q} , \tilde{q} \chi_\lambda > = 0$$

şi deci toţi coeficienţii Fourier ai funcţiei $|\tilde{q}|$ sînt nuli exceptînd cel corespunzător caracterului $\chi_\lambda = 0$. Deci $|q|$ este o constantă şi mai trebuie să arătăm că $qH^2 = \mathcal{M}$. Să presupunem că nu ar fi aşa; deducem că există funcţia $h \in qH^2$ care are toţi coeficienţii Fourier nuli. Deci trebuie să fie nulă şi teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 28 martie 1966

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space.* Acta Math., *81* (1948).
2. L. De Branges, *The Stone-Weierstrasstheorem.* Proc. R.M.S., **10** (1959).
3. A. Gleason, *Function algebras. Seminars on analytic functions.* vol. II, Princeton, 1957.
4. H. Helson, D. Lowduslager, *Invariant subspaces.* Proc. Internat. Symp. Linear Spaces, Jerusalem 1960.
5. H. Helson, *Lectures on invariant subspaces.* Pergamon Press, 1964.
6. K. Hoffman, *Banch spaces of Analytic Functions.* Prentice Hall, New-Jersey, 1962.
7. K. Hoffman, *Analytic functions and logmodular Banach algebras.* Acta Math., **108** (1962).
8. P. Lax, *Translation invariant subspaces.* Acta Math., **87** (1958).
9. Mackey G. W., *A theorem of Stone and von Neumann.* Duke Math. J., **16** (1949).
10. F. Riesz, Sz. Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle.* Budapest, 1952.
11. T. P. Srinivasan, *Simply invariant subspaces.* Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963).
12. J. Wermer, *Dirichlet Algebras,* Duke Math. J., **27** (1960).

SPAŢIILE CU CONEXIUNE AFINĂ CONSTANTĂ ATAŞATE ALGEBRELOR $A^p_{m,n}$

DE

RADU IORDĂNESCU

În lucrarea de faţă se face un studiu comparativ al spaţiilor cu conexiune afină constantă ataşate algebrelor $A^p_{m,n}$ definite în [1]. Se arată că în cazul algebrelor Lie ($m + n = 0$), spaţiul ataşat este proiectiv euclidian, în cazul algebrelor Jordan ($m = n$), spaţiul este fără torsiune, în nici unul din cazuri nefiind însă local euclidian.

Într-o lucrare anterioară [1] am definit algebrele $A^p_{m,n}$ astfel:

Definiţie. *O algebră* $A^p_{m,n}$ *este spaţiul vectorial real* A^p *al matricilor pătratice de ordin* p, *în care am definit produsul prin formula*

$$a \circ b = m\,ab + n\,ba$$

în care $a, b \in A^p$; $m, n \in R - \{0\}$, *ab şi ba fiind produsele matriciale obişnuite.*

Se disting mai multe cazuri:

1. $m + n = 0$, $A^p_{m,n}$ sînt algebre Lie
2. $m + n \neq 0$
   - a) $m \neq n$
   - b) $m = n$, $A^p_{m,n}$ sînt algebre Jordan.

În lucrarea de faţă ne propunem să facem un studiu comparativ al spaţiilor afine cu conexiune afină constantă care se ataşează acestor algebre.

Ideea a fost sugerată de acad. prof. G. Vrănceanu.

Se ştie că fiind dată o algebră reală $\mathcal{A}$ care are baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$, spaţiul A_n cu conexiune afină constantă asociat are componentele conexiunii date de formulele

$$e_\beta \circ e_\gamma = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, e_\alpha\,.$$

Alegem în $A^p_{m,n}$ baza formată din h_i $(i = 1, \ldots, p)$, e^+_{ij} $(i < j;\ i = 1, \ldots, p - 1;\ j = 2, \ldots, p)$ şi e^-_{ij}, unde h_i sînt matricile care au ele-

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1543–1547, BUCUREŞTI, 1966

mentul de pe linia i și coloana i egal cu 1, restul elementelor fiind nule, e_{ij}^{+} sînt matricile cu elementul de pe linia i și coloana j egal cu 1, restul fiind nule iar e_{ij}^{-} sînt matricile transpuse matricilor e_{ij}^{+}. Am ales această bază pentru ca ecuațiile de structură să se scrie sub o formă mai simplă. În această bază ecuațiile de structură ale algebrelor $A_{m,n}^{p}$ sînt :

$$\begin{array}{ll}
h_i \circ h_i = (m+n)\,h_i & e_{ij}^{+} \circ e_{ij}^{-} = mh_i + nh_j \\
h_i \circ h_j = 0 \quad (i \neq j) & e_{ij}^{+} \circ e_{ij}^{+} = e_{ij}^{-} \circ e_{ij}^{-} = e_{ij}^{+} \circ e_{kl}^{+} = e_{ij}^{-} \circ e_{kl}^{-} = 0 \\
h_i \circ e_{ij}^{+} = m\,e_{ij}^{+} & e_{ij}^{+} \circ e_{ik}^{+} = e_{ij}^{+} \circ e_{kj}^{+} = e_{ij}^{-} \circ e_{ik}^{-} = e_{ij}^{-} \circ e_{kj}^{-} = 0 \\
h_i \circ e_{ji}^{+} = n\,e_{ji}^{+} & e_{ij}^{+} \circ e_{jk}^{+} = m\,e_{ik}^{+},\ c_{ij}^{-} \circ e_{jk}^{-} = n\,e_{ik}^{-} \\
h_i \circ e_{ij}^{-} = n\,e_{ij}^{-} & e_{ij}^{+} \circ e_{ki}^{-} = e_{ij}^{+} \circ e_{jk}^{-} = 0 \\
h_i \circ e_{ji}^{-} = m\,e_{ji}^{-} & e_{ij}^{+} \circ e_{ik}^{-} = \begin{cases} n\,e_{jk}^{+}, & j<k \\ n\,e_{kj}^{-}, & j>k \end{cases} \quad e_{ij}^{+} \circ e_{kj}^{-} = \begin{cases} m\,e_{ik}^{+}, & i<k \\ m\,e_{ki}^{-}, & i>k \end{cases} \\
h_i \circ e_{kl}^{\pm} = 0 &
\end{array}$$

și cele care se obțin din acestea schimbînd în membrul stîng ordinea de compunere iar în membru drept schimbînd pe m cu n și pe n cu m.

Observație. Cunoscînd $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$, obținem pe $\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha}$, schimbînd m cu n și n cu m.

Deoarece pentru aflarea componentelor conexiunii avem nevoie de un singur indice pentru fiecare element al bazei, facem următoarele notații :

$$h_i = e_i,\ (i = 1, \ldots, p)$$

$$e_{ij}^{+} = e_{\frac{2pi-i^2-i+2j}{2}},\ (i<j;\ i = 1, \ldots, p-1;\ j = 2, \ldots, p)$$

$$e_{ij}^{-} = e_{\frac{p^2+p+2i+(j-1)(j-2)}{2}},\ (i<j;\ i = 1, \ldots, p-1;\ j = 2, \ldots, p)$$

și obținem deci baza $\{e_1, \ldots, e_{p^2}\}$.

Pentru a ușura scrierea vom nota :

$$\sigma(ij) = \frac{2pi - i^2 - i + 2j}{2} \quad \text{și} \quad \tau(ij) = \frac{p^2 + p + 2i + (j-1)(j-2)}{2}.$$

Utilizînd ecuațiile de structură ale algebrelor $A_{m,n}^{p}$ și aceste notații, componentele nenule ale conexiunii sînt :

$$\Gamma_{ll}^{l} = m + n,\ (l = 1, \ldots, p),$$

$$\Gamma_{i\sigma(ij)}^{\sigma(ij)} = \Gamma_{j\tau(ij)}^{\tau(ij)} = \Gamma_{\sigma(ij)\tau(ij)}^{i} = m \quad (i<j;\ i=1, \ldots, p-1;\ j=2, \ldots, p),$$

$$\Gamma_{j\sigma(ij)}^{\sigma(ij)} = \Gamma_{i\tau(ij)}^{\tau(ij)} = \Gamma_{\sigma(ij)\tau(ij)}^{j} = n \quad (i<j;\ i=1, \ldots, p-1;\ j=2, \ldots, p),$$

$$\Gamma_{\sigma(ij)\tau(kj)}^{\sigma(ik)} = m \quad (i<k<j), \qquad \Gamma_{\sigma(ij)\tau(ik)}^{\sigma(jk)} = n \quad (i<j<k),$$

$$\Gamma_{\sigma(ij)\tau(kj)}^{\tau(ki)} = m \quad (k<i<j), \qquad \Gamma_{\sigma(ij)\tau(ik)}^{\tau(kj)} = n \quad (i<k<j),$$

$$\Gamma_{\sigma(ij)\sigma(jk)}^{\sigma(ik)} = m \quad (i<j<k), \qquad \Gamma_{\tau(ij)\tau(jk)}^{\tau(ik)} = n \quad (i<j<k),$$

și toate cele care se obțin din acestea prin schimbarea indicilor inferiori și a lui m cu n și n cu m (conform cu observația de mai sus).

După cum se vede uşor, în ultimele 6 egalităţi indicii i, j, k iau valorile următoare: dacă avem $r < s < t$, atunci: $r = 1, \ldots, p-2$; $s = 2, \ldots, p-1$; $t = 3, \ldots, p$.

Ecuaţiile curbelor autoparalele fiind date de formulele

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t}, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, p^2),$$

remarcînd faptul că în afară de Γ^l_{ll} $(l = 1, \ldots p)$, care sînt egale cu $m + n$, toate componentele nenule ale conexiunii sînt egale cu m sau n şi ţinînd seama de observaţia făcută mai sus, obţinem pentru curbele autoparalele ale spaţiilor cu conexiune afină constantă A_{p^2} ataşate algebrelor $A^p_{m,n}$ ecuaţiile:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} = (m+n)\, \varepsilon^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

în care $\varepsilon^\alpha_{\beta\gamma}$ sînt 0 sau 1.

Se vede că dacă $m + n = 0$ ($A^p_{m,n}$ sînt algebre Lie), curbele autoparalele sînt drepte şi reciproc. Un spaţiu afin în care curbele autoparalele sînt drepte se numeşte *proiectiv euclidian* [2].

Aşadar:

Condiţia necesară şi suficientă ca spaţiile ataşate algebrelor $A^p_{m,n}$ să fie proiectiv euclidiene, este ca aceste algebre să fie algebre Lie ($m + n = 0$).

Este interesant de observat faptul că în cazul $p = 2$, integrarea sistemului (1) cu $m + n \neq 0$ se poate reduce la integrarea unei singure ecuaţii de ordinul doi. Astfel, făcînd notaţiile:

$$m + n = k, \quad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = y^i \quad \text{şi} \quad \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = (y^i)',$$

sistemul (1) se scrie

$$\begin{aligned} (y^i)' &= k\,[(y^i)^2 + y^3 y^4], \quad && i = 1, 2 \\ (y^j)' &= k\,(y^1 + y^2)\, y^j, && j = 3, 4. \end{aligned} \tag{2}$$

Din primele două ecuaţii deducem

$$\frac{(y^1 - y^2)'}{y^1 - y^2} = k\,(y^1 + y^2) \tag{3}$$

care ne dă

$$y^1 - y^2 = C_1\, \mathrm{e}^{k \int (y^1 + y^2)\, \mathrm{d}t}. \tag{3'}$$

Din ultimele două ecuaţii ale sistemului (2) deducem

$$\frac{(y^3)'}{y^3} = \frac{(y^4)'}{y^4} = k\,(y^1 + y^2)$$

care ne dau

$$y^3 = C_2\, \mathrm{e}^{k \int (y^1 + y^2)\, \mathrm{d}t} \quad \text{şi} \quad y^4 = C_3\, \mathrm{e}^{k \int (y^1 + y^2)\, \mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Ecuaţia (3) se mai scrie

$$(y^1)' = k\,(y^1)^2 + (y^2)' - k\,(y^2)^2\,, \tag{5}$$

care este o ecuaţie Riccati în y^1. O soluţie particulară a acestei ecuaţii este $y^1 = y^2$.

Fie $z = \dfrac{1}{y^1 - y^2}$, de unde $y^1 = y^2 + \dfrac{1}{z}$. Înlocuind în (5) şi făcînd calculele ajungem la ecuaţia

$$z' + 2ky^2 z + k = 0\,,$$

care integrată ne dă

$$z = \mathrm{e}^{-2k\int y^2\,\mathrm{d}t}\left(C_1 - k\int \mathrm{e}^{2k\int y^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right),$$

deci obţinem

$$y^1 = y^2 + \frac{\mathrm{e}^{2k\int y^2\,\mathrm{d}t}}{C_1 - k\int \mathrm{e}^{2k\int y^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}\,. \tag{5'}$$

Egalînd cele două expresii ale diferenţei $y^1 - y^2$ pe care ni le dau relaţiile (3′) şi (5′), obţinem:

$$\mathrm{e}^{k\int (y^1+y^2)\,\mathrm{d}t} = \frac{C'\cdot \mathrm{e}^{2k\int y^2\,\mathrm{d}t}}{C_1 - k\int \mathrm{e}^{2k\int y^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t}\,.$$

Pe de altă parte, relaţiile (4) şi aceasta ultimă egalitate ne dau

$$y^3\,y^4 = C_2\cdot C_3\cdot \mathrm{e}^{2k\int (y^1+y^2)\,\mathrm{d}t} = \frac{C\cdot \mathrm{e}^{4k\int y^2\,\mathrm{d}t}}{\left(C_1 - k\int \mathrm{e}^{2k\int y^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

care înlocuind-o în a doua ecuaţie a sistemului (2) ne conduce la ecuaţia:

$$(y^2)' = k\left[(y^2)^2 + \frac{C\,\mathrm{e}^{4k\int y^2\,\mathrm{d}t}}{\left(C_1 - k\int \mathrm{e}^{2k\int y^2\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right)^2}\right],$$

adică

$$(x^2)'' = k\left[[(x^2)']^2 + \frac{C\,\mathrm{e}^{4kx^2}}{\left(C_1 - k\int \mathrm{e}^{2kx^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}\right]. \tag{6}$$

Aşadar am redus integrarea sistemului (2) la integrarea unei singure ecuaţii de ordinul doi, ecuaţia (6).

Putem observa încă faptul că sistemul (2) admite soluţia particulară $y^1 = y^3 = -\,y^2 = -\,y^4 = \beta$, β fiind o constantă. Rezultă

$$x^i = \pm\,\beta t + \gamma_i\,,\quad i = 1, 2, 3, 4,\quad \beta, \gamma_i \text{ constante.} \tag{7}$$

De asemenea, o soluţie particulară este şi $y^1 = y^2 = y^3 = y^4 = w$; deci $w' = 2kw^2$ care ne dă $w = \dfrac{1}{C - 2kt}$ şi prin urmare

$$x^i = -\frac{1}{2k} \ln |C - 2kt| + C_i, \qquad i = 1, 2, 3, 4. \tag{8}$$

Deci în cazul $p = 2$ şi $m + n \neq 0$, printre curbele autoparalele ale spaţiilor A_4 se află şi dreptele (7) şi curbele logaritmice (8).

Componentele nenule ale tensorului de torsiune $T^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$, ţinînd seama de observaţia făcută asupra componentelor $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ şi $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ ale conexiunii, sînt :

$$T^{\sigma(ij)}_{i\sigma(ij)} = T^{\tau(ij)}_{j\tau(ij)} = T^{i}_{\sigma(ij)\,\tau(ij)} = m-n \ (i<j;\ i=1, \ldots, p-1;\ j=2, \ldots, p),$$

$$T^{\sigma(ij)}_{j\sigma(ij)} = T^{\tau(ij)}_{i\tau(ij)} = T^{j}_{\sigma(ij)\,\tau(ij)} = n-m \ (i<j;\ i=1, \ldots, p-1;\ j=2, \ldots, p),$$

$$T^{\sigma(ik)}_{\sigma(ij)\,\tau(kj)} = m - n \quad (i < k < j), \qquad T^{\sigma(jk)}_{\sigma(ij)\,\tau(ik)} = n - m \quad (i < j < k)$$

$$T^{\tau(ki)}_{\sigma(ij)\,\tau(kj)} = m - n \quad (k < i < j), \qquad T^{\tau(kj)}_{\sigma(ij)\,\tau(ik)} = n - m \quad (i < k < j)$$

$$T^{\sigma(ik)}_{\sigma(ij)\,\sigma(jk)} = m - n \quad (i < j < k), \qquad T^{\tau(ik)}_{\tau(ij)\,\tau(jk)} = n - m \quad (i < j < k).$$

Se vede că *necesar şi suficient ca spaţiile ataşate algebrelor* $A^p_{m,n}$ *să fie fără torsiune este ca* $A^p_{m,n}$ *să fie algebre Jordan* ($m = n$), ceea ce era de aşteptat, deoarece numai în acest caz $A^p_{m,n}$ sînt comutative.

În ceea ce priveşte tensorul de curbură Γ^i_{jkl}, acesta va fi totdeauna nenul, deoarece oricum ar fi m şi n, algebrele $A^p_{m,n}$ nu sînt asociative, aşadar *spaţiile ataşate algebrelor* $A^p_{m,n}$ *nu sînt local euclidiene*.

În încheiere, ţin să mulţumesc tov. lect. C. Teleman, pentru discuţia avută asupra lucrării, precum şi tov. Viorel Iftimie pentru unele indicaţii pe care mi le-a dat.

Primită la redacţie la 13 aprilie 1966.

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România
Str. M. Eminescu nr. 47, *Bucureşti*

BIBLIOGRAFIE

1. R. Iordănescu, *Sur des représentation des algèbres* $A^p_{m,n}$. Revue de math. pures et appl., **10**, 9 (1965).
2. Gh. Vrănceanu, *Leçons de Geometrie differentielle*, vol. I, Bucarest, 1957.

CÎTEVA PROPRIETĂȚI ALE ZEROURILOR COMPONENTELOR SOLUȚIILOR UNUI SISTEM DE DOUĂ ECUAȚII DIFERENȚIALE NELINIARE DE ORDIN I

DE

IOAN A. RUS

(Cluj)

Se studiază teoreme de separarea zerourilor componentelor soluțiilor oscilatorii ale unui sistem de forma

$$y' = f(x, y, z), \qquad z' = g(x, y, z)$$

legate de teoreme date de Z. Butlewski. Se mai indică unele extensiuni de la cazul liniar la neliniar.

Z. Butlewski [1] a studiat probleme de separare a zerourilor componentelor unei soluții a unui sistem de ecuații diferențiale neliniare, notat în lucrare cu (1), și a dat condiții suficiente de neoscilație a soluțiilor. În această lucrare se extind rezultatele lui Z. Butlewski în condiții mai puțin restrictive asupra funcțiilor f și g. Pentru aceasta vom folosi anumite rezultate date de noi în lucrările [4] și [5]. Se indică de asemenea o metodă de a extinde unele rezultate cunoscute în cazul sistemelor liniare pentru sistemele neliniare.

1. În legătură cu studiul proprietăților zerourilor componentelor soluțiilor unui sistem de două ecuații diferențiale neliniare amintim lucrările [1], [2], [3], [4], [5].

Prima teoremă din [1] se referă la separarea zerourilor componentelor soluțiilor unui sistem de două ecuații diferențiale de forma

$$(1) \qquad \begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1559–1553, BUCUREȘTI, 1966

iar a doua teoremă ne dă condiţii suficiente de neoscilaţie a soluţiilor. Condiţiile în care sînt stabilite aceste teoreme sînt foarte restrictive. Este suficient să amintim că în sistemele studiate de Z. Butlewski nu se încadrează nici sistemele liniare

$$(2)\qquad \begin{aligned} y' &= p_1(x)y + q_1(x)z \\ z' &= p_2(x)y + q_2(x)z. \end{aligned}$$

Scopul lucrării de faţă este de a extinde rezultatele obţinute de Z. Butlewski în condiţii mai puţin restrictive asupra funcţiilor f şi g şi vom folosi pentru aceasta rezultatele obţinute în [2] şi o lemă a lui Tonelli [3]. Se indică de asemenea o metodă de a extinde rezultatele cunoscute în cazul liniar pentru sistemele neliniare.

2. Vom considera în continuare sistemul (1) şi vom presupune că funcţiile $f(x, y, z)$ şi $g(x, y, z)$ sînt funcţii continue de variabilele x, y, z, pentru $x \geqslant x_0$, $|y| < \infty$, $|z| < \infty$. Presupunem de asemenea că problema lui Cauchy are o soluţie şi numai una în domeniul considerat mai sus.

Prin definiţie o funcţie $y = f(x)$, $x \in [x_0, +\infty)$ este oscilatorie dacă are o infinitate de zerouri pe intervalul $[x_0, +\infty)$. O soluţie y, z a sistemului (1) este oscilatorie (Butlewski) dacă y şi z sînt oscilatorii. În caz contrar, soluţia y, z prin definiţie este neoscilatorie.

3. Trecem acum şi stabilim

TEOREMA 1. *Dacă*

$$\operatorname{sgn} f(x, 0, z) = \operatorname{sgn} z,\ \operatorname{sgn} g(x, y, 0) = \operatorname{sgn} y,$$
$$\text{pentru } x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty$$

sau

$$\operatorname{sgn} f(x, 0, z) = -\operatorname{sgn} z,\ \operatorname{sgn} g(x, y, 0) = -\operatorname{sgn} y,$$
$$\text{pentru } x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty$$

sau

$$\operatorname{sgn} f(x, 0, z) = \operatorname{sgn} z,\ \operatorname{sgn} g(x, y, 0) = -\operatorname{sgn} y,$$
$$\text{pentru } x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty$$

sau

$$\operatorname{sgn} f(x, 0, z) = -\operatorname{sgn} z,\ \operatorname{sgn} g(x, y, 0) = \operatorname{sgn} y,$$
$$\text{pentru } x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty,$$

atunci pentru orice soluţie y, z a sistemului (*1*) *au loc următoarele proprietăţi* :

1°. *Dacă una din funcţiile y şi z este identic egală cu zero pe un subinterval al intervalului $[x_0, +\infty)$, atunci $y(x) \equiv 0$, $z(x) \equiv 0$ pentru $x \in [x_0, +\infty)$.*

2°. *Zerourile funcţiilor y şi z sînt simple.*

3°. *Funcţiile y şi z au un număr finit de zerouri în orice interval $[a, b] \subset [x_0, +\infty)$.*

4°. *Dacă una din funcţiile y şi z este oscilantă, atunci soluţia y, z este oscilantă şi zerourile funcţiilor y şi z se separă reciproc.*

Demonstrație. 1°. Presupunem că $y(x) \equiv 0$ pentru $x \in [a, b] \subset [x_0, +\infty)$ Fie $\alpha \in (a, b)$. Avem $y(\alpha) = 0$, $y'(\alpha) = 0$. Dar

$$\operatorname{sgn} y'(\alpha) = \operatorname{sgn} f(\alpha, 0, z(\alpha)) = \pm \operatorname{sgn} z(\alpha) = 0$$

și deci $z(\alpha) = 0$. Pe baza unicității soluției problemei lui Cauchy, rezultă $y(x) \equiv 0$, $z(x) \equiv 0$, pentru $x \in [x_0, +\infty)$.

2° și 3° se demonstrează analog ca lema 1 din [2], iar 4° se demonstrează analog cu teorema 1 din [2].

Observație. Teorema 1 generalizează o teoremă dată de Acad. M. Nicolescu [6] relativ la sistemul (2) și teorema 1 a lui Z. Butlewski [1] relativ la sistemul (1).

TEOREMA 2. *Dacă*

1°. $\operatorname{sgn} f(x, 0, z) = \operatorname{sgn} z$, $\operatorname{sgn} g(x, y, 0) = \operatorname{sgn} y$, *pentru* $x \geqslant x_0$, $|y| < \infty$, $|z| < \infty$

sau

2°. $\operatorname{sgn} f(x, 0, z) = -\operatorname{sgn} z$, $\operatorname{sgn} g(x, y, 0) = -\operatorname{sgn} y$, *pentru* $x \geqslant x_0$, $|y| < \infty$, $|z| < \infty$, *atunci sistemul (1) n-are soluții oscilante.*

Demonstrație. Să presupunem că are loc de exemplu 1°. Fie y, z o soluție a sistemului (1) despre care să presupunem că este oscilatorie. Fie x_1 și x_2 două zerouri consecutive ale lui y. Avem

$$\operatorname{sgn} y'(x_i) = \operatorname{sgn} f(x_i, 0, z)(x_i)) = \operatorname{sgn} z(x_i) \tag{3}$$

Din teorema 1 rezultă că $z = z(x)$ se anulează o dată și numai o dată în intervalul (x_1, x_2). Fie $x_3 \in (x_1, x_2)$ și $z(x_3) = 0$. Să presupunem pentru fixarea ideilor că

$$y'(x_1) > 0 \text{ și } y'(x_2) < 0. \tag{4}$$

Rezultă

$$z(x_1) > 0, \quad z(x_2) < 0, \quad y(x_3) > 0 \tag{5}$$

și

$$\operatorname{sgn} z'(x_3) = \operatorname{sgn} g(x_3, y(x_3), 0) = \operatorname{sgn} y(x_3).$$

Cum $z'(x_3) < 0$, rezultă $y(x_3) < 0$ și astfel am ajuns în contradicție cu (5). Un raționament analog se face și în cazul $y'(x_1) < 0$ și $y'(x_2) > 0$.

Observație. Aplicînd teorema 2 sistemului (2), obținem o teoremă de neoscilație a lui Z. Butlewski [7]. Teorema 2 constituie de asemenea o generalizare a teoremei II din [1] și a teoremei 2 din [2].

4. Folosind lema lui Tonelli [3], se poate stabili încă o teoremă de tipul teoremei Acad. M. Nicolescu. Astfel avem

TEOREMA 3. *Dacă* :

1°. $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, *sînt funcții omogene de grad unu în raport cu ansamblul variabilelor* y, z ;

2°. *ecuațiile*

$$\lambda f(x, 1, \lambda) - g(x, 1, \lambda) = 0$$

$$f(x, \lambda, 1) - \lambda g(x, \lambda, 1) = 0$$

n-au nici o rădăcină reală oricare ar fi $x \geqslant x_0$

atunci dacă y, z *este o soluție oscilatorie a sistemului (1), zerourile lor se separă reciproc.*

Demonstrație. Fie y, z o soluție a sistemului (1). Să arătăm că între două zerouri consecutive ale lui y, fie acestea x_1 și x_2, z are cel puțin un zero. Din unicitatea soluției problemei lui Cauchy rezultă că z nu se anulează în x_1 și nici în x_2. Să presupunem prin reducerea la absurd că z nu se anulează în nici un punct din (x_1, x_2). Utilizînd condiția 1°, putem presupune că avem următoarea situație

$$y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad y(x) > 0, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Din lema lui Tonelli rezultă că există un λ (pozitiv sau negativ) și $x_0 \in (x_1, x_2)$ astfel ca

$$z(x_0) = \lambda y(x_0), \quad z'(x) = \lambda y'(x_0). \tag{6}$$

Scriind sistemul (1) în punctul x_0 din (6) și 1°, rezultă că

$$\lambda f(x, 1, \lambda) - g(x, 1, \lambda) = 0$$

și am ajuns în contradicție cu 2°.

Analog se arată că între două zerouri consecutive ale lui z, y are cel puțin un zero și astfel teorema este complet demonstrată.

5. Vom încheia considerațiile de față prin stabilirea unor teoreme în cazul cînd se presupune derivabilitatea funcțiilor f și g. Vom presupune deci că există f_y, f_z, g_y, g_z, și sînt continue în domeniul $x \geqslant x_0$, $|y| < \infty$, $|z| < \infty$.

Vom utiliza o idee de liniarizare folosită de către E. Hopf [8] în studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al II-lea de tip eliptic, care în cazul de față constă în următoarele.

Fie y_1, z_1 și y_2, z_2 două soluții ale sistemului (1). Construim funcțiile

$$v = y_1 + t(y_2 - y_1), \; v = z_1 + t(z_2 - z_1),$$
$$F(t) = v'_x - f(x, v, v), \quad G(t) = v'_x - g(x, u, v),$$

unde t este un parametru real, $t \in (0, 1)$. Din ipotezele de mai sus rezultă $F(0) = 0$, $F(1) = 0$, $G(0) = 0$, $G(1) = 0$.

Aplicînd teorema lui Rolle obținem

$$(y_2 - y_1)' = f_y[x, y_1 + t_1(y_2 - y_1), z_1 + t_1(z_2 - z_1)](y_2 - y_1) +$$
$$+ f_z[x, y_1 + t_1(y_2 - y_1), z_1 + t_1(z_2 - z_1)](z_2 - z_1)$$
$$(z_2 - z_1)' = g_y[x, y_1 + t_2(y_2 - y_1), z_1 + t_2(z_2 - z_1)](y_2 - y_1) +$$
$$+ g_z[x, y_1 + t_2(y_2 - y_1), z_1 + t_2(z_2 - z_1)](z_2 - z_1).$$

Dacă presupunem că sistemul (1) este astfel încît admite ca soluție soluția banală și dacă luăm $y_1 \equiv 0$, $z_1 \equiv 0$, obținem

Principiul liniarizării. Dacă

1°. $f(x, 0, 0) \equiv 0$, $g(x, 0, 0) \equiv 0$

2°. f_y, f_z, g_y, g_z, există și sînt continue pentru $x \geqslant x_0$, $|y| < \infty$, $|z| < \infty$, atunci soluția y, z a sistemului (1) este soluție a sistemului liniar

$$Y' = f_y(x, t_1 y, t_1 z)\, Y + f_z(x, t_1 y, t_1 z) Z,$$
$$Z' = g_y(x, t_2 y, t_2 z)\, Y + g_z(x, t_2 y, t_2 z) Z.$$

Acest principiu al liniarizării ne permite să extindem o serie de rezultate cunoscute relativ la sistemele liniare pentru sistemele neliniare. Ne vom mulţumi să dăm două exemple în acest sens.

Este bine cunoscută teorema Acad. M. Nicolescu [6] relativ la sistemul (2) :

Dacă funcţiile $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ sînt continue pe un anumit interval $[a, b]$ şi dacă $q_1(x) \neq 0$, $p_2(x) \neq 0$ pe acest interval, atunci oricare ar fi y, z o soluţie a sistemului (2), zerourile lor se separă pe intervalul $[a, b]$.

Din această teoremă şi din principiul liniarizării rezultă

TEOREMA 4. *Dacă*

1°. $f(x, 0, 0) \equiv 0$, $g(x, 0, 0) \equiv 0$, $x \geqslant x_0$

2°. f_y, f_z, g_y, g_z, *există şi sînt continue pentru* $x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty$

3°. $f_z \neq 0$, $g_y \neq 0$, *pentru* $x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty$

atunci oricare ar fi y, z *o soluţie a sistemului* (*1*), *zerourile funcţiilor* y *şi* z *se separă în intervalul* $[x_0, +\infty)$.

În [7] Z. Butlewski stabileşte următoarea teoremă de neoscilaţii.

Dacă sistemul (2) este astfel încît $p_i(x)$, $q_i(x)$ sînt funcţii continue pe un anumit interval $[a, b]$ şi dacă $q_1(x)\, p_2(x) > 0$, atunci orice soluţie este neoscilatorie.

Din această teoremă şi din principiul liniarizării rezultă

TEOREMA 5. *Dacă*

1°. $f(x, 0, 0) \equiv 0$, $g(x, 0, 0) \equiv 0$, $x \geqslant x_0$;

2°. f_y, f_z, g_y, g_z *există şi sînt continue pentru* $x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty$;

3°. $f_z(x, t_1, y, t_1 z)\, g_y(x, t_2, y, t_2 z) > 0$ *pentru* $x \geqslant x_0, |y| < \infty, |z| < \infty$ *şi* t_1 *şi* $t_2 \in (0, 1)$

atunci orice soluţie a sistemului (*1*) *este neoscilatorie.*

Primită la redacţie la 16 aprilie 1966.

Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Z. BUTLEWSKI, *Sur les integrales d'un systéme d'équations différentielles.* Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, IV, A, 73—104 (1950).
2. I. A. RUS, *Teoreme de tip Sturm.* Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, Ser. I. *1*, 131—136 (1961).
3. I. A. RUS, *Asupra rădăcinilor componentelor soluţiilor unui sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi.* St. cerc. mat. (Cluj), **XIV**, *1*, 151—156 (1963).
4. I. BIHARI, *Ausdehnung der Sturmschen Oscillations und Vergleichssätzen auf die Losungen gewisser nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Publ. of the Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **2**, 159—173 (1957).
5. I. BIHARI, *Extension of certain theorems of the Sturmian type to non-linearsecond order diff. equations.* Publ. of the Math. Inst. Hung. Acad. Sci., **III**, *1—2*, 13—20 (1958).
6. M. NICOLESCU, *Sur le théorèm de Sturm.* Mathematica, Cluj, **1**, 85—110 (1929).
7. Z. BUTLEWSKI, *Sur les zéros des intégrales réalles des équations differentielles linéaires.* Mathematica, Cluj, 85 (1941).
8. E. HOPF, *Elementare Bemerrkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen.* Sitz. Ber. Preuss Akad. Wiss. Phys-math. Klasse, 147—152 (1927).

OBSERVAȚII ASUPRA VARIANTELOR METODEI DE APROXIMAȚIE A LUI S. A. CIAPLÎGHIN

DE

GEORGETA I. VOICULESCU

Ținînd seama de observațiile făcute de L. N. Sretenski cu privire la metoda hodografică aproximativă a lui S. A. Ciaplîghin, se pune în evidență gradul de aproximație al următoarelor trei variante ale acestei metode : a) varianta Ciaplîghin-Demtchenko, b) varianta Kármàn-Tsien, c) varianta Caius Iacob (varianta coardei).

1. În mișcarea potențială plană, permanentă și subsonică a unui fluid compresibil, potențialul vitezelor φ și funcția de curent ψ satisfac sistemul lui S.A. Ciaplîghin [1] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= \frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} &= -\frac{1-(2\beta+1)^{\tau}}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

unde θ este unghiul vitezei fluidului cu axa absciselor, iar τ o variabilă adimensională introdusă de S.A. Ciaplîghin :

$$\tau = \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{C_0^2} = \frac{V^2}{V_{\max}^2} = \frac{V^2}{2\beta\, C_0^2}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma-1}. \tag{1.2}$$

În locul variabilei τ, S. A. Ciaplîghin consideră o nouă variabilă independentă σ, punînd

$$\sigma = \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}\, d\tau, \tag{1.3}$$

τ_0 fiind o valoare arbitrară a lui τ, de exemplu valoarea corespunzătoare vitezei maxime pe liniile libere. Cu schimbarea (1.3) sistemul (1.1) devine :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = K(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

unde

$$K(\tau) = \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{(1 - \tau)^{2\beta+1}}. \tag{1.5}$$

Aşa cum a observat S. A. Ciaplîghin, $K(\tau)$ diferă puţin de unitate pentru un interval destul de mare de variaţie a variabilei τ, constatînd că pentru viteze pînă la $\frac{1}{3}$ din viteza sunetului se poate lua

$$K(\tau) = 1. \tag{1.6}$$

Cu această aproximaţie, sistemul (1.4) devine :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Astfel, problema mişcării unui fluid compresibil revine la problema mişcării unui fluid incompresibil în care potenţialul complex $f = \varphi + i\psi$ este o funcţie analitică de $\omega = \sigma + i\theta$.

2. Într-o Notă publicată în 1963, L.N. Sretenski [2] şi-a propus să stabilească gradul de aproximaţie al metodei hodografice aproximative a lui S. A. Ciaplîghin, avînd în vedere formulele stabilite de acesta în cadrul metodei sale :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\tau}} = K_1 e^{-\sigma} + K_2 e^{\sigma}, \\ &\frac{1}{(1 - \tau)^{\beta} \sqrt{\tau}} = K_1 e^{-\sigma} - K_2 e^{\sigma}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

L.N. Sretenski obţine pentru coeficienţii K_1, K_2 următoarele expresii :

$$\begin{aligned} &K_1 = - \frac{1}{2\sqrt{\tau_0}} \left[\beta \tau_0 + \frac{\beta^2}{2} \tau_0^2 + \frac{\beta}{2} \tau_0^2 + \tau_0^4 (\ldots) + \ldots \right], \\ &K_2 = \frac{1}{2\sqrt{\tau_0}} \left[2 + \beta \tau_0 + \frac{\beta(\beta+1)}{2} \tau_0^2 + \tau_0^4 (\ldots) + \ldots \right]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pornind de la legătura exactă dintre variabilele τ și σ, care intervin în transformarea (1.3), L. N. Sretenski calculează coeficienţii lui $e^{-\sigma}$ și e^{σ} din dezvoltarea lui $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} = K_1' e^{-\sigma} + K_2' e^{\sigma} + \ldots, \tag{2.3}$$

obținînd expresiile :

$$\begin{aligned} K_1' &= -\frac{1}{2\sqrt{\tau_0}}\left[\beta\tau_0 + \frac{\beta^2}{2}\tau_0^2 + \tau_0^4(\ldots) + \ldots\right] \\ K_2' &= \frac{1}{2\sqrt{\tau_0}}\left[2 + \beta\tau_0 + \frac{\beta}{4}\tau_0^2 + \tau_0^4(\ldots) + \ldots\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

Comparînd relațiile (2.2) cu (2.4), L. N. Sretenski observă coincidența primilor doi termeni ai seriilor formate, de unde concluzia că metoda aproximativă a lui A. S. Ciaplîghin dă rezultate bune dacă ne mărginim să luăm în dezvoltarea coeficienților K_1 și K_2 numai primii doi termeni.

3. În cele ce urmează, mergînd pe linia dată de L.N. Sretenski și ținînd seama de completările ulterioare aduse metodei lui S. A. Ciaplîghin de B. Demtchenko [3], C. Iacob [4] și alți cercetători, ne propunem să punem în evidență cele trei variante ale metodei amintite mai sus, stabilind gradul lor de aproximație.

Reamintim că cele trei variante de care ne vom ocupa sînt :

1° Varianta Ciaplîghin-Demtchenko [1], [3], care constă în înlocuirea curbei adiabatice prin tangenta în punctul de viteză nulă.

2°. Varianta Káramàn-Tsien [6], [7] care revine la înlocuirea curbei adiabatice prin tangenta în punctul corespunzător vitezei la infinit.

3°. Varianta Caius Iacob (varianta coardei) [5] în care se înlocuiește curba adiabatică prin coarda care unește punctul corespunzător vitezei nule cu punctul corespunzător vitezei la infinit.

Considerăm sistemul S. A. Ciaplîghin sub forma (1.1), în care facem schimbarea de variabilă

$$\sigma = \sigma_1 + \int_{\tau_1}^{\tau} \frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}\, d\tau, \tag{3.1}$$

unde σ_1 este o constantă ce urmează a fi determinată, $\tau = \frac{V^2}{V_{\max}^2}$, τ_1 este valoarea corespunzătoare lui V_1, $\beta = \frac{1}{\gamma - 1}$, iar γ este exponentul din legea izentropică $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$.

Ne propunem mai întîi să explicităm pe σ ca funcţie de τ din (3.1). Pentru aceasta, urmînd pe L.N. Sretenski, vom desface intervalul de integrare $[\tau_1, \tau)$ în $[\tau_1, 0]$ şi $[0, \tau)$, vom nota

$$a = -\int_0^{\tau_1} \frac{(1-\tau)^\beta - 1}{\tau}\, d\tau, \tag{3.2}$$

iar integrala

$$\int_0^{\tau} \frac{(1-\tau)^\beta - 1}{\tau}\, d\tau$$

o vom calcula dezvoltînd întîi cantitatea de integrat după puterile lui τ. În urma acestor calcule se obţine expresia :

$$\begin{aligned} 2\sigma = 2\sigma_1 + \ln \frac{\tau}{\tau_1} + a - \beta\tau + \frac{\beta(\beta-1)}{4}\tau^2 - \\ - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{18}\tau^3 + \tau^4(\ldots) + \ldots \end{aligned} \tag{3.3}$$

De aici avem :

$$\begin{aligned} e^{2\sigma} = \frac{\tau}{\tau_1} e^{2\sigma_1} e^{\alpha} \Big[1 - \beta\tau + \frac{\beta(3\beta-1)}{4}\tau^2 - \\ - \frac{\beta(17\beta^2 - 15\beta + 4)}{36}\tau^3 + \tau^4(\ldots) + \ldots \Big] \end{aligned} \tag{3.4}$$

sau

$$\begin{aligned} \tau = \lambda \Big[1 + \beta\tau + \frac{\beta(\beta+1)}{4}\tau^2 + \\ + \frac{\beta(-31\beta^2 + 3\beta + 4)}{36}\tau^3 + \tau^4(\ldots) + \ldots \Big], \end{aligned} \tag{3.5}$$

unde am notat

$$\lambda = \tau_1 e^{2\sigma} e^{-2\sigma_1} e^{-a} \tag{3.6}$$

Vom dezvolta apoi pe τ după puterile lui λ şi vom introduce această dezvoltare în (3.5), unde se face identificarea coeficienţilor aceloraşi puteri ale lui λ. Se obţine astfel pentru τ următoarea dezvoltare :

$$\begin{aligned} \tau = \lambda + \beta\lambda^2 + \frac{\beta(5\beta+1)}{4}\lambda^3 + \\ + \frac{\beta(16\beta^2 + 15\beta + 2)}{18}\lambda^4 + \lambda^5(\ldots) + \ldots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Introducînd (3.7) în membrul drept al relaţiei (3.5), se obţine pentru τ următoarea expresie :

$$\tau = \lambda\Big[1 + \beta\lambda + \frac{\beta(5\beta+1)}{4}\lambda^2 + \frac{\beta(7\beta^2+6\beta+2)}{18}\lambda^3 + \lambda^4(\ldots) + \ldots\Big] \tag{3.8}$$

iar

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\, e^{\frac{a}{2}}\, e^{\sigma_1}\, e^{-\sigma} - \frac{\beta}{2}\sqrt{\tau_1}\, e^{-\frac{a}{2}}\, e^{-\sigma_1} e^{\sigma} + ,\ldots \tag{3.9}$$

unde am înlocuit pe λ cu valoarea sa din (3.6).

Notăm

$$\begin{aligned} K_1' &= \frac{1}{\sqrt{\tau_1}}\, e^{\frac{a}{2}} e^{\sigma_1} \\ K_2' &= -\frac{\beta}{2}\sqrt{\tau_1}\, e^{-\frac{a}{2}}\, e^{-\sigma_1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

și (3.9) devine deci

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} = K_1'\, e^{-\sigma} + K_2'\, e^{\sigma} + \ldots \tag{3.11}$$

Din (3.2) calculînd pe a și înlocuind această valoare în (3.10) se obțin, pentru coeficienții K_1', K_2', expresiile :

$$\begin{aligned} K_1' &= \frac{e^{\sigma_1}}{\sqrt{\tau_1}}\left[1 + \frac{\beta}{2}\,\tau_1 + \frac{\beta}{8}\,\tau_1^2 + \frac{\beta\,(-2\beta^2 - 3\beta + 8)}{144}\,\tau_1^3 + \tau_1^4(\ldots) + \ldots\right] \\ K_2' &= -\frac{\beta}{2}\sqrt{\tau_1}\, e^{-\sigma_1}\left[1 - \frac{\beta}{2}\,\tau_1 + \frac{\beta\,(2\beta - 1)}{8}\,\tau_1^2 - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\beta\,(16\beta^2 - 21\beta + 8)}{144}\,\tau_1^3 + \tau_1^4(\ldots) + \ldots\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Înlocuind pe τ în funcție de V din (1.2) în (3.11), se găsește o relație analoagă :

$$\frac{1}{V} = C_1'\, e^{-\sigma} + C_2'\, e^{\sigma} + \ldots \tag{3.13}$$

unde

$$C_1' = \frac{1}{C_0\sqrt{2\beta}}\, K_1' \text{ și } C_2' = \frac{1}{C_0\sqrt{2\beta}}\, K_2'. \tag{3.14}$$

Folosind relațiile (3.12) și relația dintre τ_1 și numărul lui Ceaplîghin $M_0 = \frac{V_1}{C_0}$, adică $M_0^2 = 2\beta\tau_1$ și ținînd seama de interpretările și alegerile constantelor date de către B. Demtchenko ($\tau = \tau_1$ pentru $\sigma = \sigma_1$; $e^{\sigma_1} = \widetilde{V}_1$, unde $\widetilde{V}_1$ este viteza la infinit în gazul lui Ciaplîghin), rezultă pentru C_1' și C_2' următoarele expresii :

$$\begin{aligned} C_1' &= 1 + \frac{1}{4}\, M_0^2 + 0{,}0125\, M_0^4 - 0{,}0016\, M_0^6 + \ldots \\ \widetilde{V}_1^2\, C_2' &= -\frac{1}{4}\, M_0^2 + 0{,}0625\, M_0^4 - 0{,}0125\, M_0^6 + \ldots \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ne propunem în continuare să comparăm coeficienţii C_1' şi C_2', pe care-i vom numi coeficienţi riguroşi ai lui $e^{-\sigma}$ respectiv e^{σ} din dezvoltarea exactă a lui $\frac{1}{V}$, cu coeficienţii C_1 şi C_2 corespunzători celor trei variante ale metodei aproximative a lui S. A. Ciaplîghin, din relaţia

$$\frac{1}{V} = C_1 e^{-\sigma} + C_2 e^{\sigma}, \tag{3.16}$$

care se obţine luînd cu S.A. Ciaplîghin

$$K(V) = 1. \tag{3.17}$$

1°. Varianta Ciaplîghin-Demtchenko :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + M_0^2}\right) \\ C_2 &= \frac{1}{2\widetilde{V}_1^2}\left(1 - \sqrt{1 - M_0^2}\right) \\ \widetilde{V}_1 &= V_1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} C &= 1 + \frac{1}{4} M_0^2 - 0{,}0625\, M_0^4 + 0{,}03125\, M_0^6 + \ldots \\ \widetilde{V}_1^2 C_2 &= -\frac{1}{4} M_0^2 + 0{,}0625\, M_0^4 - 0{,}03125\, M_0^6 + \ldots \end{aligned} \tag{3.19}$$

2°. Varianta Kármàn Tsien :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{1 - \frac{\gamma + 1}{2} M_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ C_2 &= \frac{1}{2\widetilde{V}_1^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}\right) = \frac{1}{2\widetilde{V}_1^2}\left[1 - \left(\frac{1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2}{1 - \frac{\gamma + 1}{2} M_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \widetilde{V}_1 &= V_1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 + \frac{1}{4} M_0^2 + 0{,}2375\, M_0^4 + 0{,}24125\, M_0^6 + \ldots \\ \widetilde{V}_1^2 C_2 &= -\frac{1}{4} M_0^2 - 0{,}2375\, M_0^4 - 0{,}24125\, M_0^6 + \ldots \end{aligned} \tag{3.21}$$

3°. Varianta C. Iacob (varianta coardei):

$$\begin{aligned} (3.22)\qquad & C_1 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}\right] \\ & C_2 = \frac{1}{2\widetilde{V}_1^2}\left[1 - \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}}\right] \\ & \widetilde{V}_1 = V_1\left(1 + \frac{\gamma + 1}{96} M_0^4 + \ldots\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.23)\qquad & C_1 = 1 + \frac{1}{4} M_0^2 + 0{,}0875\, M_0^4 + 0{,}02625\, M_0^6 + \ldots \\ & \widetilde{V}_1^2 C_2 = -\frac{1}{4} M_0^2 - 0{,}0875\, M_0^4 - 0{,}02625\, M_0^6 + \ldots \end{aligned}$$

Comparînd rezultatele (3.19), (3.21), (3.23) cu (3.15), se constată următoarele:

a) coeficienţii riguroşi coincid cu coeficienţii respectivi din cele trei variante, dacă ne oprim la termenii M_0^2 inclusiv.

b) coeficienţii daţi de varianta coardei sînt cei mai apropiaţi de coeficienţii riguroşi.

Primită la redacţie la 15 aprilie 1966.

Facultatea de matematică şi
mecanică a Universităţii din
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. С. А. Чаплыгин, Собрание сочинений, II, Москва, 19—137 (1948).
2. Л. Н. Сретенски, Инженерный журнал, III, 135—136 (1963).
3. B. Demtchenko, Publications scientifiques du Ministère de l'Air, Paris, *144* (1939).
4. C. Iacob, C. R. Acad. Sci., Paris, **122**, 1329 (1946).
5. — *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest — Paris, 1959.
6. Th. V. Karman, J. of the Aeronaut. Sciences, **8**, 337 (1941).
7. H. S. Tsien, J. of the Aeronaut. Sciences, **7**, 399 (1939).

O METODĂ ITERATIVĂ DE REZOLVARE A ECUAȚIEI OPERAȚIONALE $x = BF(x)$

DE

ST. CRUCEANU și ALEX. I. SCHIOP

Fie H un spațiu Hilbert real și $F(x)$ un operator potențial dat în H. În cele ce urmează se va descrie o metodă iterativă de rezolvare a ecuației operaționale :

$$x = BF(x) \tag{1}$$

unde B este un operator liniar simetric cu spectru strict pozitiv, definit peste tot în H. Ecuația (1) apare în studiul ecuațiilor integrale neliniare în lucrările lui M. Golomb și M. M. Vainberg.

1. *Preliminarii.* Se spune că operatorul T definit în spațiul Banach E_x cu valori în spațiul Banach E_y este diferențiabil Gâteaux în punctul $x \in E_x$ dacă pentru orice $h \in E_x$ există limita :

$$VT(x)h = \lim_{t \to 0} \frac{T(x + th) - T(x)}{t}.$$

Aplicația $h \to VT(x)h$ se numește diferențială Gâteaux a operatorului T în punctul x. Dacă T admite diferențiala Gâteaux în mulțimea convexă $X \subset E_x$, atunci pentru x, $x + h \in X$ și $e \in E_y^*$, este valabilă formula lui Lagrange :

$$e[T(x + h) - T(x)] = e[VT(x + \tau_e h)h] \quad \text{cu} \quad \tau_e \in (0,1).$$

Prin derivată Gâteaux se înțelege diferențiala Gâteaux liniară și continuă. Derivata Gâteaux a unei funcționale $f(x)$ definită pe spațiul Banach E_x se numește gradientul funcționalei și îl vom nota : grad $f(x)$. Operatorul $F(x)$ este potențial dacă există o funcțională $f(x)$ astfel încît grad $f(x) = F(x)$. Evident, $F(x)$ este o aplicație a spațiului E_x în spațiul conjugat E_x^* iar în cazul spațiilor Hilbert, ca o consecință a teoremei lui Riesz de reprezentare a funcționalei liniare și continue, $F(x)$ este o aplicație a spațiului Hilbert în el însuși.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1563–1566, BUCUREȘTI, 1966

2. Presupunem că operatorul potenţial $F(x)$ din ecuaţia (1) admite derivata Gâteaux $F'(x)$ peste tot în H, astfel încît pentru $h_1, h_2 \in H$ $< F'(x) h_1, h_2 >$ este continuă în x pe orice dreaptă din H. Aceste ipoteze asigură simetria operatorului $F'(x)$, pentru orice $x \in H$ [3] [1].

Fie A rădăcina pătrată pozitivă din operatorul B.

Teoremă. *Dacă :*

1° $< F'(Ax) Ah, Ah > \geqslant m(h, h)$ $m > 1$, *pentru* $x \in D_R (x / \| x \| \leqslant R)$ *cu* $R \geqslant \dfrac{\| AF(\theta) \|}{m-1}$ şi $h \in H$

2° $(F'(A x) Ah,\ Ah) \leqslant M(h,\ h)$ *pentru* $x \in D \left(x / \| x \| \leqslant \dfrac{\| AF(\theta) \|}{m-1} \right)$ *şi* $h \in H$,

atunci există soluţia $y \in AD$ *a ecuaţiei (1) unică în* AD_R, *care poate fi obţinută ca limită a procesului iterativ :*

$$Y_0 = \theta,\ Y_{n+1} = (1+2\alpha)\, Y_n - 2\alpha BF(Y_n),\ 0 < \alpha \leqslant \frac{1}{m+M-2}.$$

Se consideră operatorul $\Psi(x) = (2\alpha + 1)\, x - 2\alpha\, AF(Ax)$ căruia îi calculăm derivata Gâteaux :

$$\Psi'(x)\, h = \lim_{t \to 0} \frac{(2\alpha+1)(x+th) - 2\alpha AF[A(x+th)] - (2\alpha+1)x + 2\alpha AF(Ax)}{t} =$$

$$= [(2\alpha+1) I - 2\alpha AF'(Ax) A]\, h.$$

Pentru x', x'' din D avem :

$$\Psi(x') - \Psi(x'') = (1 + 2\alpha)(x' - x'') - 2\alpha [AF(Ax') - AF(Ax'')];$$

aplicînd formula lui Lagrange

$$< \Psi(x') - \Psi(x''), e > = < [(1+2\alpha) I - 2\alpha AF' A(x'' +$$
$$+ \tau_e (x' - x''))] A] (x' - x''), e >$$

cu $\| e \| = 1$ şi $\tau_e \in (0,1)$ de unde :

$$\| \Psi(x') - \Psi(x'') \| = \sup_{\|e\|=1} | < \Psi(x') - \Psi(x''), e > | \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\tau_e \in (0,1)} \| (1+2\alpha) I - 2\alpha AF' [A(x'' + \tau_e (x' - x''))] A \| \| x' - x'' \|.$$

Deoarece $x'' + \tau_e (x' - x'') \in D$, iar pentru $x \in D$ operatorul $AF'(x) A$ este simetric, avînd marginile superioară şi inferioară M respectiv m, rezultă :

$$\| \Psi(x') - \Psi(x'') \| \leqslant \max \{ |1 + 2\alpha(1-m)|, |1 + 2\alpha(1-M)| \} \| x' - x'' \|.$$

Dacă $1 + 2\alpha(1-M) \geqslant 0$, atunci $1 + 2\alpha(1-m) \geqslant 1 + 2\alpha(1-M) \geqslant 0$. Pentru $1 + 2\alpha(1-M) \leqslant 0$, punînd condiţia $1 + 2\alpha(1-m) \geqslant 1 - 2\alpha(1 - M)$, se găseşte $\alpha \leqslant \dfrac{1}{m+M-2}$.

---

[1] t. 5, 1.

Deci $q = 1+2\alpha\,(1-m) \geqslant |1+2\alpha(1-M)|$ cu $0<\alpha\leqslant \dfrac{1}{m+M-2}\cdot$
Operatorul $\Psi(x)$ satisface în D inegalitatea lui Lipschitz :

$$\|\Psi(x')-\Psi(x'')\leqslant q\,\|x'-x''\|,\ q<1$$

şi lasă invariabilă sfera D. Într-adevăr, pentru $x\in D$, $\|\Psi(x)\|\leqslant\|\Psi(x)-$ $-\Psi(\theta)\|+\|\Psi(\theta)\|\leqslant[1+2\alpha(1-m)]\|x\|+2\alpha\|AF(\theta)\|\leqslant\dfrac{\|AF(\theta)\|}{m-1}\cdot$
$\Psi(x)$ este o contracţie a sferei D; ecuaţia $\Psi(x)=x$ are deci o soluţie unică în sfera D care poate fi calculată ca limită a şirului de aproximaţii succesive :

$$x_0=\theta,\ x_{n+1}=\Psi(x_n)$$

Şirul $Y_n = Ax_n$ este convergent, limita lui fiind soluţie a ecuaţiei (1). Într-adevăr, fie $Y^*=\lim Y_n$; înmulţind ecuaţia

$$x_{n+1}=(1+2\,\alpha)\,x_n-2\,\alpha AF\,(Ax_n)$$

la stînga cu A se obţine

$$Y_{n+1}=(1+2\alpha)\,Y_n-2\alpha\,BF\,(Y_n)$$

şi trecînd la limită

$$Y^*=(1+2\alpha)\,Y^*-2\alpha BF(Y^*)$$

adică

$$Y^*=BF(Y^*)$$

Pentru şirul de aproximaţii succesive $\{x_n\}$ avem evaluarea

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|\Psi(x_n)-\Psi(x_{n-1})\|\leqslant q\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\dots\leqslant$$
$$\leqslant q^n\|x_0-\Psi(x_0)\|=q^n\|\Psi(\theta)\|,$$

de unde

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant(q^n+q^{n+1}+\dots+q^{n+p-1})\|\Psi(\theta)\|\leqslant\frac{q^n}{1-q}\|\Psi(\theta)\|$$

iar pentru şirul $\{Y_n\}$:

$$\|Y_{n+p}-Y_n\|=\|Ax_{n+p}-Ax_n\|\leqslant\|A\|\,\|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\|A\|\,\frac{q^n}{1-q}\|\Psi(\theta)\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{[1+2\,(1-m)]^n}{m-1}\|A\|^2\,\|F(\theta)\|.$$

Făcînd $p\to\infty$ obţinem :

$$\|Y^*-Y_n\|\leqslant\frac{[1+2\alpha(1-m)]^n}{m-1}\|A\|^2F(\theta)\|.$$

Principiul contracţiei asigură unicitatea soluţiei ecuaţiei (1) în AD. Vom demonstra unicitatea soluţiei în domeniul AD_R.

Dacă există $Y', Y'' \in AD_R$ astfel încît $Y' = BF(Y')$, $Y'' = BF = (Y'')$, fie $x', x'' \in D_R$ astfel încît $Y' = Ax'$, $Y''=Ax''$. A admite operator reciproc, deci :

$$x' = AF\,(Ax'),\; x'' = AF\,(Ax'')$$

Considerăm funcția :

$$\varphi(t) = < AF\,[A\,(x'' + t(x' - x''))] - x'' - t(x' - x''),\; x' - x'' >$$

căreia îi calculăm derivata :

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} < \frac{AF\,[A\,(x'' + t(x' - x'') + \Delta t(x' - x''))] - x'' -}{\Delta t}$$

$$\frac{-(t + \Delta t)(x' - x'') - AF[A(x'' + t(x' - x''))] + x'' + t(x' - x'')}{\Delta t},\; x' - x'' > =$$

$$= < AF'\,[A\,(x'' + t(x - x'')]\,A\,(x' - x'') - (x' - x''),\, x' - x'' >.$$

Funcția $\varphi'(t)$ este continuă conform ipotezelor făcute asupra operatorului $F'(x)$. Din condiția 1° și din relația :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

se obține

$$0 = < AF\,(Ax') - x' - AF\,(Ax'') + x'',\; x' - x'' > =$$

$$= \int_0^1 < AF'\,[A\,(x'' + t(x' + x''))]\,A\,(x' - x'') - (x' - x''),\, x' - x'' > \mathrm{d}t \geqslant$$

$$\geqslant (m - 1)\,\|x' - x''\|^2$$

adică $x' = x''$ și bineînțeles $y' = y''$.

Primită la redacție la 9 martie 1966

— Școala medie nr. 39

Institutul de matematică
al Academiei Republicii Socialiste România,
Str. M. Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. M. Н. ЯКОВЛЕВ, *О некоторых методах решения нелинейных уравнений* Труды мат. инст. В. А. Стеклова, **LXXXIV**.
2. F. RIESZ et B. Sz. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Budapest, 1953.
3. M. M. ВАЙНБЕРГ, *Вариационные методы исследования нелинейных операторов*. Москва, 1956.

APLICAREA METODEI LUI A. B. TAYLER LA O MIŞCARE ÎN CANALE

DE

HORIA I. ENE

În lucrarea de faţă se rezolvă problema mişcării subsonice a unui fluid perfect, compresibil, într-un canal, în jurul unui cilindru cvasicircular, cu ajutorul metodei de aproximaţie directă a lui A. B. Tayler [7].

Se face o comparaţie a rezultatului obţinut cu rezultatele obţinute cu ajutorul metodei de aproximaţie hodografică a lui Ciaplîghin, sub cele trei variante cunoscute : varianta Ciaplîghin-Demtchenko, varianta Kármán-Tsien şi varianta Caius Iacob.

1. Problema mişcării subsonice a unui fluid perfect, compresibil, într-un canal în jurul unui cilindru cvasicircular a fost studiată pe două căi diferite : cu metode de aproximaţie directe şi cu metode de aproximaţie hodografice. Problema a fost studiată de E. Lamla [3] cu ajutorul metodei Janzen-Rayleigh, Z. Hasimoto [1] cu ajutorul metodei lui Imai şi de Simona Popp [6] cu ajutorul metodei lui Kiselev. Cu ajutorul metodei hodografice a lui Ciaplîghin sub cele trei variante [2] : varianta Ciaplîghin-Demtchenko, varianta Kármán-Tsien şi varianta Caius Iacob, problema a fost studiată tot de Simona Popp [5].

În lucrarea de faţă se abordează aceeaşi problemă cu ajutorul metodei de aproximaţie directă dată de A. B. Tayler [7].

2. A. B. Tayler pleacă de la ecuaţiile mişcării irotaţionale a unui fluid perfect compresibil :

$$\begin{gathered}\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0,\\ \operatorname{rot}\vec{v} = 0, \qquad (1)\\ c^2 = c_0^2\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}\frac{V^2}{c_0^2}\right),\end{gathered}$$

unde ρ şi c sînt densitatea şi viteza sunetului respectiv. Făcînd transformarea

$$\vec{s} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \frac{\vec{v}}{c_0}$$

şi notînd

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/2} = e^{\sigma},$$

sistemul de ecuaţii (1) se transformă atunci în următorul:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{s} = 2\,(1 - n)\, \vec{s} \operatorname{grad} \sigma, \\ (2) \qquad &\operatorname{rot} \vec{s} = 2n\, \vec{s} \times \operatorname{grad} \sigma, \\ &\frac{\gamma - 1}{2} s^2 = e^{-4\sigma}\,(1 - e^{-2(\gamma-1)\sigma}), \end{aligned}$$

unde n este o constantă, iar σ este un parametru de care depinde s.

Considerînd ca primă aproximaţie $\sigma = \text{const.}$, primele două ecuaţii (2) ne dau

$$\operatorname{div} \vec{s}_1 = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{s}_1 = 0,$$

de unde deducem imediat $s_1 = \operatorname{grad} \varphi_1$ cu $\Delta \varphi_1 = 0$. Înlocuind s_1 în membrul drept al primelor două ecuaţii (2), următoarea aproximaţie ne va da un s_2 funcţie de s_1 deja cunoscut.

Notînd cu φ_0 potenţialul vitezelor corespunzător mişcării incompresibile, avem:

$$(3) \qquad \varphi_1 = \frac{M_\infty}{V_\infty}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{-[n/(\gamma-1)+1/2]} \varphi_0.$$

Vom avea deci pentru viteze expresiile:

$$\begin{aligned} &s_1^2 = M_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{-[2n/(\gamma-1)+1]} \cdot \left(\frac{V_0}{V_\infty}\right)^2, \\ (4) \qquad &\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = \frac{s_1^2\, e^{4n\sigma_1}}{M_\infty^2}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right), \end{aligned}$$

unde V_0 este viteza fluidului incompresibil, V_∞ este viteza curentului compresibil la mari distanţe, iar σ_1 este dat ca funcţie de s_1^2 de a treia relaţie (2).

Constanta n se obţine din identificarea coeficientului de presiune C_p obţinut cu această metodă

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} = C_p^{(0)}(1 + nM_\infty^2) - \frac{1}{4}(4n - 1)\, M_\infty^2\, C_p^{(0)2} + \mathrm{O}\,(M_\infty^4),$$

cu coeficientul de presiune dat de metoda hodografică a lui Ciaplîghin

$$C_p = C_p^{(0)}\left(1 + \frac{1}{2} M_\infty^2\right) - \frac{1}{4} M_\infty^2 C_p^{(0)2} + O(M_\infty^4).$$

Rezultă că $n = 0,5$.

3. Vom aplica această metodă la aflarea distribuţiei vitezelor pe un obstacol cvasicircular, asimilabil cu un cerc de rază b, situat într-un curent compresibil de viteză V_∞ la mari distanţe, într-un canal rectiliniu de lărgime a.

Potenţialul complex al mişcării incompresibile este [1]:

$$f(z) = V_\infty \left\{ z + \frac{\pi b^2}{a}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right) \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a} \right\}. \tag{5}$$

Efectuînd toate dezvoltările în serie şi mărginindu-ne doar la termenii care conţin $\left(\frac{\pi b}{a}\right)^2$, putem scrie:

$$f(z) = V_\infty \left(1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)\left(z + \frac{b^2}{z}\right). \tag{6}$$

Vom avea deci viteza pe obstacol pentru fluidul incompresibil:

$$\frac{V_0}{V_\infty} = 2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)|\sin\theta|. \tag{7}$$

Prima formulă (4) cu (7) ne dă:

$$s_1 = 2M_\infty\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)^{-[1/2(\gamma-1)+1/2]} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)|\sin\theta|. \tag{8}$$

În a doua formulă (4) dacă ţinem seama de a treia relaţie (2) scrisă sub forma:

$$\sigma_1 = \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_1^4}{16}(\gamma + 1) + \ldots$$

şi de relaţia (8), obţinem distribuţia de viteze pe obstacol.

Notînd:

$$A = \frac{\gamma}{16} - \frac{1}{32}, \quad B = -\frac{2\gamma + 1}{4}, \quad C = \frac{2\gamma + 3}{2}, \tag{9}$$

vom avea:

$$\begin{aligned} \frac{V}{V_\infty} = {} & 2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)|\sin\theta| \left\{ 1 + \frac{1}{4}\left[4\sin^2\theta\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right) - 1\right] M_\infty^2 + \right. \\ & + \left[A + B\sin^2\theta\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right) + C\sin^4\theta\left(1 + \right.\right. \\ & \left.\left.\left. + \frac{4}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)\right] M_\infty^4 + \ldots \right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dacă în formula (10) facem $\theta = \pi/2$, obținem viteza maximă :

$$\frac{V_{\max.}}{V_\infty} = 2\left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{\pi^2 b^2}{a^2} + \frac{M_\infty^2}{4}\left(3 + \frac{11}{3}\,\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right) + M_\infty^4\left[A\left(1 + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{3}\,\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right) + B\left(1 + \frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right) + C\left(1 + \frac{5}{3}\,\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)\right] + \ldots\right\}.$$

4. Să comparăm acest rezultat cu rezultatele care se obțin aplicînd metoda hodografică a lui Ciaplîghin în cele trei variante amintite mai sus, rezultate obținute în [5].

Compararea cu rezultatele corespunzătoare din [5] ne arată că pînă la termenii în M_∞^2 aceste formule coincid exact. Diferențele vor apărea doar la termenii în M_∞^4. Pentru aceasta vom scrie coeficienții A, B și C în cele trei variante :

— varianta Ciaplîghin-Demtchenko :

$$A = \frac{\gamma}{8}, \quad B = -\frac{2\gamma + 1}{4},$$

— varianta Kármán-Tsien :

$$A = -\frac{1}{8}, \quad B = \frac{1}{4},$$

— varianta Caius Iacob :

$$A = \frac{\gamma}{16} - \frac{1}{16}, \quad B = -\frac{\gamma}{4},$$

coeficientul C avînd aceeași valoare în toate cele trei variante, $C = 1$.

Vedem deci că A dat de formulele (9) este foarte apropiat ca valoare de cel dat de varianta Caius Iacob, B dat de formulele (9) este identic cu cel din varianta Ciaplîghin-Demtchenko, singurul coeficient care diferă fiind C.

Pentru problema studiată, metoda lui A. B. Tayler [7] asigură o bună aproximație și dă rezultate comparabile cu cele obținute cu celelalte metode.

De asemenea, dată fiind identitatea primilor termeni în expresiile vitezei (10) și cea dată de Simona Popp [5], rezultă că și numărul Mach critic corespunzător va avea tot valoarea $M_\infty = 0{,}3475$ care este foarte apropiată de cea obținută de E. Lamla [3], $M_\infty = 0{,}3496$, dacă se consideră raportul $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{4}$.

Primită la redacție la 19 aprilie 1966.

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str. M.
Eminescu nr. 47, București

BIBLIOGRAFIE

1. Z. Hasimoto, Proc. Phy. — Math. Soc. Japan, **25**, 563—574 (1943).
2. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucarest — Paris, 1959.
3. E. Lamla, Luftfahrtforschung, **17**, 329 (1940).
4. A. Masotti, Atti della Reale Accademia dei Lincei, **4**, 443—446 (1926).
5. Simona Popp, Com. Acad. R.P.R., **IX**, *3*, 223—229 (1959).
6. Simona Popp, St. cerc. mat., **XIV**, *2*, 213—223 (1963).
7. A. B. Tayler, Proc. Roy, Soc., **A255**, 101—113 (1960).

O GENERALIZARE A PROBLEMEI KAPUR-SHUKLA

DE

L. I. DINU

J. N. Kapur şi J. B. Shukla au considerat o problemă plană nestaţionară a mişcării a două fluide vîscoase imiscibile, între doi pereţi plani, paraleli şi infiniţi [1], cu gradientul de presiune variabil în timp. În articolul de faţă se consideră că în plus există un cîmp magnetic transversal.

1. În 1964, J. N. Kapur şi J. B. Shukla au considerat [1] problema exponenţial-nestaţionară (conform formulelor (4)) a curgerii a două fluide vîscoase şi imiscibile între doi pereţi plani, paraleli şi infiniţi. Mişcarea se desfăşoară cu gradient de presiune variabil exponenţial în timp. Vom face şi aici aceste ipoteze presupunînd în plus acţiunea unui cîmp magnetic transversal.

Vom alege ca interfaţă (frontiera de separare a fluidelor) axa Ox orientată în sensul mişcării. Pereţii vor fi atunci reprezentaţi de $y = \pm h$.

Vom scrie cîmpul magnetic şi viteza sub forma:

$$\vec{H}_i = (H_i^x, H_0, 0).$$
$$\vec{v}_i = (v_i^x, 0,0)$$

unde indicele i individualizează fluidele: $i = 1, 2$.

Din ecuaţia de mişcare se obţine:

$$\rho_i \frac{\partial}{\partial t} v_i^x = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} H_0 \frac{\partial}{\partial y} H_i^x + \mu_i \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_i^x, \tag{1}$$

iar din ecuaţia de inducţie, găsim:

$$\frac{\partial}{\partial t} H_i^x = \nu_m^i \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_i^x + H_0 \frac{\partial}{\partial y} v_i^x. \tag{2}$$

Mişcarea se desfăşoară cu gradientul de presiune

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -P e^{ct}. \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1573–1577, BUCUREŞTI, 1966

Să considerăm :

$$v_i^x(y,t) = v_i(y)\,\mathrm{e}^{ct},\quad H_i^x(y,t) = H_i(y)\,\mathrm{e}^{ct},\quad u_i = v_i - \frac{P}{\rho_i c}, \tag{4}$$

unde constanta c satisface condiţia (11). În absenţa cîmpului magnetic, această condiţie se reduce la simpla pozitivitate, iar problema la cea expusă în [1].

Punînd atunci :

$$y_1 = u_1,\ y_2 = u_2,\ y_3 = H_1,\ y_4 = H_2,\ y_5 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u_1, \tag{5}$$

$$y_6 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u_2,\ y_7 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}H_1,\ y_8 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}H_2,\ x = y.$$

ajungem la sistemul :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{y}. \tag{6}$$

unde :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c}{\nu_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_0}{4\pi_{\mu_1}} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\nu_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H_0}{4\pi_{\mu_2}} \\ 0 & 0 & \frac{c}{\nu_m^1} & 0 & -\frac{H_0}{\nu_m^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{\nu_m^2} & 0 & -\frac{H_0}{\nu_m^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

S-au notat cu ν_m^i vîscozităţile magnetice, cu ν_i vîscozităţile cinematice şi cu μ_i vîscozităţile dinamice. Vom nota încă $\chi = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Condiţiile la limită pentru acest sistem sînt :

$$\begin{aligned} & y = h\ , && H_1 = 0,\ u_1 = -\frac{P}{\rho_1 c} \\ & y = 0\ , && u_1 = u_0 - \frac{P}{\rho_1 c},\ u_2 = u_0 - \frac{P}{\rho_2 c} \\ & y = -h, && H_2 = 0,\ u_2 = -\frac{P}{\rho_2 c} \end{aligned} \tag{8}$$

unde u_0 este valoare comună pentru v_1 şi v_2 cînd $y = 0$. Vom mai introduce şi H°, valoarea comună pentru $y = 0$ a lui H_1 şi H_2, cîmpurile magnetice în cele două regiuni. H° se poate exprima însă prin u_0 conform formulei (13) şi de aceea pentru scrierea expresiilor finale ale mărimilor ce caracterizează mişcarea, va trebui determinată valoarea u_0. Acest lucru se face scriind egalitatea eforturilor normale pe interfaţa $y = 0$:

$$\left(\mu_1 \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}y}\right)_{y=0} = \left(\mu_2 \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}y}\right)_{y=0}. \tag{9}$$

2. Rădăcinile caracteristice ale matricii **a** sînt date de :

$$\det(\lambda \mathbf{1} - \mathbf{a}) = \left[\left(\lambda^2 - \frac{c}{\nu_1}\right)\left(\lambda^2 - \frac{c}{\nu_m^1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{H_0^2}{4\pi\mu_1\nu_m^1}\lambda^2\right]\left[\left(\lambda^2 - \frac{c}{\nu_2}\right)\left(\lambda^2 - \frac{c}{\nu_m^1}\right) + \frac{H_0^2}{4\pi\mu_1\nu_m^2}\nu_m^2\right] = 0. \tag{10}$$

În cazul studiat în [1], singurele rădăcini sînt fireşte $\pm\sqrt{\frac{c}{\nu}}$.

Relaţia (10) ne permite să dăm o condiţie pentru c, corespunzătoare acestui caz; pentru realitatea tuturor rădăcinilor ecuaţiei (10), vom cere :

$$c > \max_{i=1,2}\left\{\left(\frac{A_i}{\left|\sqrt{\nu_i} - \sqrt{\nu_m^i}\right|}\right)^2\right\} \tag{11}$$

unde $A_i^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_i}$ sînt numerele lui Alfven respective.

Vom renunţa la notaţiile cu indici şi vom pune :

$$b = \frac{c}{\nu} + \frac{c}{\nu_m} - \frac{H_0^2}{4\pi\mu\nu_m},\ d^2 = b^2 - 4\frac{c}{\nu}\frac{c}{\nu_m},\ (b > 0,\ \mathrm{d} > 0$$

conform condiţiei (11)),

$$M_i^2 = \frac{c\rho_i h^2}{\mu_i},\ k_1 = \frac{c}{\nu},\ k_2 = \frac{c}{\nu_m},\ k_3 = -\frac{H_0}{\nu_m},\ k_4 = \frac{H_0}{4\pi\mu},\ q_1 =$$
$$= \frac{k_3\lambda_1}{\lambda_1^2 - k_2},\ q_2 = \frac{k_3\lambda_2}{\lambda_2^2 - k_2}. \tag{12}$$

Pentru fiecare domeniu de curgere în parte, fie λ_1, $-\lambda_1$, λ_2, $-\lambda_2$, valorile caracteristice ale matricei **a**. Se vede că dacă $H_0 \to 0$ (cazul hidrodinamic obişnuit), $k_2 \to 0$, $k_3 \to 0$, $k_4 \to 0$, $\lambda_2 \to 0$, iar λ_1 tinde la valoarea $\sqrt{\frac{c}{\nu}}$.

3. Dependenţa lui H° de u_0 se exprimă astfel :

$$H^0 = -\frac{q_1}{\operatorname{sh} M}\left[\frac{P}{\rho c} + \left(u_0 - \frac{P}{\rho c}\right)\operatorname{ch} M\right] + q_2\left\{\left(u_0 - \frac{P}{\rho c}\right)\left[2\operatorname{cth}\lambda_2 h - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\operatorname{sh}(M - \lambda_1 h)}{\operatorname{sh}\lambda_2 h \operatorname{sh} M}\right] + \frac{P}{\rho c}\frac{\operatorname{sh}\lambda_1 h}{\operatorname{sh}\lambda_2 h \operatorname{sh} M} + \frac{u_0}{\operatorname{sh}\lambda_2 h}\right\}. \tag{13}$$

Vom determina, așa cum am arătat inițial, expresiile vitezelor, și apoi folosind condiția (9), vom găsi pentru u_0 valoarea:

$$\frac{u_0 \mu_1}{Ph^2} = \frac{\dfrac{1}{M_1^2} F_1(h) - \dfrac{1}{M_2^2} F_2(-h)}{E_1(h) - \chi\, E_2(-h),}, \quad \chi = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{14}$$

iar vitezele devin:

$$\frac{u_1 \mu_1}{Ph^2} = \frac{\dfrac{1}{M_1^2} F_1(h) - \dfrac{1}{M_2^2} F_2(-h)}{E_1(h) - \chi E_2(-h)} G_1(h, y) - \frac{1}{M_1^2} H_1(h, y), \tag{15}$$

$$\frac{u_2 \mu_2}{Ph^2} = \chi \frac{\dfrac{1}{M_1^2} F_1(h) - \dfrac{1}{M_2^2} F_2(-h)}{E_1(h) - \chi E_2(-h)} G_2(-h, y) - \frac{1}{M_2^2} H_1(-h, y). \tag{16}$$

Expresia cîmpului magnetic va fi

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 H_1}{Ph^2} &= \frac{\dfrac{1}{M_1^2} F_1(h) - \dfrac{1}{M_2^2} F_2(-h)}{E_1(h) - \chi E_2(-h)} D_1(h, y) + \frac{1}{M_1^2} C_1(h, y), \\ \frac{\mu_2 H_2}{Ph^2} &= \chi \frac{\dfrac{1}{M_1^2} F_1(h) - \dfrac{1}{M_2^2} F_2(-h)}{E_1(h) - \chi E_2(-h)} D_2(-h, y) + \frac{1}{M_2^2} C_2(-h, y), \end{aligned} \tag{17}$$

iar debitul este dat de

$$Q = \int_0^h u_1 \mathrm{d}y + \int_{-h}^0 u_2 \mathrm{d}y + 2\frac{P}{\rho c} h = Q_1 + Q_2 + 2\frac{P}{\rho c} h,$$

unde Q_1 și Q_2 au expresiile:

$$\frac{\mu_1 Q_1}{Ph^2} = \frac{\dfrac{1}{M_1^2} F_1(h) - \dfrac{1}{M_2^2} F_2(-h)}{E_1(h) - \chi E_2(h)} N_1(h) - \frac{1}{M_1^2} R_1(h),$$

$$\frac{\mu_2 Q_2}{Ph^2} = \chi \frac{\dfrac{1}{M_1^2} F_1(h) - \dfrac{1}{M_2^2} F_2(-h)}{E_1(h) - \chi E_2(h)} N_2(h) - \frac{1}{M_2^2} R_2(h).$$

s-au făcut următoarele notații (indicii individualizează un anumit fluid):

$$E_i(h) = -\lambda_1^i \operatorname{cth} M_i - \lambda_2^i \frac{\operatorname{sh}(M_i - \lambda_1^i h) - \operatorname{sh} M_i}{\operatorname{sh} \lambda_2^i h \operatorname{sh} M_i}$$

$$F_i(h) = -\lambda_1^i \operatorname{cth} M_i + \lambda_1^i \frac{1}{\operatorname{sh} M_i} - \lambda_2^i \frac{\operatorname{sh}(M_i - \lambda_1^i h) + \operatorname{sh} \lambda_1^i h}{\operatorname{sh} \lambda_2^i h \operatorname{sh} M_i}.$$

$$G_i(h,y)=\frac{\operatorname{sh}(M_i-\lambda_1^i y)}{\operatorname{sh} M}-\frac{\operatorname{sh}(M-\lambda_1^i h)\operatorname{sh}\lambda_2^i y}{\operatorname{sh}\lambda_2^i h\operatorname{sh} M_i}+\frac{\operatorname{sh}\lambda_2^i y}{\operatorname{sh}\lambda_2^i h}$$

$$H_i(h,y)=G_i(h,y)-\frac{\operatorname{sh}\lambda_2^i y}{\operatorname{sh}\lambda_2^i h}+\frac{\operatorname{sh}\lambda_1^i y}{\operatorname{sh} M_i}-\frac{\operatorname{sh}\lambda_2^i y\operatorname{sh}\lambda_1^i h}{\operatorname{sh} M_i\operatorname{sh}\lambda_2^i h}$$

$$N_1(h)=-\frac{1}{\lambda_1^1}\frac{\operatorname{ch}(M_1-\lambda_1^1 h)-\operatorname{ch} M_1}{\operatorname{sh} M_1}-\frac{\operatorname{ch}\lambda_2^1 h-1}{\lambda_2^1\operatorname{sh}\lambda_2^1 h\operatorname{sh} M_1}[\operatorname{sh}(M_1-\lambda_1^1 h)-\operatorname{sh} M_1].$$

$$N_2(h)=-\frac{1}{\lambda_1^2}\frac{\operatorname{ch} M_2-\operatorname{ch}(M_2+\lambda_1^2 h)}{\operatorname{sh} M_2}+\frac{\operatorname{ch}\lambda_2^2 h-1}{\lambda_2^2\operatorname{sh}\lambda_2^2 h\operatorname{sh} M_2}[\operatorname{sh} M_2-\operatorname{sh}(M_2+\lambda_1^2 h)].$$

$$R_1(h)=N_1(h)+\frac{1}{\lambda_1^1}\frac{\operatorname{ch}\lambda_1^1 h-1}{\operatorname{sh} M_1}-\frac{1}{\lambda_2^1}\frac{\operatorname{ch}\lambda_2^1 h-1}{\operatorname{sh}\lambda_2^1 h\operatorname{sh} M_1}[\operatorname{sh}\lambda_1^1 h+\operatorname{sh} M_1].$$

$$R_2(h)=N_2(h)+\frac{1}{\lambda_1^2}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda_1^2 h}{\operatorname{sh} M_2}+\frac{1}{\lambda_2^2}\frac{1-\operatorname{ch}\lambda_2^2 h}{\operatorname{sh} M_2\operatorname{sh}\lambda_2^2 h}[\operatorname{sh}\lambda_1^2 h+\operatorname{sh} M_2].$$

Primită la redacţie la 28 martie 1966

Institutul de matematică al Academiei
Republicii Socialiste România, Str. M.
Eminescu nr. 47, Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. J. N. Kapur, J. B. Shukla, *On the unsteady flow of two incompressible immiseible fluids between two plates*. ZAMM, **44**, *6*, 268 (1964).

ASUPRA UNOR INVARIANȚI ÎN SPAȚIILE A_4 CU TORSIUNE

DE

I. MATEI

În această lucrare se arată că fiind dat un spațiu cu conexiune afină A_4 cu torsiune, se pot construi trei densități D, D_1, D_2 cu ajutorul componentelor vectorului de torsiune și conexiunii contractate și în ipoteza $D \neq 0$, doi invarianți I_1, I_2; dacă unul dintre acești invarianți nu este constant spațiul poate avea un grup de mișcări depinzînd de cel mult 6 parametri, mobilitatea maximă fiind atinsă, iar dacă cei doi invarianți sînt constanți, grupul de mișcări ale spațiului poate depinde de cel mult 9 parametri în cazul $I_2 \neq I_1^2$ și de cel mult 10 parametri în cazul $I_2 = I_1^2$. Lucrarea constituie o generalizare la spațiile A_4 a unor rezultate cunoscute în cazul spațiilor A_2 și A_3 cu torsiune [1], [2].

Fie dat spațiul A_n cu torsiune, avînd coeficienții de conexiune Γ^i_{jk}. Notînd cu T_i componentele vectorului de torsiune și cu Γ_i componentele conexiunii contractate, putem asocia spațiului formele Pfaff

$$\mathrm{d}s = T_i \, \mathrm{d}x^i \tag{1}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \Gamma_i \, \mathrm{d}x^i \tag{2}$$

prima fiind invariantă la o schimbare de variabile

$$x'^i = x'^i (x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{3}$$

iar cea de-a doua transformîndu-se după formula

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma' - \mathrm{d}\ln \Delta , \tag{4}$$

unde Δ este determinantul funcțional al transformării de variabile. Cantitățile

$$\omega_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} \tag{5}$$

fiind coeficienții covariantului biliniar al formei invariante (1), sînt componentele unui tensor strîmb simetric de ordinul doi; de asemenea

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, p. 1579—1596, BUCUREȘTI 1966.

cantitățile

$$R_{ij} = \Gamma^s_{sij} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i} \tag{6}$$

sînt componentele unui tensor strîmb simetric de ordinul doi.

Considerînd tensorul de ordinul patru

$$a_{ijkl} = \omega_{ij}\, \omega_{kl} \tag{7}$$

și folosind procedeul cunoscut [3] de antisimetrizare, obținem tensorul strîmb simetric de ordinul patru

$$a_{[ijkl]} = \frac{1}{4\,!}\, \delta^{pqrs}_{ijkl}\, a_{pqrs}\,, \tag{8}$$

unde δ^{pqrs}_{ijkl} este tensorul lui Kronecker, avînd componente diferite de zero numai dacă $(pqrs)$, $(ijkl)$ sînt permutări ale acelorași întregi, acestea fiind egale cu 1 sau —1 după cum cele două permutări fac parte din aceeași clasă sau din clase diferite.

După un calcul simplu rezultă

$$a_{[ijkl]} = \frac{1}{3}\,(\omega_{ij}\, \omega_{kl} + \omega_{ik}\, \omega_{lj} + \omega_{il}\, \omega_{jk}). \tag{9}$$

La o schimbare de variabile (3) avem

$$a_{[ijkl]} = a'_{[pqrs]}\, \frac{\partial x'^p}{\partial x^i}\, \frac{\partial x'^q}{\partial x^j}\, \frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\, \frac{\partial x'^s}{\partial x^l}. \tag{10}$$

Într-un spațiu A_4, tensorul (8) are o singură componentă distinctă nenulă, anume

$$a_{[1\,2\,3\,4]} = \frac{1}{3}\,(\omega_{12}\, \omega_{34} + \omega_{13}\, \omega_{42} + \omega_{14}\, \omega_{23}) \tag{11}$$

și formula (10) arată că avem

$$a_{[1\,2\,3\,4]} = a'_{[1\,2\,3\,4]} \cdot \Delta \tag{12}$$

și prin urmare expresia

$$\begin{aligned} D &= \omega_{12}\, \omega_{34} + \omega_{13}\, \omega_{42} + \omega_{14}\, \omega_{23} = \\ &= \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial T_3}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial T_4}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^4}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

este o densitate, adică la o schimbare de variabile se transformă după formula

$$D = D' \cdot \Delta. \tag{14}$$

Dacă în locul tensorului (7) se consideră tensorul

$$b_{ijkl} = \omega_{ij} R_{kl} \tag{15}$$

se obţine

$$b_{[1\,2\,3\,4]} = \frac{1}{6}\left(\omega_{12} R_{34} + \omega_{13} R_{42} + \omega_{14} R_{23} + \omega_{23} R_{14} + \omega_{24} R_{31} + \omega_{34} R_{12}\right) \tag{16}$$

şi deci densitatea

$$\begin{aligned} 2D_1 = {} & \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^4}\right) + \\ & + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^1}\right) + \\ & + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial T_3}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^1}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

În mod asemănător considerîndu-se tensorul

$$C_{ijkl} = R_{ij} R_{kl} \tag{18}$$

se obţine densitatea

$$\begin{aligned} D_2 = {} & \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^4}\right) + \\ & + \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^4} - \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^2}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Se verifică uşor că densitatea D dată de (13) este legată de determinantul $|\,\omega_{ij}\,|$, prin relaţia

$$D^2 = |\,\omega_{ij}\,| \tag{20}$$

şi deci dacă determinantul covariantului biliniar al formei Pfaff (1) este de rang 4, densitatea D este diferită de zero. Presupunînd că spaţiul A_4 posedă această proprietate, putem pune în evidenţă doi invarianţi absoluţi

$$I_1 = \frac{D_1}{D} \tag{21}$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{22}$$

Avem deci

TEOREMA I. *Fiind dat un spaţiu cu conexiune afină A_4 cu torsiune, putem asocia acestui spaţiu densităţile D, D_1, D_2 date de (13), (17), (19) şi în ipoteza $D \neq 0$, invarianţii I_1, I_2 daţi de (21), (22).*

În cele ce urmează vom face o discuţie a mobilităţii spaţiului în unele ipoteze asupra invarianţilor I_1, I_2.

A. Să presupunem că unul dintre cei doi invarianţi nu este constant. În acest caz putem lua acest invariant drept una din variabile de exemplu x^1 şi transformările de variabile care păstrează această situaţie sînt de forma

$$x'^1 = x^1,\ x'^\alpha = x'^\alpha(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad (\alpha = 2, 3, 4). \tag{23}$$

Faţă de această schimbare de variabile, vectorul de torsiune se transformă după formulele

$$T_1 = T'_1 + T'_\alpha \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1},\ T_\beta = T'_\alpha \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 2, 3, 4). \tag{24}$$

Rezultă [2] că faţă de (23), expresia

$$D_3 = T_2\left(\frac{\partial T_3}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^3}\right) + T_3\left(\frac{\partial T_4}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^4}\right) + T_4\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) \tag{25}$$

este o densitate.

1. *Cazul* $D_3 = 0$. În acest caz pe varietatea invariantă $x^1 =$ const. ecuaţia Pfaff $\mathrm{d}s = 0$ este integrabilă. Să observăm însă că parantezele din (25) nu pot fi toate nule, căci aceasta ar trage, după (13), $D = 0$, ceea ce contrazice ipoteza făcută că $D \neq 0$; rezultă că pe această varietate $\mathrm{d}s$ nu poate fi diferenţială totală exactă, deci poate fi numai de forma $v\mathrm{d}w$.

Ridicînd restricţia de a ne afla pe varietatea menţionată, deducem că trebuie să avem

$$\mathrm{d}s = u\ \mathrm{d}x^1 + v\mathrm{d}w, \tag{26}$$

unde u, v, w sînt funcţii determinate de variabilele x^1, x^2, x^3, x^4. Vectorul de torsiune va avea componentele

$$T_1 = u + v\frac{\partial w}{\partial x^1},\ T_2 = v\frac{\partial w}{\partial x^2},\ T_3 = v\frac{\partial w}{\partial x^3},\ T_4 = v\frac{\partial w}{\partial x^4} \tag{27}$$

şi prin calcule simple obţinem

$$\begin{aligned} &\omega_{12} = \frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{\partial(v, w)}{\partial(x^1, x^2)},\ \omega_{34} = -\frac{\partial(u, v)}{\partial(x^3, x^4)},\ \omega_{13} = \frac{\partial u}{\partial x^3} - \frac{\partial(v, w)}{\partial(x^1, x^3)} \\ &\omega_{42} = \frac{\partial(v, w)}{\partial(x^2, x^4)},\ \omega_{14} = \frac{\partial u}{\partial x^4} - \frac{\partial(v, w)}{\partial(x^1\ x^4)},\ \omega_{23} = -\frac{\partial(v, w)}{\partial(x^2, x^3)} \end{aligned} \tag{28}$$

şi apoi

$$D = \frac{\partial(w, v, u)}{\partial(x^2, x^3, x^4)}. \tag{29}$$

Deoarece am presupus $D \neq 0$, putem lua w, v, u ca variabile x^2, x^3, x^4 şi prin urmare ne reducem la a avea

$$\mathrm{d}s = x^4\ \mathrm{d}x^1 + x^3\,\mathrm{d}x^2. \tag{30}$$

Transformările de variabile (23) care păstrează această formă Pfaff sînt determinate de sistemul

$$x'^4 + x'^3 \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} = x^4, \quad x'^3 \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} = x^3, \quad x'^3 \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} = 0, \quad x'^3 \frac{\partial x'^2}{\partial x^4} = 0. \tag{31}$$

Deducem

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = \Phi(x^1, x^2), \quad x'^3 = \frac{x^3}{\Phi_2}, \quad x'^4 = x^4 - x^3 \frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \tag{32}$$

unde Φ_1, Φ_2 sînt derivatele parţiale ale funcţiei arbitrare $\Phi(x^1, x^2)$ în raport cu x^1 respectiv x^2.

Grupul de mişcări ale spaţiului va fi constituit, în cazul pe care îl studiem, din transformări de forma (32) şi trebuie să vedem de cîţi parametri poate depinde funcţia $\Phi(x^1, x^2)$. În acest scop trecînd la transformări infinitezimale în (32), obţinem

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2 + \varepsilon\varphi(x^1, x^2), \quad x'^3 = x^3 - \varepsilon\, x^3 \varphi_2, \quad x'^4 = x^4 - \varepsilon\, x^3 \varphi_1, \tag{33}$$

unde ε este o cantitate de primul ordin, iar φ_1, φ_2 derivatele parţiale ale funcţiei arbitrare $\varphi(x^1, x^2)$.

Se ştie [4] că pentru ca

$$x'^i = x^i + \varepsilon\, \xi^i \tag{34}$$

să fie transformarea infinitezimală a unei mişcări a spaţiului, trebuie ca ξ^i să verifice ecuaţiile

$$\mathfrak{L}\Gamma^i_{jk} \equiv \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^j\, \partial x^k} - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^s} \xi^s + \Gamma^i_{sk} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + \Gamma^i_{js} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \right) = 0 \tag{35}$$

numite ecuaţiile transformărilor infinitezimale ale transformărilor în el însuşi ale spaţiului.

În cazul nostru avem

$$\xi^i = \delta^i_2\, \varphi - \delta^i_3\, x^3\, \varphi_2 - \delta^i_4\, x^3\, \varphi_1, \tag{36}$$

unde δ^i_k este simbolul lui Kronecker. Se vede că ecuaţiile (35) vor conţine funcţia $\varphi(x^1, x^2)$ şi derivatele ei parţiale pînă la ordinul trei inclusiv putîndu-se normaliza în raport cu derivatele de ordinul trei. Aceste ecuaţii determină funcţia φ depinzînd de cel mult 6 constante arbitrare (numărul funcţiilor φ, φ_1, φ_2, φ_{11}, φ_{12}, φ_{22}), ceea ce atrage că grupul de mişcări ale spaţiului poate depinde de cel mult 6 parametri.

Vom arăta în continuare că acest maximum nu poate fi atins. Din (36) deducem, notînd în continuare derivatele de ordin superior ale funcţiei φ cu indici,

$$\tag{37} \begin{aligned} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} &= \delta^i_2\, \varphi_j - \delta^i_3\, \delta^3_j\, \varphi_2 - \delta^i_3\, x^3\, \varphi_{2j} - \delta^i_4\, \delta^3_j\, \varphi_1 - \delta^i_4\, x^3\, \varphi_{1j} \\ \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^i\, \partial x^k} &= \delta^i_2\, \varphi_{jk} - \delta^i_3\, \delta^3_j\, \varphi_{2k} - \delta^i_3\, \delta^3_k\, \varphi_{2j} - \delta^i_3\, x^3 \varphi_{2jk} - \delta^i_4\, \delta^3_j\, \varphi_{1k} - \delta^i_4\, \delta^3_k\, \varphi_{1j} - \delta^i_4\, x^3 \varphi_{1jk} \end{aligned}$$

şi ecuaţiile (35) devin

$$\tag{38} \begin{aligned} &\mathfrak{L}\Gamma^i_{jk} \equiv \delta^i_2 \varphi_{jk} - \delta^i_3 \delta^3_j \varphi_{2k} - \delta^i_3 \delta^3_k \varphi_{2j} - \delta^i_3 x^3 \varphi_{2jk} - \delta^i_4 \delta^1_j \varphi_{1k} - \delta^i_4 \delta^3_k \varphi_{1j} - \delta^i_4 x^3 \varphi_{1jk} + \\ &\Gamma^i_{3k} x^3 \varphi_{2j} + \Gamma^i_{4k} x^3 \varphi_{1j} + \Gamma^i_{j3} x^3 \varphi_{2k} + \Gamma^i_{j4} x^3 \varphi_{1k} - \delta^i_3 x^3 \Gamma^s_{jk} \varphi_{2s} - \delta^i_4 x^3 \Gamma^s_{jk} \varphi_{1s} + \ldots = 0 \end{aligned}$$

termenii nescriși neconținînd derivate de ordinul doi sau trei ale funcției φ. Pentru ca acest sistem să admită soluție depinzînd de 6 constante arbitrare, este necesar ca toate ecuațiile care nu conțin derivate de ordinul trei să fie identic satisfăcute în raport cu derivatele pe care le conțin. Să arătăm că aceasta nu este posibil. Într-adevăr, în ecuațiile

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{42} &\equiv \Gamma^1_{42}\,\varphi_{11} + (\Gamma^2_{42} - \Gamma^4_{44})\,\varphi_{12} - \Gamma^4_{43}\,\varphi_{22} + \ldots = 0\\
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{13} &\equiv \left(\Gamma^1_{13} - \Gamma^4_{43} + \frac{1}{x^3}\right)\varphi_{11} + (\Gamma^2_{13} - \Gamma^4_{33})\,\varphi_{12} + \ldots = 0\\
\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^1_{12} &\equiv \Gamma^1_{42}\,\varphi_{11} + (\Gamma^1_{32} + \Gamma^1_{14})\,\varphi_{12} + \Gamma^1_{13}\,\varphi_{22} + \ldots = 0
\end{aligned}\tag{39}$$

anularea coeficienților derivatelor φ_{11}, φ_{22} duce la o contradicție. Considerăm ecuațiile

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{42} &\equiv \Gamma^1_{42}\,\varphi_{11} + (\Gamma^2_{42} - \Gamma^4_{44})\,\varphi_{12} - \Gamma^4_{43}\,\varphi_{22} + \ldots = 0\\
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{24} &\equiv \Gamma^1_{24}\,\varphi_{11} + (\Gamma^2_{24} - \Gamma^4_{44})\,\varphi_{12} - \Gamma^4_{34}\,\varphi_{22} + \ldots = 0\\
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{23} &\equiv \Gamma^1_{23}\,\varphi_{11} + \left(\Gamma^2_{23} - \Gamma^4_{43} + \frac{1}{x^3}\right)\varphi_{12} - \Gamma^4_{33}\,\varphi_{22} + \ldots = 0\\
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{32} &\equiv \Gamma^1_{32}\,\varphi_{11} + \left(\Gamma^2_{32} - \Gamma^4_{34} + \frac{1}{x^3}\right)\varphi_{12} - \Gamma^4_{33}\,\varphi_{22} + \ldots = 0\\
\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^2_{22} &\equiv (\Gamma^2_{24} + \Gamma^2_{42})\,\varphi_{12} + \left(\Gamma^2_{23} + \Gamma^2_{32} + \frac{1}{x^3}\right)\varphi_{22} + \ldots = 0.
\end{aligned}\tag{40}$$

Anulînd coeficienții derivatelor φ_{12}, φ_{22}, ajungem la o contradicție. Dacă luăm acum ecuațiile

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{31} &\equiv \left(\Gamma^1_{31} - \Gamma^4_{34} + \frac{1}{x^3}\right)\varphi_{11} + (\Gamma^2_{31} - \Gamma^4_{33})\,\varphi_{12} + \ldots = 0\\
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{13} &\equiv \left(\Gamma^1_{13} - \Gamma^4_{43} + \frac{1}{x^3}\right)\varphi_{11} + (\Gamma^2_{13} - \Gamma^4_{33})\,\varphi_{12} + \ldots = 0\\
\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^1_{11} &\equiv (\Gamma^1_{41} + \Gamma^1_{14})\,\varphi_{11} + (\Gamma^1_{31} + \Gamma^1_{13})\,\varphi_{12} + \ldots = 0\\
\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^2_{11} &\equiv \left(\Gamma^2_{41} + \Gamma^2_{14} + \frac{1}{x^3}\right)\varphi_{11} + (\Gamma^2_{31} + \Gamma^2_{13})\,\varphi_{12} + \ldots = 0\\
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{14} &= (\Gamma^1_{14} - \Gamma^4_{44})\,\varphi_{11} + (\Gamma^2_{14} - \Gamma^4_{34})\,\varphi_{12} + \ldots = 0\\
-\frac{1}{x^3}\,\mathfrak{L}\,\Gamma^4_{41} &\equiv (\Gamma^1_{41} - \Gamma^4_{44})\,\varphi_{11} + (\Gamma^2_{41} - \Gamma^4_{43})\,\varphi_{12} + \ldots = 0
\end{aligned}\tag{41}$$

anularea coeficienţilor derivatelor φ_{11}, φ_{12} este imposibilă. Deoarece nu putem anula coeficienţii a două din derivatele de ordinul doi ale funcţiei φ în acele ecuaţii (38) care nu conţin derivate de ordinul trei, rezultă că soluţia sistemului (38) depinde de cel mult 4 constante arbitrare. Rezultă

TEOREMA II. *Mobilitatea unui spaţiu A_4 avînd unul dintre invarianţii I_1, I_2 egal cu x^1 şi densitatea $D_3 = 0$, depinde de cel mult 4 parametri.*

2. *Cazul $D_3 \neq 0$.* Vom distinge două posibilităţi, după cum raportul

$$\frac{D}{D_3} = I_3 \tag{42}$$

care este un invariant faţă de transformările (23), depinde de cel puţin una dintre variabilele x^2, x^3, x^4 sau nu depinde de aceste variabile.

2.1. Considerăm cazul I_3 nedepinzînd de variabilele x^2, x^3, x^4. Să scriem în acest caz egalitatea (42) sub forma dezvoltată, anume

$$\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^1} - I_3 T_2\right)\left(\frac{\partial T_3}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1} - I_3 T_3\right)\left(\frac{\partial T_4}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^4}\right) + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^1} - I_3 T_4\right)\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{43}$$

Această ecuaţie arată că există un factor $\lambda\,(x^1)$ cu proprietatea că densitatea D^* calculată după formula (13), pentru forma Pfaff invariantă

$$\mathrm{d}s^* = \lambda\,\mathrm{d}s = \lambda T_i\,\mathrm{d}x^i = T_i^*\,\mathrm{d}x^i,\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{44}$$

este egală cu zero. Într-adevăr, egalitatea

$$D^* = \left(\frac{\partial T_1^*}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2^*}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial T_3^*}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4^*}{\partial x^3}\right) + \left(\frac{\partial T_1^*}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3^*}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial T_4^*}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2^*}{\partial x^4}\right) + \left(\frac{\partial T_1^*}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4^*}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial T_2^*}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3^*}{\partial x^2}\right) \tag{45}$$

se poate scrie, ţinînd seama de (44), sub forma

$$D^* = \lambda^2\left(D - \frac{\lambda'}{\lambda} D_3\right) \tag{46}$$

şi este suficient să luăm

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = I_3 \tag{47}$$

pentru a avea $D^* = 0$. Ţinînd seama de (20), rezultă că forma Pfaff $\mathrm{d}s^*$ are covariantul biliniar de rang mai mic decît 4. Prin urmare factorul $\lambda\,(x^1)$ reduce rangul covariantului biliniar al formei $\mathrm{d}s$, fiind asemănător unui factor integrant. Putem preciza observînd că parantezele din (45) nu pot fi toate nule, deoarece aceasta ar atrage $D = 0$, care contrazice ipoteza făcută, că forma Pfaff $\mathrm{d}s^*$ are covariant biliniar de rang 2 şi prin urmare este de forma

$$\mathrm{d}s^* = \lambda\ \mathrm{d}s = u\mathrm{d}v + \mathrm{d}w. \tag{48}$$

Rezultă

$$(49)\qquad ds = \frac{1}{\lambda}(u\, dv + dw)$$

apoi

$$(50)\qquad \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial v}{\partial x^1} + \frac{\partial w}{\partial x^1}\right), & T_2 &= \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x^2}\right), \\ T_3 &= \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial v}{\partial x^3} + \frac{\partial w}{\partial x^3}\right), & T_4 &= \frac{1}{\lambda}\left(u\frac{\partial v}{\partial x^4} + \frac{\partial w}{\partial x^4}\right). \end{aligned}$$

Deducem cu ușurință

$$(51)\qquad \omega_{34} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x^3, x^4)}, \quad \omega_{42} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x^2, x^4)}, \quad \omega_{23} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x^2, x^3)}$$

și ținînd seama de (42) obținem

$$(52)\qquad D = I_3 D_3 = -\frac{I_3}{\lambda^2}\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x^2, x^3, x^4)} = -\frac{\lambda'}{\lambda^3}\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x^2, x^3, x^4)}$$

Deoarece sîntem în ipoteza $D \neq 0$, putem lua u, v, w, ca variabile x^2, x^3, x^4 și ne reducem astfel la a avea

$$(53)\qquad D = -\frac{\lambda'}{\lambda^3},$$

$$(54)\qquad ds = \frac{1}{\lambda}(x^2\, dx^3 + dx^4),$$

unde funcția $\lambda(x^1)$ este o soluție a ecuației (47).

Transformările de variabile (23) care păstrează forma canonică (54) sînt determinate de sistemul

$$(55)\qquad \begin{aligned} & x'^2\frac{\partial x'^3}{\partial x^1} + \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} = 0, & & x'^2\frac{\partial x'^3}{\partial x^2} + \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} = 0, \\ & x'^2\frac{\partial x'^3}{\partial x^3} + \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} = x^2, & & x'^2\frac{\partial x'^3}{\partial x^4} + \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = 1 \end{aligned}$$

Căutînd soluții de forma

$$(56)\qquad x'^1 = x^1, \; x'^2 = x^2 + \varepsilon\varphi, \; x'^3 = x^3 + \varepsilon\psi, \; x'^4 = x^4 + \varepsilon\eta,$$

unde ε este o cantitate de primul ordin și neglijînd termenii de ordin superior în ε, sistemul (55) devine

$$(57)\qquad \begin{aligned} & x^2\frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \frac{\partial \eta}{\partial x^1} = 0, & & x^2\frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x^2} = 0, \\ & x^2\frac{\partial \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial \eta}{\partial x^3} + \varphi = 0, & & x^2\frac{\partial \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial \eta}{\partial x^4} = 0. \end{aligned}$$

Acest sistem se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(x^2\psi+\eta)=0,\ \frac{\partial}{\partial x^2}(x^2\psi+\eta)=\psi,\ \frac{\partial}{\partial x^3}(x^2\psi+\eta)+\varphi=0,\ \frac{\partial}{\partial x^4}(x^2\psi+\eta)=0 \tag{58}$$

şi notînd

$$x^2\psi+\eta=\Phi, \tag{59}$$

se vede că funcţia Φ poate depinde numai de variabilele x^2, x^3; rezultă

$$\varphi=-\frac{\partial\Phi}{\partial x^3},\quad \psi=\frac{\partial\Phi}{\partial x^2},\quad \eta=\Phi-x^2\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}. \tag{60}$$

Dacă notăm derivatele parţiale ale funcţiei $\Phi(x^2, x^3)$ cu indici, ecuaţiile (56) se scriu

$$x'^1=x^1,\ x'^2=x^2-\varepsilon\Phi_3,\ x'^3=x^3+\varepsilon\Phi_2,\ x'^4=x^4+\varepsilon(\Phi-x^2\Phi_2). \tag{61}$$

Ne-am redus astfel la a avea

$$\xi^1=0,\quad \xi^2=-\Phi_3,\quad \xi^3=\Phi_2,\quad \xi^4=\Phi-x^2\Phi_2 \tag{62}$$

şi ecuaţiile (35) conţin derivatele parţiale ale funcţiei Φ pînă la ordinul trei inclusiv, putîndu-se normaliza în raport cu derivatele de ordinul trei. Acest sistem admite soluţia $\Phi(x^2, x^3)$, depinzînd de cel mult 6 constante arbitrare şi deci grupul de mişcări ale spaţiului poate depinde de cel mult 6 parametri.

Ne punem problema de a vedea dacă mobilitatea maximă este atinsă. În acest scop să considerăm condiţiile necesare impuse de conexiunea contractată Γ_i, ca (61) să constituie transformările infinitezimale ale unei mişcări a spaţiului. Observăm mai întîi că determinantul transformării (61), abstracţie făcînd de termeni de ordin superior în ε, este egal cu 1. Rezultă, după (4), că faţă de o astfel de transformare, Γ_i se comportă ca un vector şi deci condiţiile impuse de conexiunea contractată Γ_i se scriu

$$\pounds\Gamma_i\equiv\frac{\partial\Gamma_i}{\partial x^s}\xi^s+\Gamma_s\frac{\partial\xi^s}{\partial x^i}=0, \tag{63}$$

unde ξ^s au valorile din (62). Scriind aceste ecuaţii sub formă dezvoltată, obţinem

$$\begin{aligned}
&\pounds\Gamma_1\equiv\frac{\partial\Gamma_1}{\partial x^4}\Phi+\left(\frac{\partial\Gamma_1}{\partial x^3}-x^2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial x^4}\right)\Phi_2-\frac{\partial\Gamma_1}{\partial x^2}\Phi_3=0\\
&\pounds\Gamma_2\equiv\frac{\partial\Gamma_2}{\partial x^4}\Phi+\left(\frac{\partial\Gamma_2}{\partial x^3}-x^2\frac{\partial\Gamma_2}{\partial x^4}\right)\Phi_2-\frac{\partial\Gamma_2}{\partial x^2}\Phi_3+(\Gamma_3-\\
&\qquad -x^2\Gamma_4)\Phi_{22}-\Gamma_2\Phi_{23}=0\\
&\pounds\Gamma_3\equiv\frac{\partial\Gamma_3}{\partial x^4}\Phi+\left(\frac{\partial\Gamma_3}{\partial x^3}-x^2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial x^4}\right)\Phi_2+\left(\Gamma_4-\frac{\partial\Gamma_3}{\partial x^2}\right)\Phi_3+\\
&\qquad +(\Gamma_3-x^2\Gamma_4)\Phi_{23}-\Gamma_2\Phi_{33}=0\\
&\pounds\Gamma_4\equiv\frac{\partial\Gamma_4}{\partial x^4}\Phi+\left(\frac{\partial\Gamma_4}{\partial x^3}-x^2\frac{\partial\Gamma_4}{\partial x^4}\right)\Phi_2-\frac{\partial\Gamma_4}{\partial x^3}\Phi_3=0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Pentru ca spațiul să admită grup de mișcări cu 6 parametri, este necesar ca aceste ecuații care nu conțin derivate de ordinul trei ale funcției Φ, să fie identic satisfăcute în raport cu funcția Φ și derivatele ei parțiale care figurează în aceste ecuații. Se vede imediat că aceasta atrage

$$\Gamma_1 = \alpha\,(x^1),\ \Gamma_2 = 0,\ \Gamma_3 = x^2\,\beta\,(x^1),\ \Gamma_4 = \beta\,(x^1). \tag{65}$$

Să calculăm în aceste condiții invarianții I_1, I_2. Deducem

$$R_{12} = 0,\ R_{34} = 0,\ R_{13} = -\,x^2\,\beta,\ R_{42} = 0,\ R_{14} = -\,\beta',\ R_{23} = -\,\beta \tag{66}$$

și de asemenea ținînd seama de (54)

$$\omega_{12} = 0,\ \omega_{34} = 0,\ \omega_{13} = \frac{x^2\lambda'}{\lambda^2},\ \omega_{42} = 0,\ \omega_{14} = \frac{\lambda'}{\lambda^2},\ \omega_{23} = -\,\frac{1}{\lambda} \tag{67}$$

astfel că

$$2D_1 = -\,\frac{\lambda'}{\lambda^2}\,\beta + \frac{1}{\lambda}\,\beta',\quad D_2 = \beta\beta' \tag{68}$$

și deoarece densitatea D este dată de (53), rezultă

$$I_1 = -\,\frac{\lambda^3}{2\lambda'}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)',\quad I_2 = -\,\frac{\lambda^3}{\lambda'}\,\beta\beta'. \tag{69}$$

Dacă I_1 a fost luat ca variabilă x^1, atunci funcția $\beta\,(x^1)$ este determinată de ecuația

$$\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)' = \frac{-2\,\lambda' x^1}{\lambda^3} \tag{70}$$

iar dacă I_2 a fost luat ca variabilă x^1, de ecuația

$$\beta\beta' = -\,\frac{\lambda'\,x^1}{\lambda^3}, \tag{71}$$

unde $\lambda\,(x^1)$ este o soluție a ecuației (47).

În concluzie, pentru ca spațiul să admită grup de mișcări cu 6 parametri, este necesar ca conexiunea contractată să aibă componentele date de (65) cu funcția $\beta\,(x^1)$ determinată cum s-a arătat mai sus. Astfel spațiul A_4 avînd componentele conexiunii

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{14} = \beta\,(x^1),\ \Gamma^1_{41} = \beta\,(x^1) - \frac{1}{\lambda\,(x^1)}\\ \Gamma^1_{13} = x^2\,\beta\,(x^1),\ \Gamma^1_{31} = x^2\,\beta\,(x^1) - \frac{x^2}{\lambda\,(x^1)}\\ \Gamma^4_{32} = \Gamma^4_{23} = -\,\frac{1}{2}\end{gathered} \tag{72}$$

și toate celelalte componente nule, are forma Pfaff (54), invariant $I_1 = x^1$ sau $I_2 = x^1$ după cum $\beta\,(x^1)$ satisface (70) sau (71) și invariant $I_3 = \dfrac{\lambda'}{\lambda}$.

Se poate verifica că acest spaţiu (în fiecare din cele două ipoteze asupra funcţiei $\beta(x^1)$), posedă grupul de mişcări

$$(73)\qquad \begin{aligned} x'^1 &= x^1\\ x'^2 &= a_1 + a_2x^2 + a_3x^3\\ x'^3 &= b_1 + b_2x^2 + b_3x^3\\ x'^4 &= c_1 - a_1b_2x^2 - a_1b_3x^3 - \frac{a_2b_2\,(x^2)^2}{2} - a_3b_2x^2x^3 - \frac{a_3b_3\,(x^3)^2}{2} + x^4 \end{aligned}$$

în care

$$(74)\qquad a_2b_3 - a_3b_2 = 1$$

grup care depinde efectiv de 6 parametri.

Avem deci

TEOREMA III. *Mobilitatea unui spaţiu A_4, avînd unul dintre invarianţii I_1, I_2, egal cu x^1 şi invariant I_3 nedepinzînd de variabilele x^2, x^3, x^4, depinde de cel mult 6 parametri, mobilitatea maximă fiind atinsă.*

2.2. Considerăm acum cazul I_3 depinzînd de cel puţin una dintre variabilele x^2, x^3, x^4. Folosind eventual o schimbare de variabile (23), putem presupune că I_3 depinde de x^2. Luînd I_3 ca variabilă x^2, transformările (23) care păstrează această situaţie sînt de forma

$$(75)\qquad x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x'^3\,(x^1, x^2, x^3, x^4),\ x'^4 = x'^4\,(x^1, x^2, x^3, x^4).$$

Faţă de aceste transformări avem

$$(76)\qquad T_1 = T'_1 + T'_\alpha\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^1},\quad T_2 = T'_2 + T'_\alpha\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^2},\quad T_\beta = T'_\alpha\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta},\quad (\alpha, \beta = 3, 4)$$

şi deci avem densităţile

$$(77)\qquad D_4 = T_1\left(\frac{\partial T_3}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^3}\right) + T_3\left(\frac{\partial T_4}{\partial x^1} - \frac{\partial T_1}{\partial x^4}\right) + T_4\left(\frac{\partial T_1}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^1}\right)$$

$$(78)\qquad D_5 = \frac{\partial T_3}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^3}$$

Avem posibilităţile :

2.2. a. Cazul $D_4 = 0$, $D_5 = 0$. În acest caz a doua egalitate arată că pe varietatea definită de ecuaţiile $x^1 = k^1$, $x^2 = k^2$ cu k^1, k^2 constante, forma Pfaff ds este o diferenţială totală exactă, care nu poate fi nulă căci $T_3 = 0$, $T_4 = 0$ ar atrage $D_3 = 0$. Rezultă că forma Pfaff ds este de forma

$$(79)\qquad \mathrm{d}s = u\,\mathrm{d}x^1 + v\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}w$$

şi prin urmare componentele vectorului de torsiune de forma

$$(80)\qquad T_1 = u + \frac{\partial w}{\partial x^1},\quad T_2 = v + \frac{\partial w}{\partial x^2},\quad T_3 = \frac{\partial w}{\partial x^3},\quad T_4 = \frac{\partial w}{\partial x^4}$$

Folosind egalitatea (42) și faptul că $I_3 = x^2$, deducem

$$(81)\qquad D = x^2 \frac{\partial (v, w)}{\partial (x^3, x^4)} \neq 0$$

deci putem lua v, w ca variabile x^3, x^4; ne reducem astfel la a avea

$$(82)\qquad D = x^2,\ \mathrm{d}s = u\mathrm{d}x^1 + x^3\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^4.$$

Pe de altă parte un calcul direct după (13), pentru această formă Pfaff, conduce la

$$(83)\qquad D = \frac{\partial u}{\partial x^4}.$$

Din cele două expresii găsite pentru D, rezultă

$$(84)\qquad u = x^2x^4 + \alpha\,(x^1, x^2, x^3).$$

Calculînd și densitatea D_4 obținem

$$(85)\qquad D_4 = \frac{\partial \alpha}{\partial x^3}$$

și deoarece prin ipoteză $D_4 = 0$, egalitatea (84) devine

$$(86)\qquad u = x^2x^4 + \alpha\,(x^1, x^2)$$

iar forma Pfaff (82) se scrie

$$(87)\qquad \mathrm{d}s = [x^2\,x^4 + \alpha\,(x^1, x^2)]\,\mathrm{d}x^1 + x^3\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^4.$$

Transformările (75) care păstrează forma Pfaff (87) sînt determinate de sistemul

$$(88)\qquad x^2x'^4 + \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} = x^2x^4,\ x'^3 + \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} = x^3,\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = 1.$$

Se deduce

$$(89)\qquad x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3 + (\beta x^1 - \beta')\,\mathrm{e}^{-x^1x^2},\ x'^4 = x^4 + \beta\mathrm{e}^{-x^1x^2},$$

unde β este o funcție arbitrară de variabila x^2 și este evident că în acest caz spațiul poate avea grup de mișcări depinzînd de cel mult 3 parametri, deci avem

TEOREMA IV. *Mobilitatea unui spațiu A_4 avînd unul dintre invarianții I_1, I_2 egal cu x^1, invariantul I_3 egal cu x^2 și densitățile $D_4 = 0$, $D_5 = 0$ depinde de cel mult 3 parametri.*

2.2. b. Cazul în care $D_4 \neq 0$, $D_5 = 0$, însă invariantul

$$(90)\qquad \frac{D}{D_4} = I_4$$

nu depinde de variabilele x^3, x^4. În acest caz sînt valabile toate formulele de la cazul precedent, pînă la (85) inclusiv. În continuare din (82), (85) și (90) rezultă

$$(91)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x^3} = \frac{x^2}{I_4}$$

din care deducem

$$\alpha\,(x^1, x^2, x^3) = \frac{x^2 x^3}{I_4} + \gamma\,(x^1, x^2) \tag{92}$$

şi apoi

$$u = x^2\,x^4 + \frac{x^2\,x^3}{I_4} + \gamma\,(x^1, x^2). \tag{93}$$

Înlocuind funcţia u în (82) obţinem

$$\mathrm{d}s = \left[x^2\,x^4 + \frac{x^2\,x^3}{I_4} + \gamma\,(x^1, x^2)\right]\mathrm{d}x^1 + x^3\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^4. \tag{94}$$

Transformările de variabile (75) care păstrează această formă Pfaff sînt determinate de sistemul

$$\begin{gathered} x^2\,x'^4 + \frac{x^2\,x'^3}{I_4} + \frac{\partial x'^4}{\partial x^1} = x^2\,x^4 + \frac{x^2 x^3}{I_4},\ x'^3 + \frac{\partial x'^4}{\partial x^2} = x^3, \\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial x'^4}{\partial x^4} = 1. \end{gathered} \tag{95}$$

Căutînd soluţiile de forma

$$x'^3 = x^3 + \varepsilon\varphi,\ x'^4 = x^4 + \varepsilon\psi \tag{96}$$

obţinem

$$x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3 - \varepsilon\psi_2,\ x'^4 = x^4 + \varepsilon\psi \tag{97}$$

în care funcţia ψ depinde numai de variabilele invariante x^1, x^2 şi care satisface ecuaţia cu derivate parţiale de primul ordin

$$x^2\psi - x^2\frac{\psi_2}{I_4} + \psi_1 = 0 \tag{98}$$

$\left(\text{am notat } \psi_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^1},\ \psi_2 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)$. Se vede că dacă folosim ecuaţia (98), atunci ecuaţiile (35) conţin numai ψ, ψ_1, ψ_{11}, ψ_{111} şi deci ele determină funcţia ψ depinzînd de cel mult 3 constante arbitrare.

Avem astfel

TEOREMA V. *Mobilitatea unui spaţiu A_4 avînd unul dintre invarianţii I_1, I_2 egal cu x^1 invariantul I_3 egal cu x^2, invariantul I_4 nedepinzînd de variabilele x^3, x^4 şi densitatea $D_5 = 0$, depinde de cel mult 3 parametri.*

2.2. c. Cazul în care $D_4 = 0$, $D_5 \neq 0$ însă invariantul

$$\frac{D_3}{D_5} = I_5 \tag{99}$$

nu depinde de variabilele x^3, x^4. În acest caz, scriind dezvoltat egalitatea (99), deducem

$$(T_2 - I_5)\left(\frac{\partial T_3}{\partial x^4} - \frac{\partial T_4}{\partial x^3}\right) + T_3\left(\frac{\partial T_4}{\partial x^2} - \frac{\partial T_2}{\partial x^4}\right) + T_4\left(\frac{\partial T_2}{\partial x^3} - \frac{\partial T_3}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{100}$$

care arată că pe varietatea $x^1 = \text{constant}$, avem

$$(T_2 - I_5)\,\mathrm{d}x^2 + T_3\,\mathrm{d}x^3 + T_4\,\mathrm{d}x^4 = v\,\mathrm{d}w. \tag{101}$$

Aceasta înseamnă că forma Pfaff ds trebuie să aibă forma

$$\mathrm{d}s = u\mathrm{d}x^1 + I_5\,\mathrm{d}x^2 + v\mathrm{d}w. \tag{102}$$

Calculînd densitatea D_5, obținem

$$D_5 = \frac{\partial\,(v,\, w)}{\partial\,(x^4,\, x^3)} \tag{103}$$

și deoarece aceasta este presupusă diferită de zero, putem lua v, w ca variabile x^4, x^3, reducîndu-ne astfel la a avea

$$D_5 = 1,\ \mathrm{d}s = u\mathrm{d}x^1 + I_5\mathrm{d}x^2 + x^4\,\mathrm{d}x^3. \tag{104}$$

Transformările de variabile (75) care păstrează această formă sînt determinate de sistemul

$$\begin{gathered} u\,(x^1, x^2, x'^3, x'^4) + x'^4\frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \\ x'^4\frac{\partial\, x'^3}{\partial\, x^2} = 0,\quad x'^4\frac{\partial\, x'^3}{\partial\, x^3} = x^4,\quad x'^4\frac{\partial\, x'^3}{\partial\, x^4} = 0. \end{gathered} \tag{105}$$

Trecînd la transformări infinitezimale, deducem

$$x'^1 = x^1, x'^2 = x^2, x'^3 = x^3 + \varepsilon\varphi(x^1,\, x^3),\ x'^4, = x^4 - \varepsilon x^4\varphi_3(x^1,\, x^3), \tag{106}$$

funcția $\varphi(x^1, x^3)$ satisfăcînd ecuația

$$\varphi\,\frac{\partial\, u}{\partial\, x^3} - x^4\varphi_3\,\frac{\partial u}{\partial\, x^4} + x^4\varphi_1 = 0\ ; \tag{107}$$

avem deci

$$\xi^1 = 0,\ \xi^2 = 0\ \ \xi^3 = \varphi,\ \xi^4 = -\,x^4\varphi_3. \tag{108}$$

Eliminînd derivatele în raport cu x^1 ale funcției φ, cu ajutorul ecuației (107), deducem că ecuațiile de mișcare (35) conțin funcția $\varphi(x^1, x^3)$ și derivatele ei parțiale.

$$\varphi_3, \varphi_{33}, \varphi_{333}. \tag{109}$$

și avem astfel

TEOREMA VI. *Mobilitatea unui spațiu A_4 avînd unul dintre invarianții I_1, I_2, egal cu x^1, invariantul I_3 egal cu x^2, invariantul I_5 nedepinzînd de variabilele x^3, x^4 și densitatea $D_4 = 0$, depinde de cel mult trei parametri.*

2.2. d. Cazul în care $D_4 \neq 0$, $D_5 \neq 0$, însă invarianții I_4, I_5 nu depind de variabilele x^3, x^4. Rămîn valabile formulele de la cazul precedent și deci avem

TEOREMA VII. *Mobilitatea unui spațiu A_4 avînd unul dintre invarianții I_1, I_2 egal cu x^1, invariantul I_3 egal cu x^2 și invarianții I_4, I_5 nedepinzînd de variabilele x^3, x^4, depinde de cel mult trei parametri.*

2.2. e. Cazul în care unul dintre invarianţii I_4, I_5 depinde de cel puţin una din variabilele x^3, x^4. În acest caz ne putem aranja să luăm acest invariant ca variabilă x^3 şi transformările de variabile (75) care păstrează această situaţie sînt

$$x'^1 = x^1,\ x'^2 = x^2,\ x'^3 = x^3,\ x'^4 = x'^4\,(x^1, x^2, x^3, x^4). \tag{110}$$

Faţă de aceste transformări avem

$$T_i = T'_i + T'_4 \frac{\partial x'^4}{\partial x^i},\ T_4 = T'_4 \frac{\partial x'^4}{\partial x^4}, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{111}$$

Dacă $T_4 = 0$, atunci formulele (111) arată că T_1, T_2, T_3 sînt invarianţi şi unul cel puţin dintre aceştia depinde de x^4, deoarece în caz contrar ar rezulta $D = 0$. Luînd acest invariant ca variabilă x^4, ne reducem la grupul identitate.

Dacă $T_4 \neq 0$, notînd $x'^4 = x^4 + \varepsilon u$ şi folosind condiţiile necesare impuse de vectorul de torsiune pentru ca (110) să fie o mişcare a spaţiului, obţinem

$$\begin{aligned} &\pounds\, T_1 \equiv u \frac{\partial T_1}{\partial x^4} + T_4 \frac{\partial u}{\partial x^1} = 0,\ \pounds\, T_2 \equiv u \frac{\partial T_2}{\partial x^4} + T_4 \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0 \\ &\pounds\, T_3 \equiv u \frac{\partial T_3}{\partial x^4} + T_4 \frac{\partial u}{\partial x^3} = 0,\ \pounds\, T_4 \equiv u \frac{\partial T_4}{\partial x^4} + T_4 \frac{\partial u}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \tag{112}$$

De aici rezultă ecuaţia

$$\mathrm{d}u + \frac{u}{T_4} \frac{\partial T_s}{\partial x^4} \mathrm{d}x^s = 0 \tag{113}$$

care determină funcţia u depinzînd de cel mult o constantă arbitrară, deci

TEOREMA VIII. *Mobilitatea unui spaţiu A_4 avînd unul dintre invarianţii I_1, I_2 egal cu x^1, invariantul I_3 egal cu x^2 şi unul dintre invarianţii I_4, I_5 depinzînd de cel puţin una dintre variabilele x^3, x^4, depinde de cel mult un parametru.*

Ţinînd seama de toate rezultatele obţinute, putem enunţa următoarea teoremă

TEOREMA IX. *Mobilitatea unui spaţiu A_4 avînd unul dintre invarianţii I_1, I_2 neconstant, depinde de cel mult 6 parametri.*

Luînd acest invariant ca variabilă x^1, mobilitatea maximă este atinsă în cazul spaţiilor care au densitatea $D_3 \neq 0$ nedepinzînd de variabilele x^2, x^3, x^4.

B. Să considerăm acum cazul în care cei doi invarianţi sînt constanţi

$$I_1 = K_1,\ I_2 = K_2. \tag{114}$$

Deoarece sîntem în ipoteza $D \neq 0$, putem reduce forma Pfaff $\mathrm{d}s$ la forma canonică

$$\mathrm{d}s = x^1 \mathrm{d}x^2 + x^4 \mathrm{d}x^3 \tag{115}$$

și transformările de variabile care păstrează această formă canonică sînt determinate de sistemul

$$
(116)\qquad \begin{aligned}
&x'^1 \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} + x'^4 \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} = 0, \quad x'^1 \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} + x'^4 \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} = 1\\
&x'^1 \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} + x'^4 \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} = x^4, \quad x'^1 \frac{\partial x'^2}{\partial x^4} + x'^4 \frac{\partial x'^3}{\partial x^4} = 0
\end{aligned}
$$

Vom căuta soluții de forma

$$
(117)\qquad x'^i = x^i + \varepsilon \xi^i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)
$$

cu ε cantitatea de primul ordin. Neglijînd termenii de ordin superior în ε, sistemul (116) se scrie

$$
(118)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^1}(x^1\xi^2 + x^4\xi^3) = \xi^2, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}(x^1\xi^2 + x^4\xi^3) = -\xi^1,\\
&\frac{\partial}{\partial x^3}(x^1\xi^2 + x^4\xi^3) = -\xi^4, \quad \frac{\partial}{\partial x^4}(x^1\xi^2 + x^4\xi^3) = \xi^3.
\end{aligned}
$$

Dacă notăm

$$
(119)\qquad x^1\xi^2 + x^4\xi^3 = \Phi,
$$

obținem

$$
(120)\qquad \xi^1 = -\Phi_2,\ \xi^2 = \Phi_1,\ \xi^3 = \Phi_4,\ \xi^4 = -\Phi_3,
$$

unde $\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$. Din (119) și (120) rezultă că funcția Φ trebuie să satisfacă ecuația cu derivate parțiale

$$
(121)\qquad x^1 \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + x^4 \frac{\partial \Phi}{\partial x^4} = \Phi.
$$

Prin urmare Φ trebuie să fie o funcție omogenă de gradul 1 de omogeneitate în raport cu variabilele x^1, x^4, deci de forma

$$
(122)\qquad \Phi = x^1 \psi\left(\frac{x^4}{x^1},\ x^2, x^3\right).
$$

În cele ce urmează vom nota derivatele parțiale ale funcției ψ în raport cu argumentele $\frac{x^4}{x^1}$, x^2, x^3 prin ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Formulele (120) devin

$$
(123)\qquad \xi^1 = -x^1\psi_2,\ \xi^2 = \psi - \frac{x^4}{x^1}\psi_1,\ \xi^3 = \psi_1,\ \xi^4 = -x^1\psi_3
$$

și ecuațiile (35) vor conține în acest caz funcția ψ și derivatele ei parțiale pînă la ordinul trei inclusiv, putîndu-se normaliza în raport cu derivatele de ordinul trei. Rezultă că aceste ecuații determină funcția ψ depinzînd de cel mult 10 constante arbitrare.

Folosind prin urmare numai restricția impusă de ipoteza $D \neq 0$, putem afirma că grupul de mișcări ale spațiului poate depinde de cel mult 10 parametri, rezultat care este cunoscut [5], pentru spațiile cu formă Pfaff invariantă neintegrabilă.

Să vedem acum dacă invarianții (114) reduc sau nu acest număr de parametri. Să observăm mai întîi că din (123) rezultă

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} + \frac{\partial \xi^4}{\partial x^4} = 0 \tag{124}$$

ceea ce arată că, abstracție făcînd de termeni de ordin superior în ε, transformarea (117) are determinantul funcțional $\Delta = 1$ și deci față de aceasta, conexiunea contractată Γ_i se comportă ca un vector. Condițiile necesare impuse de Γ_i pentru a avea o mișcare a spațiului sînt

$$\mathfrak{L}\,\Gamma_i \equiv \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^s}\,\xi^s + \Gamma_s\,\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} = 0. \tag{125}$$

Aceste ecuații se scriu

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\,\Gamma_1 \equiv {} & \frac{x^4}{(x^1)^2}\left(\Gamma_2\,\frac{x^4}{x^1} - \Gamma_3\right)\psi_{11} + \frac{x^4}{x^1}\,\Gamma_1\,\psi_{12} + \frac{x^4}{x^1}\,\psi_{13} + \left(\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^3} - \frac{x^4}{x^1}\,\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^2}\right)\psi_1 - \\
& - \left(x^1\,\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^1} + \Gamma_1\right)\psi_2 - \left(x^1\,\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^4} + \Gamma_4\right)\psi_3 + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x^2}\,\psi = 0 \\
\mathfrak{L}\,\Gamma_2 \equiv {} & \left(\Gamma_3 - \frac{x^4}{x^1}\,\Gamma_2\right)\psi_{12} - x^1\,\Gamma_1\,\psi_{22} - x^1\,\Gamma_4\,\psi_{23} + \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^3} - \frac{x^4}{x^1}\,\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^2}\right)\psi_1 + \\
& + \left(\Gamma_2 - x^1\,\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^1}\right)\psi_2 - x^1\,\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^4}\,\psi_3 + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x^2}\,\psi = 0 \\
\mathfrak{L}\,\Gamma_3 \equiv {} & \left(\Gamma_3 - \frac{x^4}{x^1}\,\Gamma_2\right)\psi_{13} - x^1\,\Gamma_1\,\psi_{23} - x^1\,\Gamma_4\,\psi_{33} + \left(\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^3} - \frac{x^4}{x^1}\,\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^2}\right)\psi_1 - \\
& - x^1\,\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^1}\,\psi_2 + \left(\Gamma_2 - x^1\,\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^4}\right)\psi_3 + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x^2}\,\psi = 0 \\
\mathfrak{L}\,\Gamma_4 \equiv {} & \frac{1}{x^1}\left(\Gamma_3 - \frac{x^4}{x^1}\,\Gamma_2\right)\psi_{11} - \Gamma_1\,\psi_{12} - \Gamma_4\,\psi_{13} + \left(\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^3} - \frac{x^4}{x^1}\,\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^2}\right)\psi_1 - \\
& - x^1\,\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^1}\,\psi_2 - x^1\,\frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^4}\,\psi_3 + \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x^2}\,\psi = 0.
\end{aligned} \tag{126}$$

Pentru ca spațiul să admită grup de mișcări cu 10 parametri, este necesar ca aceste ecuații care nu conțin derivate de ordin trei ale funcției ψ să fie identic satisfăcute.

Se deduce cu ușurință că verificarea identică a acestui sistem atrage

$$\Gamma_1 = 0,\ \Gamma_2 = Cx^1,\ \Gamma_3 = Cx^4,\ \Gamma_4 = 0, \tag{127}$$

unde C este o constantă arbitrară. Ținînd seama de (115) și (127) rezultă

$$I_1 = C,\ I_2 = C^2;$$

avem astfel

TEOREMA X. *Mobilitatea unui spațiu* A_4 *avînd invarianții* I_1, I_2, *constanți, depinde de cel mult 10 parametri în cazul* $I_2 = I_1^2$ *și de cel mult 9 parametri în cazul* $I_2 \neq I_1^2$.

Primită la redacție la 9 mai 1966

Institutul de Construcții București

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VRĂNCEANU, *Sur les densités associées à un espace* A_2 *avec torsion*. Revue de math. pures et apliquées. VII (1962).
2. I. MATEI, *Asupra unor densități asociate unui spațiu* A_3 *cu torsiune*. St. cerc. mat., **18**, *8*, (1966).
3. K. YANO-S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*. 1953.
4. GH. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială*. vol. I, București, 1962.
5. GH. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*. vol III, Ed. Acad. R.P.R., București, 1964, p. 201–202.

RECENZIE

SILVIU GUIAȘU și RADU THEODORESCU, *Teoria matematică a informației*. Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1966, 228 pag., 8,25 lei.

În 1928 R. V. Hartley publică un articol în care pentru întîia oară în istoria acestei teorii apare noțiunea de cantitate de informație. Acest articol trece neobservat vreme de 20 de ani pentru ca în 1948 Claude F. Shannon să dea o extindere ideii lui Hartley într-o lucrare relativă la teoria matematică a comunicației.

De aici încolo studiile pe tărîmul acestei discipline cunosc o amplă dezvoltare, accentuată îndeosebi în ultima vreme. Explicația acestui lucru o găsim în faptul că conceptele și rezultatele acestei teorii au o largă aplicabilitate în diferite domenii ale științei ca : teoria automatelor finite, cibernetică, mecanică statistică, lingvistică, psihologie etc.

Dat fiind importanța acestui domeniu al matematicii, autorii volumului analizat au căutat să pună la îndemîna cititorului interesat problemele de bază ale teoriei. Acest lucru se reușește printr-o expunere riguroasă și clară a materialului de-a lungul celor două capitole care fac obiectul cărții.

Vom încerca să expunem problemele tratate în volum începînd bineînțeles cu primul capitol.

Aici se prezintă noțiunea matematică de entropie în diferite axiomatizări de dată recentă.

În primele trei paragrafe se caută să se exprime noțiunea de informație cu ajutorul celei de probabilitate.

În primul paragraf se introduce, după C. Shannon, formula entropiei a cîmpului de probabilitate finit $\mathcal{A}_n$ și anume :

$$H_n(\mathcal{A}_n) = H_n(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k, \tag{1}$$

unde $p_1, \ldots, p_k$ sînt probabilitățile corespunzătoare evenimentelor elementare $A_1, \ldots, A_n$ ale lui $\mathcal{A}_n$ iar logaritmul este luat în baza 2.

Se dau apoi proprietățile entropiei $H_n(\mathcal{A}_n)$ care permit să se afirme că entropia, de expresie (1), se poate lua ca măsură a gradului de nedeterminare conținută de cîmpul de probabilitate finit $\mathcal{A}_n$.

În paragraful 2 se prezintă axiomatica lui Hincin plecînd de la proprietățile 1.1.3, 1.1.4 și 1.1.6 (date în § 1 al cărții) ale entropiei.

Al treilea paragraf cuprinde o axiomatică a entropiei (mai simplă din punct de vedere matematic) dată de D. K. Faddeer.

Față de modul de exprimare a noțiunii de informație cu ajutorul celei de probabilitate, mod prezentat în paragrafele amintite mai sus, în următoarele se are în vedere modul de exprimare a noțiunii de probabilitate cu ajutorul celei de informație, situație des întîlnită mai ales în fizică.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1597–1598, BUCUREȘTI, 1966

În paragraful 4 se prezintă sistemul de axiome pentru entropie, care nu recurg la repartiția de probabilități, sistem dat de R. Ingarden și K. Urbanik.

Cel de-al cincilea paragraf conține formula entropiei pentru repartiții continue.

Paragraful 6 cuprinde modul de definire și utilitatea entropiei d-dimensionale introdusă de A. Rényi.

În cel din urmă paragraf al acestui capitol se prezintă ε-entropia (introdusă de A. Kolmogorov și V. Tihomirov), urmîndu-l îndeaproape pe A. Rényi.

Cel de-al doilea capitol cuprinde teoria transmiterii informației pentru alfabete finite, surse staționare, ergodice și canale staționare fără anticipare și cu memorie finită.

După primul paragraf, în care se dau unele leme preliminare, se trece la paragraful 2, unde se analizează sursa de informație.

În cel de-al treilea paragraf se demonstrează teorema lui B. Mc Millan; aceasta arată că dacă sursa de informație $\{A, \mu\}$ este și ergodică, atunci variabila aleatoare $-\frac{1}{n} \log \mu (X_n)$ converge în probabilitate către H cînd $n \to + \infty$.

În paragraful 4 se introduce noțiunea de canal de transmisie constituită, după cum se știe, dintr-o serie de mijloace folosite în scopul asigurării transmiterii informației pentru sursă și destinatar. Această noțiune este definită de tripletul $\{A, \nu_x, B\}$ format din două alfabete A (de intrare), B (de ieșire) și de mulțimea probabilităților condiționate $\{\nu_x \,|\, x \in A^I\}$. În continuare se introduce viteza de transmisie a informației produsă de o sursă $\{A, \mu\}$ prin canalul $\{A, \nu_x, B\}$ cu ajutorul expresiei: $R_\mu (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = H(\mathfrak{X}) - H(\mathfrak{X} \,|\, \mathfrak{Y})$.

Paragraful 5 cuprinde lema fundamentală a lui Feinștein, lemă de o deosebită importanță pentru evaluarea posibilităților transmisiei de informații în condiții optime. Din lemă reiese clar intenția autorului ei de a căuta să scoată din însăși noțiunea de canal maximul pe care-l poate da aceasta. Acest lucru va permite o obținere riguroasă a teoremei de codificare a lui C. Shannon, teoremă expusă în paragraful 6.

În paragraful 7 se analizează afirmația reciprocă a teoremei de codificare a lui C. Shannon.

La sfîrșitul volumului este inclusă o anexă care cuprinde teorema ergodică individuală a lui G. D. Birkhoff și o notă relativă la problema inversibilității macroscopice cuprinzînd o demonstrație simplă a teoremei H a lui L. Boltzman, bazată pe unele date ale teoriei informației.

P. Mocanu

F762

ORSZÁG… DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

TOM. 18, Nr. 10
1966

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

INDEX ALFABETIC

Nr. Pag.

BALÁSZ, M. și vezi JANKÓ, B.: Despre rezolvarea ecuațiilor operaționale neliniare prin metoda iperbolelor tangente generalizate (II) 8 817
BERGTHALER, C. și vezi DRAGOMIRESCU, M.: Asupra continuității optimului unui program liniar 8 1197
BOTEZ, M.: Asupra unei metode de estimație în statistica sistemelor aleatoare cu legături complete 1 75
BUCUR, FLORICA: Asupra unei clase de transformări interioare 2 243
BURGHELEA, DAN: Spații fibrate principale și sisteme Postnikov 4 585
CHIRILĂ, RODICA: Mișcarea supersonică în jurul unui con eliptic prevăzut cu aripi laterale 9 1311
CIORĂNESCU, IOANA: Asupra funcțiilor olomorfe (α)-vectoriale 6 839
CIORĂNESCU, IOANA: Asupra unor proprietăți ale funcțiilor vectoriale slab derivabile 5 763
COCÂRLAN, PAUL: Asupra ecuației integro-diferențiale a lui D. A. Spence din teoria profilelor subțiri cu jet 7 1065
COHN, HARRY: Teoreme limită pentru procese stocastice 7 993
COHN, HARRY: Asupra unei teoreme a lui U. Grenander 9 1347
CREANGĂ-SÎMBOAN, ANCA: Asupra dispersiei produsului de variabile aleatoare independente 9 1339
| CRISTEA, ION, I. | și CRISTEA, VICTORIA: O clasă de mișcări fluide bidimensionale generalizînd mișcarea rotațională plană 1 57
| CRISTEA, ION, I. | și CRISTEA, VICTORIA: Mișcări cu vîrtej constant pentru fluide incompresibile vîscoase 3 457
CRISTEA, VICTORIA și vezi | CRISTEA, ION, I. |: O clasă de mișcări fluide bidimensionale generalizînd mișcarea rotațională plană 1 57
CRISTEA, VICTORIA și vezi | CRISTEA, ION, I. |: Mișcări cu vîrtej constant pentru fluide incompresibile vîscoase 3 457
| CRISTEA, ION, I. | și DINU, LIVIU: Asupra mișcării plane a unui fluid vîscos într-un semispațiu racordat la un canal de alimentare perpendicular pe frontiera sa 5 671
| CRISTEA, ION, I. | și ENE, HORIA, I.: Asupra unor mișcări fluide cu vîrtej constant 5 675
CRUCEANU, ȘT. și ȘCHIOP, ALEXANDRU, I.: O metodă iterativă de rezolvare a ecuației operaționale $x = BF(x)$ 10 1563
DINCULEANU, N.: Reprezentarea integrală a operațiilor liniare (I) 3 349
DINCULEANU, N.: Reprezentarea integrală a operațiilor liniare (II) 4 483
DINU, LIVIU și vezi | CRISTEA, ION, I. |: Asupra mișcării plane a unui fluid vîscos într-un semispațiu racordat la un canal de alimentare perpendicular pe frontiera sa. 5 671

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1599-1602, BUCUREȘTI, 1966

DINU, LIVIU, I. : Asupra mişcării lente, axial simetrice, a unui fluid vîscos într-un semispaţiu racordat la un canal perpendicular pe frontiera sa . 8 1181
DINU, LIVIU, I. : O generalizare a problemei Kapur-Shukla 10 1573
DRĂGAN, I. : Algoritmul lui Beale pentru programe liniare parametrice raţionale 10 1525
DRĂGHICI, I. : Soluţia generală nenegativă a unui sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute ($m < n$) 10 1511
DRAGOMIRESCU, M. şi BERGTHALER, C. : Asupra continuităţii optimului unui program liniar 8 1197
DUCARU-DRAGA, ANA : Asupra mişcării compresibile subsonice în jurul unor profile obţinute prin transformări conforme de un tip particular 9 1357
DUMITRAŞ, VIOREL : Asupra spaţiilor A_n care admit o omotetie 10 1529
DUMITRU, VINCENŢIU şi IONESCU, VASILE : Rezolvarea numerică a unei clase de probleme de programare neliniară 6 933
ENE, HORIA, I. şi vezi CRISTEA, ION, I. : Asupra unor mişcări fluide cu vîrtej constant 5 675
ENE, HORIA, I. : Aplicarea metodei lui A. B. Tayler la o mişcare în canale . . . 10 1567
FOIAŞ, C. : Măsuri spectrale şi semispectrale 1 7
GAIDICI, A. şi vezi JANKÓ, B. : Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale prin metoda lui Cebîşev 8 1139
GEORGESCU, ADELINA, Corecţii de compresibilitate pentru profile von Mises. 2 301
GRECU, EFTIMIE, I. : Cîmpuri de vectori paraleli în spaţii A_3 cu conexiune afină local euclidiene a căror conexiune proiectivă este constantă . . . 2 321
GRECU, EFTIMIE, I : Asupra spaţiilor lui Riemann V_3 cu conexiune constantă de genul doi 3 471
GRECU, EFTIMIE, I. : Cîmpuri de vectori paraleli în spaţii Riemann cu conexiune constantă 6 869
IAMBOR, ILIE, PETRE : Teorema de separare a lui Jordan (Aspecte metodologice) 9 1405
ION, D. B. : Asupra unor proprietăţi ale rădăcinilor algebrelor Jordan de tip A 2 309
IONESCU, VASILE şi vezi DUMITRU, VINCENŢIU : Rezolvarea numerică a unei clase de probleme de programare neliniară 6 933
IORDĂNESCU, RADU : Spaţiile cu conexiune afină constantă ataşate algebrelor $A^p_{m,n}$ 10 1543
ISPAS, C. I. : Extensiunile Riemann simplu armonice $\mathcal{A}_2$ şi spaţiile local euclidiene A_2 . . . . 8 1209
ISTRĂŢESCU, V. I. : Asupra operatorilor cvasicompacţi (II) 2 297
ISTRĂŢESCU, V. I. : Asupra operatorilor regularizabili 8 1155
ISTRĂŢESCU, V. I. : Asupra unor clase de operatori regularizabili (II). . . 9 1287
ISTRĂŢESCU, V. I. : Asupra teoriei subspaţiilor invariante (I) 10 1533
JANKÓ, B. şi BALÁSZ, M. : Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda iperbolelor tangente generalizate (II) 6 817
JANKÓ, B. şi GAIDICI, A. : Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale prin metoda lui Cebîşev 8 1139
JANKÓ, B. şi POP, V. : Asupra metodei iperbolelor tangente aplicate la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare 8 1147
JURCHESCU, M. şi LASCU, A. : Morfisme stricte, categorii cantoriene, functori de completare 2 219
LASCU, A. şi vezi JURCHESCU, M. : Morfisme stricte, categorii cantoriene, functori de completare 2 219
LICA, DIONIS : Despre o nouă generalizare a metodei lui Newton pentru rezolvarea ecuaţiilor funcţionale neliniare 9 1243
LIVOVSCHI, LEON : Asigurarea funcţionării corecte a automatelor cu relee prin asignări speciale 2 183
LIVOVSCHI, LEON : O problemă de sinteză a automatelor finite 8 1097
LIVOVSCHI, LEON : Utilizarea contactelor speciale pentru asigurarea funcţionării corecte 9 1231
LUSZTIG, GHEORGHE : Construcţia fibrărilor universale peste poliedre oarecare 8 1215
MARCOV, N. : Mişcarea unui fluid electroconductor situat în interiorul a doi cilindri coaxiali, sub influenţa unui cîmp magnetic transversal 1 161

MARCUS, FROIM : Asupra sistemelor triple de curbe în spaţiul proiectiv . . . 2 205

MATEI, I. : Asupra unor densităţi asociate unui spaţiu A_3 cu torsiune 8 1195

MATEI, I. : Asupra unor invarianţi în spaţiile A_4 cu torsiune 10 1579

MAZILU, PETRIŞOR : Asupra unei mişcări staţionare tridimensionale cu suprafaţa liberă într-un mediu poros omogen 5 747

MIHĂILESCU, MIHAELA : Unde elasto-vîsco-plastice în bare cilindrice groase 6 829

MITITELU, ŞT. : Asupra sintezei multipolilor $(p-q)$ cu contacte fără repetiţii 6 855

MOLDOVAN, GRIGOR şi RÎP, ILIE : Asupra unei inegalităţi din teoria aproximării funcţiilor de două variabile prin polinoamele lui Bernstein 6 845

MOSCOVICI, HENRI : Asupra unor construcţii geometrice legate de omologia singulară a spaţiilor fibrate 6 909

MUNTEANU, E. : Analiza logică a algoritmilor (I) 8 1113

MUNTEAN, ION : Contribuţii la rezolvarea problemei sintezei schemelor cu contacte şi relee (II) 1 87

MUNTEAN, ION : Asupra teoriei codurilor grupale şi aplicaţiile lor la sinteza multipolilor cu contacte şi relee 9 1247

NADIU, GH. S. : Asupra unor teoreme de recursiune a algoritmilor normali 7 1071

NĂDEJDE, ILEANA : O comparaţie între metoda Fei şi metoda simplex revizuită 7 1039

ONICESCU, OCTAV, Energia informaţională 10 1419

PASCALI, DAN : Reprezentarea polinomului areolar cuaternionic în spaţiul tridimensional 2 239

POP, V. şi vezi JANKÓ, B. : Asupra metodei iperbolelor tangente aplicate la rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare 8 1147

POPESCU, NICOLAE : Elemente de teoria fasciculelor (I) 2 267

POPESCU, NICOLAE : Elemente de teoria fasciculelor (II) 3 407

POPESCU, NICOLAE : Elemente de teoria fasciculelor (III) 4 547

POPESCU, NICOLAE : Elemente de teoria fasciculelor (IV) 5 645

POPESCU, NICOLAE : Elemente de teoria fasciculelor (V) 7 945

POPESCU, RADU : Numărul tipurilor de multipoli $(1-k)$ după produsul dintre subgrupul alternant şi subgrupul negaţiilor. (Subgrupuri ale grupului hiperoctaedric) 6 889

POPESCU, RADU : Numărul tipurilor de funcţii booleene după produsul dintre subgrupul alternant şi subgrupul negaţiilor. (Subgrupuri ale grupului hiperoctaedric) 6 895

POPESCU, VALENTIN : Integrarea în raport cu măsuri cu valori în spaţii vectoriale topologice oarecare 8 1159

POPOVICI, ANDREI : Teoreme suprarelativiste 10 1471

POPOVICI, IULIAN : Derivate generalizate în teoria formală a omologiei . . . 9 1327

RIZESCU, GH. N. şi vezi TEODORESCU, N. N. : Extinderea unei teoreme din teoria suprafeţelor 1 157

RIZESCU, GH. N. şi vezi TEODORESCU, N. N. : O demonstraţie privind tensorul de curbură 4 631

RIZESCU, GH. N. şi vezi TEODORESCU, N. N. : Asupra unei teoreme privind tensorul de curbură 9 1351

RÎP, ILIE şi vezi MOLDOVAN, GRIGOR : Asupra unei inegalităţi din teoria aproximării funcţiilor de două variabile prin polinoamele lui Bernstein 6 845

ROMAN, TIBERIU : Grupurile de simetrii ale ornamentelor 4-dimensionale 1 133

ROSINGER, ELEMÉR : Scufundarea distribuţiilor D'_n în algebre pseudotopologice 5 687

ROŞCA, RADU : Asupra congruenţelor pseudosferice cu pînze focale în corespondenţa echiarie 8 1091

ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Un exemplu de curbă care umple un volum . . . 1 3

ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Asupra analiticităţii funcţiilor de mai multe variabile 3 341

ROŞCULEŢ, MARCEL, N. : Cercetări asupra seriilor trigonometrice V. Sumabilitatea seriei Fourier asociată unei funcţii neintegrabile 9 1259

RUS, IOAN, A. : Cîteva proprietăţi ale zerourilor componentelor soluţiilor unui sistem de două ecuaţii diferenţiale neliniare de ordin I 10 1549

RUS, T. : Interpretator pentru maşina DACICC—1 . . . . 6 799

SĂNDULESCU, ŞERBAN : Consideraţii asupra mişcărilor cvasisonice 8 1201

SIMIONESCU, CLAUDIA şi vezi SIMIONESCU, CORNELIU : Asupra transformărilor punctuale de prima speţă între plane proiective cu tensor pătratic Π_{ij} constant 5 641

SIMIONESCU, CORNELIU şi SIMIONESCU, CLAUDIA : Asupra transformărilor punctuale de prima speţă între plane proiective cu tensor pătratic II_{ij} constant 5 641
SOFONEA, LIVIU : Asupra concepţiei cuantice-relativiste a fotonului 9 1371
STAVRE, PETRE : Asupra contactului a două curbe ale unui spaţiu cu conexiune afină L_n 6 879
STAVRE, PETRE : Asupra paralelismului vectorilor în lungul curbelor unui spaţiu cu conexiune afină L_n şi formulelor lui Hlavaty 7 1079
STĂNAŞILĂ, OCTAVIAN : Cîteva observaţii asupra topologizării modulelor 5 681
STOKA, MARIUS, I. : Determinarea subgrupurilor grupului 3 397

$$X_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + 2x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^3}, \ (\alpha = 1, 2), \ X_3 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \ X_4 f =$$

$$= x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 3 \quad 397$$

STOKA MARIUS, I. : Grupurile de olonomie ale spaţiilor A_3 . . . . . . 4 537
STOKA, MARIUS, I. : Asupra grupurilor izomorfe cu grupul transformărilor ortogonale din planul euclidian 6 771
STOKA, MARIUS, I. : Asupra funcţiei de repartiţie a unei repartiţii multinomiale 9 1281
SUCIU, I. : Şiruri de interpolare şi structura spaţiului idealelor maximale ale lui H^∞ 7 1029
SUSEA, ANDREI, A. : O nouă problemă la limită pentru ecuaţia căldurii în două variabile independente 5 731
ŞABAC, MIHAELA : Asupra corpului funcţiilor raţionale al unei varietăţi algebrice 2 235
ŞCHIOP, ALEXANDRU, I. : Legătura dintre problema variaţională de bază pentru funcţionalele pătratice şi problema minimei abateri de la resurse mărginite 8 1193
ŞCHIOP, ALEXANDRU, I. şi vezi CRUCEANU, ŞT. : O metodă iterativă de rezolvare a ecuaţiei operaţionale $x = R\,F(x)$ 10 1563
TELEMAN, C. : Asupra spaţiilor cu conexiune afină constantă şi local euclidiană 6 783
TELEMAN, NICOLAE : O definiţie geometrică a unor forme ale lui André Weil ce se pot asocia unei conexiuni infinitezimale 5 753
TELEMAN, SILVIU : Analiză armonică în algebre regulate 10 1421
TEODORESCU, N. N. şi GH. N. RIZESCU, Extinderea unei teoreme din teoria suprafeţelor 1 157
TEODORESCU, N. N. şi RIZESCU, GH. N. : O demonstraţie a unei teoreme privind tensorul de curbură 4 631
TEODORESCU, N. N. şi RIZESCU, GH. N. : Asupra unei teoreme privind tensorul de curbură 9 1351
THEODORESCU, RADU : Asupra modelării Monte-Carlo a modelelor pentru învăţare de tip Bush-Mostellér 3 387
TEODOR LIVIU, Distanţa euclidiană a unei matrice la mulţimea matricilor singulare 2 315
TODOR, LIVIU : Asupra metodei lui Jacobi de rezolvare a problemei vectorilor şi valorilor proprii ale unei matrici simetrice. 5 637
TOKACI, EMIL : Asupra ecuaţiilor mecanicii analitice pentru cazul sistemelor materiale percutate 8 1129
TRANDAFIR, RODICA : Lanţuri cu legături complete liniare omogene. . . . 7 1057
UNGUREANU, ELENA : Mişcări ale fluidelor în medii poroase neomogene . . 9 1305
VERONA, ANDREI : Asupra unor spaţii fibrate universale 6 919
VOICULESCU, DAN : O ecuaţie privind corpurile convexe şi aplicaţii la corpurile asociate unui corp convex 5 741
VOICULESCU, GEORGETA, I. : Observaţii asupra variantelor metodei de aproximaţie a lui S. A. Ciaplîghin 10 1555
ZIDĂROIU, CORNEL : Asupra unui model de transport în mai multe etape 9 1365

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

NOTĂ CĂTRE AUTORI

Autorii sînt rugați să înainteze articolele, notele și recenziile dactilografiate la două rînduri. Tabelele vor fi dactilografiate pe pagini separate, iar diagramele vor fi executate în tuș, pe hîrtie de calc. Tabelele și ilustrațiile vor fi numerotate cu cifre arabe. Figurile din planșe vor fi numerotate în continuarea celor din text. Se va evita repetarea acelorași date în text, tabele și grafice. Explicația figurilor va fi dactilografiată pe pagină separată. Bibliografia se va da în ordinea citărilor în text. Numele autorilor va fi precedat de inițială. Titlurile revistelor citate în bibliografie vor fi prescurtate conform uzuanțelor internaționale.

Autorii au dreptul la un număr de 50 de extrase, gratuit. Responsabilitatea asupra conținutului articolelor revine în exclusivitate autorilor.

Corespondența privind manuscrisele, schimbul de publicații etc. se va trimite pe adresa comitetului de redacție, str. Mihai Eminescu nr. 47, București.

62

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

- CABIRIA ANDREIAN-CAZACU, C. CONSTANTINESCU, M. JURCHESCU, **Probleme moderne de teoria funcţiilor**, 1965, 311 p., 15 lei.
- ROMULUS CRISTESCU şi GHEORGHE MARINESCU, **Unele aplicaţii ale teoriei distribuţiilor**, 1966, 198 p., 6,75 lei.
- N. DINCULEANU, **Integrarea pe spaţii local compacte**, 1965, 592 p., 26 lei.
- ST. I. GHEORGHIŢĂ, **Metode matematice în hidrogazodinamică subterană**, 1966, 582 p., 31 lei.
- S. GUIAŞU şi R. THEODORESCU, **Teoria matematică a informaţiei**, 1966, 227 p., 8,25 lei.
- A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale**, 1963, 484 p., 21,50 lei.
- LEON LIVOVSKI, **Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice**, 1963, 352 p., 18,50 lei.
- SOLOMON MARCUS, **Gramatici şi automate finite**, 1964, 256 p., 10 lei.
- N. MIHĂILEANU, **Geometrie diferenţială neeuclidiană**, 1964, 307 p., 13 lei.
- TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă. Teoria corespondenţei**, 1963, 232 p., 10,50 lei.
- O. ONICESCU, **Nombres et systèmes aleatoires**, 1964, 283 p., 21,50 lei.
- O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU şi R. THEODORESCU, **Seminar de funcţii sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 1963, 123 p., 4,25 lei.
- P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, 669 p., 38 lei.
- SERGIU RUDEANU, **Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene**, 1963, 159 p., 5,75 lei.
- S. STOILOW, **Œuvre mathématique**, 1964, 417 p., 30 lei.

ST. CERC. MAT., TOM. 18, NR. 10, P. 1417—1602, BUCUREŞTI, 1966

I. P. „Informaţia" – c. 3786

43 831

Lei 12.